Έστω οι συναρτήσεις f, g : R→R παραγωγίσιμες με g(x)≠0, για τις οποίες ισχύουν:

$f''(x)g(x)=f(x)g''(x)+2e^{x}$ και $g(x)=g'(x)+1$ για κάθε $x\in R$, $f'(0)-1=f(0)=g(0)-2=0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $h(x)=e^{-x}g(x)-e^{-x}$, $x\in R$ και

$\varphi(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)-2e^{x}$, $x\in R$ είναι σταθερές.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g.

Έστω $f(x)=e^{x}-1$ και $g(x)=e^{x}+1$, $x\in R$.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$, $x>-1$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g\left(f^{-1}(x)\right)=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(-1,+\infty)$, που βρίσκεται στο διάστημα (1,2).

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}dx$.