Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - x + \frac{1}{x}, x > 0$

i) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο στο $x_0 \in (1,2)$, του οποίου να βρεθεί το είδος.

ii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, την $x_1=1$ και την x_2.

iii) Να δείξετε ότι $x_2^2 f(x) \geq (x_2^2 - 2)(x - x_2)$ για κάθε x>0.

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - \pi} + \frac{f^{-1}(\pi) - f^{-1}(x)}{x - e} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (e,π)

v) Δίνεται ότι η G είναι μία παράγουσα της f στο (0,+∞). Να δείξετε ότι
$\frac{G(x_0) - G(1)}{x_0^2} < \int_1^{x_0} \ln x \cdot f(x)dx < 0$