

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} + 1$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$.

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις $K = f \cdot g$ και $\Lambda = \frac{f+g}{2}$.

β) Έστω $K(x) = x - 1, x \geq 0$ και $\Lambda(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.

β1) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\Phi = \frac{K}{\Lambda}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\Phi(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$.

β2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Φ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Φ^{-1} .

β3) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\Phi(x)}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu x - x}{|\Phi(x)|}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi^{-1}(x) - 1}{\eta \mu x}$