

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ και $g(f(x)) = \sqrt{x^3 + 1}, x \geq -1$.

Επιπλέον f συνεχής στο $[-1, +\infty)$ και $f(0)=1$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

β) Αν $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}, x \geq -1$, να αποδείξετε ότι:

β1) Η f είναι γνησίως αύξουσα.

β2) Ισχύει $f(x) < 1$ για κάθε $x \in [-1, 0)$ και $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με τύπο $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{1-x^2} & , x \in [0, 1) \\ \sqrt[3]{x^2-1} & , x \in [1, +\infty) \end{cases}$.

δ) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(f^{-1}(x^2+1)) - (2x+1)}{x^3 - 4x}$.