

Δίνεται $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει $h(h(x)) + h(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $h(x_0) = 1$.

β) $h(1) = 1$.

γ) $h(h(h(x))) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Επιπλέον δίνεται ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και H μία αρχική της με $H(1) = 0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (h(x))^2 + 2H(h(h(x)))$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της.

β) Αν η h είναι 1-1, να δείξετε ότι $h(x) = 2 - x$, $x \in \mathbb{R}$.