

Ασκήσεις στη γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

1. Δίνεται η εξίσωση: $(x + y - 5) + \lambda(2x + y - 7) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (1)
 - α. δείξτε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 - β. δείξτε ότι οι ευθείες της εξίσωσης (1) διέρχονται από σταθερό σημείο και προσδιορίστε το.
 - γ. βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 της οικογένειας που διέρχεται από το $A(4,1)$
 - δ. να δείξετε ότι η ευθεία $\eta: -x + y + 1 = 0$ δεν ανήκει στην παραπάνω οικογένεια ευθειών
 - ε. βρείτε την ευθεία ε_2 της οικογένειας ευθειών η οποία είναι κάθετη στην η .
2. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π1, Π2 είναι:
 $\Pi 1 = (t - 1, 2t - 3)$
 $\Pi 2 = (t + 1, t + 2)$, όπου $t(\min) \geq 0$
 - α. βρείτε τη θέση του Π2, τη χρονική στιγμή που η θέση του Π1 είναι (4,7).
 - β. βρείτε την απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 5min$.
 - γ. βρείτε τις αλγεβρικές εξισώσεις των γραμμών στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.
 - δ. χαράξτε τις πορείες των δύο πλοίων και βρείτε το σημείο στο οποίο αυτές συναντιούνται.
 - ε. τα πλοία θα συναντηθούν;

Υποδείξεις...

1. α.

$$(1) \Leftrightarrow (1 + 2\lambda)x + (1 + \lambda)y + (-5 - 7\lambda) = 0$$

$$A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1/2$$

$$B(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο $A(\lambda) = B(\lambda) = 0$, άρα (1): εξ.ευθείας $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

β.

Θέτω (αυθαίρετα) δύο τιμές στο λ και βρίσκω τις αντίστοιχες ευθείες:

$$\text{για } \lambda = 0: (1) \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$$

$$\text{για } \lambda = 1: (1) \Leftrightarrow 3x + 2y - 12 = 0$$

Λύνω το σύστημα των δύο εξισώσεων ώστε να βρω τις συντ/νες του σ.τομής.

Είναι το $M(2,3)$

Εξετάζω αν οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Την επαληθεύουν ($0 + \lambda \cdot 0 = 0$)

γ.

$$(x + y - 5) + \lambda(2x + y - 7) = 0 \Rightarrow x = 4, y = 1$$

$$\Rightarrow 0 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

$$\text{Άρα ε1: } x + y - 5 = 0$$

δ.

$$\text{πρέπει: } A(\lambda) = -1 \text{ και } B(\lambda) = 1 \text{ και } \Gamma(\lambda) = 1$$

αδύνατο.

ε.

$$\lambda_\eta = 1. \text{ Άρα } \lambda_{\varepsilon 2} = -1 \text{ (αφού: } \eta \perp \varepsilon 2 \text{)}$$

$$\text{Αντικαθιστώ στην (1). ε2: } (x + y - 5) - 1(2x + y - 7) = 0 \dots$$

2. α.

Τη χρονική στιγμή t_1 η θέση του Π1 είναι (4,7).

$$\text{Αλλά: } \Pi 1 = (t - 1, 2t - 3)$$

$$\text{Άρα } (t_1 - 1, 2t_1 - 3) = (4, 7) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t_1 = 5 \text{ min}$$

$$\text{για } t_1 = 5 \text{ min η θέση του Π2 είναι: } \Pi 2 = (t_1 + 1, t_1 + 2) = (6, 7)$$

β.

Η απόσταση των δύο πλοίων Π1, Π2 για $t_1 = 5 \text{ min}$ είναι:

$$(\Pi 1, \Pi 2) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (7 - 7)^2} = 2 \text{ μον.μήκους.}$$

γ.

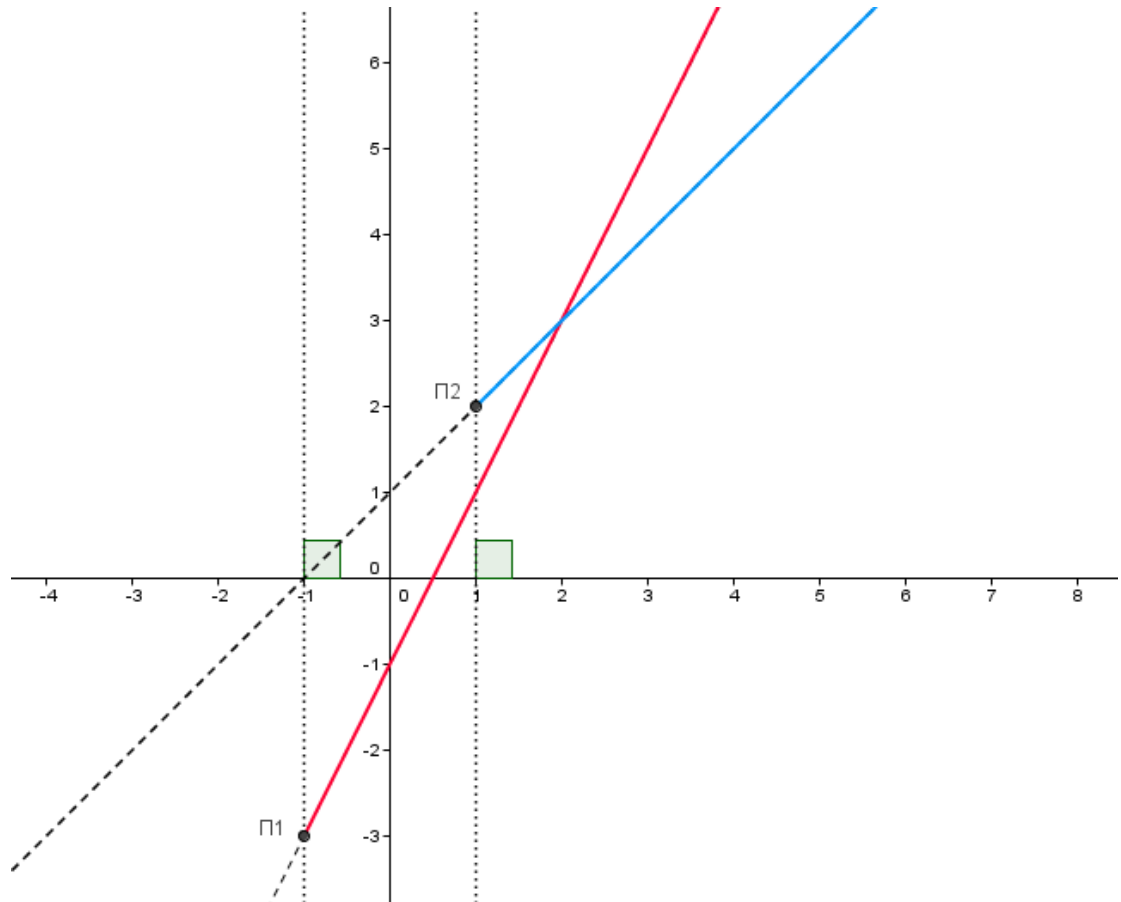
$$\Pi 1 = (t - 1, 2t - 3) \text{ άρα } \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - 3 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 1, \\ y = 2(x + 1) - 3 \end{cases} \text{ Άρα: } y = 2x - 1$$

$$\text{Όπου: } t \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\Pi 2 = (t + 1, t + 2) \text{ άρα } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x - 1, \\ y = x - 1 + 2 \end{cases} \text{ Άρα: } y = x + 1$$

$$\text{Όπου: } t \geq 0 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

δ.



Η κόκκινη ημιευθεία είναι η πορεία του Π1.

Η μπλε ημιευθεία είναι η πορεία του Π2.

Οι πορείες θα συναντηθούν. Λύνω το σύστημα των εξισώσεων: $y = 2x - 1$ και $y = x + 1$. Το σ.τομής είναι $M(2,3)$

Σχόλιο: το σημείο M είναι δεκτό γιατί έχει τετμημένη ≥ 1 !!!

(θα μπορούσε το σ.τομής των ευθειών να μην ανήκει στις πορείες (ημιευθείες) **και των δύο πλοίων!!!**)

ε. Αρκεί να εξετάσουμε αν τα Π1, Π2 διέρχονται από το $M(2,3)$ την ίδια χρονική στιγμή.

$$\Pi 1 = (t - 1, 2t - 3) = (2, 3) \Rightarrow t = 3 \text{ min}$$

$$\Pi 2 = (t + 1, t + 2) = (2, 3) \Rightarrow t = 1 \text{ min}$$

Τα Π1, Π2 δε θα συναντηθούν.