

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f''(x) + (f'(x))^2 = 2e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = 0$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f'(x)e^{f(x)} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Έστω $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\nu \eta \mu \frac{1}{x}}{e^{f(x)}}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

β) Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\nu \eta \mu \frac{1}{x}}{e^{f(x)}} \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές του ν ώστε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\nu - 4)x^5 - x^4 + x + 1}{(\nu - 3)x^5 + x^3 + 1} \in \mathbb{Z}.$$

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^3 \frac{e^{-f(x)}}{e^x + 1} dx$.