

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} + 1)$, $x > 1$ και $g(x) = x^4$, $x \geq 0$.

α. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

β. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $h(x) = 2\ln(x-1)$, $x > 1$.

β1. Να δείξετε ότι $h = f \circ g$.

β2. Να αποδείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί h^{-1} .

β3. Να λυθεί η εξίσωση $(h^{-1}(h(x)))^3 = 2g(x) - 1$.

β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(h(h^{-1}(x)))^3 = 2g(x) - 1$ έχει ακριβώς δυο λύσεις, τις $x_1 = 1$ και x_2 , όπου $x_2 \in (-1, 0)$.