

Εξίσωση γραμμής C του επιπέδου:

Είναι μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y που έχει τις ιδιότητες

i) Οι συντεταγμένες κάθε σημείου της γραμμής C επαληθεύουν την εξίσωση και αντίστροφα:

ii) Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση, τότε το σημείο ανήκει στην γραμμή C

Προσοχή!!!

Όταν λέμε γραμμή του επιπέδου, δεν εννοούμε απαραίτητα την ευθεία γραμμή.

Γραμμές του επιπέδου είναι και ο κύκλος, η παραβολή κλπ...

Η ευθεία είναι ένα από τα είδη γραμμών που μελετάμε.

Πότε μία γραμμή διέρχεται από ένα σημείο με γνωστές συντ/νες;

Ή ισοδύναμα πότε ένα σημείο ανήκει σε μία γραμμή;

Πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου να επαληθεύουν την εξίσωση της γραμμής

Πως βρίσκουμε τα κοινά σημεία δύο γραμμών;

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους

Άσκηση:

Δίνονται οι παρακάτω γραμμές του επιπέδου με εξισώσεις:

$$C_1: x^2 + y^2 + 2x - 3y - 3 = 0, \quad C_2: 3x - y = 0$$

α) Το σημείο $O(0,0)$ ανήκει σε κάποια από τις δύο γραμμές;

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_1 και C_2

α) • ελέγχω αν οι συντ/νες του σημείου $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της γραμμής C_1
για $x=0, y=0$ έχουμε: $0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 3 = 0 \Leftrightarrow -3 = 0$.

Άτοπο, άρα το $O(0,0)$ δεν ανήκει στη γραμμή C_1

• ελέγχω αν οι συντ/νες του σημείου $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της γραμμής C_2
για $x=0, y=0$ έχουμε: $3 \cdot 0 - 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$.

Ισχύει, άρα το $O(0,0)$ ανήκει στη γραμμή C_2

β) λύνουμε το σύστημα: (μέθοδος αντικατάστασης)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 3y - 3 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (3x)^2 + 2x - 3(3x) - 3 = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x^2 + 2x - 9x - 3 = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 - 7x - 3 = 0 & (1) \\ y = 3x & (2) \end{cases}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 49 - 4 \cdot 10 \cdot (-3) = 49 + 120 = 169 = 13^2 > 0$$

άρα το τριώνυμο έχει δύο λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm 13}{2 \cdot 10} = \begin{cases} \frac{7+13}{20} = \frac{20}{20} = 1 \\ \frac{7-13}{20} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

- για $x=1$: $(2) \Rightarrow y=3x=3 \cdot 1=3$.

Άρα το 1^ο σημείο τομής είναι το: A(1,3)

- για $x=-\frac{3}{10}$: $(2) \Rightarrow y=3x=3 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)=-\frac{9}{10}$

Άρα το 2^ο σημείο τομής είναι το: B $\left(-\frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right)$

Συντελεστής διεύθυνσης λ ευθείας:

Λέγεται η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$

Δηλαδή $\lambda = \varepsilon \phi \omega$

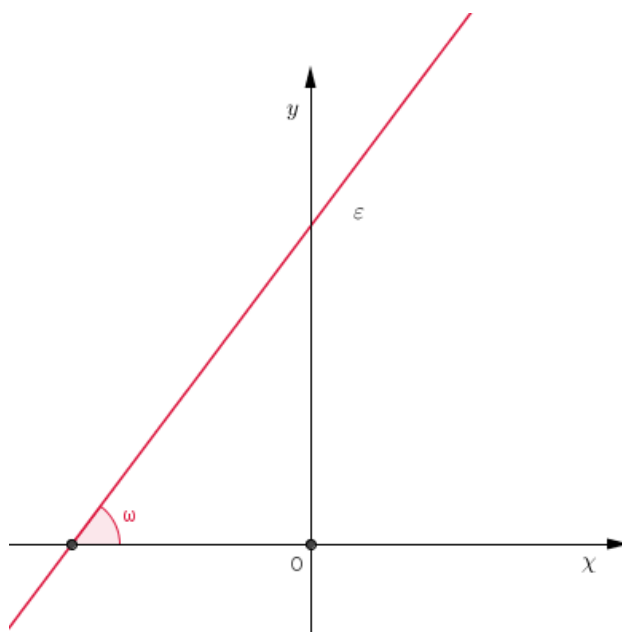
Ο συντελεστής διεύθυνσης λέγεται και **κλίση της ευθείας**, γιατί καθορίζει πλήρως την διεύθυνση της ευθείας.

$\mapsto$ Αν $\omega=0^\circ$ τότε $\lambda = \varepsilon \phi 0^\circ = 0$

$\mapsto$ Αν ω οξεία γωνία τότε $\lambda > 0$

$\mapsto$ Αν ω αμβλεία γωνία τότε $\lambda < 0$

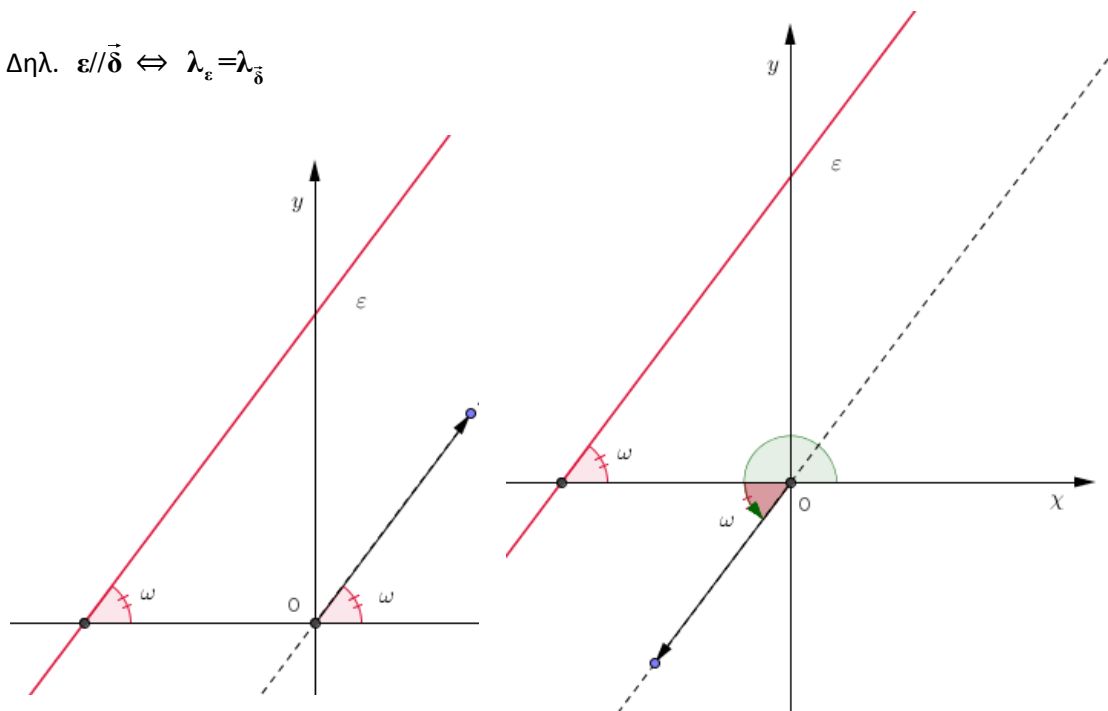
$\mapsto$ Αν $\varepsilon \perp x'x$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.



Σχέση των συντελεστών διεύθυνσης ευθείας και παράλληλου διανύσματος

Μία ευθεία και ένα παράλληλο διάνυσμα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, εφόσον ορίζονται (οι συντελεστές διεύθυνσης)

Δηλ. $\varepsilon // \vec{\delta} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{\delta}}$

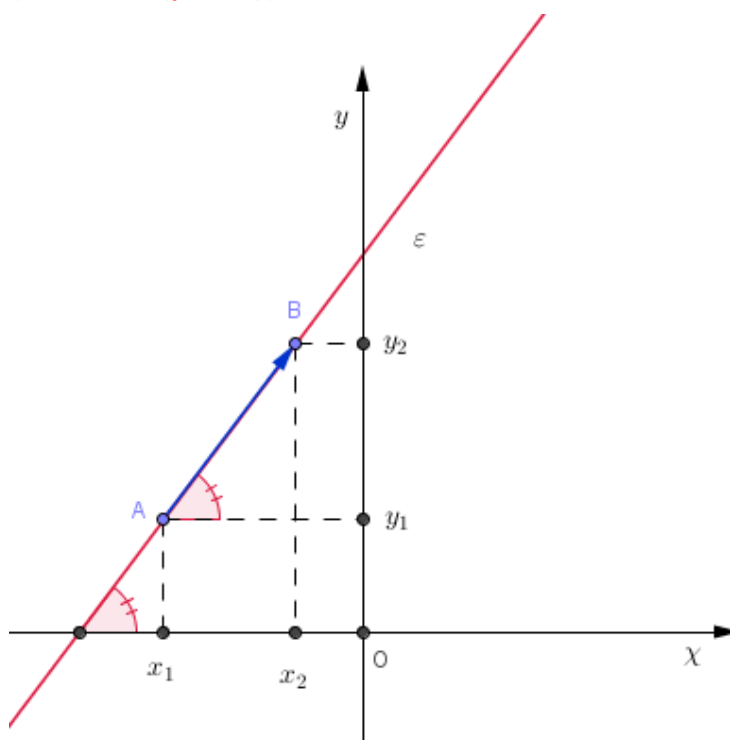


Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας από δύο σημεία της

Αν ευθεία ε διέρχεται από
τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και
 $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$

τότε έχει συντελεστή
διεύθυνσης:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Συνθήκες καθετότητας και παραλληλίας ευθειών

Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τότε:

Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με μη μηδενικούς συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τότε:

Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες αν και μόνο αν οι συντελεστές διεύθυνσης έχουν γινόμενο -1

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$

♦ Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , έχει

εξίσωση: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

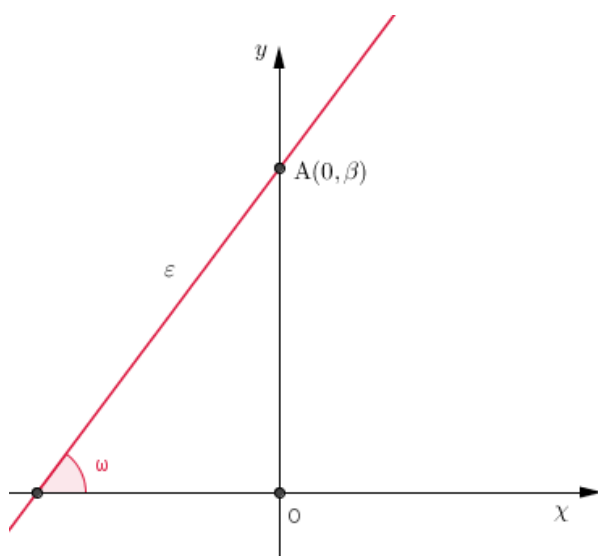
♦ Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει

εξίσωση: $x = x_0$ (κατακόρυφη ευθεία)

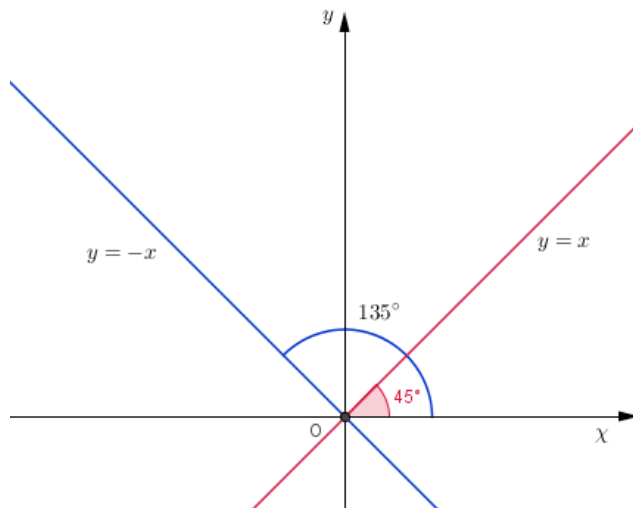
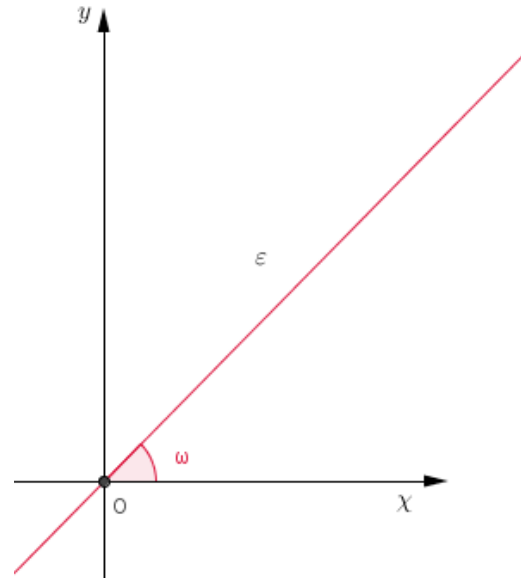
↳ Ειδικά ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση: $x = 0$

Ειδικές περιπτώσεις εξίσωσης ευθείας

Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ : $y = \lambda x + \beta$



Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ : $y = \lambda x$



Διχοτόμος 1^{ου}-3^{ου} τεταρτημορίου:

$$y = x$$

Διχοτόμος 2^{ου}-4^{ου} τεταρτημορίου:

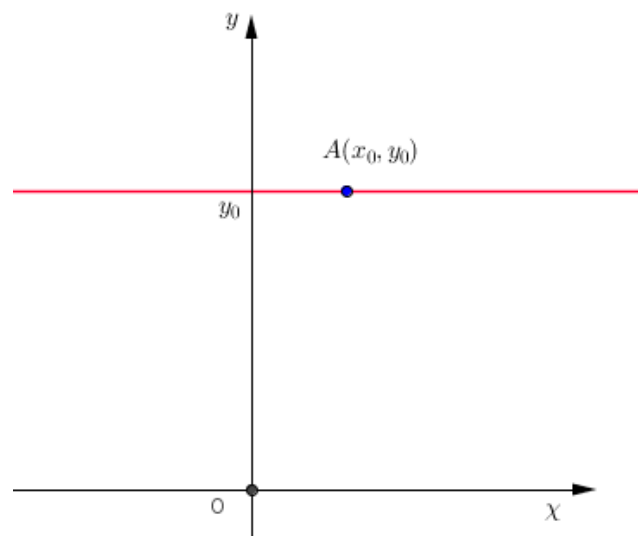
$$y = -x$$

Διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$:

$$y = y_0 \quad (\text{οριζόντια ευθεία})$$

$\mapsto$ Ειδικά ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση

$$y = 0$$



Μία επαναληπτική άσκηση!!

Δίνονται τα σημεία $A(2, -1)$, $B(4, 1)$, $\Gamma(5, 0)$

α) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ.

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_{\Gamma} - y_A}{x_{\Gamma} - x_A} = \frac{0 - (-1)}{5 - 2} = \frac{1}{3}$$

β) Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΓ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (6\alpha^2, 2\alpha^2)$, $\alpha \neq 0$

$$\lambda_{\delta} = \frac{y}{x} = \frac{2\alpha^2}{6\alpha^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Αφού $\lambda_{\delta} = \lambda_{A\Gamma}$ η ευθεία και το διάνυσμα είναι παράλληλα.

γ) Να βρεθεί η γωνία κάθε μιας από τις ευθείες ΑΒ και ΒΓ με τον $x'x$.

Αν γνωρίζουμε το λ μπορούμε να βρούμε την γωνία από την σχέση: $\epsilon\phi\omega = \lambda$

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - (-1)}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ άρα } \epsilon\phi\omega = 1 \text{ οπότε } \omega = 45^\circ$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_{\Gamma} - y_B}{x_{\Gamma} - x_B} = \frac{0 - 1}{5 - 4} = \frac{-1}{1} = -1, \text{ άρα } \epsilon\phi\omega = -1 \text{ οπότε } \omega = 135^\circ$$

δ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ και ΒΓ είναι κάθετες

Αν το γινόμενο των συντελεστών είναι -1 , τότε οι ευθείες είναι κάθετες

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = 1 \cdot (-1) = -1, \text{ άρα } AB \perp B\Gamma.$$

ε) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΒΓ

Βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας όταν:

- Γνωρίζουμε ένα σημείο της ευθείας και τον συντελεστή διεύθυνσής της ή
- Γνωρίζουμε δύο σημεία της

Εύρεση εξίσωσης ευθείας ΑΒ:

Η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το $A(2, -1)$ και έχει συντ/στη διεύθυνσης $\lambda = 1$, άρα:

$$AB: y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - (-1) = 1(x - 2) \Leftrightarrow y + 1 = x - 2 \Leftrightarrow y = x - 3$$

Εύρεση εξίσωσης ευθείας ΒΓ:

Η ευθεία ΒΓ διέρχεται από το $\Gamma(5, 0)$ και έχει συντ/στη διεύθυνσης $\lambda = -1$, άρα:

$$B\Gamma: y - y_{\Gamma} = \lambda(x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x - 5) \Leftrightarrow y = -x + 5$$

στ) Ποια ευθεία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στον $x'x$;

Είναι της μορφής $y = y_0$ και αφού διέρχεται από το $A(2, -1)$, είναι η ευθεία

$$y = y_A \Leftrightarrow y = -1 \quad (\text{οριζόντια ευθεία})$$

ζ) Ποια ευθεία διέρχεται από το Γ και είναι κάθετη στον $x'x$;

Είναι της μορφής $x = x_0$ και αφού διέρχεται από το $\Gamma(5,0)$, είναι η ευθεία

$$x = x_\Gamma \Leftrightarrow x = 5 \quad (\text{κατακόρυφη ευθεία})$$

η) Ποια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $B(4,1)$;

Αφού η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής $y = \lambda x$.

Πρέπει να βρούμε το λ .

Το $B(4,1)$ ανήκει στην ευθεία, άρα οι συν/νες του επαληθεύουν την εξίσωση της:

$$1 = \lambda \cdot 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

Η ζητούμενη ευθεία είναι η: $y = \frac{1}{4}x$

θ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -2x + 1$.

Έστω (ε) η ζητούμενη ευθεία και (η) : $y = -2x + 1$

$$\varepsilon // \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$$

Επίσης $A(2, -1) \in (\varepsilon)$, άρα (ε) :

$$y - y_A = \lambda_\varepsilon(x - x_A) \Leftrightarrow y - (-1) = -2(x - 2) \Leftrightarrow y + 1 = -2x + 4 \Leftrightarrow y = -2x + 3$$

ι) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Γ και είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{3}x$

Έστω (ε) η ζητούμενη ευθεία και (η) : $y = \frac{1}{3}x$

$$\varepsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -3$$

Επίσης $\Gamma(5,0) \in (\varepsilon)$, άρα (ε) :

$$y - y_\Gamma = \lambda_\varepsilon(x - x_\Gamma) \Leftrightarrow y - 0 = -3(x - 5) \Leftrightarrow y = -3x + 15$$

ια) Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας ΑΒ με τους άξονες

Εύρεση σημείων τομής με άξονες:

- σημείο τομή με $y'y$: θέτω $x=0$
- σημείο τομή με $x'x$: θέτω $y=0$

ΑΒ: $y = x - 3$ (ερώτημα ε)

→ θέτω $x = 0$: $y = 0 - 3 \Leftrightarrow y = -3$. Άρα το σ.τομής με $y'y$ είναι το $K(0, -3)$

→ θέτω $y = 0$: $0 = x - 3 \Leftrightarrow x = 3$. Άρα το σ.τομής με $x'x$ είναι το $\Lambda(3,0)$