

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να δείξετε ότι έχει δύο σημεία καμπής K, Λ με $x_\Lambda > 0$

iii) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και να σχεδιάσετε τη C_f .

iv) Ένα σημείο A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x > 0$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Έστω B η προβολή του A πάνω στην ευθεία ε και σημεία $\Gamma \in \varepsilon$, $\Delta \in C_f$, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ορθογώνιο. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ τη χρονική στιγμή που το σημείο A περνάει πάνω από το Λ .