

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(\eta\mu x)$, $x \in (0, \pi)$ και $g(x) = e^{2x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $\Phi = g \circ f$.

ii) Έστω $\Phi(x) = -\sigma\upsilon\nu^2 x$, $x \in (0, \pi)$

α) Να δείξετε ότι η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{\pi}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi)$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της Φ .

γ) Να δείξετε ότι η Φ είναι κυρτή στα διαστήματα $(0, \frac{\pi}{4}]$ και $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$ και κοίλη στο $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

δ) Να βρείτε τα σημεία καμπής και να κάνετε τη γραφική παράσταση της Φ .

ε) Αν $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της Φ , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{3\pi}{4}$, να δείξετε ότι $E(\Omega) < \frac{\pi}{8}$.