Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και F, G αντίστοιχα οι αρχικές τους με $F(0)=G(0)=0$, για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f^2(0) - 2f(0) + 1 = 0$
- $xg'(x) = x^3 f(x) + 2x^2 F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(0)=0$

i) Να αποδείξετε ότι είναι $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι $g(x) = x^2 F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση G ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να δείξετε ότι η G είναι κυρτή.

iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της G.

v) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1,1)$ τέτοια, ώστε $g(\xi_1) + 3\, g(\xi_2) = 2 \int_{-1}^{1} g(t)\, dt$.

vi) Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει ένα μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $G(x_0) = 2$.

β) $x_0 \rho^2 = \dfrac{2}{\int_0^{\rho} f(t)dt}$ με $\rho \in (0, x_0)$.