

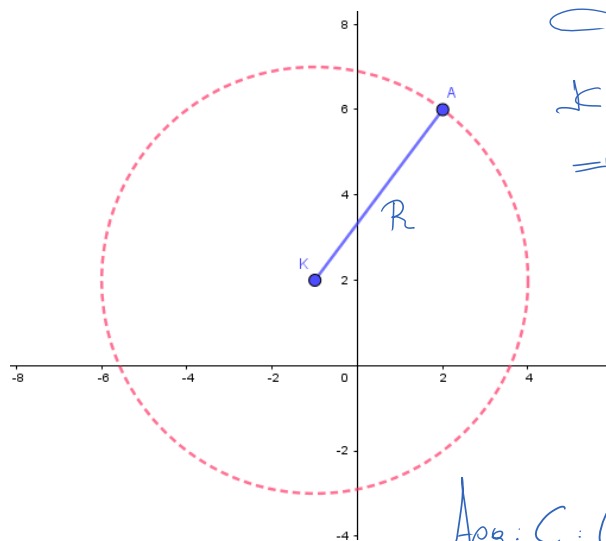
Κύκλος Σημειώσεις μεθοδολογίας 2

Εύρεση εξίσωσης κύκλου.

Άσκηση 1

Βρείτε την εξίσωση του κύκλου C όταν:

- 1) Έχει κέντρο K(-1,2) και διέρχεται από το A(2,6)



Λύση:

K(-1,2) κέντρο του C $\Rightarrow$

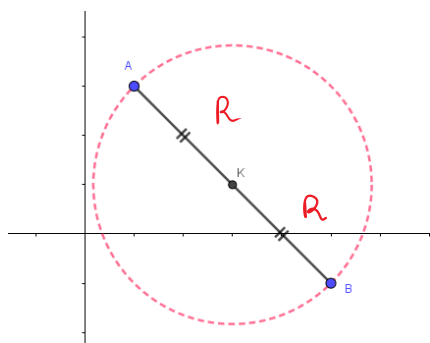
$$\Rightarrow C: (x-x_K)^2 + (y-y_K)^2 = R^2.$$

Εύρεση Ακτίνας R:

$$R = (KA) = \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Άρα: } C: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

- 2) Έχει διάμετρο AB με A(1,3) και B(5,-1)



• Εύρεση κέντρου K του C.

K μέσο διαμέτρου AB $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

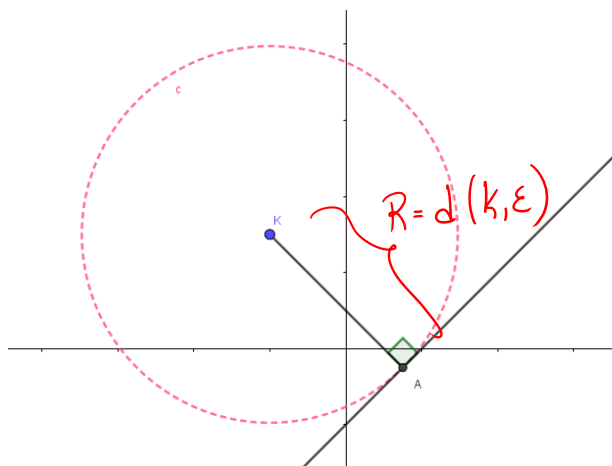
Άρα K(3,1)

• Εύρεση ακτίνας R του C

$$R = (KA) = \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Άρα } C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$$

3) Έχει κέντρο το $K(-2,3)$ και εφάπτεται στην $\varepsilon: x-y-2=0$



ε : εφάπται στον $C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d(K, \varepsilon) = R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|x_K - y_K - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|-2 - 3 - 2|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = 7/\sqrt{2}$$

Άρα $C: (x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = R^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow C: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 49/2$$

Άσκηση 2

Βρείτε την εξίσωση του κύκλου C όταν:

- 1) Διέρχεται από τα $A(3,1)$, $B(-1,3)$ και το κέντρο του ανήκει στην $\varepsilon: 3x-y-2=0$

1ος τρόπος λύσης (αλγεβρικός):

Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου C , και R η ακτίνα.

Τότε:

$$\left. \begin{array}{l} A(3,1) \in C \\ B(-1,3) \in C \\ K(x_0, y_0) \in (\varepsilon) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (3-x_0)^2 + (1-y_0)^2 = R^2 \\ (-1-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = R^2 \\ 3x_0 - y_0 - 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Από (1), (2): } (3-x_0)^2 + (1-y_0)^2 &= (x_0+1)^2 + (3-y_0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cancel{9} + \cancel{x_0^2} - 6x_0 + \cancel{1} + \cancel{y_0^2} - 2y_0 &= \cancel{x_0^2} + \cancel{1} + 2x_0 + \cancel{9} + \cancel{y_0^2} - 6y_0 \\ \Leftrightarrow 8x_0 - 4y_0 &= 0 \Leftrightarrow y_0 = 2x_0 \quad (4) \end{aligned}$$

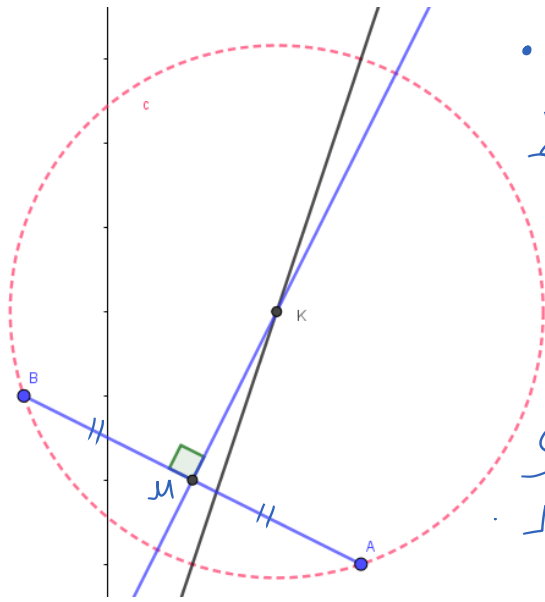
$$(3) \xrightarrow{(4)} 3 \cdot x_0 - 2x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Τότε $y_0 = 4$ και:

$$\text{Αντικαθιστώντας στην (1): } (3-2)^2 + (1-4)^2 = R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{10}$$

$$\text{Άρα } C: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$$

2ος Τρόπος (Γεωμετρικός):



• Κύκλου κέντρου $K(x_0, y_0)$

$$K \in (l): 3x - y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_0 - y_0 - 2 = 0 \quad (1)$$

$(KA) = (KB) = R \Rightarrow K$: ανήκει
στη μεσοκάθετο σ του AB.

Βρούμε μεσοκάθετο σ :

$$M \in \sigma \cap AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3+1}{2} = 1 \\ y_M = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\vec{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{2-1}{1-3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{AM} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{AM} = 2$$

$$\text{Από (1): } y - y_M = \vec{AM} (x - x_M) \Leftrightarrow y - 2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x \quad (2)$$

$$\text{Βρούμε: } \begin{cases} K \in (l) \\ K \in (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_0 - y_0 - 2 = 0 \\ y_0 = 2x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 4 \end{cases}$$

$$\text{Από } K(2, 4) \text{ και } R = (KA) = \sqrt{(2-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$C: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$$

2) Διέρχεται από το $A(1,2)$ και εφάπτεται στην $\varepsilon: 2x-3y-18=0$ στο σημείο της $B(3,-4)$

1ος τρόπος (αλγεβρικός):

Έστω $K(x_0, y_0), R$ κέντρο, ακτίνα του C

$$\left. \begin{array}{l} A(1,2) \in C \\ B(3,-4) \in C \\ d(K, \varepsilon) = R \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (1-x_0)^2 + (2-y_0)^2 = R^2 \\ (3-x_0)^2 + (-4-y_0)^2 = R^2 \\ \frac{|2x_0 - 3y_0 - 18|}{\sqrt{4+9}} = R \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$

Περίπτωση
Πρόξενος...

2ος Τρόπος (γεωμετρικός):

• $A, B \in C \Rightarrow (KA) = (KB) \Rightarrow K$: ανήκει στο μέσο του AB .

$$(\gamma): y - y_M = \lambda_J (x - x_M)$$

$$M \in \text{μέσο } AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_M = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \perp AB \Rightarrow \lambda_J \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_J = \frac{1}{3} \\ \lambda_{AB} = \frac{-4-2}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (\gamma): y + 1 = \frac{1}{3} (x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 3y + 3 = x - 2$$

$$\Leftrightarrow x - 3y - 5 = 0 \quad (1)$$

• $KB \perp \varepsilon$ (ακτίνα κάθετη στην εφ' ου στο σ. επαφής) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow K \in \eta$: ο ηος(η) η ευθεία κάθετη στην (ε) στο $B(3,-4)$

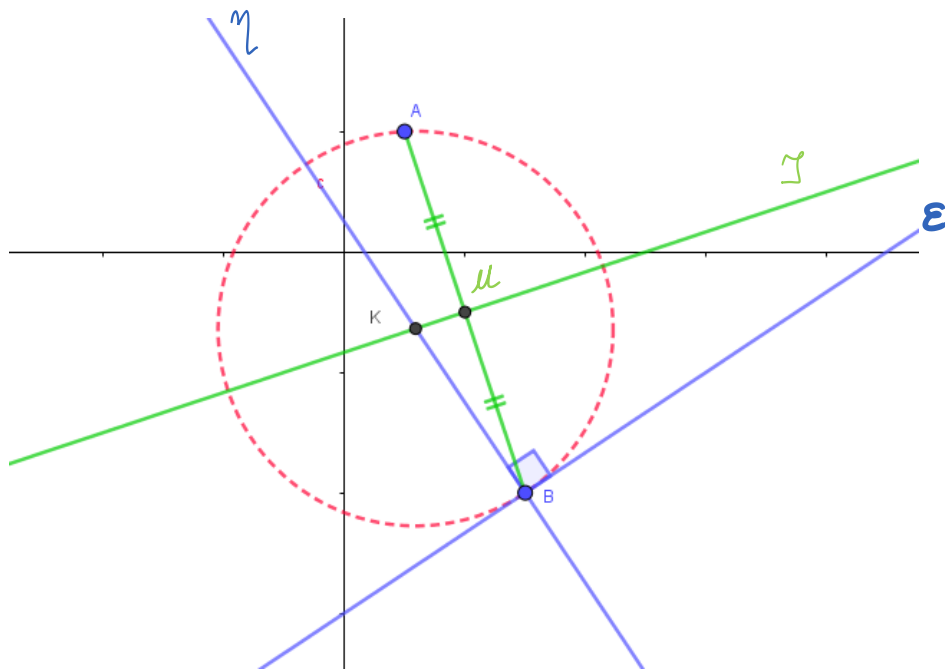
$$(\eta): y - y_B = \lambda_\eta (x - x_B)$$

$$\eta \perp \varepsilon \Rightarrow \lambda_\eta \lambda_\varepsilon = -1$$

$$(\varepsilon): 2x - 3y - 18 = 0 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{-A}{B} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_\eta \lambda_\varepsilon = -1 \\ \lambda_\varepsilon = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_\eta = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Αρ. } (\varepsilon): y + 4 = -\frac{3}{2} (x - 3) \Leftrightarrow 2y + 8 = -3x + 9 \Leftrightarrow 3x + 2y - 1 = 0 \quad (2)$$



Die Geraden von K sind u. u. v. zu best.:

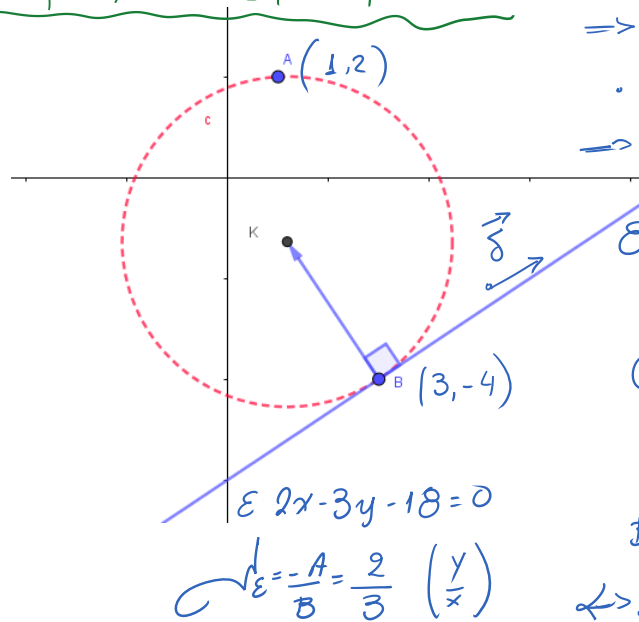
$$\begin{cases} x_0 - 3y_0 - 5 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3y_0 + 5 \\ 9y_0 + 15 + 2y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3y_0 + 5 \\ 11y_0 = -14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0 = -14/11 \\ x_0 = 13/11 \end{cases} \quad \text{Also } K \left(\frac{13}{11}, -\frac{14}{11} \right)$$

$$\begin{aligned} R = (KA) &= \sqrt{\left(\frac{13}{11} - 1\right)^2 + \left(-\frac{14}{11} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(\frac{36}{11}\right)^2} = \frac{1}{11} \sqrt{2^2 + 36^2} = \\ &= \frac{2}{11} \sqrt{325} = \frac{2 \sqrt{13 \cdot 25}}{11} = \frac{10 \sqrt{13}}{11} \end{aligned}$$

$$\text{Also } C: \left(x - \frac{13}{11}\right)^2 + \left(y + \frac{14}{11}\right)^2 = \frac{1300}{121}$$

3^{ος} Ψήφος (η συνυπόθεση)!



$$\bullet A(1, 2) \in C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = R^2 \quad (1)$$

$$\bullet B(3, -4) \in C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 - x_0)^2 + (-4 - y_0)^2 = R^2 \quad (2)$$

Λού :

$$\vec{BK} \perp E \Rightarrow \vec{BK} \cdot \vec{\delta} = 0$$

$$\text{Οτι } \vec{\delta} \parallel E \cdot \vec{\delta} = (3, 2)$$

$$\vec{BK} = (x_0 - 3, y_0 + 4)$$

$$\vec{BK} \cdot \vec{\delta} = 0 \Rightarrow 3(x_0 - 3) + 2(y_0 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_0 - 9 + 2y_0 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_0 + 2y_0 = 1 \quad (3)$$

Από (1), (2):

$$(1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = (3 - x_0)^2 + (-4 - y_0)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + x_0^2 - 2x_0 + 4 + y_0^2 - 4y_0 = 9 + x_0^2 - 6x_0 + 16 + y_0^2 + 8y_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x_0 - 12y_0 - 20 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 3y_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 3y_0 + 5 \quad (4)$$

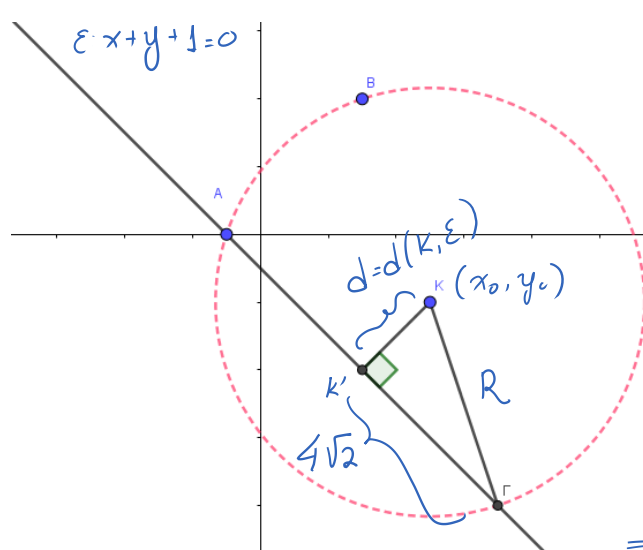
$$(3) \xrightarrow{(4)} 3(3y_0 + 5) + 2y_0 = 1 \Leftrightarrow 9y_0 + 15 + 2y_0 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_0 = \frac{-14}{11} \quad \text{Αρα} \quad x_0 = 13/11$$

$$\text{Λού} \quad R = (KA) = \dots$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα $A(-1,0)$, $B(3,4)$ και αποτέμνει από την ευθεία $\varepsilon: x+y+1=0$ χορδή μήκους $8\sqrt{2}$



Φέρνω $KK' \perp \varepsilon$.

Πθ στο $KK' \Gamma$:

$$(KK')^2 + (K'\Gamma)^2 = (K\Gamma)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow d^2(K, \varepsilon) + (4\sqrt{2})^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{|x_0 + y_0 + 1|}{\sqrt{2}} \right)^2 + 32 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{(x_0 + y_0 + 1)^2}{2} + 32 \quad (1)$$

Επίσης: $A(-1,0) \in C \Rightarrow (-1-x_0)^2 + y_0^2 = R^2 \quad (3)$

$B(3,4) \in C \Rightarrow (3-x_0)^2 + (4-y_0)^2 = R^2$

$$\Rightarrow (1+x_0)^2 + y_0^2 = (3-x_0)^2 + (4-y_0)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + x_0^2 + 2x_0 + y_0^2 = 9 + x_0^2 - 6x_0 + 16 + y_0^2 - 8y_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x_0 + 8y_0 = 24 \Leftrightarrow x_0 + y_0 = 3 \Leftrightarrow y_0 = 3 - x_0 \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} R^2 = \frac{(x_0 + 3 - x_0 + 1)^2}{2} + 32 = 40 \Rightarrow R = \sqrt{40}$$

$$(3) \xrightarrow{(2)} (x_0 + 1)^2 + y_0^2 = R^2 \xrightarrow{R=\sqrt{40}} (x_0 + 1)^2 + (3 - x_0)^2 = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + 1 + 2x_0 + 9 + x_0^2 - 6x_0 = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 - 30 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 5 \quad \text{ή} \quad x_0 = -3$$

Για $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow K_1(5, -2), R_1 = \sqrt{40}$

Για $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow K_2(-3, 6), R_2 = \sqrt{40}$

Άρα: $C_1: (x-5)^2 + (y+2)^2 = 40$ και $C_2: (x+3)^2 + (y-6)^2 = 40$