

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\ln x) = 4(\ln \sqrt{x})^2 + \ln x^\alpha + \frac{e^{2\ln \beta}}{\beta}$, $x > 0$ και $g(x) = \beta x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$,

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta > 0$.

Ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.

Γ. Έστω $\Phi = \frac{f}{g}$ και $H = f + g$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\Phi(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, $x \neq 0$ και $H(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\Phi(x) = H(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα, που βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.