

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f\left(\ln \frac{e}{x}\right) = 3x + 1$ για κάθε $x > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3e^{1-x} + 1, x \in \mathbb{R}$

ii) Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln x, x > 0$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $\Phi = f - g$

Έστω $\Phi(x) = 3e^{1-x} - \ln x + 1, x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η Φ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Φ^{-1} .

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\Phi(x) = \eta\mu(x - 1) + 4, x \in [1, \pi + 1]$

iii) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)-1}$