

Επιπλέον (ιδιαίτερες) ασκήσεις στη γεωμετρική πρόοδο από την τράπεζα θεμάτων για εξάσκηση

33 Θέμα 2 - 1257

- α. Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .
- β. Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .
- γ. Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

α) $4-x, x, 2$: Διαδοχικοί όροι Α.Π. $\Leftrightarrow x = \frac{4-x+2}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = 4-x+2 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

β) $4-x, x, 2$: Διαδ. όροι Γ.Π. $\Leftrightarrow x^2 = (4-x) \cdot 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 = 8-2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -4$

γ) Για $x=2$, οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμ. προόδου

36 Θέμα 2 - 1321

- α. Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- β. Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε
- το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.
 - τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

α) $x+4, 2-x, 6-x$: Διαδ. όροι Γ.Π. $\Leftrightarrow (2-x)^2 = (x+4)(6-x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 = 6x - x^2 + 24 - 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 5$

β) Για $x=5$: $a_4 = 6-x = 6-5 = 1$
 $a_3 = 2-x = 2-5 = -3$
 $a_2 = x+4 = 5+4 = 9$

ii) $\lambda = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

iii) Έστω a_1 : $a_2 = a_1 \cdot \lambda^{2-1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot \lambda \xrightarrow{\lambda = -1/3} 9 = a_1 \cdot (-1/3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_1 = -27$

ο λόγος λ μιας Γ.Π είναι το ημίμιο δυο διαδ. όρων:

$$a_{n+1} = \lambda \cdot a_n \Leftrightarrow \lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

35 Θέμα 2 - 1311

Οι αριθμοί $k-2$, $2k$ και $7k+4$, $k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) .

α. Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β. i. Να εκφράσετε το 2^ο όρο, τον 5^ο και τον 4^ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 .

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

$$\begin{aligned} \text{α) } k-2, 2k, 7k+4 : \text{ διαδ. όροι Γ.Π. } &\Leftrightarrow (2k)^2 = (k-2)(7k+4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4k^2 = 7k^2 + 4k - 14k - 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3k^2 - 10k - 8 = 0. \quad \Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 196 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } k &= \frac{10 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 14}{6} \text{ δαύτη } \alpha \varphi \omega \ k \in \mathbb{N} \\ \text{ή } k &= \frac{10 - \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{10 - 14}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \text{ (απορρ.)} \end{aligned}$$

Για $k=4$: οι διαδ. όροι είναι: $4-2, 2 \cdot 4, 7 \cdot 4+4 \Rightarrow 2, 8, 32$

$$\text{Άρα } \lambda = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{β) i) } \alpha_1 &= 4, \lambda = 4 \text{ άρα: } \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda^{2-1} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16 \\ \alpha_5 &= \alpha_1 \cdot \lambda^{5-1} \Rightarrow \alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 4 \cdot 4^4 = 4^5 = 1.024 \\ \alpha_4 &= \alpha_1 \cdot \lambda^{4-1} \Rightarrow \alpha_4 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 4 \cdot 4^3 = 4^4 = 256 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \alpha_2 + \alpha_5 &= \lambda(\alpha_1 + \alpha_4) \Leftrightarrow 4^2 + 4^5 = 4 \cdot (4 + 4^4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4^2 + 4^5 = 4^2 + 4^5. \quad \nabla \text{ έχει η τελική, άρα και η} \\ &\quad \text{ισοδύναμη αρχική έχει.} \end{aligned}$$

38 Θέμα 4 - 1499,

Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8 με $x > 0$.

- Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;
- Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;
- Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_n) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:
 - Να βρείτε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) .
 - Να βρείτε την τιμή του n ώστε, για το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) να ισχύει: $2(S_n + 24) = \beta_7$.

$$2, x, 8, \quad x > 0$$

α) 2, x, 8 διαδ.οροι Α.Π $\Leftrightarrow x = \frac{2+8}{2} = 5$. Έσσε οι διαδοχικοι οροι
Εσσε οι : 2, 5, 8
και η διαφορά ω είναι : $\omega = 5 - 2 = 3$

β) 2, x, 8 διαδ.οροι Γ.Π. $\Leftrightarrow x^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -4$ (απορρ)
Έσσε οι διαδ.οροι Εσσε οι : 2, 4, 8 και ο λογος λ εσσε Γ.Π
Εσσε $\lambda = \frac{4}{2} = 2$

γ) $(\alpha_n) : 2, 5, 8, 11, \dots$ αριθμ. ηρόοδος $\begin{cases} a_1 = 2 \\ \omega = 3 \end{cases}$

$(\beta_n) : 2, 4, 8, 16, \dots$ γεωμ. ηρόοδος $\begin{cases} b_1 = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{ε) } S_n &= \frac{[2a_1 + (n-1)\omega]n}{2} = \frac{[2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3]n}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_n &= \frac{(4 + 3n - 3)n}{2} = \frac{(3n + 1)n}{2} = \frac{3n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{α) Πρεπει : } 2(S_n + 24) &= \beta_7 \quad \left. \vphantom{2(S_n + 24)} \right\} \Rightarrow 2(S_n + 24) = 2^6 \\ \beta_7 &= b_1 \cdot \lambda^{7-1} = b_1 \cdot \lambda^6 = 2 \cdot 2^6 = 2^7 \\ \Rightarrow S_n + 24 &= 2^6 \Rightarrow S_n + 24 = 64 \Leftrightarrow S_n = 40 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3n^2 + n}{2} &= 40 \Leftrightarrow 3n^2 + n - 80 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 3(-80) = 961 = 31^2$$

$$\text{Αρα } n = \frac{-1 \pm 31}{6} = 5 \text{ Εσσε ή } n = \frac{-1 - 31}{6} = \frac{-32}{6} = \frac{-16}{3} \text{ (απορρ)}$$

40 Θέμα 4 - 1498

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών a , b και εμβαδόν E , τέτοια ώστε οι αριθμοί a , E , b , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α. Να αποδείξετε ότι $E=1$.

β. Αν $a+b=10$ τότε:

- Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη a , b .
- Να βρείτε τα μήκη a , b .

α) Γίνεται : $E = a \cdot b$ (1) $E = a \cdot b$ b

Επιπλέον a, E, b : διαδοχοί a

$$b \cdot E \Rightarrow E^2 = a \cdot b \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε : $E = E^2 \Leftrightarrow E^2 - E = 0 \Leftrightarrow E(E-1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow E = 0$ (απορριπτόμενη) $\vee E = 1$ (δεκτή)

β) Η εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $x_1 = a$ και $x_2 = b$ είναι

ως βοηθός $x^2 - Sx + P = 0$ όπου : $S = x_1 + x_2 \Rightarrow S = a + b = 10$ (υπόθεση)
 και $P = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow S = a \cdot b = E = 1$.

Άρα είναι $x : x^2 - 10x + 1 = 0$

γ) Τα μήκη a, b είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

$$x^2 - 10x + 1 = 0 \quad \Delta = 100 - 4 \cdot 1 = 96$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

Άρα οι διαστάσεις του ορθογώνιου a, b είναι :

$$a = 5 + 2\sqrt{6} \text{ και } b = 5 - 2\sqrt{6}$$