

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ – ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha^3 + \beta^3 = 9$ να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha\beta$.
2. Αν $\alpha + \beta = 4$ και $\alpha\beta = 2$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις
 α) $\alpha^2 + \beta^2$ β) $\alpha^3 + \beta^3$ γ) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ δ) $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$
3. Αν $x + \frac{1}{x} = 3$ και $x \neq 0$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις
 α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ β) $x^3 + \frac{1}{x^3}$
4. Αν $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$ και $x \neq 0$ να αποδείξετε ότι $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$.
5. Αν $x - \frac{1}{x} = 4$ και $x \neq 0$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις
 α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ β) $x^3 - \frac{1}{x^3}$
6. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $(v-1)(v+1)+1=v^2$.
 β) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2005 \cdot 2007 + 1$ είναι τετράγωνο ενός ακέραιου αριθμού, τον οποίο και να προσδιορίσετε.
7. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2$.
 β) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2 = 4$.
8. α) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$.
 β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.
9. α) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3 + (\alpha - \beta)^3} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + (\alpha - \beta)}$
 β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{259^3 + 185^3}{259^3 + 74^3}$
10. α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4) = \alpha^8 - \beta^8$.
 β) Να υπολογίσετε το γινόμενο $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001$

11. α) Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{5}{\alpha}\right)^2 = 20$.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $x = \left(2005 + \frac{1}{401}\right)^2 - \left(2005 - \frac{1}{401}\right)^2$.

12. α) Να αποδείξετε ότι $\frac{x^3 - y^3}{x - y} + xy = (x + y)^2$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{56^3 - 44^3}{12} + 56 \cdot 44$

13. α) Αν $A = \frac{2x}{x^2 + 1}$ και $B = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, να αποδείξετε ότι $A^2 + B^2 = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 1 , $\frac{200}{10.001}$, $\frac{9999}{10.001}$ αποτελούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

14. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ και $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

15. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ και $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι

α) $\frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma}{\alpha + \beta} + \frac{\beta^2 - \gamma^2 - 2\gamma\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta}{\gamma + \alpha} = 0$

β) $\frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta(\gamma + 2)}{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2} = 3$

16. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $\frac{x(x-1) + 4(x-1)}{x^2 + 2x - 3}$

β) $\frac{y(y-3) + y^2 - 9}{4y^2 - 9}$

γ) $\frac{(2\omega+1)^2 - (\omega+2)^2}{\omega^4 - 1}$

δ) $\frac{(\alpha+1)(\alpha-2)^2 - 4(\alpha+1)}{\alpha^3 + \alpha^2}$

17. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $\frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2 + \alpha - 6} \cdot \frac{\alpha + 3}{\alpha^2 + 2\alpha}$

β) $\frac{x^2 + x}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x}$

γ) $\frac{4y^2 - 9}{4y^2 - 12y + 9} \cdot \frac{2y^2 + 3y}{2y^2 - 3y}$

18. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

α) $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2 - 2x}$

β) $\frac{3}{x+2y} - \frac{2}{x-2y} + \frac{2x+16y}{x^2 - 4y^2}$

γ) $\frac{y^2 - 6}{y^2 - 5y + 6} - \frac{2}{y-2} + \frac{3}{y-3}$

δ) $\frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{x+y} - \frac{2xy^2}{x^2 - y^2}$

19. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha) \left(\frac{x+3}{2x+1} - \frac{x}{2x-1} \right) \left(1 + \frac{1}{4x-3} \right)$$

$$\gamma) \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)$$

$$\beta) \left[\frac{x+3}{x^2-1} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] : \frac{x^2-3}{(x-1)^2}$$

$$\delta) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) : \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} \right)$$

20. Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο BΓΔ είναι ορθογώνιο.

