

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = \ln 2$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = e^{x-f(x)}.$$

i) Να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

v) Να δείξετε ότι $\ln 4e < \int_0^2 f(x) dx < e^2 - 1$.

vi) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = \ln 2$.