Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)} + f(x) = e^x$ για κάθε $x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(0) = 0$.

β1) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

β2) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e f(ln\, x)dx \leq 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = ln(x + e^x)$, $x \geq 0$.

ε) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι κοίλη στο διάστημα $[0, \xi]$ και κυρτή στο διάστημα $[\xi, +\infty)$, όπου

$\xi \in (2, 3)$.