

Σχετική θέση ευθείας-κύκλου

Αν ζητείται η σχετική θέση ευθείας (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, $|A| + |B| \neq 0$ και κύκλου

C με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα R :

Υπολογίζουμε την απόσταση $d(K, \varepsilon)$ του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία (ε).

- Αν $d(K, \varepsilon) < R$, η ευθεία (ε) και ο κύκλος C τέμνονται σε δύο σημεία. Οι συνεταγμένες των 2 σημείων τομής είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} Ax + By + \Gamma = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$
- Αν $d(K, \varepsilon) = R$ η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C . Οι συνεταγμένες του σημείου επαφής είναι η λύση του συστήματος:

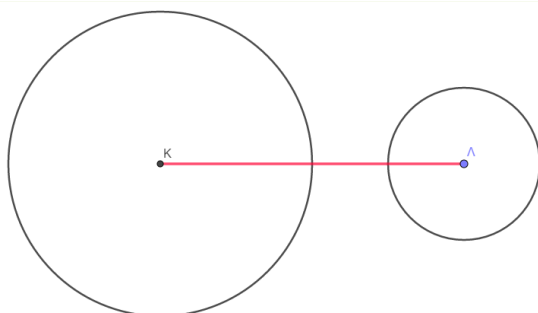
$$\begin{cases} Ax + By + \Gamma = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$
- Αν $d(K, \varepsilon) > R$, η ευθεία (ε) και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα των εξισώσεών τους δεν έχει πραγματική λύση.

Σχετική θέση δύο κύκλων και πλήθος κοινών εφαπτομένων κατά περίπτωση

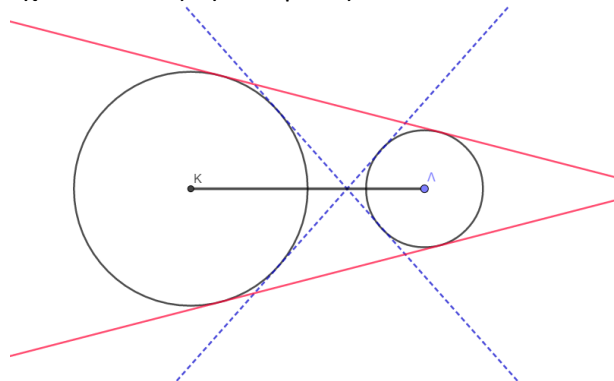
Αν ζητείται η σχετική θέση δύο κύκλων C_1, C_2 με κέντρα K, Λ και ακτίνες R, r αντίστοιχα.

Υπολογίζουμε την απόσταση $(K\Lambda)$ των κέντρων των κύκλων.

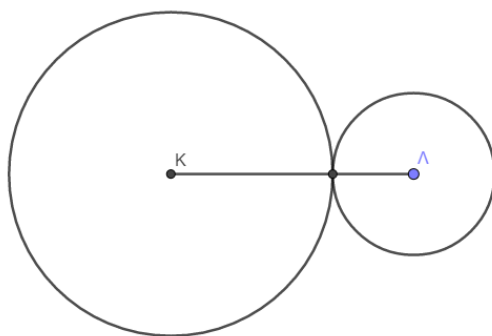
- Αν $(K\Lambda) > R + r$, οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου.



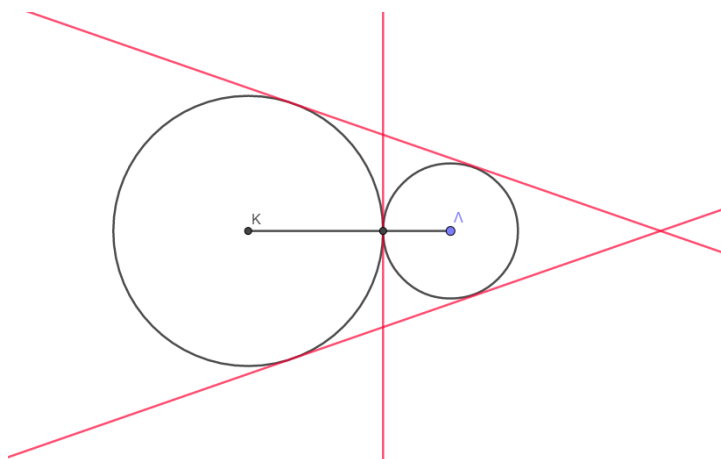
Έχουν 4 κοινές εφαπτομένες.



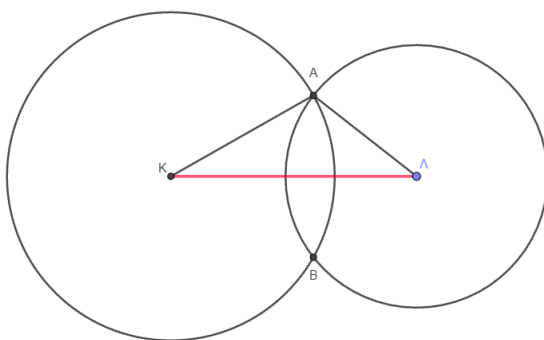
- Αν $(KL) = R + r$, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



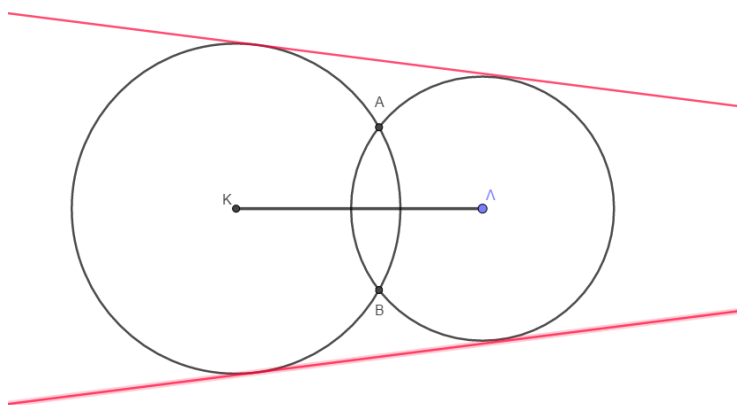
Έχουν 3 κοινές εφαπτομένες.



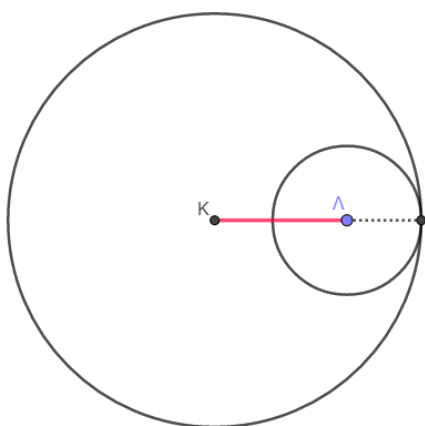
- Αν $|R - r| < (KL) < R + r$, οι κύκλοι τέμνονται.



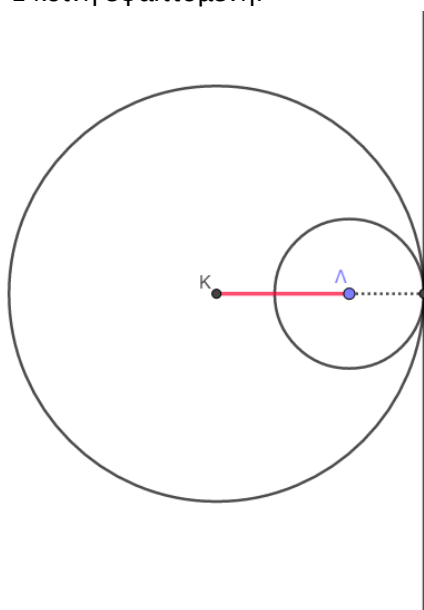
Έχουν 2 κοινές εφαπτομένες.



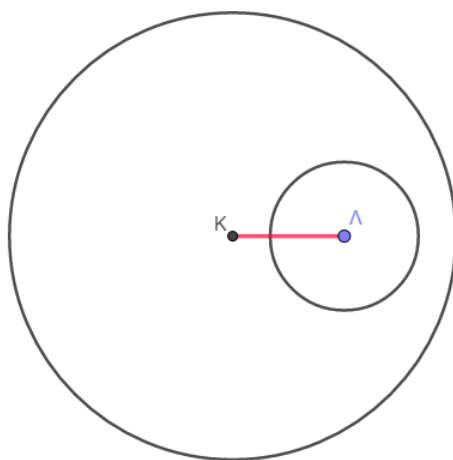
- Αν $(KA) = |R - r|$, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



Έχουν 1 κοινή εφαπτομένη.



- Αν $(KA) < |R - r|$, οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας στο εσωτερικό του άλλου.



Δεν έχουν κοινές εφαπτομένες.

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί ότι η ευθεία (η): $3x - 4y + 15 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο

$$C: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

Λύση:

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(2, -1)$ και ακτίνα $R = 5$.

$$d(K, \eta) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Αφού $d(K, \eta) = R$ η ευθεία (η) εφάπτεται στον κύκλο C .

Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 15 = 0 & (1) \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{4y - 15}{3}$$

Αντικαθιστούμε:

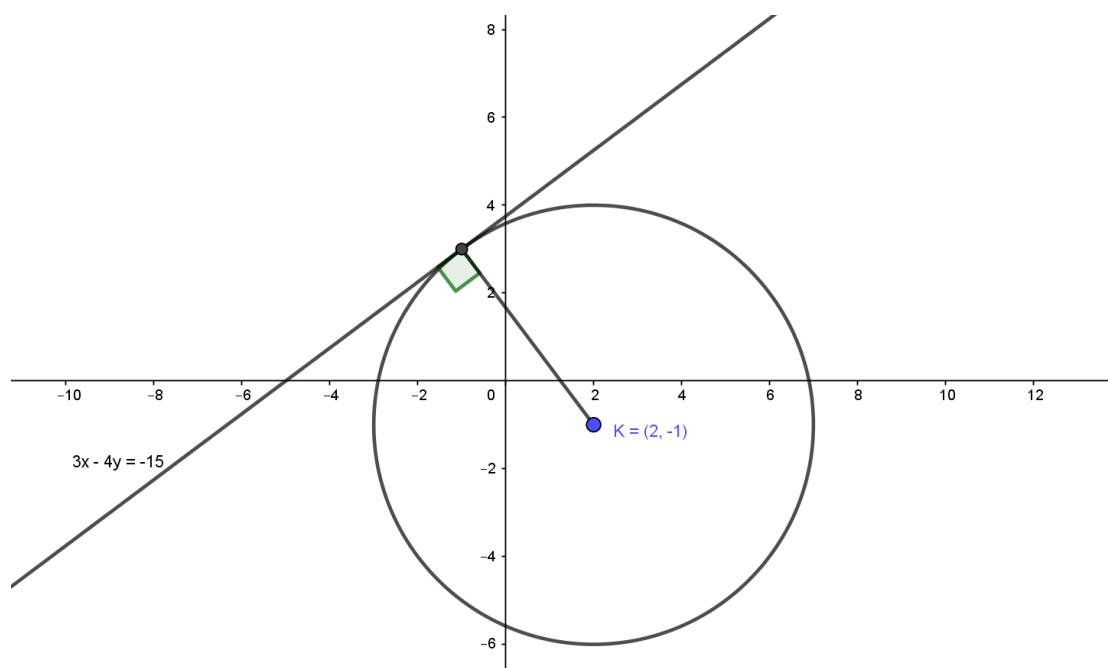
$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{4y - 15}{3} - 2\right)^2 + (y + 1)^2 = 25 \Leftrightarrow \left(\frac{4y - 21}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (4y - 21)^2 + 9(y + 1)^2 = 225 \Leftrightarrow 16y^2 - 168y + 441 + 9y^2 + 18y + 9 - 225 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25y^2 - 150y + 225 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow y = 3$$

$$\text{Τότε } x = \frac{4y - 15}{3} = \frac{4 \cdot 3 - 15}{3} = -1$$

Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής είναι $(-1, 3)$



Άσκηση 2

Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1: (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$C_2: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

A. Βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων.

B. Βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των δύο κύκλων.

Λύση:

A.

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα $R = 1$.

Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(-2,1)$ και ακτίνα $r = 2$.

Η απόσταση $(K\Lambda)$ των κέντρων των δύο κύκλων είναι:

$$(K\Lambda) = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$R + r = 3$$

Άρα: $(K\Lambda) = \sqrt{10} > \sqrt{9} = 3 = R + r$, οπότε οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου

B.

Βρίσκουμε τις κατακόρυφες εφαπτομένες των δύο κύκλων.

Για τον κύκλο C_1 είναι οι: $(\varepsilon_1): x = x_K + R \Leftrightarrow x = 2$

και $(\varepsilon_2): x = x_K - R \Leftrightarrow x = 0$

Για τον κύκλο C_2 είναι οι: $(\eta_1): x = x_\Lambda + r \Leftrightarrow x = 0$

και $(\eta_2): x = x_\Lambda - r \Leftrightarrow x = -4$

Η $(\varepsilon): x = 0$ είναι κοινή κατακόρυφη εφαπτομένη των δύο κύκλων.

Κάθε άλλη κοινή εφαπτομένη (εφόσον υπάρχει) θα έχει εξίσωση της μορφής

$(\zeta): y = \lambda x + \beta$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ και θα ισχύουν:

$$\begin{cases} d(K, \zeta) = R \\ d(\Lambda, \zeta) = r \end{cases}$$

$$d(K, \zeta) = R \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 1 - 0 + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |\lambda + \beta| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \quad (1)$$

$$d(\Lambda, \zeta) = r \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot (-2) - 1 + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |-2\lambda - 1 + \beta| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \quad (2)$$

$$(2) \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} |-2\lambda - 1 + \beta| = 2|\lambda + \beta| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\lambda - 1 + \beta = 2(\lambda + \beta) \text{ ή } -2\lambda - 1 + \beta = -2(\lambda + \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda + \beta + 1 = 0 \text{ ή } \beta = 1/3$$

- Για $4\lambda + \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = -1 - 4\lambda$

Αντικαθιστώ στην (1):

$$|\lambda - 1 - 4\lambda| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow |3\lambda + 1| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = \frac{3}{4}$$

- Για $\beta = \frac{1}{3}$

Αντικαθιστώ στην (1):

$$|\lambda + \frac{1}{3}| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

Τελικά οι κοινές εφαπτομένες είναι:

- $(\varepsilon): x = 0$
- Για $\lambda = 0$ και $\beta = -1 - 4\lambda = -1$: $(\zeta_1): y = -1$
- Για $\lambda = \frac{3}{4}$ και $\beta = -1 - 4 \cdot \frac{3}{4} = -4$: $(\zeta_2): y = \frac{3}{4} \cdot x - 4$
- Για $\beta = \frac{1}{3}$ και $\lambda = \frac{4}{3}$: $(\zeta_3): y = \frac{4}{3} \cdot x + \frac{1}{3}$

