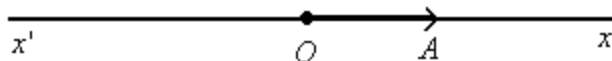


ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Άξονας : είναι μία ευθεία $x'x$ πάνω στην οποία έχει οριστεί ένα σημείο O (αρχή) και ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{OA}$ της ημιευθείας Ox
Η ημιευθεία Ox ονομάζεται θετικός ημιάξονας Ox , και η ημιευθεία Ox' αρνητικός ημιάξονας Ox' .



Καρτεσιανό επίπεδο :

Σε επίπεδο ορίζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$, $y'y$ με κοινή αρχή το σημείο O και ισομήκη μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντίστοιχα.

Τότε λέμε ότι έχουμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο : Oxy

Το Oxy λέγεται ορθοκανονικό γιατί είναι ορθογώνιο και κανονικό.

Ορθογώνιο επειδή οι άξονες τέμνονται καθέτως και κανονικό επειδή τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ έχουν ίσα μέτρα.

Συντεταγμένες ενός σημείου :

Έστω σημείο M σε ορθοκανονικό σύστημα Oxy .

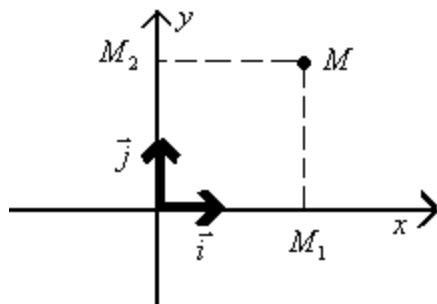
Θεωρούμε M_1, M_2 τις προβολές του M στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

$$\text{Τότε : } \begin{cases} \overline{OM_1} = x \cdot \vec{i} \\ \overline{OM_2} = y \cdot \vec{j} \end{cases}$$

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y καλούνται τετμημένη και τεταγμένη του σημείου M αντίστοιχα, ή αλλιώς συντεταγμένες του M .

★ Σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί μοναδικό ζεύγος συντεταγμένων και αντιστρόφως.

★ Το ζεύγος x, y θεωρείται διατεταγμένο και συμβολίζουμε $M(x, y)$



Συντεταγμένες ενός διανύσματος :

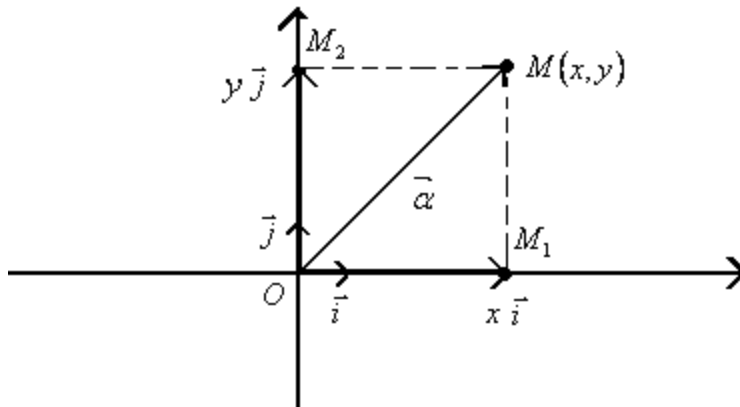
Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται στη μορφή $\vec{\alpha} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ και μάλιστα κατά μοναδικό τρόπο, όπου $\vec{i}, \vec{j}$: τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου.

✦ Τα διανύσματα $x \cdot \vec{i}$ και $y \cdot \vec{j}$ λέγονται συνιστώσες του $\vec{\alpha}$ κατά την διεύθυνση των $\vec{i}, \vec{j}$.

✦ Οι πραγματικοί αριθμοί x, y , ονομάζονται συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

Συγκεκριμένα ο x είναι η τετμημένη και ο y η τεταγμένη του $\vec{\alpha}$.

Άρα $\vec{\alpha} = (x, y)$



Όντως :

$$\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{M_1M} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

Άρα το $\vec{\alpha}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}, \vec{j}$

Επίσης γράφεται κατά μοναδικό τρόπο.

Όντως. Έστω ότι το $\vec{\alpha}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}, \vec{j}$ κατά δύο διαφορετικούς τρόπους. Τότε υπάρχουν x', y' τέτοια ώστε : $\vec{\alpha} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}$

Άρα έχουμε :

$$\begin{cases} \vec{\alpha} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \\ \vec{\alpha} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} \end{cases} \text{ άρα : } x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} \Leftrightarrow (x - x') \cdot \vec{i} = (y - y') \cdot \vec{j} \quad (1)$$

Αν υποθέσουμε ότι $x \neq x'$ τότε $\vec{i} = \frac{y - y'}{x - x'} \vec{j}$ που σημαίνει $\vec{i} \parallel \vec{j}$. Άτοπο !

Άρα $x = x'$

Τότε ισχύει και $y = y'$ γιατί

$$\text{αν } x = x' \text{ η (1) γίνεται : } 0 \cdot \vec{i} = (y - y') \cdot \vec{j} \Leftrightarrow (y - y') \vec{j} = 0 \Leftrightarrow y - y' = 0 \Leftrightarrow y = y'$$

Αφού $x = x'$ και $y = y'$ το $\vec{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}, \vec{j}$.

Ισότητα διανυσμάτων :

Δύο διανύσματα είναι ίσα, αν και μόνο αν, οι ομώνυμες συντεταγμένες τους είναι ίσες

Δηλαδή : αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Τότε : $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

✦ Το μηδενικό διάνυσμα έχει μηδενικές συντεταγμένες. Συμβ: $\vec{0} = (0,0)$

✦ Τα αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετες τετμημένες και τεταγμένες

Πράξεις με διανύσματα :

Έστω τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

★ $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ προσθέτουμε κατά συντ/νες

★ $\lambda \cdot \vec{\alpha} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ πολλαπλασιάζουμε κατά συντ/νες

★ $\lambda \cdot \vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\beta} = (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2, \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2)$

Αποδείξεις :

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \Leftrightarrow \vec{\alpha} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{\beta} = (x_2, y_2) \Leftrightarrow \vec{\beta} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$$

$$1\eta) \vec{\alpha} + \vec{\beta} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} = (x_1 + x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 + y_2) \cdot \vec{j}$$

$$\text{Άρα } \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$2\eta) \lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}) = (\lambda \cdot x_1) \cdot \vec{i} + (\lambda \cdot y_1) \cdot \vec{j}$$

$$\text{Άρα } \lambda \cdot \vec{\alpha} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1)$$

$$3\eta) \lambda \cdot \vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\beta} = \lambda \cdot (x_1, y_1) + \mu \cdot (x_2, y_2) = \quad (\text{ιδιότητα 2})$$

$$= (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1) + (\mu \cdot x_2, \mu \cdot y_2) = \quad (\text{ιδιότητα 1})$$

$$= (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2, \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2)$$

$$\text{Άρα } \lambda \cdot \vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\beta} = (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2, \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2)$$

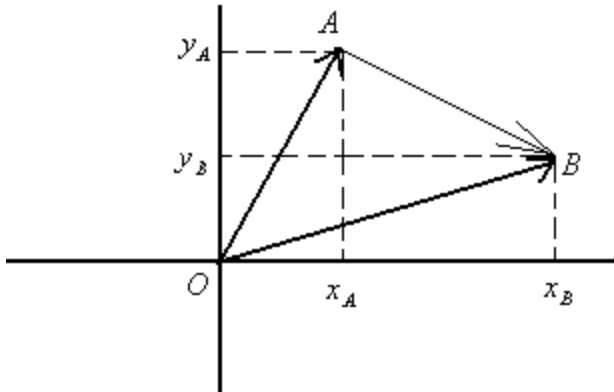
Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα :

Έστω $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ σημεία του Oxy επιπέδου.

Τότε :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

(συντεταγμένες τέλους μείον τις συντεταγμένες της αρχής)



Απόδειξη :

Γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (1)

Επίσης ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου και του διανύσματος θέσης αυτού του σημείου ταυτίζονται.

Άρα : $\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A)$ και $\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B)$

Αντικαθιστώ στην (1) :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Σχόλιο : παρατηρούμε ότι η τεταγμένη του $\overrightarrow{AB}$, το $x_B - x_A$ είναι η προβολή του

$\overrightarrow{AB}$ στον άξονα $x'x$, που είναι ο άξονας των τετμημένων

ενώ η τεταγμένη του $\overrightarrow{AB}$, το $y_B - y_A$ είναι η προβολή του $\overrightarrow{AB}$ στον

άξονα $y'y$, που είναι ο άξονας των τεταγμένων.

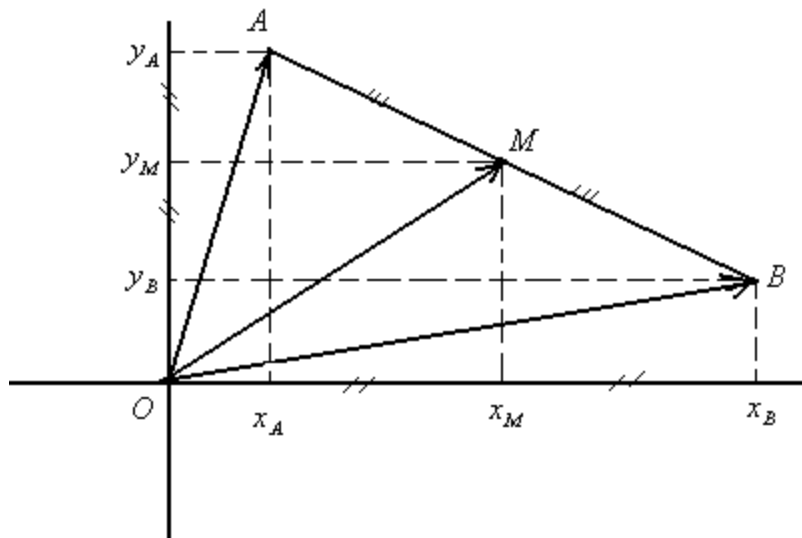
Συντεταγμένες μέσου ευθυγράμμου τμήματος :

Έστω $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ σημεία του Oxy επιπέδου.

Αν M το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB , τότε οι συντεταγμένες του είναι :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{και} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Απόδειξη :



$$\begin{aligned} \text{Γνωρίζουμε ότι : } \overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot [(x_A, y_A) + (x_B, y_B)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \end{aligned}$$

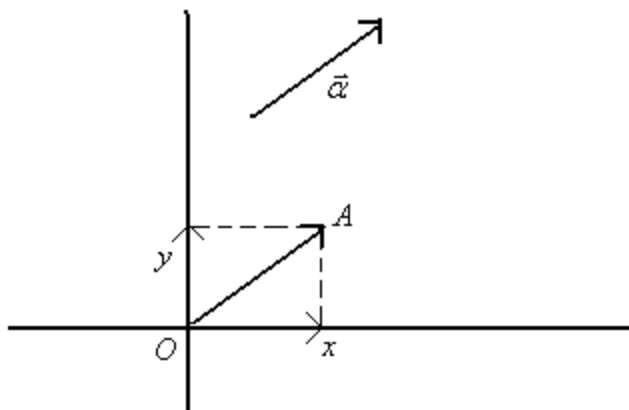
Σχόλιο : παρατηρούμε ότι η τετμημένη του μέσου M , είναι το μέσο των τετμημένων των A, B .

Το αντίστοιχο ισχύει και για τις τεταγμένες. (Θαλής)

Μέτρο διανύσματος :

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε : $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Απόδειξη :



Έστω $\vec{\alpha}$ διάνυσμα του Oxy επιπέδου.

Με αρχή το O θεωρώ την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}$, έτσι ώστε : $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} = (x, y)$

Τότε :

$$|\vec{\alpha}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 = (OA)^2 = x^2 + y^2 \dots\dots\dots (\text{πυθαγόρειο θεώρημα})$$

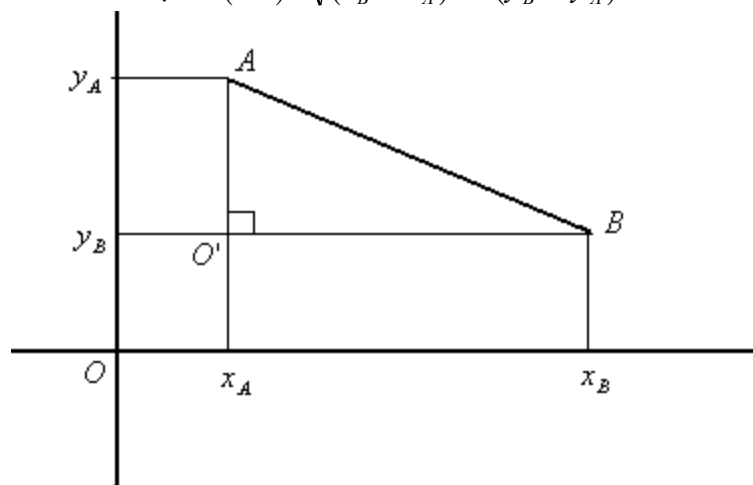
Άρα $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (γιατί το μέτρο είναι πραγματικός αριθμός μη αρνητικός)

Απόσταση δύο σημείων :

Έστω $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ σημεία του Oxy επιπέδου.

Η απόσταση των A, B συμβολίζεται με $d(A, B)$ ή (AB) ή $|\overrightarrow{AB}|$

και ισούται με : $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



• Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$, άρα $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ ή

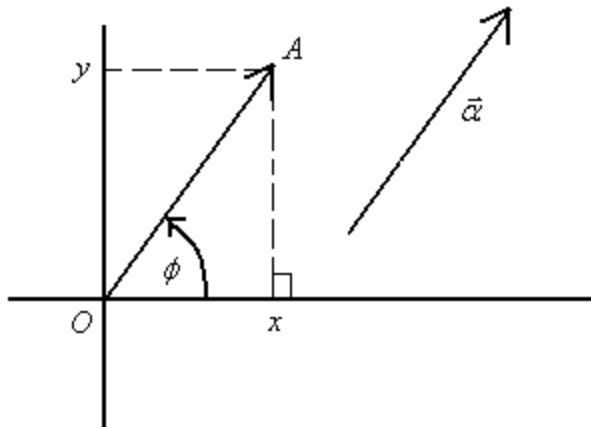
• Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο στο τρίγωνο $O'AB$...

Γωνία διανύσματος με τον άξονα $x'x$:

Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ μη μηδενικό διάνυσμα του Oxy επιπέδου.

Με αρχή το O θεωρώ την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}$, έτσι ώστε : $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} = (x, y)$

Γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ καλείται : η γωνία ϕ την οποία διαγράφει ο θετικός ημιάξονας Ox , αν στραφεί κατά την θετική φορά γύρω από το O μέχρι να συμπίψει με την ημιευθεία OA .



Σχόλιο : Θετική φορά είναι η αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

✦ $0 \leq \phi < 2\pi$ και $\phi = \frac{y}{x}$ όταν $\phi \neq \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$, όταν δηλαδή ορίζεται

Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος :

Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ με $x \neq 0$. (δηλ. το $\vec{\alpha}$ δεν είναι κάθετο στον $x'x$)

Συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$ ονομάζεται το πηλίκο $\frac{y}{x}$ και συμβολίζεται $\lambda_{\vec{\alpha}}$

$$\boxed{\lambda_{\vec{\alpha}} = \phi = \frac{y}{x}}$$

Ποιοτικά ο συντελεστής διεύθυνσης εκφράζει την κλίση του διανύσματος.

Αυτό σημαίνει ότι δύο διανύσματα με τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα. Είτε ομόρροπα, είτε αντίρροπα!

Προσοχή!! ο συντελεστής διεύθυνσης δεν μας δίνει πληροφορίες για την φορά!

✦ Αν $\vec{\alpha} // x'x$, τότε $y = 0$ άρα $\lambda_{\vec{\alpha}} = 0$

Εξάλλου αν $\vec{\alpha} // x'x$, τότε $\phi = 0$ άρα $\phi = \phi 0 = 0$

✦ Αν $\vec{\alpha} \perp x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται

Εξάλλου αν $\vec{\alpha} \perp x'x$, τότε η ϕ δεν ορίζεται.

✦ Για $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ έχω : $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Παραλληλία διανυσμάτων :

1^η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων :

$$\text{Αν } \vec{\alpha} = (x_1, y_1) , \vec{\beta} = (x_2, y_2) , \text{ τότε : } \vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

2^η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων :

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα των οποίων οι συντελεστές διεύθυνσης ορίζονται τότε

ισχύει : $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$

Σχόλιο :

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη παράλληλα διανύσματα του επιπέδου, τότε κάθε άλλο διάνυσμα $\vec{u}$ του επιπέδου, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και μάλιστα κατά μοναδικό τρόπο.

Δηλαδή : $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$
και
 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{u}$ συνεπίπεδα

$\Leftrightarrow$

Υπάρχουν μοναδικά $x, y \in \mathbb{R}$
τέτοια ώστε
 $\vec{u} = x \cdot \vec{\alpha} + y \cdot \vec{\beta}$