

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + \frac{1}{x}, x > 0$

i) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο στο $x_0 \in (1, 2)$, του οποίου να βρεθεί το είδος.

ii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, την $x_1=1$ και την x_2 .

iii) Να δείξετε ότι $x_2^2 f(x) \geq (x_2^2 - 2)(x - x_2)$ για κάθε $x > 0$.

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - \pi} + \frac{f^{-1}(\pi) - f^{-1}(x)}{x - e} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (e, π)

v) Να δείξετε ότι $\int_1^{x_0} (f(x) + x) dx = \frac{3 - x_0^2}{4} + \frac{1}{x_0^2}$.