

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

Να βρείτε τα $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$

Αν $0 < \alpha < 1$, να βρεθούν τα $f(\alpha^2)$ και $f(\alpha-1)$

2. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-5, & |x| < 2 \\ \frac{1}{x}, & |x| \geq 2 \end{cases}$

Να βρείτε τα $f(-1)$, $f(-3)$, $f(7)$

3. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

β) $f(x) = \sqrt[3]{9-x^2}$

γ) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{|x|-x}}{x^2-1}$

δ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x-2}}{|x|+x}$

ε) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x}$

στ) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-4}}$

4. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x)=|x|$ και $g(x)=x^2$ με πεδίο ορισμού το $A=\{0,-1,1\}$

5. Να βρείτε τους τύπους των παρακάτω συναρτήσεων αφού βγάλετε τις απόλυτες τιμές

α) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

β) $f(x) = |x|-1$

γ) $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

δ) $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|-1}$

ε) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

στ) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} + 1$

ζ) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-2x+1}$

6. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις

α) $f(x)=x|x|+3$

β) $f(x)=\frac{x^2+1}{|x|-2}$

γ) $f(x)=x(1-|x|)+1$

δ) $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$

ε) $f(x)=\frac{|x|-1}{|x|+1}$

στ) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2}, x \in [-2, 2]$

ζ) $f(x)=\eta\mu x+x$

η) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+x^2$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x-y)=f(x)f(y)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=1$

β) $f(x)=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

8. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x-y) \geq f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) \geq 0$

β) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Να αποδείξετε: α) $f(0)=0$

β) η f είναι περιττή.

10. Δίνεται το σημείο $A(1,2)$. Να βρείτε το συμμετρικό του:

α) ως προς τον άξονα $x'x$

β) ως προς τον άξονα $y'y$

γ) ως προς την αρχή των αξόνων

δ) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$

11. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,1)$, $\Gamma(1,3)$ είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

12. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε το σημείο $A(1,10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = 2x^2 + 9\lambda x - \lambda^2$.

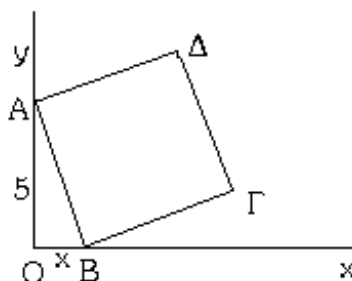
13. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε το σημείο $A(\lambda^2, 6)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = |x-1|-2$.

14. Δείξτε ότι τα σημεία $A(2,1)$, $B(4,1)$, $\Gamma(2,3)$, $\Delta(4,3)$ είναι κορυφές τετραγώνου.

15. Να βρείτε τα σημεία που τέμνουν τους άξονες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

α) $f(x) = x-5$ β) $f(x) = x+|x|$ γ) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
 δ) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ε) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

16. Να εκφραστεί το εμβαδόν E του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ σαν συνάρτηση του x .
 Να υπολογιστούν τα $E(1)$, $E(2)$, και να βρεθεί ο x έτσι, ώστε $E(x) = 30$.



17. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 1 \\ 5|x-5| + 2, & x \geq 1 \end{cases}$.

α. Αν $-2 \leq x < 1$, να βρεθούν τα $f(x-2)$ και $f(x+3)$.

β. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x-2) - f(x+3) = -4$

18. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{4}{x-1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι είναι

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}-4}{x-1}.$$

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{2x+8}{\sqrt{x}+2}$, $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3|x-1|-1}{|x-1|+1}$.

A) Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f .

β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x' και y' .

B) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 2$.

Γ) Αν $g(x) = |x-1|$, να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2-|x-1|}$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: y = |k^2 - 1|x + 5$.

A. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

B. Για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1: y = 2f(2)x - 3$;

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{2}}{f(0) + f(1)} + \frac{2}{f(2) - f(1)}.$$

Δ. Αν $k = \pm\sqrt{3}$ και $\alpha = -5$, να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_2 που έχει συντελεστή διεύθυνσης α και διέρχεται από το σημείο $A(1, k^2 - 5)$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, $x \in A$.

γ) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = f(0)$ και $\alpha_2 = f(2)$,

i) να δείξετε ότι $\omega = 2$, όπου ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου.

ii) να βρείτε τον όρο α_{10} .

iii) να δείξετε ότι $S_{10} = 80$, όπου S_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.

iv) να αποδείξετε ότι: $\alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{20} = 200 + S_{10}$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^2+(\alpha+\beta)x+\gamma, x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\gamma < 0$.

Οι αριθμοί $\alpha, \frac{-3}{2}, \beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και

οι αριθμοί $\frac{1}{2}, \gamma, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

i) Να δείξετε ότι: $\alpha + \beta = -3, \gamma = -1$

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

iii) Να βρείτε τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

iv) Να αποδείξετε ότι: $f(-\sqrt{3})+f(\sqrt{3})>2f(0)$.

Ασκήσεις στην $y=ax$ και $y=ax+\beta$

1. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: y = \frac{\lambda+1}{\lambda-14}x$ με $\lambda \neq 14$ να είναι:

α) παράλληλη στον άξονα $x'x$

β) κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2: y=(\lambda-2)x+10$

2. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: y = (\lambda^2 + |\lambda|)x - 5$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_2: y = 3|\lambda|x + 10$

3. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\lambda-1)x + \lambda^2$ και $\varepsilon_2: y = 2\lambda x$ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_3: y = \frac{\lambda^2+3}{4}x - 1$ και $\varepsilon_4: y = \lambda(x-1) + 8$ είναι κάθετες.

4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = \frac{-|\lambda-1|+2}{|\lambda-1|}x + \frac{3(2+|\lambda-1|)}{|\lambda-1|}, \lambda \neq 1$.

Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η ευθεία (ε)

α) να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2$.

β) να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3x+5$.

γ) να είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{-1}{4}x + 1$.

δ) να διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$.

5. α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(3,1)$, $B(1,3)$ και στη συνέχεια την εξίσωσή της.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) του (α) ερωτήματος και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-2,3)$.
 γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (δ) με τον άξονα $x'x$;

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+4 & , x < -1 \\ 0 & , -1 \leq x \leq 2 \\ -x+3 & , x > 2 \end{cases}$

7. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

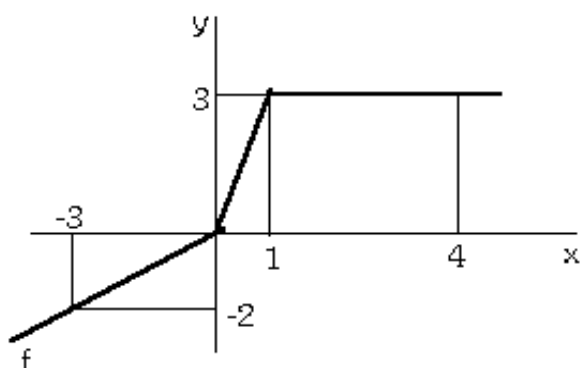
α) $f(x) = |x-1| + 3$

β) $f(x) = |x| + x - 2$

γ) $f(x) = |x-3| + |x| - 2$

δ) $f(x) = |4-x| - |x+1|$

8. Να βρείτε την συνάρτηση f που έχει γραφική παράσταση το διπλανό σχήμα.



9. Να βρείτε την συνάρτηση f που έχει γραφική παράσταση το διπλανό σχήμα.

