

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει, $f(e^x) = xe^{2x} - \alpha e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 \ln x - \alpha x$, $x > 0$.

ii) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x) & , x > 0 \\ \kappa & , x = 0 \end{cases}$.

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $M(0, g(0))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .

A. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\kappa=0$.

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{g(x)} \sin 2026x \right) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu(x-1) - (x-1)}{g(x)+1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)(g(x)+1)}$$