

i) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) < \alpha x^2 + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$.

ii) Δίνονται f, g συνεχείς στο διάστημα $\Delta = [-1, 1]$ με $f(\Delta) = g(\Delta) = [-1, 1]$ και g γνησίως φθίνουσα στο Δ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [-1, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(g(\xi)) + 2f(\xi) = 3g(\xi)$.