

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $A = \int_0^1 (e^x + 1) dx$.

ii) Ισχύει $e^{1-x} + \kappa x \geq A$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $f(x) = Ae^{-x-1} + \kappa x - 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} + ex - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες $x_1 < x_2$ με $x_1 \in (-2, -1)$.

δ) Έστω $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη της στο $+\infty$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$. Να βρείτε το λ ώστε $E(\lambda) = \frac{2}{3}$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\eta\mu x - x}{f^2(x)}$.

στ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , $\alpha > 0$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - \alpha x^2 + x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{x^2 f(x) - ex^3 + x^2 + \alpha^2 x^2} = \frac{1}{e^2}$.