ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Αν $\alpha < 2$ και $\beta > -3$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha\beta - 6$ και $2\beta - 3\alpha$.

2. Αν $-2 \le x \le 1$ να αποδείξετε ότι $x^3 + 4 \ge x^2 + 4x$.

3. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^4} \le \dfrac{1}{2}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2} \ge \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$.

5. Να αποδείξετε ότι $\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

6. Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right) \ge \left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2$ (Ανισότητα Cauchy – Schwarz).

7. Αν $\alpha > 0$ και $\alpha\beta = 1$ να αποδείξετε ότι $(1+\alpha)(1+\beta) \ge 4$.

8. Αν $\alpha \in R$ να αποδείξετε ότι $2\alpha^4 + 1 \ge 2\alpha^3 + \alpha^2$.

9. Αν $0 < \alpha \le \beta < 1$ να αποδείξετε ότι
   α) $\alpha < \dfrac{1}{\beta}$ β) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \ge \beta + \dfrac{1}{\beta}$.

10. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 2$ να αποδείξετε ότι
    α) $\beta < 2$ β) $\alpha\beta \le 1$ γ) $\alpha^2 + \beta^2 \ge 2$

11. Α) Να αποδείξετε ότι
    α) $\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \ne 0$.
    β) $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$
    Β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 \ge 2\beta(\alpha - \gamma)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

12. Να αποδείξετε ότι
    α) $x^2 - 2x + 2 > 0$ β) $x^2 + y^2 \ge 2x - 1$ γ) $2x^2 - 2x + 1 > 0$.

13. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha-4\beta-6\gamma+14 = 0$. (Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 1995)

14. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$.
Για ποιες τιμές των α, β η παράσταση A γίνεται ελάχιστη;
(Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 2001).

15. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ να αποδείξετε ότι
α) $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$ β) $\alpha < \beta + \gamma$ γ) $\alpha^3 > \beta^3 + \gamma^3$.

16. Αν α, β, γ μήκη πλευρών τριγώνου να αποδείξετε ότι
α) $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta$.
β) $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$.
γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

17. α. Για κάθε θετικό ακέραιο x, να αποδείξετε ότι: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
β. Να αποδείξετε ότι ισχύει:
$\frac{x+\psi-z}{z} + \frac{\psi+z-x}{x} + \frac{z+x-\psi}{\psi} \geq 3$, όπου x, ψ, z θετικοί ακέραιοι. Πότε ισχύει το ίσον;

18. Αν $1 < x \leq 2$ και $0 \leq y \leq 3$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή κάθε παράστασης
α) $-3x + 4$ β) $x + 2y$ γ) $5x - 4y + 2$ δ) $x(y + 1)$
ε) $\frac{y}{x}$ στ) $x^2 + y^2$ ζ) $\frac{2}{y+1} - 1$ η) $\frac{2x+1}{x-3}$

19. Να βρείτε τον ακέραιο αριθμό κ, όταν
α) $\frac{1}{7} < \frac{1}{4\kappa - 1} < 1$ β) $0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < 2\pi$.

20. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ, όταν $\frac{\kappa}{\kappa+1} < \frac{31}{40} < \frac{\kappa+1}{\kappa+2}$.

21. Να λύσετε τις ανισώσεις
α) $\frac{3-4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6-x}{2}$ β) $\frac{2x+1}{6} - x < \frac{3-2x}{3}$ γ) $1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{x+4}{6}$

22. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων
α) $\begin{cases} 7x - 1 < 8 + 6x \\ 3x - 2 > x - 10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x + 3 < 9 + 5x \\ 1 - x < 2x + 7 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \\ \frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3} \end{cases}$