

Φύλλο εργασίας στις ρίζες πραγματικών αριθμών (λύσεις)

Ποιοι είναι οι περιορισμοί για τα α, β ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \quad \text{όταν } \alpha, \beta \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \quad \text{όταν } \alpha \geq 0 \text{ και } \beta > 0$$

Συμπληρώστε τα κενά:

1. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$
2. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
3. Αν $\alpha \geq 0$, τότε: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$
4. Αν $\alpha \geq 0$, τότε: $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu \cdot \rho}} = \sqrt[\mu]{\alpha^\nu}^\rho$
5. Αν $\alpha > 0$, τότε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Άσκηση 1

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{i. } \sqrt[7]{5^4} \cdot \sqrt[7]{5^3} \quad \text{ii. } \sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[6]{3} \quad \text{iii. } \frac{\sqrt[5]{4^9}}{\sqrt[5]{4^4}} \quad \text{iv. } \sqrt[5]{7^{11}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{7^6}} \quad \text{v. } \frac{\sqrt[7]{5^8} \cdot \sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^5}}$$

Λύση:

$$\sqrt[7]{5^4} \cdot \sqrt[7]{5^3} = \sqrt[7]{5^{4+3}} = \sqrt[7]{5^7} = 5$$

$$\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^{5+1}} = \sqrt[6]{3^6} = 3$$

$$\frac{\sqrt[5]{4^9}}{\sqrt[5]{4^4}} = \sqrt[5]{4^{9-4}} = \sqrt[5]{4^5} = 4$$

$$\sqrt[5]{7^{11}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{7^6}} = \sqrt[5]{\frac{7^{11}}{7^6}} = \sqrt[5]{7^{11-6}} = \sqrt[5]{7^5} = 7$$

$$\frac{\sqrt[7]{5^8} \cdot \sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^5}} = \frac{\sqrt[7]{5^{8+4}}}{\sqrt[7]{5^5}} = \frac{\sqrt[7]{5^{12}}}{\sqrt[7]{5^5}} = \sqrt[7]{5^{12-5}} = \sqrt[7]{5^7} = 5$$

Άσκηση 2

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $A = (\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27})\sqrt{3}$

ii. $B = (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18})\sqrt{8}$

Λύση:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27})\sqrt{3} = (\sqrt{3 \cdot 4} + \sqrt{3 \cdot 16} - \sqrt{3 \cdot 9})\sqrt{3} = \\ &= (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3})\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18})\sqrt{8} = (\sqrt{2 \cdot 16} - \sqrt{2 \cdot 25} + \sqrt{2 \cdot 9})\sqrt{2 \cdot 4} = \\ &= (4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2})2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις.

i. $A = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$

ii. $B = \sqrt{2x-6} - \sqrt[3]{x-5}$

iii. $\Gamma = \frac{\sqrt[3]{3x+12}}{\sqrt[4]{7-x}}$

Λύση

A. Πρέπει:

$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \quad \text{και} \quad 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \quad \text{Άρα: } -2 \leq x \leq 3$$

B. Πρέπει:

$$2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3 \quad \text{και} \quad x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \quad \text{Άρα: } x \geq 5$$

Γ. Πρέπει:

$$3x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -12 \Leftrightarrow x \geq -4 \quad \text{και} \quad 7 - x > 0 \Leftrightarrow x < 7 \quad \text{Άρα: } -4 \leq x < 7$$

Άσκηση 4 (τράπεζα θεμάτων)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$ (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Πρέπει:

$$x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \quad \text{και} \quad 6 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6 \quad \text{Άρα: } x \in [4, 6]$$

$$\beta) \text{ Για } x = 5: A = \sqrt{5-4} + \sqrt{6-5} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$$

$$\text{Τότε: } A^2 + A - 6 = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$