

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f(\sqrt{x}) = \sqrt{x+1}, \quad x \in [0, +\infty) \text{ και } g(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \text{ αντίστοιχα.}$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2+1}, x \in [0, +\infty)$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

$$\gamma) \text{ Έστω } h(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in [0, +\infty)$$

γ_1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα.

γ_2) Να αποδείξετε ότι $h(x) \geq e$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

γ_3) Να λυθεί η εξίσωση $h(x) = e^2$.

γ_4) Να λυθεί η ανίσωση $h(\ln x) + h(x^2 - 1) \leq 2e$.

γ_5) Να λυθεί η ανίσωση $h(x^2) \geq e^{\sqrt{2}}$.

γ_6) Να λυθεί η εξίσωση $h(x) + h(x^3) = h(x^2) + h(x^4)$.