

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Αν $P(A)$ είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύει $|P(A)+2| - |P(A)-3| = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\lambda| \leq 1$.

2. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A') = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$ και $P(A \cap B') = \frac{3}{10}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

α) $P(A)$ β) $P(A \cap B)$ γ) $P(B)$ δ) $P((A-B) \cup (B-A))$

3. Από το σύνολο των φοιτητών του τρίτου εξαμήνου του Μαθηματικού τμήματος το 60% προσήλθε στην εξέταση του μαθήματος Πιθανότητες I και από αυτούς το 40% πέρασε το μάθημα. Επίσης, το 80% του συνόλου των φοιτητών αυτών προσήλθε στην εξέταση του μαθήματος Στατιστική I και από αυτούς το 50% πέρασε το μάθημα. Αν η πιθανότητα του ενδεχομένου, ένας φοιτητής που επιλέγεται τυχαία να έχει περάσει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα είναι 0,54 να βρείτε:

i) την πιθανότητα του ενδεχομένου ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής τρίτου εξαμήνου να έχει περάσει και τα δύο μαθήματα.

ii) το πλήθος των φοιτητών του τρίτου εξαμήνου αν το πλήθος των φοιτητών που πέρασαν ακριβώς ένα μάθημα είναι 22.

4. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0,50$, $P(B) = 0,40$ και $P(A \cap B) = 0,18$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- α) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A και B .
- β) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B .
- γ) Να πραγματοποιηθεί μόνο το A .
- δ) Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A και B .
- ε) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B .

5. Πέντε σφαίρες αριθμημένες με 0, 1, 2, 3, 4 τοποθετούνται σε ένα κουτί. Παίρνουμε από το κουτί μία σφαίρα, σημειώνουμε τον αριθμό της και την τοποθετούμε πάλι στο κουτί. Κατόπιν παίρνουμε δεύτερη σφαίρα και σημειώνουμε τον αριθμό της. Αν στην εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$, $x \in \mathbb{R}$, ο συντελεστής α παίρνει την τιμή της πρώτης ένδειξης και ο β της δεύτερης, να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων :

A : η εξίσωση έχει μια λύση.

B : η εξίσωση είναι αδύνατη.

Γ : η εξίσωση είναι ταυτότητα.

6. Τέσσερις σφαίρες αριθμημένες με 1, 2, 3, 4 τοποθετούνται σε ένα κουτί. Παίρνουμε από το κουτί μια σφαίρα, σημειώνουμε τον αριθμό της και την τοποθετούμε πάλι στο κουτί. Κατόπιν παίρνουμε δεύτερη σφαίρα και σημειώνουμε τον αριθμό της.

Αν στην εξίσωση $\alpha x^2 + 4x + \beta = 0$, $x \in \mathbb{R}$, ο συντελεστής α παίρνει την τιμή της πρώτης ένδειξης και ο σταθερός όρος β παίρνει την τιμή της δεύτερης ένδειξης, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :

A : η εξίσωση έχει ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$.

B : η εξίσωση έχει ρίζες ίσες.

Γ : η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

7. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Δίνεται επίσης ότι $|2P(A)-2| + |-P(A)+3| = 2\lambda+1$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$.

α. Να βρείτε το λ και την πιθανότητα $P(A)$.

β. Αν $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = P(A-B) = \frac{1}{2}$,

i) να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$

ii) να δείξετε ότι $A \cup B = \Omega$.

8. Σε διαγωνισμό του δημοσίου για πρόσληψη υπαλλήλων συμμετείχαν 80.000 υποψήφιοι για 3.400 θέσεις. Οι υποψήφιοι ήταν τριών κατηγοριών. Απόφοιτοι Λυκείου, πτυχιούχοι Ανωτέρων Σχολών και πτυχιούχοι Ανωτάτων Σχολών. Οι απόφοιτοι Λυκείου σε αριθμό ήταν διπλάσιοι από τους πτυχιούχους Ανωτάτων Σχολών. Τα ποσοστά επιτυχίας για κάθε κατηγορία υποψηφίων ήταν 3% για τους απόφοιτους Λυκείου, 6% για τους πτυχιούχους Ανωτάτων Σχολών και 5% για τους πτυχιούχους Ανωτέρων Σχολών.

α. Παίρνουμε στην τύχη έναν υποψήφιο. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι: α_1) Απόφοιτος Λυκείου, α_2) Πτυχιούχος Ανωτάτης Σχολής, α_3) Πτυχιούχος Ανωτέρας Σχολής.

β. Παίρνουμε στην τύχη έναν επιτυχόντα. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι: β_1) Απόφοιτος Λυκείου, β_2) Πτυχιούχος Ανωτάτης Σχολής, β_3) Πτυχιούχος Ανωτέρας Σχολής.

9. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν τα ενδεχόμενα $A, A-B$ και $A \cup B$

ανά δύο δεν είναι ισοπίθανα και οι πιθανότητές τους $P(A), P(A-B)$ και $P(A \cup B)$ είναι στοιχεία του συνόλου

$$\Sigma = \{x / x \text{ ρίζα της εξίσωσης } (36x^2 - 25)(6x^2 - 5x + 1) = 0\},$$

να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A και B .

β) Να πραγματοποιηθεί το B .

γ) Να πραγματοποιηθεί μόνο το B .

δ) Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A και B .

ε) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B .

10. Σε μια πόλη το 65% των κατοίκων δεν έχουν αυτοκίνητο, το 80% δεν έχουν μηχανάκι και το 25% έχουν μόνο αυτοκίνητο. Επιλέγουμε τυχαία ένα κάτοικο. Να βρείτε την πιθανότητα:

- α) Να έχει αυτοκίνητο και μηχανάκι.
- β) Να έχει αυτοκίνητο ή μηχανάκι.
- γ) Να μην έχει ούτε αυτοκίνητο ούτε μηχανάκι.
- δ) Να έχει μόνο μηχανάκι.

11. Από τους 216 μαθητές ενός Λυκείου, 27 μαθητές μαθαίνουν μόνο Γερμανικά, 54 μαθητές μαθαίνουν μόνο Γαλλικά και 108 μαθητές δεν μαθαίνουν ούτε Γερμανικά ούτε Γαλλικά. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:

- α) Να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις δύο αυτές γλώσσες.
- β) Να μαθαίνει Γερμανικά.
- γ) Να μαθαίνει Γαλλικά.
- δ) Να μαθαίνει Γερμανικά και Γαλλικά.
- ε) Να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο αυτές γλώσσες.
- στ) Να μαθαίνει το πολύ μία από τις δύο αυτές γλώσσες.