

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

i) Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0, \text{ με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$$

ii) Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία του επιπέδου.

Δηλαδή μία εξίσωση 1^{ου} βαθμού ως προς x, y παριστάνει ευθεία όταν δεν μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές των αγνώστων.

Παρατηρήσεις

↳ Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ στην ειδική περίπτωση που:

i) $A = 0$ αναπαριστά ευθεία παράλληλη στον $x'x$

ii) $B = 0$ αναπαριστά ευθεία παράλληλη στον $y'y$

↳ Για να βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$, λύνουμε την εξίσωση ως προς y ώστε να τη φέρουμε στην μορφή $y = \lambda x + \beta$.

Τότε: $\lambda = -\frac{A}{B}$ εφόσον $B \neq 0$.

Εφαρμογή 1:

Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x + (\lambda^2 - 1)y + (\lambda + 3) = 0$ παριστάνει ευθεία.

Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον $x'x$ και πότε είναι παράλληλη στον $y'y$;

Διερεύνηση της παραμετρικής εξίσωσης $Ax+By+\Gamma=0$

Αν μηδενίσουμε ταυτόχρονα τους συντελεστές των x και y , θα βρούμε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ η εξίσωση δεν αναπαριστά ευθεία.

$$A = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1$$

$$B = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

Τα A, B μηδενίζονται ταυτόχρονα για $\lambda = 1$.

Άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$ η εξίσωση αναπαριστά ευθεία.

- ♦ Για $A = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ (αφού το 1 απορρίπτεται) η εξίσωση αναπαριστά ευθεία παράλληλη στον $x'x$. Είναι η: $-y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$
- ♦ Για $B = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ (αφού το 1 απορρίπτεται) η εξίσωση αναπαριστά ευθεία παράλληλη στον $y'y$. Είναι η: $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Εφαρμογή 2:

Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών:

$$\varepsilon_1: 2x + y - 8 = 0 \text{ και } \varepsilon_2: 4x + 2y - 12 = 0$$

Μεσοπαράλληλη δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

- Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία A, B στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.
- Βρίσκουμε το μέσο M του τμήματος AB .
- Η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ διέρχεται από το M και έχει το ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Εφαρμογή 3:

Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ οι ευθείες: $(2\alpha^2 + \alpha + 1)x - (\alpha^2 - \alpha + 1)y - (\alpha^2 + 2\alpha) = 0$ **(1)**, διέρχονται από το ίδιο σημείο

Παραμετρική ευθεία διερχομένη από σταθερό σημείο

- Δίνουμε δύο τυχαίες τιμές στην παράμετρο και βρίσκουμε τις αντίστοιχες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
- Βρίσκουμε το σημείο τομής M των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
- Δείχνουμε ότι οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την παραμετρική εξίσωση για κάθε τιμή του α

Ασκήσεις για εμπέδωση:

1. Η κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες (1,2) , η ευθεία του ύψους ΒΕ έχει εξίσωση $\epsilon_1: x+3y=3$ και η ευθεία της διαμέσου ΓΜ έχει εξίσωση $\epsilon_2: x-y-11=0$. Να βρείτε τις δύο άλλες κορυφές του
2. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(x+2y-5)+\lambda(3x-2y+1)=0$ (1) παριστάνει ευθεία. Στη συνέχεια να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
Τέλος να βρείτε ποια από τις παραπάνω ευθείες της εξίσωσης (1) :
 - i) Διέρχεται από το σημείο Α(3,-1)
 - ii) Είναι παράλληλη στον $x'x$
 - iii) Είναι παράλληλη στον $y'y$
 - iv) Είναι παράλληλη στην ευθεία $4x+3y-5=0$
 - v) Είναι κάθετη στην ευθεία $x+3y+7=0$

Παρατήρηση

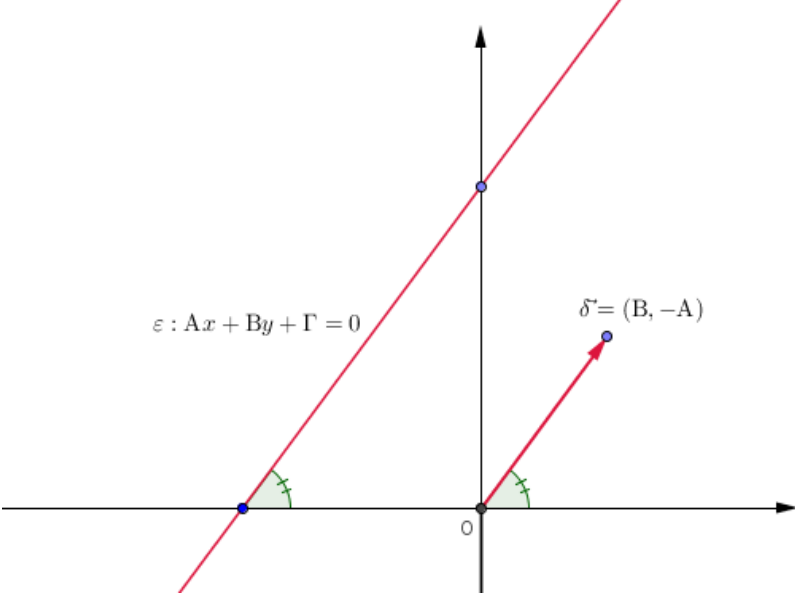
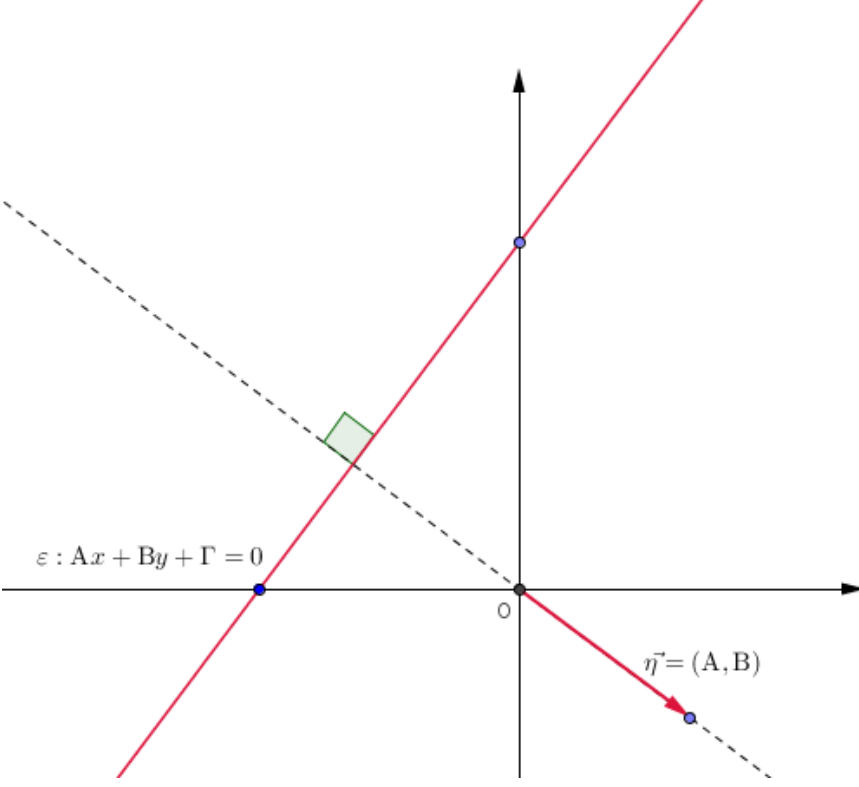
Οι εξισώσεις με βαθμό ως προς x, y μεγαλύτερο του πρώτου, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, παριστάνουν καμπύλες γραμμές . Είναι δυνατόν όμως να παριστάνουν οικογένεια ευθειών.

Εφαρμογή 4:

Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις

- α) $xy = 0$ β) $x^2 - 3x + 2 = 0$ γ) $|x - 1| - |y| = 0$ δ) $x^2 - 4y^2 = 0$
ε) $x^2 - 4y^2 - 2x + 12y - 8 = 0$

Πώς βρίσκουμε ένα παράλληλο και ένα κάθετο διάνυσμα σε ευθεία

Ένα διάνυσμα <u>παράλληλο</u> στην ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ είναι το $\vec{\delta}=(B,-A)$	
Ένα διάνυσμα <u>κάθετο</u> στην ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ είναι το $\vec{\eta}=(A,B)$	

Εφαρμογή 5:

Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: x = 1$ $\varepsilon_2: x + y - 1 = 0$

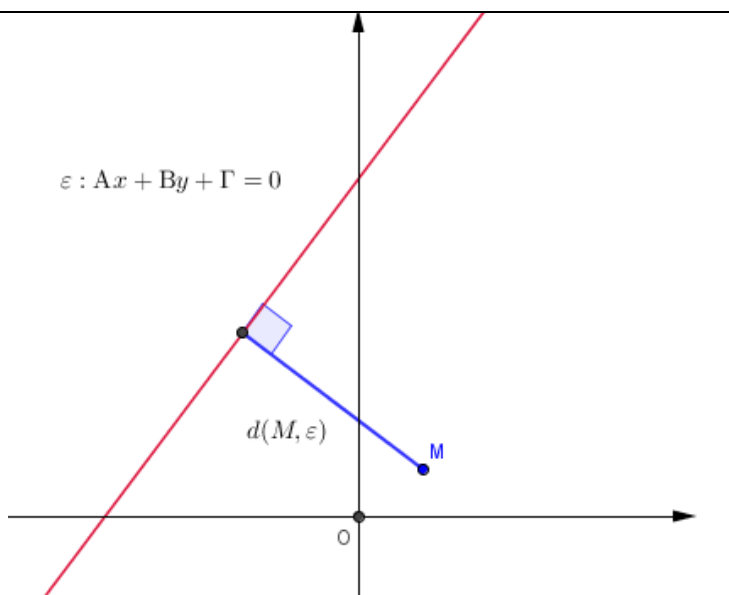
Εύρεση της Γωνίας δύο ευθειών

- Παίρνουμε δύο διανύσματα παράλληλα προς τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.
- Η γωνία των διανυσμάτων είναι και η γωνία των ευθειών

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

Η απόσταση του σημείου
 $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία
 $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$
συμβολίζεται $d(M, \varepsilon)$ και
δίνεται από τον τύπο:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Εφαρμογή 6:

Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $M(2,-1)$ από την ευθεία $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

Φέρνουμε την ευθεία στην μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ και εφαρμόζουμε τον τύπο της απόστασης

Εφαρμογή 7:

Να βρεθεί το σημείο του άξονα x' που ισαπέχει από την αρχή των αξόνων και από την ευθεία $\epsilon: 3x - 4y - 24 = 0$

Εφαρμογή 8:

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την αρχή $O(0,0)$ και απέχουν από το σημείο $A(1,2)$ απόσταση ίση με 1

Εφαρμογή 9:

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από το σημείο $A(-2,1)$ και απέχει από την αρχή των αξόνων 2 μονάδες

Εφαρμογή 10:

Να βρείτε την απόσταση των ευθειών $\epsilon_1: 4x - 6y + 5 = 0$ και $\epsilon_2: y = \frac{2}{3}x + 1$

Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο στη μία ευθεία και βρίσκουμε την απόστασή του από την δεύτερη ευθεία.
