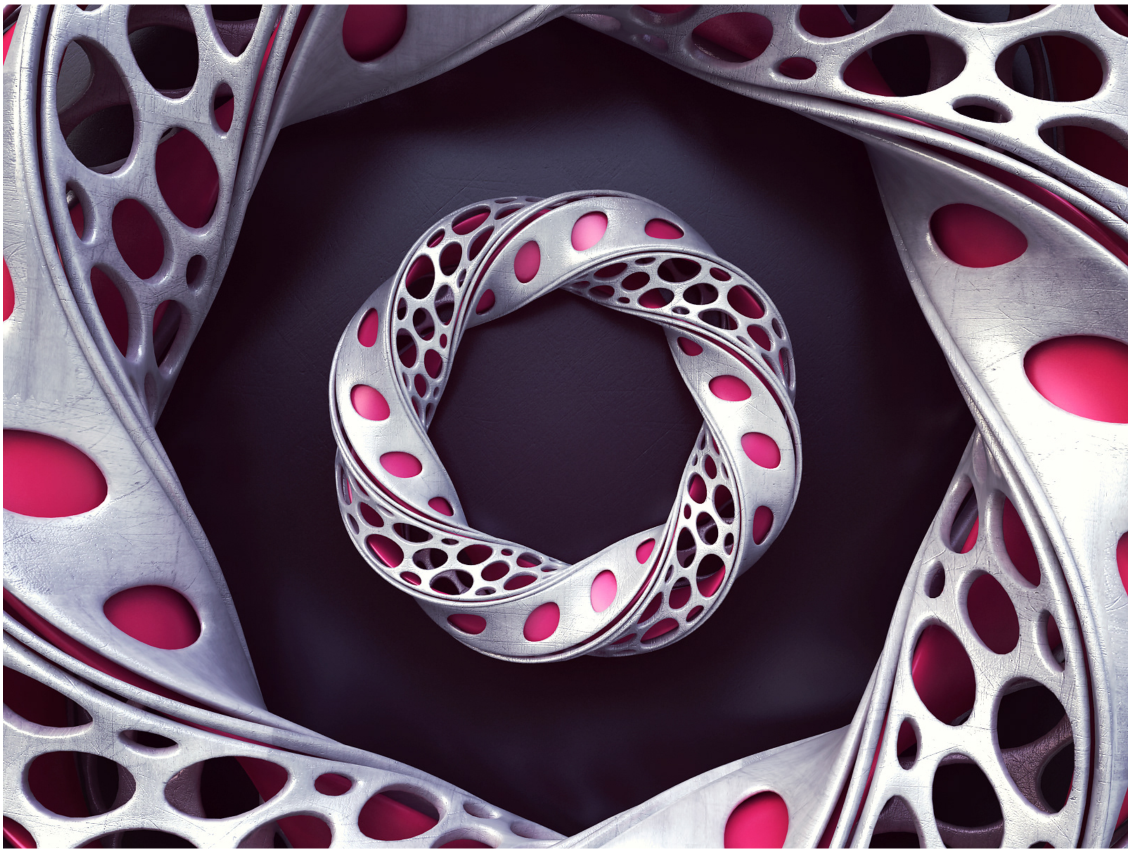
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Επιμέλεια: Γιάννης Βλαχάκης

Έτος 2025

1

Θεωρούμε μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 2, f'(0) = -1$ και για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f''(x) = f(x) - 1$$

Θεωρούμε ακόμη την συνάρτηση:

$$g(x) = (f(x) - f'(x) - 1)\, e^{x} \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f'(x) - f(x) = -1 - 2e^{-x}$

iii) Να βρείτε την συνάρτηση f.

iv) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

v) Αν $a < b$, να αποδείξετε ότι: $-e^{-a}(b-a) < e^{-b} - e^{-a} < -e^{-b}(b-a)$

2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{x} \ , \ \ x \in \mathbb{R} \ \ \text{και} \ \ g(x) = -x^2 - x \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0,1)$ εφάπτεται και στην C_g.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός a που ανήκει στο διάστημα $(-1,0)$ τέτοιος ώστε: $e^{a} + 2a + 1 = 0$

iii) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - g(x) \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $h(x) \geq a^2 - a - 1$

(β΄) Να εξετάσετε πόσες ρίζες έχουν οι εξισώσεις:

$$e^{x} = 2 - x - x^2 \ \ \text{και} \ \ e^{x} + 1 = -x^2 - x$$

3

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \left(x^2 + a\right) e^{-x} \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία $y = -2x + 2$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $\mathrm{M}(0, f(0))$.

i) Να αποδείξετε ότι $a = 2$.

ii) Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης f.

iii) Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 7$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$.

4

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=1$$

i) Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ και $f(0)+f(1)=1$

(β΄) Υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)+x_0=1$

ii) Έστω, επιπλέον, ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)\geq\sqrt{2}x-\frac{1}{2}$$

(α΄) Να βρείτε την $f'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(β΄) Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$

5

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, με $f(0)=1$, για την οποία ισχύει:

$$f'(x)=\varepsilon\varphi^2 x \quad,\quad \text{για κάθε}\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

i) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\varepsilon\varphi x-x+1 \quad,\quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=x$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)\cdot\eta\mu(x-x_0)}$

v) Αφού εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, να λύσετε την ανίσωση:

$$4\cdot f^{-1}\left((x^2-x-2)\cdot(e^x-1)+\frac{\pi}{4}\right)+\pi<0$$

6

Δίνεται μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f\,(ln2)=1$, για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f\,(x)\cdot f'\,(x)=\frac{1+f^2\,(x)}{2}$$

i) Να αποδείξετε ότι: $f\,(x)=\sqrt{e^x-1}\ \ ,\ \ x\geq 0$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{e^x-1}+ln2=x+1$

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,ln2)$ τέτοιο ώστε: $f\,(\xi)=\dfrac{ln2\cdot e^{\xi}}{2}$

iv) Ένα σημείο $\mathrm{M}(x,f\,(x))$ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Αν Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΚ, την χρονική στιγμή που το σημείο Μ είναι το $(ln2,1)$.

7

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}f\,(x)=+\infty\ \ ,\ \ \lim_{x\to-\infty}f\,(x)=-\infty\ \ ,\ \ f'\,(0)=1$$

και επιπλέον για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$f'\,(x)=\frac{2}{1+e^{f(x)}}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\,(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

iv) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f\,(x)+e^{f(x)}=2x+1$

v) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων.

vi) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

vii) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

8

Δίνεται μία συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$, για την οποία ισχύει $f'\,(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν $f\,(0)=2$ και $f\,(1)=4$, να δείξετε ότι:

i) Η ευθεία $y=3$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

ii) Υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $f\,(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

iii) Υπάρχει $x_2\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{M}(x_2,f\,(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$

9

Έστω μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

10

Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\dfrac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$

iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{4} < E < \frac{f(1)}{2}$$

11

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

i) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$

iv) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$

12

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} a + e^x & , \quad x \leq 0 \\ xlnx & , \quad x > 0 \end{cases}$$

i) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό a, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

ii) Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει $a = -1$, τότε:

(α') Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(β') Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

(γ') Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

13

Δίνεται μία συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

ii) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α$(1, 2005)$ και Β$(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}\left(-2004 + f\left(x^2 - 8\right)\right) = -2$$

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon) : y = -\frac{1}{668}x + 2005$

14

Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$$

i) Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 0$ β) $f'(0) = 1$

ii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίον ισχύει:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \lambda \cdot f^2(x)}{2x^2 + f^2(x)} = 3$$

iii) Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > f(x)$, να αποδείξετε ότι:

α) $xf(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$ β) $\int_0^1 f(x)\,dx < f(1)$

15

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = 2 + (x-2)^2 \quad , \quad x \geq 2$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

16

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \frac{x+1}{x-1} - lnx$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\,(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

iii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g\,(x) = lnx \;\text{ και }\; h\,(x) = e^x$$

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $\mathrm{A}(a, lna)$, με $a > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h στο σημείο $\mathrm{B}\left(\beta, e^{\beta}\right)$, με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός a είναι ρίζα της εξίσωσης $f\,(x) = 0$.

iv) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

17

Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με $g\,(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$f'\,(x) = g^2\,(x) \neq 0$$

$$f^2\,(x) + g^2\,(x) = 1$$

i) Να αποδείξετε ότι:

(α′) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $g'\,(x) = -g\,(x) \cdot f\,(x)$

(β′) Η g είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο το 1.

ii) (α′) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

(β′) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O\,(0,0)$.

iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = x$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι: $E = \frac{1}{2} + ln\,(g\,(1))$

18

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = 2\sqrt{x} \cdot (lnx - 2) \;\;,\;\; x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f'\,(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}} \;\;,\;\; x > 0$$

ii) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} f'\,(x)$

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε το σημείο καμπής της.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f', τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x = e^2$.

19

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ με $\theta \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\,(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

iii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδείξετε ότι τα σημεία $\mathrm{A}(x_1, f\,(x_1))$, $\mathrm{B}(x_2, f\,(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f\,(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $(\varepsilon) : y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία (ε).

20

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \begin{cases} x\ln x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης:

$$x = e^{a/x}$$

για όλες τις πραγματικές τιμές του a.

iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f'\,(x+1) > f\,(x+1) - f\,(x)$

21

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = x + 2 + 2\ln x$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

iii) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g\,(x) = \frac{x\ln x}{x+2}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει: $g\,(x) \geq g\,(x_0)$

iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 2$ ισχύει: $f\,(x-2) < 2f\,(x+1) - f\,(x+4)$

22

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = a^x - ln\,(x+1) \;\;,\;\; x > -1$$

όπου $a > 0$ και $a \neq 1$.

i) Αν ισχύει $f\,(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

Για $a = e$:

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

iv) Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f\,(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f\,(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

23

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = ln\left[(\lambda+1)\,x^2 + x + 1\right] - ln\,(x+2) \;\;,\;\; x > -1$$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$.

i) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f\,(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Για $\lambda = -1$:

ii) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\,(x) + a^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό a με $a \neq 0$.

24

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = 2x + ln\left(x^2+1\right) \;\;,\;\; x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x^2 - 3x + 2\right) = ln\left(\dfrac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right)$

iii) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_{-1}^{1} xf\,(x)\,dx$

25

Δίνεται μία συνάρτηση $f\,:\,[0,2]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f'(0)=2f(0)\quad,\quad f'(2)=2f(2)+12e^4\quad,\quad f(1)=e^2$$

$$f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x}\quad,\ \text{για κάθε}\ \ 0\le x\le 2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=3x^2-\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}\quad,\quad 0\le x\le 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$$

iii) Να αποδείξετε ότι $k=6$ και ότι: $g(x)=0\ \ ,\ \ x\in[0,2]$

iv) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=x^3\cdot e^{2x}\quad,\quad 0\le x\le 2$$

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx$

26

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f\,:\,(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(1)=0$, για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$xf'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ είναι ένα προς ένα.

ii) Να δείξετε ότι:

$$f(x)=lnx\quad,\quad x>0$$

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση:

$$h(x)=\frac{f(x)-1}{x}$$

ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv) Να λύσετε στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση: $\left(\dfrac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}=\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$

v) Να μελετήσετε την συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι για κάθε x_1,x_2, όπου $x_2>x_1>0$, ισχύει:

$$\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}\ge-\frac{1}{2e^5}$$

27

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = (x-2)\,lnx + x - 3\ ,\ \ x > 0$$

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\,(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

iv) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος, με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιος ώστε:

$$\xi \cdot f'\,(\xi) - f\,(\xi) = 0$$

και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $\mathrm{M}(\xi, f\,(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

28

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f\,:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2\,(x) - 2f\,(x) = x - 2$, για κάθε $x \in [1,+\infty)$.
- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)\,f\,(x) - \eta\mu\,(x-2)}{\sqrt{x+2}-2} = 4$

i) Να δείξετε ότι $f\,(1) = 1$ και $f\,(2) = 2$.

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g\,(x) = f\,(x) - 1\ ,\ \ x \in [1,+\infty)$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση g διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(1,+\infty)$ και στην συνέχεια να δείξετε ότι:

$$f\,(x) = \sqrt{x-1} + 1\ ,\ \ x \in [1,+\infty)$$

iii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}.

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$d\,(x) = \left|f\,(x) - f^{-1}\,(x)\right|\ ,\ \ x \in [1,2]$$

Η παραπάνω συνάρτηση εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} στο διάστημα $[1,2]$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση d παρουσιάζει μέγιστο σε κάποιο $x_0 \in (1,2)$.

29

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f\,(x) = e^{x-2}\ \text{ και }\ g\,(x) = lnx + 2$$

i) Να βρείτε τις συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

ii) Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την f^{-1}.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2} = lnx + 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(e^{-2}, 2\right)$.

iv) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f\,(x)}{(g \circ f)\,(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g\,(x)}{(f \circ g)\,(x)} = 0$

30

Δίνεται η συνάρτηση:

$$g\,(x) = -lnx$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της g^{-1}.

ii) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $\mathrm{A}(1, g\,(1))$ εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g^{-1}.

iii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$h\,(x) = lnx - e^{-x}$$

iv) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \begin{cases} g^{-1}\,(x) & , \quad x \leq a \\ -g\,(x) & , \quad x > a \end{cases} \text{ , όπου } a > 0$$

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός a ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = a$.

31

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = x + \frac{a}{x} \ , \ x \in \mathbb{R}^*$$

i) Αν η ευθεία $(\varepsilon) : y = -3x + 8$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να αποδείξετε ότι $a = 4$ και να βρείτε το σημείο επαφής.

Για $a = 4$:

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ και λ, με $\kappa < -1 < \lambda$, για τους οποίους ισχύει:

$$f\,(\lambda + 1) - f\,(\kappa + 1) = 8$$

v) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(f\,(e) - 4)\,x^3 - 5x + 7}{(f\,(e) - 5)\,x^2 + x + 3}$

32

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = (x - 1)\,lnx - 1 \ , \ x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

iii) Αν x_1, x_2, με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε: $f'\,(x_0) + f\,(x_0) = 2012$

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g\,(x) = f\,(x) + 1$, με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

33

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x$$

i) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

ii) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2f(x) = x + 2 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

iv) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} [x \cdot lnx \cdot ln(f(x))]$

34

Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = x - ln(e^x + 1) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

iii) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

iv) Δίνεται η συνάρτηση:

$$\varphi(x) = e^x (h(x) + ln2) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της φ, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

35

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(e^x) = e^x + x - 1$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = lnx + x - 1 \ , \ x > 0$$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iv) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}.

v) Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f και στην συνέχεια, στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.

36

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$e^{f(x)} \left(f^2(x) - 2f(x) + 3\right) = x$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Δίνεται ότι:

$$f^{-1}(x) = e^x \left(x^2 - 2x + 3\right) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στην συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}\left(x, f^{-1}(x)\right)$, $\mathrm{B}\left(f^{-1}(x), x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

(α΄) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

(β΄) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$, η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

37

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 0 \\ x^3 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f.

ii) Να βρείτε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο να μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle στην συνάρτηση f.

iii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

iv) Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που άγονται από το σημείο $\mathrm{A}(0, -1)$.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 2$.

38

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f'(x) = \sqrt{36 + f^2(x)}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \left(f'(x) + f(x)\right) e^{-x} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 3\left(e^x - e^{-x}\right) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

39

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{και} \quad g(x) = lnx$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση $f(x) = (g \circ h)(x)$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$

40

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \ , \ x \neq 2$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 2)$ και στο διάστημα $A_2 = (2, +\infty)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα και να βρείτε την αντίστροφή της.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα, να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την οριζόντια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 3$ και $x = 5$.

41

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{ax+\beta}{x-a} \ , \ \text{όπου} \ \beta \neq -a^2$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \neq a$ ισχύει: $f(f(x)) = x$

Για $a = 2$ και $\beta = -5$

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)f(x) + 1 + \sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{2-x}}$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$ και στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iv) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{2f(x)-5}{f(x)-2} + \dfrac{2f(\eta\mu x)-5}{f(\eta\mu x)-2} = 0$

42

Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x) = ln\left(\frac{1}{x} - 2lnx - 1\right)$$

i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_h = (0, 1)$.

ii) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης h.

iii) Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^3 \cdot h^{-1}(x)\right)$

43

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu\sqrt{x} \;,\; x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \;,\; x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f.

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

iii) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[0, \pi]$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{g'(a)}{x-1} - \frac{f(a) - a}{x-2} = 1$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(1, 2)$ για κάθε $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

44

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 (3 - 2lnx) \quad , \quad x > 0$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)(f(x) - 4x + 1)}$

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^e f(x)\, dx$

45

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = x - lnx + e^x \;,\; x \in (1, +\infty)$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

ii) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x}$ ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ iii) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = 2005$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.

iv) Έστω:

$$\Pi = \int_2^e f(x)\, dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)\, dx$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi - 2ln2$.

46

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 lnx & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i) Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι $k = 0$.

ii) Να βρείτε την παράγωγο της f και στην συνέχεια να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να εξετάσετε αν παρουσιάζει καμπή.

iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει: $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{x} > 1 + lnx^2$

v) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(\dfrac{f(x+1)}{(x+1)^2} - \dfrac{f(x)}{x^2} \right) \cdot \eta\mu x \right)$

47

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & , \quad x < 1 \\ e^{x-1} + lnx - 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την συνέχεια.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

v) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

vi) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης: $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

vii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa > 1$, υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, +\infty)$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) = \frac{f(\kappa) + \kappa f(\kappa+1) + (\kappa+1) f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)}$$

48

Δίνεται η συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = 4x^3 + 12\lambda x^2 + (\lambda - 1)x \ , \ x \in \mathbb{R}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = -1$ καμπή.

i) (α΄) Να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

(β΄) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

iii) (α΄) Να βρείτε την αρχική της f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$.

(β΄) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

49

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{x}\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$$

i) Να αποδείξετε ότι:
$$f(x)=ln\left(e^{x}-x\right)\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $ln\left(e^{x}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

50

Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x)=xe^{x^2+1}$$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε: $f(x_0)=2$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=-1$.

iii) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_{-1}^{0}|f(x)|dx=\int_{0}^{1}|f(x)|dx$

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1,f(1))$ και τον άξονα $y'y$, για $x\geq 0$.

51

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+2|x|}\quad \text{και}\quad g(x)=1-\frac{2}{|x|}$$

i) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

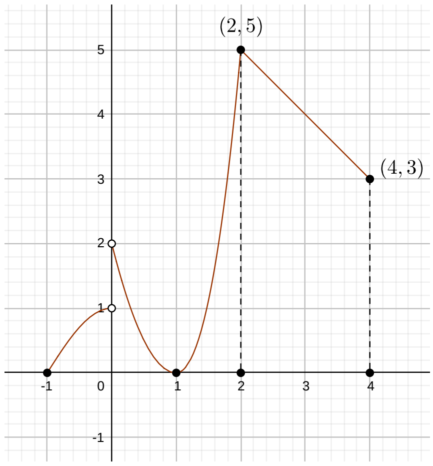
ii) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

iii) Έστω $\Omega(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-\lambda$ και $x=\lambda$, με $\lambda>2$. Να αποδείξετε ότι:
$$\Omega(\lambda)=4\left(1+ln\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)$$

iv) Το σημείο $A(\lambda,f(\lambda))$ απομακρύνεται από τον άξονα των τεταγμένων με ρυθμό $2e$ μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν $\Omega(\lambda)$ την στιγμή που αυτό είναι ίσο με 8.

52

Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης .

ii) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f(x)}$ iii) $\lim\limits_{x\to 1} [f(x) \cdot ln(f(x))]$

iii) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της f και στην συνέχεια να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(3+h)-16}{h}$$

iv) Αν η F είναι μία παράγουσα της f στο διάστημα $\Delta = (0,4]$, να υπολογίσετε τον αριθμό:

$$F(4) - F(2)$$

53

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$g(x) = 1 - e^{-f(x)} \quad \text{και} \quad g'(x) = g(x)$$

Θεωρούμε τα ολοκληρώματα:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx \quad \text{και} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx$$

i) Αν $f(0) = 2I - 2J$, να αποδείξετε ότι: $f(0) = -ln2$

ii) Να υπολογίσετε τα παραπάνω ολοκληρώματα.

iii) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = -ln(1+e^x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

iv) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

v) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx < -\frac{1+ln16}{4}$

vi) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

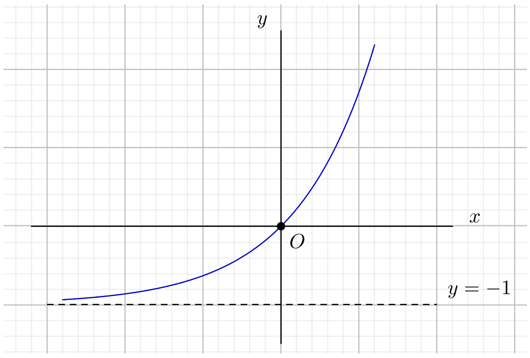
$$f(x_0) + ln(e+1) = (ln(e+1) - ln2) \cdot x_0$$

54

Δίνεται μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f(0) = 0\,,\ f(1) = 1 \ \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = -1$ και δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$

iii) Αν για το ξ του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει $f(\xi) = \frac{1}{4}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$, ως συνάρτηση του ξ.

iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) - x > -\dfrac{3}{4}$

v) Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{f'(x)+1}$

55

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0,+\infty)$. Επιπλέον για την συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι:

- $f(0) = f'(0) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0,+\infty)$ ώστε $f(\rho) = \pi$

ii) Θεωρούμε την ευθεία $(\varepsilon): y = x$ και την συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad , \quad x > 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

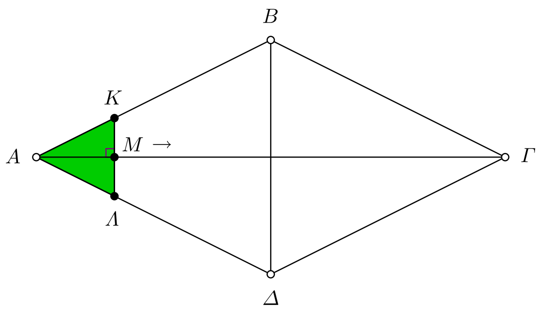
(β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,+\infty)$, στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει την γραφική παράσταση της f.

(δ΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό σημείο $\mathrm{A}(\xi, f(\xi))$, με $\xi > 0$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

56

Οι διαγώνιοι του παρακάτω ρόμβου ΑΒΓΔ είναι ΑΓ $= 2$ και ΒΔ $= 1$. Έστω σημείο Μ που διατρέχει την διαγώνιο ΑΓ κινούμενο από το σημείο Α προς το σημείο Γ. Θέτουμε ΑΜ $= x$.



i) Να εκφράσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ συναρτήσει του x και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που σαρώνεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ κατά την διάρκεια της κίνησής του, δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & , \quad 0 < x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 1 & , \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + \sigma\upsilon\nu x - 1 + x}{f(x) + \eta\mu x}$

iii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} και την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(1, 2)$ και $(2, 1)$.

v) Να λύσετε στο διάστημα $(1, 2)$ την εξίσωση: $ln^2 x + (x-2)^2 = 2$

57

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x-1}{|x|+3}$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να την σχεδιάσετε.

iv) Θεωρούμε την ευθεία $(\varepsilon) : y = ax$, η οποία εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$, με $x_0 > 0$.

(α′) Να δείξετε ότι $a = \dfrac{1}{9}$

(β′) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τον άξονα $y'y$.

58

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = lnx - \frac{1}{x} \ , \ x > 0$$

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $(1, e)$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e$ και $x = 2e$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 0^+} (x \cdot f(x))$

59

Δίνεται μία συνεχής και περιττή συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει:

$$f^2(x) + x^4 = x^2$$

Επίσης δίνεται ότι:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + \sqrt{3}e^x}{4e^x + 2^{x-1}}$$

i) Να δείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x\sqrt{1 - x^2} \quad , \quad x \in [-1, 1]$$

iii) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f.

iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

v) Αν για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $a \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x\sqrt{4 - 4x^2} \leq 2a - 1$, να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο a είναι το 1.

60

Έστω $0 < a < 1$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = lnx - ax + 1 \quad , \quad x > 0$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο ρίζες ξ_1 και ξ_2.

iii) Αν $\xi_1 < \xi_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1 < \rho_2$, τέτοιοι ώστε:

$$\frac{1}{f'(\rho_1)} - \frac{1}{f'(\rho_2)} = \frac{\xi_1 - \xi_2}{lna}$$

iv) Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$ είναι ίσο με $\frac{\xi_2 - \xi_1}{2}$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = \frac{3}{a}$

61

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = ln(x+2)$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση $h = f \circ g$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση h ως προς την μονοτονία.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της h^{-1}.

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h^{-1}(x) + \frac{g(x)}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

62

Δίνεται μία συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f(1) = 1$, για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$xf(x) + x^2 f'(x) = 1$$

Θεωρούμε ακόμα και την συνάρτηση:

$$g(x) = xf(x) - lnx \quad , \quad x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{lnx + 1}{x} \quad , \quad x > 0$$

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $e^{2\pi}$ και $(\pi \cdot e)^e$

v) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2 - f(x)) + f(x - lnx) = 2$

63

Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο.

i) Αν ισχύει ότι $\int_1^3 lnx \cdot f(t)\, dt \leq 10(x-1)$, για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι: $\int_1^3 f(x)\, dx = 10$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 5$.

iii) Έστω ότι η f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι:

$$\int_{f(0)}^{5} f^{-1}(x)\, dx = \int_0^{\xi} f(x)\, dx$$

όπου ξ είναι ο αριθμός του προηγούμενου ερωτήματος, να δείξετε ότι:

$$5 < 2\int_0^{\xi} f(x)\, dx < 15$$

iv) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^1 xf''(x)\, dx = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\rho) = 0$.

64

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $h(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, για τις οποίες για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει:

$$f(h(x)) = x - 2\sqrt{x} + 3$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = (x-1)^2 + 2 \quad , \quad x \in [0,1]$$

ii) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}}{f(x)-2}$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f^{-1}(x)}{3-x} & , \quad 2 \le x < 3 \\ a & , \quad x = 3 \end{cases}$$

iv) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε η συνάρτηση g να είναι συνεχής.

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = e^{x-2} - 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,3)$.

65

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \beta - 2\eta\mu x & , \quad -\pi \le x \le 0 \\ 2 + a\sqrt{x+1} & , \quad 0 < x \le 8 \end{cases}$$

i) Αν η f είναι συνεχής και η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $A(3, f(3))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta) : x + 2y = 5$, να δείξετε ότι $a = -2$ και $\beta = 0$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο A.

ii) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f, να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

iii) Αν $\lambda \in [0, 2\pi)$, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu\lambda$ για τις διάφορες τιμές του λ.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης h με:

$$h(x) = xf\left(x^2\right) \quad , \quad x \in \left[0, 2\sqrt{2}\right]$$

, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \sqrt{3}$.

v) Δίνεται το σημείο $\Sigma(5,2)$. Να βρείτε το σημείο $M(x_0, y_0)$, με $x_0 \in (0,8]$, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, που απέχει την μικρότερη απόσταση από το Σ.

vi) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΣ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ.

66

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει τρία σημεία καμπής εκ των οποίων τα δύο είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την σχεδιάσετε.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x = 1$ και $y = 1$.

67

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = ln\,(x + 1)$$

Έστω μία συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(g \circ f)\,(x) = \frac{2x + 2}{x + 2} \quad , \ \text{για κάθε} \ \ x > -1$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$g\,(x) = \frac{2e^x}{1 + e^x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση:

$$h\,(x) = ln\left(\frac{x}{2 - x}\right) \quad , \quad x \in (0, 2)$$

iii) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης h.

iv) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h στο σημείο όπου αυτή εμφανίζει τον μικρότερο δυνατό συντελεστή διεύθυνσης.

v) Ένα σημείο $\mathrm{M}(x\,(t)\,, y\,(t))$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης h ώστε $0 < x\,(t) < 2$ και $x'\,(t) > 0$. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της h στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του.

68

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$h\,(x) = \frac{\sqrt{x - 1} - 1}{\sqrt{x - 1}} \quad , \quad x > 1 \quad \text{και} \quad g\,(x) = e^{2x} + 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση $\varphi = h \circ g$

ii) Να δείξετε ότι η φ αντιστρέφεται και να βρείτε την $f = \varphi^{-1}$

iii) (α΄) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
(β΄) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) (α΄) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.
(β΄) Να χαράξετε πρόχειρα στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} και τις ασύμπτωτες αυτών, εφόσον υπάρχουν.

69

Δίνεται η συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1} - ln(x+1)$$

i) (α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

(β΄) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική θέση ακροτάτου, σε σημείο x_0, το οποίο ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$ και να βρείτε το είδος του ακροτάτου.

ii) (α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει: $f(x) \geq 1 - x$

(β΄) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_{1/e}^{2/e} \frac{f(x)}{x^2 - x} < -ln2$

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{lnf(x)}{f(x) - f(x_0)}$

iv) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $\varphi : (-1, 3) \to \mathbb{R}$ με:

$$\varphi(x) = F(2-x) - F(x)$$

όπου F μία παράγουσα της f στο $(-1, 3)$.

(α΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ στο οποίο η εφαπτομένη της διαπερνά την γραφική της παράσταση.

(β΄) Να λύσετε την εξίσωση: $\varphi(x) = (ln4 - e)(x - 1)$

70

Για τον πραγματικό αριθμό a και την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύουν τα παρακάτω:

- $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + a \quad , \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + \eta\mu 3x}{x} = 3$

i) Να δείξετε ότι $a = 0$.

ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της γραφικής παράστασης της f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\Delta(0, -1)$. Ποια είναι τα σημεία επαφής των εφαπτομένων αυτών με την γραφική παράσταση της f;

iii) (α΄) Αν $M(x, f(x))$ είναι ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f, να δείξετε ότι η απόσταση του Μ από το σημείο $\Sigma(3, 0)$ δίνεται από την συνάρτηση:

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + \frac{x^4}{16}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(β΄) Να δείξετε ότι το πλησιέστερο σημείο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Σ είναι ένα από τα σημεία επαφής του προηγούμενου ερωτήματος.

iv) Αν Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = x - 1$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω και στην συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία $x = 1$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

v) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης της f που να ισαπέχουν από το σημείο Σ.

71

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = lnx - a^{x-1} + 2 \quad , \quad x > 0$$

όπου $a > 0$ και $a \neq 1$. Για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) \leq 1$, για κάθε $x > 0$.

i) Να δείξετε ότι $a = e$.

ii) (α′) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

(β′) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{f'(2f(|x+3|)-1)} = 1$

iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$2ln\left(x^2+2\right) - f\left(x^2+1\right) + 4 > f\left(x^2+3\right) + 2e^{x^2+1}$$

72

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 1 & , \quad x < 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x & , \quad 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 1$ στο $-\infty$.

i) (α′) Να αποδείξετε ότι $a = 0$.

(β′) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ii) (α′) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(β′) Να προσδιορίσετε το πρόσημο της f στο διάστημα $(-\infty, 2\pi]$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_{-1}^{\pi} |f(x)|\, dx$

iv) Έστω ότι το σημείο $M(x, f(x))$, με $0 \leq x < \frac{3\pi}{4}$, κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω ακόμη τα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B\left(\frac{3\pi}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. Να βρείτε την θέση του σημείου M για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου AMB γίνεται μέγιστο.

73

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτες.

iv) Να χαράξετε την γραφική παράσταση της f.

74

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-1)\,lnx \quad , \quad x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$.

ii) Έστω η συνάρτηση:

$$h(x) = x^x \quad , \quad x > 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = e^3 \cdot x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1 και x_2 με $0 < x_1 < x_2$

(β΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = e^3 \cdot x$

iii) Έστω οι συναρτήσεις:

$$g(x) = lnx \quad , \quad x > 0 \quad \text{και} \quad \varphi(x) = \frac{1}{x-1} \quad , \quad x > 1$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των φ και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, του οποίου η τετμημένη x_0 βρίσκεται στο διάστημα $(2, e)$.

(β΄) Αν $E(a)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και φ, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = a$, με $a > x_0$, να αποδείξετε ότι:

$$E(a) = ln\left(\frac{x_0(a-1)}{x_0 - 1}\right) - x_0 + 2$$

iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \geq 1$ ισχύει: $\displaystyle\int_a^{a^2} e^x \cdot f\left(\frac{x}{a}\right) dx \geq \int_1^a f(x)\left(a^2 x + a\right) dx$

75

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει: $4f(x) + x - 2 \geq 0$

iii) Αν $a > 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{af'(a) - f(2a) + f(a)}{x^2 - 1} - \frac{4f(a) + a - 2}{x - 2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

iv) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$

v) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2f(x)-1} = 2(1 - f(-x))$

76

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{και} \quad g(x) = lnx$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση $h = f \circ g$

ii) Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h^{-1}(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

77

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x - 1 + ln(x+1) \ , \ x \in (-1, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & , \ x > 0 \\ 2 & , \ x = 0 \end{cases}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

iii) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\eta\mu(f(x)) \cdot ln\dfrac{1}{f(x)} \right)$

iv) Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(a, f(a))$ και $\mathrm{B}(a+1, f(a+1))$, όπου $a > 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) Τα σημεία Ο,Α,Β δεν είναι συνευθειακά.

(β΄) Υπάρχει $\xi \in (a, a+1)$ τέτοιο ώστε: $(\mathrm{OAB}) = \dfrac{a(a+1)}{2} \cdot g'(\xi)$, όπου (OAB) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

78

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \beta & , \ x \le 1 \\ \sqrt{x} + a - 2\beta & , \ x > 1 \end{cases}$$

i) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι $a = -\dfrac{3}{2}$ και $\beta = 0$.

Για $a = -\dfrac{3}{2}$ και $\beta = 0$:

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της, εφόσον αυτά υπάρχουν.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο διάστημα $(1, +\infty)$ και να βρείτε την αντίστροφή της.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 2$.

79

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^x (f'(x) + f(x)) = 1 + f(x) + xf'(x)$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = (e^x - x) f(x) - x$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x-1}{e^x - x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της f, με $x_1 < 1 < x_2$, στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες στον οριζόντιο άξονα.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)\left(x^2+1\right) + 2xf'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

v) Να αποδείξετε ότι το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα έχει μήκος μεγαλύτερο του 2.

80

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{-x^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = lnx \quad , \quad x > 0$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

ii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και να βρείτε την αντίστροφή της.

iii) Να βρείτε την συνάρτηση $g = h \circ f$

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(1, g(1))$ και τον άξονα $x'x$.

81

Έστω μία συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $f(e) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ και για την οποία ισχύει:

$$x^2 \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} + 4 \cdot \frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)} = 4x \quad , \quad \text{για κάθε } x > 1$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = ln^2 x \quad , \quad x > 1$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) και τις ευθείες $x = e$ και $x = e^2$.

iv) Ένα σημείο $M(x, f(x))$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f. Έστω N η προβολή του M στον άξονα $x'x$. Αν το σημείο N απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα 3 μονάδες ανά δευτερόλεπτο, να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $M\hat{O}N$ την χρονική στιγμή που το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(e, f(e))$.

82

Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ g)(x) = -x^2 + 6x - 3 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου η g είναι η συνάρτηση

$$g(x) = x - 1 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση:

$$h(x) = \frac{ax^2 + \beta x + 2}{x} \quad , \quad x > 0$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει ως ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon) : y = 4x - 1$.

i) Να αποδείξετε ότι:
$$f(x) = -x^2 + 4x + 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) Να δείξετε ότι $a = 4$ και $\beta = -1$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) + \dfrac{f^2(x)}{g(x)} = e$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

83

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x + 1}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}(0, f(0))$.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει: $4f(x) \leq x + 6$

iv) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

v) Να λύσετε την εξίσωση: $f(\eta\mu x - x) = \dfrac{\eta\mu x - x + 6}{4}$

84

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = \sqrt{x} + ax \quad , \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2} \quad , \quad x \neq 0$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ στο σημείο της $\mathrm{A}(1, \varphi(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon) : y = \frac{1}{2}x$

i) Να αποδείξετε ότι $a = 0$ και να βρείτε την συνάρτηση $g = f \circ \varphi$

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x$ είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$.

85

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)+1}{x-2} = -2$
- $\left| f(x) - f(y) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \right|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ είναι η ευθεία $(\zeta) : y = -2x + 3$

ii) Να αποδείξετε ότι:

(α΄) Η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

(β΄) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 \ , \ x \in \mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$\varphi(x) = 2^{-x} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

έχει με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f ακριβώς δύο κοινά σημεία τα $A(0,1)$ και $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της (ζ) και τον άξονα $y'y$.

v) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \left[\left(e^{x-\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot ln\left(f(x)\right) \right]$

86

Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{4x^2} \cdot f^2(x) = 1$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^{-2x^2} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

ii) (α΄) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(β΄) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

(δ΄) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f. (Δίνεται ότι $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$)

iii) Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(-x, f(-x))$ της γραφικής παράστασης της f, καθώς και τα σημεία $\Gamma(-x, 0)$ και $\Delta(x, 0)$, όπου $x > 0$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο, όταν τα σημεία A και B ταυτίζονται με τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

87

Έστω $a > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = ln^2 x - ln\left(ax\right) \quad , \quad x > 0$$

Δίνεται ότι: $lnx \geq a\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $a = 1$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) (α′) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) = -\frac{\sqrt{3e}}{12}$$

(β′) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to \sqrt{e}} \frac{1 - x_1}{4f\left(x\right) + 1}$

iv) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^e f\left(x\right) dx$

88

Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f\left(0\right) = 0$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'\left(x\right) = \int_0^1 f\left(x\right) dx - e^{-x}$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x\right) = e^{-x} - \frac{2x}{e} - 1 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g\left(x\right) = f\left(-x\right) - f\left(x\right) - \frac{4x}{e} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο καμπής της.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει: $e^x \geq \sqrt{x^2 + 1} + x$

iv) Να λύσετε στο $\left(0, \pi\right)$ την εξίσωση: $συνx \cdot σφx + ln\left(ημ^2 x\right) = 0$

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left(0, 1\right)$ ώστε: $g'\left(x\right) = \sqrt{g^2\left(x\right) + 2g\left(x_0\right)}$

89

Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύουν:

- $f''(x) > 1 - e^{f''(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = 1$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

(α′) $f(x+1) - f(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β′) $f'(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Θεωρούμε επιπλέον την συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^2 + 4x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να είναι παράλληλη σε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g.

90

Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left(f^2(x) + 2f(x) \cdot e^x + e^{2x}\right) \cdot \left(f'(x) + e^x\right) = 2e^{6x}$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^{2x} - e^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1 + 4e^{2x} = 4\left(e^x + ln\left(\eta\mu^2 x\right)\right)$ είναι αδύνατη.

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = x^3 - 3x + b \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού b η εξίσωση $f(g(x)) = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

91

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

iii) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iv) Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

92

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\,(x) = \left(10x^3 + 3x\right) \cdot \int_0^2 f\,(t)\,dt - 45$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f\,(x) = 20x^3 + 6x - 45 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) Δίνεται ακόμη μία συνάρτηση g, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$g''\,(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g'\,(x) - g'\,(x-h)}{h}$$

iii) Αν για την συνάρτηση f του πρώτου ερωτήματος και την συνάρτηση g του δεύτερου ερωτήματος ισχύει ότι:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g\,(x+h) - 2g\,(x) + g\,(x-h)}{h^2} = f\,(x) + 45$$

και επιπλέον $g\,(0) = g'\,(0) = 1$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$g\,(x) = x^5 + x^3 + x + 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

93

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f\,(x) = x^3$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση ένα προς ένα και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f\,(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$

iii) Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x\,(t)$ και $y = y\,(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y\,(t)$ του Μ είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x\,(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'\,(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

iv) Αν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{1} f\,(x)\,g\,(x)\,dx$$

94

i) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$

ii) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν την σχέση:

$$f^2\,(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2$$

iii) Αν

$$f\,(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \;,\; x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

iv) Να λύσετε την εξίσωση: $f\,(|\eta\mu x| + 3) - f\,(|\eta\mu x|) = f\,(x+3) - f\,(x)$ όταν $x \in [0, +\infty)$.

95

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{lnx}{x} + 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ \dfrac{lnx}{x-1} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ii) Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

iii) (α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

(β΄) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$$

iv) Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)\,F(x) > xF(1) + F\left(x^2\right) \quad , \quad \text{για κάθε } x > 1$$

96

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & , \quad x < 0 \\ x^2 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

iii) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^1 f(x-1)\,dx$

v) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(1 - συν^2 x\right) < x^4 + x^2$

97

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x+1)\,e^{1-x} + x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

ii) (α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

(β΄) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(x) \geq x$

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iv) (α΄) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.

(β΄) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} και τις ευθείες $y = x$ και $x = e$.

98

Έστω $|a| \leq 2\sqrt{5}$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + ax + 5}$$

Για την συνάρτηση f ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \beta x) = -1$$

i) Να αποδείξετε ότι $a = -2$ και $\beta = 1$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to+\infty} \frac{xf(x) + 7x^2 + 4x \cdot \eta\mu x}{x^2 f(x) - x^3 + 3x^2 + 2x^3 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}$

Για $a = -2$:

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στην συνέχεια να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$e^{f(x)-1} = \lambda$$

v) Να βρείτε το σημείο Μ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

vi) (α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει: $f(x) \leq (x-1) f'(x) + 2$

99

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = lnx - \frac{e}{x} + x \quad , \quad x > 0$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

ii) (α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

(β΄) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(2e - f(x)) > e$

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $lnx - (ex+1)\left(\frac{e}{x} - \frac{1}{e}\right) = 2$

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x > 0$$

(α΄) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι, αν για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq a$, για κάθε $x > 0$, τότε ισχύει: $\frac{a}{2} + e \geq 1$

100

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\varphi(x) = x - \eta\mu x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει: $\sqrt{x} \geq \eta\mu x$

iii) Θεωρούμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με συνεχείς παραγώγους στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f'(x) \neq g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - g(x) + x}{x} = 2$

iv) (α΄) Να δείξετε ότι $f(0) = g(0)$

(β΄) Να δείξετε ότι $f'(0) - g'(0) = 1$

v) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) > g(x)$, ενώ για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) < g(x)$.

vi) Να λύσετε στο διάστημα $[0, +\infty)$ την ανίσωση: $f\left(\sqrt{x}\right) - f(\eta\mu x) > g\left(\sqrt{x}\right) - g(\eta\mu x)$

vii) Αν ισχύει η ισότητα:

$$f(a) + \int_{f(a)}^{g(a)} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} dx = \int_{f(a)}^{g(a)} (f(x) - g(x))\, dx + g(a)$$

να αποδείξετε ότι $a = 0$.

viii) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$p(x) = e^{\sqrt{x}} - 1 \quad , \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad q(x) = \eta\mu x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων και την ευθεία $x = \pi$.

101

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x - 1}$$

i) Να εξετάσετε αν $f = g$. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες.

ii) Να εξετάσετε, αν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$

iv) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

v) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^4 + \frac{4}{3} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο να προσδιορίσετε.

102

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f\,(x) = x^2 + 1 \ , \ \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g\,(x) = \sqrt{x-2} \ , \ \ x \in [2, +\infty)$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ και τύπο:

$$(g \circ f)\,(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

ii) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g \circ f$ στο $+\infty$.

iii) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 2$ της συνάρτησης:

$$h\,(x) = \frac{(g \circ f)\,(x)}{x-2} \ , \ \ x \in A - \{2\}$$

iv) Έστω η συνάρτηση:

$$\varphi\,(x) = \begin{cases} (g \circ f)\,(x) & , \quad x \in A \\ 1 - x^2 & , \quad x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 2]$ για την συνάρτηση: $t\,(x) = \varphi\,(x) \cdot \eta\mu\,(\pi x)$

103

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\,(x) \cdot f'\,(x) = \frac{1}{2} \ , \ \ \text{για κάθε} \ \ x > 0$$

και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(1, 1)$. Έστω το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f\,(x) = \sqrt{x} \ , \ \ x \in [0, +\infty)$$

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α την μικρότερη απόσταση.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και τον άξονα $x'x$.

iv) Δίνεται επιπλέον μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$0 < g\,(x) < 1 \ , \ \ \text{για κάθε} \ \ x \geq 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f\,(x) = g\,(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

104

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = x^2 - 2x\ln x \ , \ \ x > 0$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$2\ln x = x - \frac{\lambda}{x}$$

105

Δίνονται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = (x-1)\,ln\left(x^2 - 2x + 2\right) + ax + \beta$$

όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon) : y = -x + 2$. Η ευθεία (ε) εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $\mathrm{A}(1,1)$.

i) Να αποδείξετε ότι $a = -1$ και $\beta = 2$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\,ln\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) + \dfrac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

v) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

106

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) + f(1-x) = 1 \ , \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$, ισούται με $\frac{1}{2}$.

iii) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^1 2f^2(x)\,dx < 1$

iv) Να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$f\left(\eta\mu^2 x\right) + f\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right) = f\left(\varepsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}\right)$$

107

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot lnx \ , \ x > 0$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

ii) Έχει η εξίσωση $f(x) = -2e^{-1/2}$ λύση στο $(0, +\infty)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iii) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f δέχεται κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = \sqrt{x} \cdot f(x) \ , \ x > 0$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{2}$ και $x = 1$.

108

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)(1 - x) = x\ln x \ , \ \text{για κάθε} \ x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1 - x} & , \ x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ -1 & , \ x = 1 \end{cases}$$

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$, για κάθε $x > 0$

iii) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει κρίσιμα σημεία.

iv) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$. Αν $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω, να αποδείξετε ότι:

$$\ln 4 < E(\Omega) < \ln 3\sqrt{3}$$

v) Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση: $2f\left(x^2\right) = f\left(x^3\right) + f\left(x^4\right)$

109

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{\ln x} \ , \ x \in [1, +\infty)$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε σημείο της με τετμημένη x_0, όπου $x_0 \in (1, +\infty)$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $f^2(x) \le f(x)$

iv) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$, να αποδείξετε ότι:

$$1 < E < \frac{e^2 - 1}{2\sqrt{2e}}$$

110

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - e^x)\, e^{-x} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

ii) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες συντεταγμένων.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x = 1$.

iv) Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = f(x) + 1 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

111

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $g(0) = 0$. Η σύνθεση της συνάρτησης g με την συνάρτηση f είναι συνάρτηση ένα προς ένα και ισχύει:

$$g(x) \cdot x \cdot f'(x) - g(x)\left(f(x) - x^2\right) = 0 \ , \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι ένα προς ένα.

ii) Να αποδείξετε ότι $xf'(x) - f(x) = -x^2$, για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2x - x^2 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

iv) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

112

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-3} \ , \ x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ ισχύει: $(f \circ f)(x) = x$

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right)$

113

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} \ , \ x \in (1, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = e^x \ , \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$

ii) Αν:

$$(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \ , \ x > 0$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι ένα προς ένα και να βρείτε την αντίστροφή της.

iii) Αν:

$$\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \ , \ x > 1$$

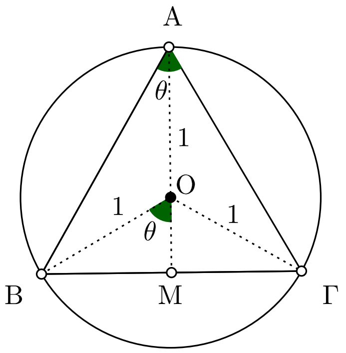
να μελετήσετε την συνάρτηση φ ως προς την μονοτονία.

iv) Για την συνάρτηση φ του προηγούμενου ερωτήματος, να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x \to 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$$

114

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 1$, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και ισχύει $B\hat{O}M = \theta$, τότε:



i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ, είναι:

$$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\,\eta\mu\theta \;\;,\;\; \theta \in (0, \pi)$$

ii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

iv) Για τις γωνίες θ_1, θ_2 του προηγούμενου ερωτήματος, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_1)$$

115

Έστω $\lambda > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - ln\lambda & , \quad x \leq 0 \\ \eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x & , \quad 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

iii) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

iv) Ένα σημείο $M(a, f(a))$, με $a \leq 0$, κινείται στην γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ, δίνεται από τον τύπο:

$$a'(t) = -\frac{a(t)}{3}$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β την χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο Μ έχει τετμημένη -1.

116

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)\,x_0 + e - 1$$

ii) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right]$$

όπου x_0 το σημείο στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

iii) Αν x_0 είναι το σημείο που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$, για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

iv) Αν x_0 είναι το σημείο που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι για κάθε $k \in (\rho, 1)$ ισχύει:

$$f(x_0) > f(\rho)\,(f'(k) + 1)$$

117

Έστω $\lambda > 0$. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x\ln x - \ln(\lambda x) \;\;,\;\; x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x^x \;\;,\;\; x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακροτάτου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

ii) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει:

$$x^x \geq \lambda x \;\;,\;\; \text{για κάθε } x > 0$$

Έστω ότι $\lambda = 1$:

iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iv) Θεωρούμε επιπλέον την συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{cases} x^x & , \quad x > 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

(α΄) Η h είναι συνεχής.

(β΄) Η εξίσωση:

$$x^{2020} \cdot \left(3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt \right) + (1 - x) \cdot \int_0^1 h(1 - t)\,dt = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

118

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x+1) = (x+1)\,e^{-x}$$

i) Να δείξετε ότι:

$$f(x) = xe^{1-x} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

iv) Να βρείτε:

(α′) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(β′) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

119

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1 & , \quad x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad 0 < x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

όπου $a < -3$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii) (α′) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(β′) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.

iii) Να δείξετε ότι στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iv) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει: $f(x) \geq -1$

120

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $lnx = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο:

$$f(x) = lnx_0\,(x+1) - lnx - 1$$

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = 0$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$g(x) = xe^{-x} \ , \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

iv) Έστω η συνάρτηση $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$ με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

121

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f\,(x) = x^2 + a \quad \text{και} \quad g\,(x) = x + \beta$$

όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(f \circ g)\,(x) = x^2 - 2x \;, \; \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι $a = \beta = -1$.

ii) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ένα προς ένα και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

iii) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση:

$$\varphi\,(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)\,(x)}$$

iv) Έστω η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f\,(x) + 2 \leq h\,(x) \leq g\,(x) + 2 \;, \; \text{για κάθε } x \in [0,1]$$

(α′) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1} h\,(x) = 2$

(β′) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{h\,(x) + 7} - 3}{h^2\,(x) - 4}$

122

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f\,(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x + f'\,(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x - 1 = 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g\,(x) = f\,(x) \cdot \eta\mu x - \varepsilon\varphi x \;, \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι σταθερή. Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$f\,(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \;, \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\,(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2, με $\rho_1 < \rho_2$.

iv) Να αποδείξετε ότι $f'\,(\rho_2)\,(4\rho_2 - \pi) > 4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 είναι η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος.

123

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3$$

i) Να αποδείξετε ότι από το σημείο $\mathrm{N}(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

ii) Έστω $(\varepsilon) : y = 3x - 2$ η μία από τις δύο εφαπτομένες του προηγούμενου ερωτήματος. Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(0, a)$ με $-2 < a < 2$. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με την γραφική παράσταση της f.

iii) Ένα υλικό σημείο $\mathrm{A}\left(x, x^3\right)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο Α ξεκινά από το σημείο $\mathrm{N}(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Α είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

124

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x - 1}{x}\right)^2 \quad , \quad x < 0$$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = g \circ f^{-1}$ είναι η:

$$h(x) = \frac{x - 1}{x} \quad , \quad x < 0$$

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(e^{-h(x)} \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

125

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = e^x \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + ax \ , \ a \in \mathbb{R}$$

για την οποία το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{-g(x)} + ax\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $a = -1$.

ii) Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-1, 0)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon) : y = x + 1$. Στην συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

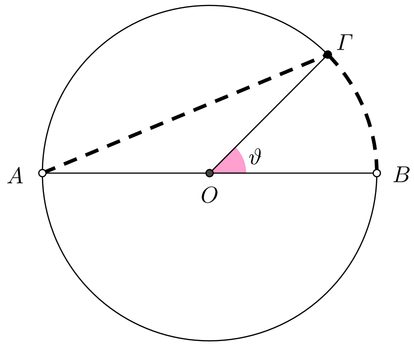
$$\frac{f(x-1) - x}{x - k} + \frac{f(x) - g(x)}{x - k - 1} = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{R} - \{1\}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(k, k+1)$.

126

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα $R = 1km$. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_1 = 2km/h$ και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_2 = 4km/h$. Ο μαθητής θέλει να κάνει μία βόλτα στην λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β. Ο μαθητής μπορεί:

- (Ι) Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = \vartheta$, $\vartheta \in (0, \pi)$ και στην συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\mathrm{B}}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- (ΙΙ) Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β $(\vartheta = 0)$.
- (ΙΙΙ) Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β $(\vartheta = \pi)$.



i) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας ϑ (σε ακτίνια) είναι:

$$t(\vartheta) = \frac{\vartheta}{4} + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \;,\; \vartheta \in [0, \pi]$$

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R, το μήκος S του τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία ϑ (σε ακτίνια), είναι $S = R \cdot \vartheta$

ii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας ϑ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

iii) Σε ποια από τις επιλογές (Ι), (ΙΙ) ή (ΙΙΙ) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

127

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{και} \quad g(x) = lnx$$

i) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2).

iii) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $\varphi = g \circ f$.

iv) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x) = ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Αν:

$$\varphi(x) = lnx - ln(x-1) \;,\; x \in (1, +\infty)$$

να εξετάσετε αν $\varphi = h$.

128

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ και $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

i) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $h = f \circ g$.

ii) Αν

$$h(x) = (x-1)^2 \ , \ x \in [0, 1]$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι ένα προς ένα και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h.

iii) Έστω

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x} \ , \ x \in [0, 1]$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{1-x} & , \quad x \in [0, 1) \\[2ex] \dfrac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών στο $[0, 1]$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu a$, όπου $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{2}$.

129

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , \quad x > -1 \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , \quad x \leq -1 \\ x^3 - x & , \quad x > -1 \end{cases}$$

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

iii) Έστω $y = 2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του προηγούμενου ερωτήματος. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$. Την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $B(3, 4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E την χρονική στιγμή t_0.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \dfrac{f(-x)}{1 - x^3} \right]$

130

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0$
- $f'(x) \cdot f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) (α΄) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

(β΄) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$$

iii) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και στην συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

131

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1 & , \quad -1 \le x \le 0 \\ x^x & , \quad 0 < x \le \dfrac{2}{e} \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii) (α΄) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

(β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$$

iv) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_{1/e}^{2/e} x f(x)\, dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{2/e} - \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$

132

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - ln(3x)$$

i) (α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1 < 1 < x_2$.
(β΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

iii) Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$

iv) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $2f(x) + ln3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

133

Δίνονται οι συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x} \quad \text{και} \quad h(x) = lnx$$

i) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f = g \circ h$.

ii) Έστω,

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x}\ ,\ x > 0$$

(α΄) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
(β΄) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \dfrac{\pi}{e}$

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{συν\left(1 + x^2\right)}{f(x)}$

134

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{και} \quad h(x) = lnx$$

i) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f = g \circ h$.

ii) Έστω,

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}\ ,\ x > 1$$

Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iv) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = συνx$ έχει λύση στο $(1,+\infty)$.

135

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & , \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + a & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\int_2^3 xf(x)\,dx = 1$.

i) Να αποδείξετε ότι $a = 0$.

ii) (α΄) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

(β΄) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και την γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv) Έστω $(\varepsilon) : y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

136

Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$.
- $f(2) = 2$.
- $f'(2) = 1$.
- $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$.

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f:

(α΄) έχει κοινό σημείο με την ευθεία $(\varepsilon_1) : y = -x + 2$ και

(β΄) εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon_2) : y = x$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

iii) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{f(x)}{x-1} > \dfrac{2 - f(x)}{2 - x}$, για κάθε $x \in (1, 2)$.

iv) Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $f(x) \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in [1, 2]$.

(β΄) $1 < \int_1^2 f(x)\,dx < \dfrac{3}{2}$

137

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,2)\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=ln(2-x)-\frac{1}{x}+k\ ,\ \ k\in\mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1}=l\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $k=3$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<1<x_2$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{1}{3}$.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi,f(\xi))$, με $\xi\in(0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με:

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

iv) Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1)=G(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι:

(α′) $F(x_2)+G(x_1)=0$

(β′) Η εξίσωση $x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1,x_2) .

138

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\begin{cases}-e^{-x}+2 & ,\quad x<0\\ e^{x} & ,\quad x\geq 0\end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_1,f(x_1))$ με $x_1>0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση $y=ex$.

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής Α, ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο $B(x_0,f(x_0))$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της (ε), ανάμεσα στις ευθείες $x=x_0$ και $x=1$. Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_0.

iv) Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο Β του δεύτερου ερωτήματος. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΟ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f, έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;

139

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

i) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \dfrac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1} = f$.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x)$

140

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = 2lnx - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = x - 2$$

i) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $h = f \circ g$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα.

iii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της h^{-1}.

iv) Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 2]$ για την συνάρτηση:

$$\varphi(x) = \left(h^{-1}(x) - 3\right)\left(x^3 - 8\right)$$

141

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^{\lambda} & , \quad 0 \le x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda & , \quad x \ge 2 \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στην συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

iii) (α΄) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0, 3]$.

(β΄) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.

iv) Κινητό σημείο Μ ξεκινά από το σημείο $A(2, 0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 0.5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\omega = A\hat{O}M$ την χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο Μ θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

142

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με:

$$f\,(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \lambda x & , \quad x < -1 \\ \dfrac{ax + a}{x + a} & , \quad x \geq -1 \end{cases}$$

όπου $a > 1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι $a = 2$ και στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $\mathrm{A}(-1, 0)$.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iv) Να αποδείξετε ότι $f\,(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

143

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- $|g\,(x) - g\,(y)| \leq (x - y)^2$, για κάθε $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $g\,(x) = f\,(x) \cdot \eta\mu x$, για κάθε $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

i) Να αποδείξετε ότι:

(α′) Η συνάρτηση g είναι σταθερή για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(β′) Ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f\,(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$$

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και να βρεί τε το σύνολο τιμών της.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f\,(a) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{f^{-1}\left(\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{2}} = 0$$

με $a \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

iv) (α′) Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$H\,(x) = \frac{1}{2} ln\,(1 - \sigma\upsilon\nu x) - \frac{1}{2} ln\,(1 + \sigma\upsilon\nu x) \quad , \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

είναι μία παράγουσα της συνάρτησης $h\,(x) = \dfrac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(β′) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = 2$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

144

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\frac{lnx+ax}{x}$$

όπου $a\in\mathbb{R}$. Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0,+\infty))=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$.

i) Να αποδείξετε ότι $a=1$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

iii) (α′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

(β′) Να λύσετε την ανίσωση $2^x\leq x^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

iv) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x=-ln2$ και $x=0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

145

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iv) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

146

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} e^x\cdot\eta\mu x & , \quad x<0 \\ \sqrt{x^2+x} & , \quad x\geq 0\end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon):y=x+\frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi\in(-\pi,0)$.

iv) Ένα κινητό σημείο Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ, $x'(t)$ να είναι θετικός για κάθε $t\geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του Μ.

147

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$$

όπου $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

i) Να βρείτε την τιμή του a.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $a = -6$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) Έστω

$$g(x) = x + f(x) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Αν $\xi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $\mathrm{A}(\xi, f(\xi))$ και $\mathrm{B}(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

148

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2} \ , \ x \neq 0$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$g(x) = f\left(\sqrt{x}\right) \quad \text{και} \quad h(x) = (f \circ g)(x)$$

iv) Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{g(x)}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

149

Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ και μία παράγουσα, F, της f στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$xf(x) = 2F(x)\, lnx \ , \ \text{για κάθε } x > 0$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $\mathrm{M}(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{F(x)}{x^{lnx}} \ , \ x > 0$$

είναι σταθερή.

ii) (α′) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{lnx}$

(β′) Να αποδείξετε ότι $F(1) = 1$ και $F(x) = x^{lnx}$, για κάθε $x > 0$.

iii) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση F και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $F\left(x^2\right) = F(x) - (x-1)^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

iv) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τις ευθείες $x = 1$, $x = e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E > 2e - 3$.

150

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \frac{x^2}{2} - lnx \;\;,\;\; x > 0$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $lnx \leq \dfrac{x^2 - 1}{2}$

iii) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g\,(x) = \frac{x}{2} - \frac{lnx}{x} \;\;,\;\; x > 0$$

Έστω σημείο Μ της γραφικής παράστασης της g και Κ,Ν οι προβολές του Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το Μ βρίσκεται στην θέση $\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ και στην συνέχεια αρχίζει να κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της g. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του $x\,(t)$ είναι ίσος με $\frac{1}{8}$ μονάδες ανά sec. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΚΜΝ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων, την χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στην θέση $(2, g\,(2))$.

iv) Έστω η συνάρτηση:

$$h\,(x) = \frac{1}{2x} \;\;,\;\; x > 0$$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και ότι στο σημείο αυτό έχουν κοινή εφαπτομένη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

151

Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\,:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $xf'\,(x) = συνx - f\,(x)$, για κάθε $x > 0$.
- $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{4}{\pi^2}$

i) Να δείξετε ότι:

$$f\,(x) = \frac{ημx}{x} \;\;,\;\; x > 0$$

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii) Θεωρείστε τον ισχυρισμό:

« Αν μία ευθεία είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f, τότε δεν μπορεί να έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της f. »

Είναι σωστός ή λανθασμένος ο παραπάνω ισχυρισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

iv) Έστω $0 < a < 1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημx = ax$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

v) Έστω,

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} f\,(x)\,dx$$

Να δείξετε ότι:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{συνx}{x^2} dx = \frac{1}{\pi} - I$$

152

Θεωρούμε μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με:

$$f\,(x) \geq 0 \;\;,\;\; \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε ακόμη την συνάρτηση:

$$h\,(x) = \frac{x}{f\,(x)}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 0^+} h\,(x) = +\infty$$

i) Να αποδείξετε ότι: $f\,(0) = f'\,(0) = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $\mathbb{R}^*$.

iii) Να αποδείξετε ότι: $h\,(2) > \dfrac{4}{f\,(1) + f\,(3)}$

iv) Έστω ότι $f\,(-1) \,=\, 2$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(-1, f\,(-1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $135°$. Έστω ακόμη E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = -1$. Να αποδείξετε ότι:

$$E < 1 + ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

153

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f \,:\, [0,2] \,\to\, \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,2]$ και η δεύτερη παράγωγος της f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- $f''\,(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [0,2]$.
- $f\,(0) = 0$ και $f'\,(1) = 2$.
- $\displaystyle\int_0^1 x \cdot f''\,(x)\,dx = 1$

i) Να αποδείξετε ότι: $f\,(1) = 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,2]$ και στην συνέχεια να δείξετε ότι για κάθε $x \in [0,2]$ ισχύει: $f\,(x) \geq 2x - 1$

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $\mathrm{M}(x_0, f\,(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με $0 < x_0 < 1$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $45°$.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$2f'\,(\xi) \cdot (1 + f\,(\xi)) = 3$$

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0,2)$ τέτοιο ώστε:

$$f\,(\rho) \cdot (\rho - 2) = \left(2 - \int_0^2 f\,(x)\,dx\right) \cdot (f'\,(\rho) - 2)$$

154

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \frac{1 - lnx}{x} \quad , \quad x > 0$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{1-\lambda x}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

iii) Έστω x_1, x_2, με $x_1 < x_2$, οι δύο διαφορετικές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης που προκύπτουν όταν $\lambda = -\frac{1}{16}$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = x_2$ είναι ίσο με:

$$E\,(\Omega) = \frac{1}{2^9} \cdot (x_2^2 - x_1^2)$$

iv) Η τετμημένη ενός σημείου $\mathrm{M}(a, f\,(a))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, όπου $a > 0$, αυξάνεται με ρυθμό $2\frac{\text{μον}}{sec}$. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(a,0)$ και $\mathrm{B}(0, f\,(a))$. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ την χρονική στιγμή που η τετμημένη του σημείου Μ είναι ίση με 4 μονάδες.

155

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f\,(0) = 1$
- $f\,(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'\,(x) = \dfrac{(1 + e^x)\,f\,(x)}{1 + f\,(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f\,(x) = e^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$g\,(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^*$$

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ ισχύει ότι: $\dfrac{a + 2\beta}{3} < ln\left(\dfrac{e^a + 2e^\beta}{3}\right)$

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την παραβολή $y = x^2 + 1$ και την ευθεία $x = 1$.

156

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = lnx \ , \ x > 0 \ \text{ και } \ g(x) = e^x + 1 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η σύνθεση της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f είναι η συνάρτηση:

$$(f \circ g)(x) = ln(e^x + 1) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι αντιστρέψιμη και στην συνέχεια να βρείτε την συνάρτηση $h = (f \circ g)^{-1}$.

iii) (α΄) Να μελετήσετε την συνάρτηση h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(β΄) Να μελετήσετε την συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

157

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{ax^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ \text{ όπου } \ a \in \mathbb{R}^*$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του a ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $a = 3$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu(f(x))}{ln(f(x) - x)}$

iv) Έστω E το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(x, f(x))$, με $x > 0$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό $2cm/sec$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E, όταν $x = 2cm$.

158

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + ax \ , \ \text{ όπου } \ a \in \mathbb{R}$$

Για την συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$e^{f(x)-1} + x \geq \sqrt{x^2+1} \ , \ \text{ για κάθε } \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $f'(0) = -1$

(β΄) $a = -1$

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

iii) Έστω F μια αρχική συνάρτηση της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε στο διάστημα $[0, \pi]$ την εξίσωση:

$$F\left(\eta\mu^2 x\right) + F\left(3\eta\mu^2 x\right) = 2F\left(2\eta\mu^2 x\right)$$

iv) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^1 x\eta\mu(1 - f(x))\,dx < \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6}$

159

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \frac{x}{x-1} \;,\; x \neq 1 \quad \text{και} \quad g(x) = e^x \;,\; x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η σύνθεση της g με την h είναι η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \;,\; x \neq 0$$

ii) (α′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(β′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 1$ υπάρχει $\xi \in (1, a)$ ώστε:

$$\left(f(a) - f(1)\right)\left(e^{\xi} - 1\right)^2 = (1 - a)\, e^{\xi}$$

iii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right) \right]$

160

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x - 3 + 2\lim_{x \to 0} f(x)$$

i) Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$.

iii) (α′) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις:

$$g(x) = x\ln x \quad \text{και} \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

(β′) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h και την ευθεία $x = 2$.

iv) Αν για τους θετικούς αριθμούς a, β ισχύει:

$$\ln\left(a^{2a} \cdot \beta^{2\beta}\right) + (a-2)^2 + (\beta - 2)^2 = 2$$

να δείξετε ότι η ευθεία $y = ax + \beta - 5$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - 2g(x)}{x}$$

161

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^{x+k} \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 - x$$

όπου $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) - g(x) \geq (k+2)x + e^k$$

i) Να αποδείξετε ότι $k = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$ εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Αν για τους αριθμούς a, β ισχύει ότι $-1 < a < \beta < 0$:

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\left(\int_a^\beta \frac{f(t)}{g(t)} dt\right) x^3 = (e^x - e)(g(a) - f(\beta))$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(f(a)) \cdot \eta\mu x}{xf(x) - x^2 - x}$

162

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \beta x + \beta &, \quad x \leq 0 \\ e^x + a &, \quad x > 0 \end{cases}$$

i) Να δείξετε ότι $a = 0$ και $\beta = 1$.

ii) Ένα σημείο $M(x, y)$, με $x < 0$, κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f. Να δείξετε ότι την χρονική στιγμή t_0, που το M βρίσκεται στην θέση $M_0(-1, -1)$, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του ως προς τον χρόνο t είναι τετραπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του.

iii) (α΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα $\rho \in (0, +\infty)$.

(β΄) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$ που η εφαπτομένη της C_f σε αυτό να διέρχεται από το σημείο $M_0(-1, -1)$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{f(x)} \cdot \eta\mu(f(x))}{f(-x) - 2}$

163

Δίνονται οι συναρτήσεις $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με:

$$h(x) = lnx \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1-x}{x+1}$$

i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $f = h \circ g$ και να βρείτε τον τύπο της.

ii) (α΄) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(β΄) Να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f^{-1} στο σημείο της $O\left(0, f^{-1}(0)\right)$.

iv) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x \to -\infty} f^{-1}(x)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x)$

164

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) + 2f(x)\sqrt{4-x} = 2(x-2)$, για κάθε $x \in [0, 4]$.
- Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1, 3]$.

i) Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x) = e^{-x}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ και να βρείτε την σχετική θέση των γραφικών τους παραστάσεων.

iv) Αν $x \in (2, 4)$, να λύσετε την ανίσωση: $f(e^{-x}) \cdot \left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{4 - f(x)}\right) < 2f(x) - 4$

v) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f^{-1}(x-1)}{e^x f(x) - 1} = +\infty$

165

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{1-x} + 1 & , \quad x < 1 \\ \sqrt[3]{x-1} + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα και να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}.

ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f^{-1} που είναι κάθετες στην ευθεία $y = -\frac{1}{3}x + 1$

iii) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(e^{1-x}\right) < x$

iv) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu\left(f^{-1}(x)\right)}{x}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f^{-1}(x) - f(x)\right)$

166

Θεωρούμε μία συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g(1)=0$, για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$g\left(g'(x)\right)+g(x)=0$$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$g'\left(g'(x)\right)=x$$

ii) Να δείξετε ότι $g'(1)=1$ και ότι:

$$g(x)=lnx \ , \ x>0$$

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(|x|)-g(|\eta\mu x|)}{|x|-|\eta\mu x|}$

iv) Αν

$$f(x)=-\frac{1}{x} \ , \ x\neq 0$$

τότε να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

167

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 ln^2\left(f(x)\right)dx+\frac{1}{2}=\int_0^1\sqrt{x}\cdot ln^2\left(f(x)\right)dx$$

i) Να δείξετε ότι: $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, για κάθε $x\in[0,1]$

ii) Να δείξετε ότι το σημείο Α$(1,e)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f και να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) στο σημείο A, τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$.

iv) Θεωρούμε ένα σημείο Μ$(x(t), y(t))$, $t\geq 0$, το οποίο κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Ν, τότε να βρείτε την ταχύτητα του σημείου Ν την χρονική στιγμή που το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Α.

v) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_a^{a+1} f\left(\frac{1}{x}\right)dx>\frac{1}{2}\cdot\int_a^{a+2} f\left(\frac{1}{x}\right)dx$, για κάθε $a>0$.

168

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$$

i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το $D_f=[0,1]$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=a$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

iv) Να λύσετε την εξίσωση: $(f\circ f)(x)=0$, $x\in[0,1]$.

v) Να βρείτε την παράγωγο της f.

169

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και η συνάρτηση g με:

$$g\,(x) = \sqrt{1 - x^2}\ \ ,\ \ x \in [-1, 1]$$

Για τις συναρτήσεις f και g ισχύει:

$$(g \circ f)\,(x) = |\sigma\upsilon\nu x|\ \ ,\ \ \text{για κάθε}\ \ x \in [0, \pi]$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$|f\,(x)| = |\eta\mu x|$$

ii) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.

iii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iv) Δίνεται η συνάρτηση $h : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με:

$$h\,(x) = \frac{1}{f\,(x) - x}$$

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} h\,(x)$

v) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία $\mathrm{A}(4, 5)$ και $\mathrm{B}(6, 5)$.

170

Θεωρούμε την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathrm{A} = \mathbb{R}$ και την συνάρτηση:

$$g\,(x) = \ln x + 1\ \ ,\ \ x > 0$$

Για τις συναρτήσεις f και g ισχύει:

$$(f \circ g)\,(x) = \frac{\ln\,(e \cdot x)}{e \cdot x}\ \ ,\ \ \text{για κάθε}\ \ x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f\,(x) = x \cdot e^{-x}$$

και να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

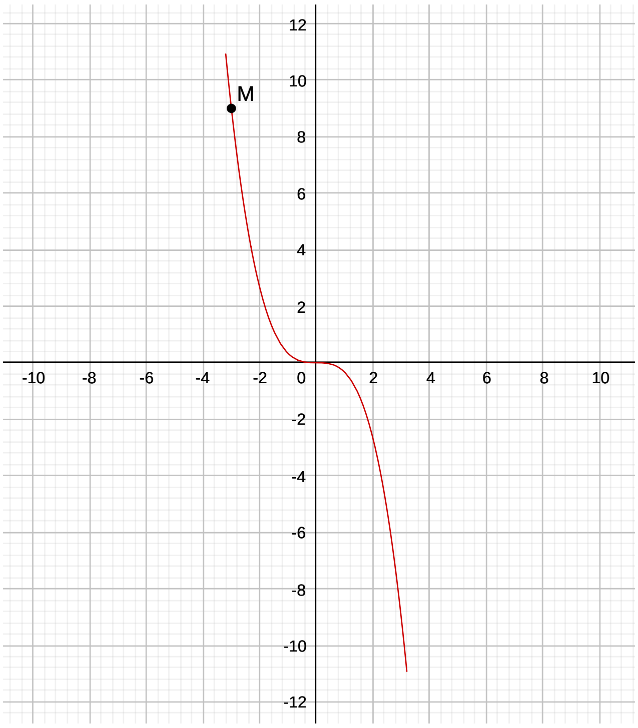
iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε την γραφική παράσταση της f.

iv) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -x$.

171

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f\,(x) = -\frac{1}{3}x^3 \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$



i) Ένα υλικό σημείο ξεκινά από το σημείο $\mathrm{M}(-3, 9)$ και κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f κατευθυνόμενο προς την αρχή των αξόνων, έτσι ώστε η τετμημένη του να μειώνεται με ρυθμό δύο μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίον μεταβάλλεται η τεταγμένη του υλικού σημείου την χρονική στιγμή που αυτό βρίσκεται στο σημείο $\mathrm{A}\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}. Στην συνέχεια να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να το συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της f^{-1}.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση:

$$g\,(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-3x} & , \quad x < 0 \\ -\sqrt[3]{3x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

iii) (α΄) Να ορίσετε την συνάρτηση $h = f + g$, να δείξετε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a, η γραφική παράσταση της συνάρτησης h τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον μία φορά, σε σημείο $(x_0, 0)$, με $x_0 \in (-a, a)$.

(γ΄) Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{h\,(x)}$

(δ΄) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο 0.

172

Θεωρούμε μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f\,(0) = 0$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'\,(x) = (e^x - 1) \cdot e^{-f(x)}$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f\,(x) = ln\,(e^x - x)\ \ ,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Στην συνέχεια να δείξετε ότι $f\,(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

ii) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \left(f\,(x) \cdot \eta\mu \left(\dfrac{1}{f\,(x)} \right) + \dfrac{\eta\mu\,(f\,(x))}{f^2\,(x)} \right)$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f\,(x) - x)$

iii) Αν $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ και $\alpha < \beta < \gamma$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς ρίζες της εξίσωσης:

$$\frac{f\,(\alpha)}{x - \alpha} + \frac{f\,(\beta)}{x - \beta} + \frac{f\,(\gamma)}{x - \gamma} = 0$$

στο διάστημα (α, γ) .

iv) Να αποδείξετε ότι:

(α΄) Η εξίσωση $e^x = x + e$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < 0 < \rho_2$.

(β΄) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2} (e^x - 1)\sqrt{f\,(x)}dx$

173

Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'\,(x) > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\dfrac{f\,(x) - f\,(0)}{x} > 1$

ii) Να δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

(α΄) Η εξίσωση $f\,(x) = -x$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

(β΄) Ισχύει ότι: $0 < \lim\limits_{x \to \rho} \dfrac{\eta\mu\,(x - \rho)}{f\,(x) + \rho} < 1$

iv) Αν για την ρίζα ρ του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει $\rho > 0$ και x_0 είναι ρίζα της f, τότε να δείξετε ότι αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα $x'x$ και του αξονα $y'y$ και ισχύει ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της ευθείας $y = -x$ και του άξονα $y'y$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της ευθείας $y = -x$ και των ευθειών $x = \rho$ και $x = x_0$, τότε:

$$E = \frac{x_0^2}{2}$$

174

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^{3x} + e^{x} - 2 \ , \ x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ h(x) = lnx \ , \ x > 0$$

i) Να ορίσετε την σύνθεση της h με την g.

ii) Αν f είναι η συνάρτηση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

iii) Να λύσετε την ανίσωση: $h^3(x) < 10 - h(x)$

iv) Να λύσετε την εξίσωση: $\left(e^{x-2} + x - 2\right)^3 + e^{x-2} = 4 - x$

175

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + \beta x - 1 & , \quad x \leq 1 \\ x^2 - \beta x + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

i) Αν $f(1) = 1$, να δείξετε ότι $a = \beta = 1$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{f(-x)} \cdot \eta\mu x \right)$

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_0 με $x_0 \in (0,1)$.

iv) Για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} \left[\eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{f(x)}\right) + \frac{1}{f(x)} \right]$$

176

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2 και η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω:

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x+3} - 2} = -8$
- $6\eta\mu(x-3) \leq (x-3)f(x) \leq x^2 - 9$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε ακόμη και την συνάρτηση:

$$g(x) = x^2 - 3x + 5 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να δείξετε ότι $f(1) = -2$ και $f(3) = 6$.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της g σε ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (1,3)$.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνάρτηση ένα προς ένα.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $3f(\xi) = f\left(\frac{5}{2}\right)$

177

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(-1) + f^2(1) = 2[f(-1) + f(1)] - 2$
- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνάρτηση ένα προς ένα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{x^3 f(x)}{x^6+1} - \dfrac{f(x)-1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Έστω ότι για την συνάρτηση f ισχύει επιπλέον ότι:

$$(f(x)-1)^2 + x^2 = 1 \ , \ \text{για κάθε } x \in [-1,1]$$

iii) (α΄) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + 1 \ , \ x \in [-1,1]$$

(β΄) Να κάνετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-2}{\eta\mu(x^2)}$

v) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(\eta\mu x) - x}{x}$, αφού πρώτα δείξετε ότι είναι καλώς ορισμένο.

178

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \eta\mu x \ , \ x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ g(x) = \sqrt{1-x^2} \ , \ x \in [-1,1]$$

Θεωρούμε ακόμη την συνάρτηση:

$$\varphi(x) = 2(x+1) - g^2(x) \ , \ x \in [-1,1]$$

i) Να ορίσετε την σύνθεση της f με την g και να εξετάσετε αν αντιστρέφεται.

ii) Να αποδείξετε ότι η φ αντιστρέφεται και να βρείτε την φ^{-1}. Στην συνέχεια να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ και φ^{-1}.

iii) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(g\circ f)(x) - 1}{f(x)}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi^{-1}(x)+1}{x^2}$ iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-1}{g(x)}$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - (g\circ f)(x) + 1 \ , \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

iv) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της h.

v) Αν για την συνάρτηση $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$t(x)(t(x) + 2x) \le h^2(x) - x^2 \ , \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} t(x)$

179

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x+a)^2 - 1 \ , \ x \in [-1, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 1 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι ίση με 2, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $a = 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}.

iii) Να βρείτε την συνάρτηση $f^{-1} \circ g$

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1} \circ g)(x)}$

180

Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 3x$$

Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση:

$$g(x) = e^x - \frac{7}{3} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο -1.

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)(f(x) - 2x + 1) + x(x-1)}{x - 1 + |f(x)|}$

iii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε ένα τουλάχιστον σημείο που έχει τετμημένη $x_0 \in (-1, 0)$.

181

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + \beta x - 2}{x - 1} & , \quad x < 1 \\ \delta & , \quad x = 1 \\ \sqrt{x^2 - x} - \gamma x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

ii) Αν η f είναι συνεχής, να βρείτε τα a, β, δ.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{lnx}{f(x)} + \frac{e^x}{x - 1} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

182

Δίνεται μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-5}{x} = 4$
- $2\eta\mu(x-1) \le (x-1)f(x) \le x^2-1$, για κάθε $x \in (0,1)$

Θεωρούμε ακόμη τις συναρτήσεις:

$$h(x) = f(x) - lnx - 4 \text{ και } g(x) = e^{f(x)-4}\ ,\ \ x \in (0,1)$$

i) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης h.

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

iv) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\lambda+4} = e^{f(x)}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε:

$$h(x_1) = \frac{3h\left(\frac{1}{3}\right) + 2h\left(\frac{1}{4}\right) + h\left(\frac{1}{5}\right)}{6}$$

183

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \lambda x \text{ και } g(x) = \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6}$$

για τις οποίες ισχύουν: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

i) Να δείξετε ότι $0 < \mu < 1$ και $\lambda > 1$.

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = e^{-x} - \lambda x - \mu\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της h τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

iii) Για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος υπολογίστε (αν υπάρχει) το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu x - x}{h(x)\cdot(x-x_0)}$$

iv) Για $\lambda = 2$ υπολογίστε το όριο: $\lim\limits_{x\to +\infty} [(f(x) - 3x)\cdot \eta\mu(2x+1)]$

184

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu^3 x$$

i) Αν $\Delta = [0, \pi]$, τότε:

(α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

(β΄) Να βρείτε το $f(\Delta)$.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 = 10 + \sigma\upsilon\nu^3 x$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ.

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+1}{x}$

iii) (α΄) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

(β΄) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{f^4(x) + 2f^2(x) + 3} - f^2(x)\right]$

185

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(lnx) = \dfrac{x-1}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.
- $g(x) = ln(x+1) - ln(1-x)$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

και στην συνέχεια ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να δείξετε ότι $f^{-1} = g$.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to +\infty} [(f\circ f)(x) + (g\circ f)(x)]$

186

Δίνεται η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{6}{3 + x^2}$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν $a, \beta \in [-1, 1]$ τέτοια ώστε: $f(a) + f(\beta) = ln\left(\frac{125}{8}\right)$

iii) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

iv) Δύο κορυφές ενός ορθογωνίου βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$ και οι δύο άλλες πάνω στην γραφική παράσταση της f. Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x f(x)\, dx$

187

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = ln(x+1) + ln(x-1) - \frac{2}{x} \text{ και } g(x) = ln\left(\left(x^2-1\right)e^{-2/x}\right)$$

i) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Σε αντίθετη περίπτωση βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες.

ii) Να δείξετε ότι ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της f^{-1}.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα , (έστω k) και να βρείτε το μοναδικό διάστημα της μορφής $(a, a+1)$, με a ακέραιο στο οποίο ανήκει.

iv) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\varphi(x) = xe^x \text{ και } \sigma(x) = e^{2/x}$$

έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (a, k) όπου a και k οι αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος.

188

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 \ , \ x \leq 1 \text{ και } g(x) = \sqrt{x+1} \ , \ x \geq -1$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση $h = g \circ f$

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 1^-} \left[\frac{1}{h(x)} \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$

iii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της f^{-1}.

iv) (α΄) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(β΄) Αν $0 < a < 1$, να υπολογίστε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{f(a) - f^{-1}(-a)}{\eta\mu x - x}\right]$

189

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-a} - a & , \ x \leq 1 \\ -lnx & , \ x > 1 \end{cases}$$

i) Να δείξετε ότι $a = 1$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x+1} + \frac{x^2 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

iv) Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \eta\mu\vartheta$, για τις διάφορες τιμές του $\vartheta \in \mathbb{R}$.

190

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, οι οποίες είναι συνεχείς στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και για τις οποίες ισχύουν:

- $g^2(x) = 4\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $f^2(x) = g(x) + 1$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $f(0) = -1$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

i) Να δείξετε ότι: $g(x) = -2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ii) Να δείξετε ότι: $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

iii) Να βρείτε τον μοναδικό $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ για τον οποίο το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

iv) Θεωρούμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κορυφές τα σημεία $A(0, -1)$, $B(0, 1)$, $\Gamma\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ και $\Delta\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$.

(α΄) Να δείξετε ότι οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο $K(x_0, f(x_0))$.

(β΄) Να βρείτε τα διαστήματα του $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία ΒΔ.

(γ΄) Να λύσετε στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ την εξίσωση: $\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot f(x) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 0$

191

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x-2) - 2}{x - 2} = 2$
- $f(0) = 2$
- η f' είναι γνησίως αύξουσα

i) Να αποδείξετε ότι $f(2) = f'(2) = 2$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f(\xi)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Αν F είναι μία αρχική της f και $f(\xi) > 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$F(x) + 2x = x^2 + F(1)$$

έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

192

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και:

$$f'(x) = \begin{cases} \left(x^2 + x\right)e^x & , \quad x \le 0 \\ -\eta\mu x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

i) Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} \left(x^2 - x + 1\right)e^x & , \quad x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

ii) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

iii) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνεται από την οριζόντια ασύμπτωτή της στο $-\infty$ σε άπειρα σημεία, τα οποία και να προσδιορίσετε.

iv) Να δείξετε ότι:

(α′) Η ευθεία $y = -x$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-2, -1)$.

(β′) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ευθεία $y = -x$ και τον άξονα $y'y$ υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$.

193

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(2x - 1) = 4x(1 - x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $e^{g(x)} - kx = \lambda$, με $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g στην αρχή των αξόνων.

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 1 - x^2 \ , \ x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ g(x) = ln(x + 1) \ , \ x > -1$$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και ότι:

$$g^{-1}(x) = e^x - 1 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

iii) Αν $h(x) = \left(f + g^{-1}\right)(x)$, να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) (α′) Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 + 1} < \frac{x^2 - 1}{e}$$

(β′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (-1, 0)$.

v) Έστω Μ σημείο που κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της h και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $\frac{1}{2}\,\frac{\text{μονάδες}}{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου στο οποίο, η εφαπτομένη της C_h στο $\mathrm{M}(a(t), h(a(t)))$ τέμνει τον άξονα $y'y$, την χρονική στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται από το σημείο καμπής $\mathrm{K}\left(ln2, 2 - ln^2 2\right)$.

194

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f\,(x) = x^3 + 6x\,(lnx - 2) + 2 \;,\; x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.

ii) Αν x_0 είναι η θέση του ελαχίστου της f, να αποδείξετε ότι $x_0 \in (1, 2)$.

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x\left(x^2 + 6lnx\right) = 2\,(6x - 1)$

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

195

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \geq 0$ ισχύει:

$$f\,(x) + \int_0^1 f\,(x)\,dx = e^{\sqrt{x}} - ex - \frac{e}{2} + 2$$

i) Να δείξετε ότι:

$$f\,(x) = e^{\sqrt{x}} - ex \;,\; x \geq 0$$

ii) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{f\,(x)}$

iii) (α′) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(β′) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f\,(1))$ και να εξετάσετε αν έχει και άλλα κοινά σημεία με την C_f.

iv) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$, ισχύει:

$$\frac{e^{\sqrt{x}} - 2e\sqrt{x}}{\sqrt{x}} < \frac{2}{e}\left[f\,(x + e) - f\,(x)\right] < \frac{e^{\sqrt{x+e}} - 2e\sqrt{x+e}}{\sqrt{x+e}}$$

v) Θεωρούμε συνάρτηση $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$g\,(x) = F\,(\varepsilon\varphi x) - F\,(ex)$$

όπου F, μία παράγουσα της f. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g δέχεται τουλάχιστον μία οριζόντια εφαπτομένη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

196

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = 2lnx + x^2 - 1 \;,\; x > 0$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

iii) Να βρείτε το πρόσημο της f.

iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

v) Να λύσετε την εξίσωση: $f\,(x) + f\left(x^2\right) = f\left(x^5\right) + f\left(x^{10}\right)$

vi) Αν $a, \beta > 0$ και $\left(\frac{a}{\beta}\right)^2 = e^{(\beta-a)(\beta+a)}$, να αποδείξετε ότι $a = \beta$.

197

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(e) = 0$
- $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} - e^{f(x)/x}$, για κάθε $x > 1$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

ii) Να δείξετε ότι:
$$f(x) = -x \cdot ln(lnx) \quad , \quad x > 0$$
και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $(lnx)^x = \frac{1}{m}$, $x > 1$, έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $m > 0$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(x^2 + 2\right) - f(3x) > 3x - x^2 - 2$

198

Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = 3x^2 - 2xf(x) - x^2 f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $(x+1)^4 \geq 4f(0) \cdot x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση:
$$g(x) = (f(x) - 1)\left(x^2 + 1\right) + x^2 - x^3 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $f(0) = 1$

(β΄) Η συνάρτηση είναι σταθερή.

(γ΄) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_1.

iii) Να βρείτε τον μοναδικό ακέραιο a ώστε ανάμεσα στις ευθείες $x = a$ και $x = a + 1$ να υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = -x$.

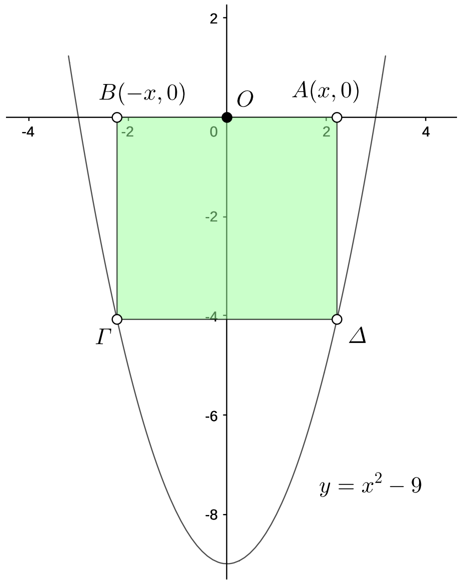
iv) Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x \to x_2} \frac{(x - x_1)(x - 1)}{f(x) - f(x_2)}$$
όπου x_1, x_2 είναι οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f του ερωτήματος (Γ2).

199

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = x^2 - 9 \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και τα σημεία $\mathrm{A}(x, 0)$ και $\mathrm{B}(-x, 0)$ με $x \in (0, 3)$. Έστω $E\,(x)$ το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



i) (α΄) Να αποδείξετε ότι:

$$E\,(x) = -2x^3 + 18x \ , \ \ x \in (0, 3)$$

(β΄) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει μέγιστο εμβαδό.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\Delta\mathrm{A}^2 + \Delta\mathrm{B}^2 + 12\sqrt{3} = E\,(x)$ είναι αδύνατη.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς σημεία $\mathrm{M}(x_1, f\,(x_1))$ και $\mathrm{N}(x_2, f\,(x_2))$ της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα διέρχονται από το σημείο $\Lambda(0, -18)$ και ισχύουν:

(α΄) $x_1 + x_2 = 0$

(β΄) $\omega_1 + \omega_2 = 180°$, όπου ω_1, ω_2 οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα με τον άξονα $x'x$.

iii) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\frac{g\,(x)}{x} > f\,(x) + \frac{1}{x} \ , \ \text{ για κάθε } \ x \neq 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g\,(x) = -xf\,(x) - 9x$ έχει μία μόνο ρίζα x_0 στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h\,(x) = g\,(x) + xf\,(x) + 9x \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(h\,(x) + x) \cdot h\left(\frac{1}{h(x)}\right)}{x - x_0}$$

όπου x_0 είναι η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος.

200

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = a^x + x^2 - x \ , \ \ a > 0 \ \text{ και } \ f(x) = ln\left(x^2 + 1\right) + e^x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

i) Να δείξετε ότι: $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν ισχύει $h(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $a = e$.

iii) (α΄) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(β΄) Ένα σημείο $\mathrm{M}(x, y)$ με $x > 0$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της h έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου να είναι $2\ \frac{\text{μονάδες}}{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η απόσταση του Μ από την αρχή των αξόνων την χρονική στιγμή κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1, h(1))$.

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ότι αντιστρέφεται.

v) Να λύσετε την ανίσωση: $6ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right) + 6e^{x^2} + 2x^6 - 3x^4 > 6e^x + 2x^3 - 3x^2$

vi) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο $\mathrm{B}\left(1, f^{-1}(1)\right)$.

201

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Α με τεταγμένη 9 και τον άξονα $x'x$ στα σημεία Β και Γ με τετμημένες -2 και 3 αντίστοιχα.
- Η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το πρόσημο της f.

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(5)\,x^5 + f(8)\,x^4 - x + 1}{f(2)\,x^4 - x + 1}$

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - f(x+1) = 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 2]$.

v) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και ισχύει:

$$(f(x) - 9)\, f''(x) < 0 \ , \ \text{ για κάθε } \ x > 0$$

να αποδείξετε ότι $f'(x) < f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

202

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1, -1)$ και είναι τέτοια ώστε:

$$f'(x)\, e^{x+f(x)} = 2x - x^2 \;\;,\;\; \text{για κάθε } x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο:

$$f(x) = 2lnx - x$$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασύμπτωτές της.

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $2ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}\right) = 2x - 1$

iv) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού k.

v) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $y = x$.

203

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax - 1}{x - 1} \;\;,\;\; x \neq 1$$

Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}(0, 1)$ είναι ίση με 3.

i) Να αποδείξετε ότι $a = -2$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_2^3 (x - 1 - f(x)) \cdot ln(x-1)\, dx$

204

Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = 2x \;\;,\;\; \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i) (α΄) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.
   (β΄) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii) Έστω $x_0 > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία $\mathrm{A}(0, f(0))$ και $\mathrm{B}(1, f(1))$.

iv) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M του προηγούμενου ερωτήματος.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

205

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με αντίστοιχους τύπους:

$$f(x) = ln\left(\frac{x}{2}\right) \text{ και } g(x) = \frac{2-x}{x}$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση $h = f \circ g$

ii) Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}.

iii) (α′) Να μελετήσετε την h^{-1} ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
(β′) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h^{-1}.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της h^{-1}, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

206

i) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 e^x = e$

ii) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \le \lambda \\ e^{1-x} & , \quad x > \lambda \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής για μία μοναδική τιμή του πραγματικού αριθμού λ, την οποία να βρείτε.

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $\lambda = 1$.

iii) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

v) Αν E είναι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $K(1,1)$, $A(x,0)$ και $B(x, f(x))$ με $x > 1$. Αν το x αυξάνεται με ρυθμό $4\frac{cm}{sec}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν $x = 5cm$.

207

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + ln\lambda & , \quad x < 0 \\ 2\eta\mu x - x + \lambda - 1 & , \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad , \ \lambda > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

ii) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv) Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_{-2}^{-1/2} \frac{f(x)}{x^2} dx > -\frac{3}{2e}$

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = \frac{\pi}{3}$.

208

i) Να λύσετε την εξίσωση: $lnx = \frac{e}{x}$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f\,(x) = (x - e)\,lnx - x \ , \ x > 0$$

Να δείξετε ότι $f\,(x) \geq -e$, για κάθε $x > 0$.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\delta) : y = -ex$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση: $f\,(ex) + f\,(x) + ex = -1$

v) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f\,(e^x + 1) + f\,(x) > f\,(e^x) + f\,(x + 1)$

209

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με αντίστοιχους τύπους:

$$f\,(x) = ln\,(x + 1) \ , \ g\,(x) = 1 - \frac{1}{x + 1} \ \text{ και } \ h\,(x) = f\,(x) + g\,(x)$$

i) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $\text{O}(0, 0)$ και να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη αυτή με τον άξονα $x'x$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $h\,(x) = 0$

iii) Ένα σημείο Μ με θετική τετμημένη κινείται κατά μήκος της C_f με την τετμημένη του x να αυξάνεται με ρυθμό $2\frac{cm}{sec}$. Αν Ν είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και $\text{A}(0, a)$ είναι σημείο του άξονα $y'y$, με $a > 0$, τότε:

(α΄) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ κάθε χρονική στιγμή t είναι ίσος με $h\,(x\,(t))$.

(β΄) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Μ την χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ είναι ίσος με $\left(\frac{1}{2} + ln2\right)\frac{cm^2}{sec}$.

210

Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύουν:

- Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\text{A}(0, -1)$ και $\text{B}(2, 5)$.
- $f'\,(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_0^2 xf''\,(x)\,dx = 0$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Β.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ ώστε $f''\,(\xi) = 0$.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_{-1}^{5}\left(\frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f^{-1}\,(x)\right)dx$

211 Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύουν:

- $x^2 \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+2h) - f(x)}{h} = -2$
- $lnx \cdot f(x) - 1 \leq 2x^2 - 3x$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{x}\ ,\ \ x > 0$$

είναι σταθερή.

ii) Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{1}{x}\ ,\ \ x > 0$$

iii) Από τυχαίο σημείο $\mathrm{M}(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε κατακόρυφη ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α και οριζόντια ευθεία που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΒ να είναι ελάχιστη (Ο είναι η αρχή των αξόνων).

iv) Έστω $\Lambda(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, ένα σημείο που κινείται πάνω στην C_f και Κ,Η οι προβολές του σημείου Λ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης του σημείου Λ από την αρχή των αξόνων την χρονική στιγμή που το τετράπλευρο ΟΚΛΗ είναι τετράγωνο.

212 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ef(x) - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = 2$
- $xf'(x) = (x+1)f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι $f'(0) = \frac{1}{e}$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}(0, f(0))$.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}$$

και στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και στην συνέχεια να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2024}{f(x-1) - f(2x-1)}$$

iv) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(ax+1)(x+1) + e^2 f(x) \geq -1$$

να δείξετε ότι $a = 1$.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(x) + (1-x)e^{-x}}dx$

213

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - ln(x+1) \ , \ x > -1$$

i) (α΄) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

(β΄) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) (α΄) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x^2} = ln\left(ex^2 + e\right)$

(β΄) Να λύσετε την ανίσωση: $f'\left(e^{\sqrt{x}}\right) \geq f'\left(f(x) + ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)$

iii) Δίνεται επιπλέον και η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad -1 < x < 0 \\ 1 + e^x \eta\mu x & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της g.

214

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(lnx) = lnx + x - 1 + f(a) \ , \ a \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x + x - 1 + f(a) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

ii) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα και ότι $a = 0$.

iii) Έστω ότι $f(0) = 0$. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 1 + ln\beta & , \quad x \leq 0 \\ x^2 + 2 - \beta & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι $\beta = 1$.

iv) (α΄) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\varphi(x) = \sqrt{g(x) + 2} + \lambda x \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίον το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

(β΄) Έστω ότι $\lambda = -1$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\sigma(x) = \varphi(x) + 2x \ , \ x > 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sigma(x) + \sigma\left(x^3\right) = \sigma\left(x^2\right) + \sigma\left(x^6\right)$, έχει στο διάστημα $(0, +\infty)$ μοναδική ρίζα την οποία να προσδιορίσετε.

v) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε μοναδικό σημείο, η τετμημένη του οποίου ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$.

vi) Έστω x_0 η τετμημένη του σημείου τομής της C_g με τον άξονα $x'x$ του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{ln(-x)}{(g(x) - g(x_0)) \cdot (x_0 - x)}$$

215

Δίνεται η συνάρτηση $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ii) (α′) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

(β′) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

iii) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = \eta\mu x \ , \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Να βρείτε την συνάρτηση $h = f \circ g$

iv) Να αποδείξετε ότι:

(α′) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} h(x)\, dx = 0$

(β′) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} h(x)\, dx < \frac{\sqrt{2}}{4}$

216

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 6\sigma\upsilon\nu a \cdot x^2 + 13\sigma\upsilon\nu^2 a \cdot x + \eta\mu^2 a - 10\sigma\upsilon\nu^3 a \ , \ a \in \mathbb{R} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του a η γραφική παράσταση της f έχει ένα μόνο σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του a, κινείται πάνω σε μία καμπύλη C, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g η οποία σχηματίζει με την C_g και τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, χωρίο Ω του οποίου το εμβαδόν E να είναι το ελάχιστο δυνατόν το οποίο να υπολογίσετε.

iv) Αν Ω_1 είναι το χωρίο που περικλείεται από την C_g και τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $k \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε η ευθεία με εξίσωση $x = k$, να χωρίζει το χωρίο Ω_1, σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

217

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = ln(\sigma\upsilon\nu x) \quad , \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) (α΄) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = lna^2$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$.

(β΄) Στην περίπτωση που η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1 και x_2 , να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 0$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - 1}$

iv) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει: $f(x) \geq \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x}$

218

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = f'(1-x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in [0,1]$$

i) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(0) + f(1)}{2}$

ii) Να αποδείξετε ότι:

(α΄) η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) + f(1-x) \quad , \quad x \in [0,1]$$

είναι σταθερή.

(β΄) $f(x) + f(1-x) = 1$, για κάθε $x \in [0,1]$.

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

iv) Αν η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύουν $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2$ και $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2$, τότε:

(α΄) Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f''(x) = 0$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ και κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε: $\dfrac{f(\xi)}{2} = \displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx$

219

Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία έχει τις ιδιότητες:

- Είναι πολυωνυμική βαθμού $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^3\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$
- $f(x) = f(1-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x^2 - x\ ,\ \ x\in\mathbb{R}$$

και να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(|x|)$.

ii) Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f(x)} - \eta\mu x\right)$

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) + 10 = 4e$

iv) Αν,

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - \frac{5}{2}\ ,\ \ x\in\mathbb{R}$$

να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = -\frac{1}{4}$

220

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu 8h} = 1 + \frac{f(x)}{x}\ ,\ \ \text{για κάθε}\ \ x>0$$

i) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu 8h} = f'(x)$

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x\ln x + x\ ,\ \ x>0$$

iii) Ένα σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ με $x>0$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$. Το σημείο Α απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$ με ρυθμό $1\frac{cm}{sec}$. Την χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του Μ είναι ίση με e, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΜ και της γωνίας $\mathrm{M\hat{O}A}$.

iv) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τριάδα θετικών αριθμών α,β,γ, με $\alpha<\beta<\gamma$, ισχύει:

$$(\gamma-\beta)(f(\beta)-f(\alpha)) < (\beta-\alpha)(f(\gamma)-f(\beta))$$

v) Δίνεται το σημείο $\Sigma(2,0)$ και η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}\ ,\ \ x>0$$

(α΄) Να βρείτε σημείο Κ της C_g που απέχει από το σημείο Σ την μικρότερη απόσταση.

(β΄) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο Κ είναι κάθετη στην ΣΚ.

221

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \frac{1}{lnx}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

iii) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iv) Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

222

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2ln\,(f\,(x)) - lnx = 2\dfrac{f\,(x)}{\sqrt{x}} - 2$, για κάθε $x > 0$
- $e^x\,(1 - x) \leq 1 + xf\,(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f\,(x) > 0$, για κάθε $x > 0$

i) Να αποδείξετε ότι $f\,(0) = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$f\,(x) = \sqrt{x}\ ,\ \ x \geq 0$$

iii) Δίνεται η συνάρτηση:

$$g\,(x) = \frac{2}{3}f^3\,(x) - \frac{\lambda}{4}f^4\,(x) - f^2\,(x) + 2\ ,\ \ \lambda > 0$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $\mathrm{B}(0, g\,(0))$.

iv) Ένα σημείο $\mathrm{M}(x, y)$, $x \geq 0$, κινείται κατά μήκος της εφαπτομένης (ε) του προηγούμενου ερωτήματος, με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $1\frac{cm}{sec}$. Έστω Κ η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Γ το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $x'x$. Έστω t_1 και t_2 οι χρονικές στιγμές που το εμβαδό $E\,(t)$ του τριγώνου ΜΚΓ ισούται με $\frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ρυθμών μεταβολής του εμβαδού $E\,(t)$ τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ισούται με μηδέν.

v) Να βρείτε τις τιμές του θετικού αριθμού λ για τις οποίες η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ και να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων.

223

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f\,(x) = \frac{x^2 - x + \lambda}{x^2 + x + 1}\ ,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στην θέση $x = 1$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$ και να βρείτε το είδος του τοπικού ακροτάτου.

ii) Έστω η συνάρτηση:

$$g\,(x) = e^x - x - 1\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης: $3\,(fg\,(x)) - 2 = 0$

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $3f\left(e^{x^2-x}\right) - f\left(-x^2\right) + 2 = 0$

iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in (0,1)$ υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f\,(\xi) = \sqrt[3]{f\,(x_0) \cdot f\left(x_0^2\right) \cdot f\left(x_0^3\right)}$$

224

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \begin{cases} x + 2 & ,\ \ x \le 2 \\ e^{x-2} + \mu & ,\ \ x > 2 \end{cases}\ ,\ \ \mu \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε την μικρότερη τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

ii) Αν $\mu = 3$ τότε να δείξετε ότι:

$$f^{-1}\,(x) = \begin{cases} x - 2 & ,\ \ x \le 4 \\ ln\,(x-3) + 2 & ,\ \ x > 4 \end{cases}$$

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}\,(x) = 23 - 4x$, για κάθε $x > 4$, έχει ακριβώς μία λύση x_0 με $x_0 \in (5,6)$.

iv) Για την λύση x_0 του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$5 < f\,(23 - 4x_0) < 6$$

225

Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, με $f\,(0) = \frac{1}{2}$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(e^x + 1)\,f'\,(x) = e^x\,(1 - f\,(x))$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f\,(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν).

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f\,(2025^x) + f'\,(2026^x) < f\,(2026^x) + f'\,(2025^x)$

iv) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f με την διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου των αξόνων έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $\mathrm{M}(x_0, x_0)$ με $x_0 \in (0,1)$.

v) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = x_0$ είναι $(x_0 - ln\,(2x_0))$ τετραγωνικές μονάδες.

226

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (-\infty, a) \cup (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = \frac{ax+\pi}{x-a} \quad \text{και} \quad g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

i) Αν η οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = e$, να δείξετε ότι $a = e$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

iii) (α΄) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $\varphi = f \circ f$.

(β΄) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις φ και $h = g \circ g$ είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες, τότε να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο είναι ίσες.

iv) (α΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e, +\infty)$.

(β΄) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \eta\mu\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει λύση στο διάστημα $(e, +\infty)$.

227

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{lnx}{x^2} + \int_1^e f(x)\,dx + \frac{2}{e} - 1$$

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^e \frac{lnx}{x^2}dx$

ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και στην συνέχεια να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $x^{2e} \leq e^{x^2}$

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{e}$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

v) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

228

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $e^{2x_0} - 2025 = 2025e^{-x_0}$

iii) Έστω F η αρχική της f με $F(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $2F(x) \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β΄) Η εξίσωση $x(2F(x) - x) - 1 + x = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

(γ΄) $F(x_0) < 2025x_0$, όπου x_0 η ρίζα του δεύτερου ερωτήματος.

229

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = lnx \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{2-x}{x-1}$$

i) Να ορίσετε την συνάρτηση $f = g \circ h$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε την αντίστροφή της και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της αντίστροφής της.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$.

230

Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = \lambda + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$, για κάθε $x > 0$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_1 = 1$ το 4

i) Να βρείτε τον τύπο της f και το είδος του ακροτάτου που παρουσιάζει στο σημείο $x_1 = 1$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 1$ τέτοιο ώστε:

$$x_0^2 + x_0 \cdot lnx_0 + 2 = 5x_0$$

iii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\int_1^3 f(x)\,dx$ και 12.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

231

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi)$.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ισχύει: $\eta\mu x < \frac{2x}{\pi}$

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2x}{\pi \cdot \eta\mu x - 2x}$

v) Να αποδείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma > 2$

232

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = e^x + e^{-x} \ , \ x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ g(x) = lnx \ , \ x > 0$$

i) Να βρεθεί η συνάρτηση $f = h \circ g$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) (α΄) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

(β΄) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iv) (α΄) Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα, να γίνει η γραφική παράσταση της f.

(β΄) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

233

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \lambda x & , \quad x < 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) (α΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι αρνητική.

(β΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\left(1 - x^4\right)(x_0 - \eta\mu x_0) = x^3 \cdot \frac{f(x_0 + 2025)}{x_0}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

iv) Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx > -ln2$

234

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x^2 + ax + \beta \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Γνωρίζουμε ότι ευθεία $(\varepsilon) : y = (1 - e)x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

i) Να δείξετε ότι $a = -e$ και $\beta = -1$.

ii) (α΄) Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $[0, 1]$.

(β΄) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο σε σημείο $x_0 \in (0, 1)$.

iii) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

iv) Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_{0}^{x_0} x \cdot f''(x) \, dx \geq \int_{\pi/2}^{0} f(x) \, \eta\mu t dt$

235

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = -e^{3x} - x^3 + 1$$

i) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f\,(x) - 1}{f\,(x)}$

iii) (α΄) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

(β΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-e^{3x}-x^3-2015} = 1$ έχει μοναδική ρίζα.

iv) Αν για τη συνάρτηση $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{3g(x)} + g^3\,(x) = e^6 \cdot x^3 + (lnx + 2)^3 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

να αποδείξετε ότι ο τύπος της g είναι $g\,(x) = lnx + 2$ και να βρεθεί η αντίστροφή της.

236

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}$ για την οποία για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$f^2\,(x) + 2xf\,(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x - x^2$$

i) Να δείξετε ότι:

$$f\,(x) = \eta\mu x - x \ , \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

ii) Δίνεται η συνάρτηση:

$$g\,(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu\,(kx)}{x} - 1 & , \quad x < 0 \\[2mm] f\,(x) + 1 & , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό k, ώστε η g να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii) Για $k = 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g\,(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

iv) Για $k = 2$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι ένα προς ένα.

237

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g με:

$$f\,(x) = \frac{lnx + 1}{lnx - 1} \quad \text{και} \quad g\,(x) = xe^x$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο Α$(0, 1)$.

iii) Να ορίσετε την σύνθεση της g με την f.

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

238

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\, e^{f(x)} = e^{f(x)} + 2xe^{x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x + ln\left(x^2 + 1\right) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε:

$$\xi \cdot (f'(\xi) + 1) + ln\left(\xi^2 + 1\right) = f'(\xi)$$

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = (f(x) - a)^2 \cdot (f(x) - a - 2)^2 \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ a > 0$$

(α′) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $0 < \kappa < \lambda < \mu$ τέτοια ώστε $f(\kappa) = a$, $f(\lambda) = a + 1$ και $f(\mu) = a + 2$.

(β′) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει δύο τοπικά ελάχιστα, ένα τοπικό μέγιστο και να προσδιορίσετε τις τιμές των ακροτάτων.

239

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \ x < 0 \\ e^{x^2} & , \ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = ln\left(e^{F(x)} + 1\right) - F(x)$$

όπου F είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx < e + \frac{2}{3}$

iii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε να ισχύει: $\displaystyle\int_{f^2(a^2)}^{f^2(ln(a^2+1))} f(x)\, dx = 0$

iv) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$.

v) Να λύσετε την εξίσωση: $\displaystyle\int_{0}^{1} F(x)\, dx + e^{f(x)} = f(x) + \frac{3 - e}{2} + F(1)$

240

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f\,(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{και} \quad g\,(x) = lnx$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση $h = f \circ g$.

ii) (α΄) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

(β΄) Να εξετάσετε αν για την συνάρτηση h, υπάρχει διάστημα $[a, \beta]$, με $e \leq a < \beta$, στο οποίο να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iii) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης h.

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h^{-1}\,(x) - e^{2x}}{(x-1)^2}$

v) Σημείο $\mathrm{M}\big(a, h^{-1}\,(a)\big)$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της h^{-1} και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό $0.5cm/sec$.

(α΄) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της h^{-1} στο σημείο Μ και στην συνέχεια το σημείο Α στο οποίο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $y'y$.

(β΄) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Α την χρονική στιγμή t_0 που η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

241

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\left(x^2 - x\right) f'\,(x) + xf\,(x) = 1$$

Θεωρούμε ακόμη την συνάρτηση:

$$g\,(x) = (x-1)\,f\,(x) - lnx\ ,\ \ x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι:

(α΄) Η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

(β΄) Ο τύπος της f είναι:

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{lnx}{x-1} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

ii) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση:

$$h\,(x) = 1 - \frac{1}{x} - lnx\ ,\ \ x > 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι $h\,(x) \leq 0$, για κάθε $x > 0$.

(β΄) Να βρείτε την παράγωγο της f και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[f\,(1+h) - 1] \cdot lnh \cdot (\eta\mu h - h \cdot \sigma\upsilon\nu h)}{\eta\mu^3 h}$

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\,(2^x) = f\left(-x^2 + 2x + 1\right)$ έχει δύο ρίζες ακριβώς στο διάστημα $[0, 1]$.

242

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\int_{-1}^{0} f(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} xf'(x)\,dx$
- Η συνάρτηση:
$$g(x) = \frac{x^2+x+1}{x-f(0)}$$
έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=-1$
- $e^x \geq \varphi'(0)\cdot x + x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\varphi^3(x) + e^x = \varphi(\varphi(x)) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$ και $f(0)=-1$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

(α′) $\varphi'(0)=1$.

(β′) Η συνάρτηση φ δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

iii) Αν επιπλέον γνωρίζετε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-3f(x)+2f(x-h)}{h^2} > 0$$
να αποδείξετε ότι:

(α′) Η f είναι κυρτή.

(β′) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $A(-1,-3)$.

iv) Αν:
$$g(x) = (x-3)\,e^{x-1} + \frac{3x}{2} \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$
να αποδείξετε ότι:

(α′) Η εξίσωση $g'(x)=1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1 , x_2 με $x_1 < x_2$.

(β′) Η εξίσωση $2(2-x)\,e^{x-1} = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

243

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(1)=0$, για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει:
$$xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

i) Να αποδείξετε ότι:
$$f(x) = \frac{lnx}{x} \ , \ \ x>0$$

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x-e} - \dfrac{x^2-2}{x-1} = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(1,e)$.

iv) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

244

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{ax^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + 1} \quad , \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$ στο $+\infty$.
- Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$ είναι ίση με -2
- Εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

i) Να αποδείξετε ότι $a = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 1$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρείτε την συνάρτηση $E(\lambda)$ που εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$, με $\lambda \neq 1$. Στην συνέχεια να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{f(\lambda)}{E(\lambda)}$

iv) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{e^x f(\eta\mu x)}{e^x + 2^x}\right]$

v) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \rho, \omega \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $f(\kappa) + f(\rho) + |\omega| = |\eta\mu\omega|$

245

Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$
- $f(2) = f(3) < 0$
- $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $e^{f(x)} - 1 \geq \lambda f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου λ πραγματικός αριθμός

i) Να αποδείξετε ότι $f'(1) \neq 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε σημείο x_0 του διαστήματος $(2, 3)$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) - f(x+1) \geq f(\ln x + 1) - f(\ln x + 2)$

v) Αν $3 < a < \beta$, να αποδείξετε ότι: $e^{f(a)} - e^{f(\beta)} < \dfrac{f^2(a) - f^2(\beta)}{2}$

246

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = xlnx - ax + a \ , \ a \in \mathbb{R}$$

i) Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $a = 1$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι κυρτή συνάρτηση.

iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon) : y = x - e + 1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) και την ευθεία $x = 1$.

247

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της C_f στο M, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$.

iv) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να δείξετε ότι: $\dfrac{1 + x \cdot \sqrt{\eta\mu x}}{1 + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x} + x < \dfrac{x}{\eta\mu x} + \dfrac{3x^2 + 2}{3 + 2\sqrt{x}}$

248

Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) + x = 0$$

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$

iii) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

iv) Να λύσετε την εξίσωση: $f(xe^x + lnx - 1) = 0$

v) Να μελετήσετε την μονοτονία της f'.

vi) Να αποδείξετε ότι: $f(2) < \dfrac{f(1) + f(3)}{2}$

vii) Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$, όπου $0 < a < \beta$ με $f(a) \cdot \beta^n = f(\beta) \cdot a^n$, $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\xi \cdot f'(\xi) = n \cdot f(\xi)$

249

Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = x + 2$$

i) (α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(β΄) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$, $f(-2) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f.

ii) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{6f^2(x) + f(x)}{3f^2(x) - 2f(x) + 1} \qquad L_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(2017)\,x^3 + 5x^2 - 1}{f(-3)\,x^2 + 5x - 2}$$

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-2}^{1} f^3(x)\,dx$

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-2, 0)$ ώστε: $f'(x_0) = -f(x_0) \cdot \sigma\varphi x_0$

250

Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$xf'(x) = (x + 1)\,f(x)$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = xe^x \ , \ x \in \mathbb{R}$$

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

iii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β με $a > 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$e \cdot f(a\beta - lna) + e \cdot f(\beta) + 2 = 0$$

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = \frac{f(lnx)}{f(x)}$$

Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε σημείο x_0 του διαστήματος $(1, e)$.

251

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x + 1} \ , \ x > -1$$

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ii) Να δείξετε ότι:

(α΄) Η ευθεία $(\varepsilon) : y = -4x + 1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f.

(β΄) Το σημείο επαφής Μ της (ε) με την C_f είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, όπου Α και Β είναι τα σημεία τομής της (ε) με την οριζόντια και την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f αντίστοιχα.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

iv) Σημείο $\Sigma(x, y)$ με $x > 0$ κινείται πάνω στην ευθεία (ε) ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό $x'(t) = 2$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης $d = \Sigma\mathrm{P}$ του Σ από το σημείο $\mathrm{P}(4, 1)$ την χρονική στιγμή t_1 όπου $d(t_1) = 5$.

252

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \eta\mu^2 x \;\;,\;\; x \in [0,\pi]$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = \frac{\pi}{4}$ και να δείξετε ότι η (ε) διαπερνά το γράφημα της f.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει: $f''\,(x) + 4f\,(x) = 2$

iii) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \eta\mu^2 x dx$

v) Να λύσετε την εξίσωση: $\pi + 4f\,(x) = 2\,(1 + 2x)$

253

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = xlnx + x^2 - 3x + 4 \;\;,\;\; x > 0$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^x = e^{1+3x-x^2}$ έχει μοναδική ρίζα x_1 που ανήκει στο διάστημα $(1,+\infty)$.

iii) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση φ με:

$$\varphi'\,(x) = (x-1)^2\,(x-2)^3\,(f\,(x) - 5) \;\;,\;\; x > 0$$

Να αποδείξετε ότι η φ έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

iv) Αν για τους θετικούς αριθμούς α και β ισχύει η ισότητα:

$$\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{3}{2}\right)^2 + ln\left(\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta}\right) = \frac{1}{2}$$

να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \displaystyle\int_1^{f(1)} f\,(x)\,dx$

254

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{1-x} & , \quad x \le 1 \\ e^{x-1} + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε την αντίστροφή της και να ορίσετε την σύνθεση της $g\,(x) = \eta\mu x + 1$ με την f^{-1}.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -8$ και $x = 2$.

255

Θεωρούμε μία συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι κυρτή
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} = 3$
- $f(0) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\cdot \eta\mu\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$

i) Να δείξετε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο, έστω ξ, με $\xi^2 < \xi$, το οποίο είναι θέση ελαχίστου.

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 1$ εφάπτεται στην C_f στο $x_0 = 1$.

iii) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Sigma(3, 3 + f(2))$ και αν έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη.

iv) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^1 \left(2^{\frac{3x^2}{2}-x+1}\cdot ln2^{f(x)}\right)dx > 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

v) Να βρείτε την συνάρτηση f αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $f''(x) = 6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

256

Δίνεται μία συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- Η γραφική της παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$
- $xf'(x) + x^2 f''(x) = 2$, για κάθε $x > 0$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = xf'(x) - 2lnx\ ,\ \ x > 0$$

είναι σταθερή και στην συνέχεια να βρείτε την συνάρτηση f.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{(x-1)^2}\right]$

iv) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής και στην συνέχεια να λύσετε την ανίσωση: $e\,(lnx)^2 + e \le 2x$

v) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x}dx < \frac{2e-5}{e^2}$

vi) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

257

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = -x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 4)$, εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και έχει σημείο καμπής το $\mathrm{A}(-1, f\,(-1))$.

i) Να δείξετε ότι $a = -3$, $\beta = 0$ και $\gamma = 4$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

v) Να δείξετε ότι: $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(4 - \eta\mu^3 x - 3\eta\mu^2 x\right) dx < 2\pi$

258

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = 4x - 4 + \frac{1}{x} \ , \ x > 0$$

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{1 + xf\,(x)}\right)$

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

v) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

vi) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την ευθεία $(\varepsilon) : y = 4x - 4$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

259

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = x^3 - 3x^2 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f που έχει την μικρότερη κλίση και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι η (ε) διαπερνά το γράφημα της f.

ii) Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $(\varepsilon) : y = 9x - 8$

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f\,(x)\, lnx}{\eta\mu x}$

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 \dfrac{f\,(x) - 6}{2 + x^2} dx$

v) Θεωρούμε την συνάρτηση g με:

$$g'\,(x) = f\,(x) + ax - 1 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου a η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

260

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^3 \ , \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = ln|x| \ , \ x \in \mathbb{R}^*$$

i) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.

ii) Να ορίσετε την σύνθεση της g με την f^{-1}.

iii) Να δείξετε ότι για κάθε $0 < x < 1$ ισχύει: $3lnx + ln(\sigma\upsilon\nu x) < ln(\eta\mu x)$

iv) Την χρονική στιγμή $t = 0$ ένα σημείο $\mathrm{M}(x, y)$ ξεκινά από την αρχή των αξόνων O και κινείται στην γραφική παράσταση της f^{-1}, με τέτοιον τρόπο, ώστε $x = x(t)$, για κάθε $t > 0$ και έστω (ε) η εφαπτομένη ευθεία προς την γραφική παράσταση της f από το σημείο Μ η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{A}(a, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\mathrm{B}(0, \beta)$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι $x'(t) = 2$, να βρείτε:

(α΄) Τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Α, την χρονική στιγμή t_0 όπου το Μ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{N}\big(8, f^{-1}(8)\big)$.

(β΄) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΚ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον θετικό ημιάξονα Ox, την χρονική στιγμή t_0 όπου το Μ διέρχεται από το σημείο Ν.

261

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύουν:

- $f''(x) + f(x) = g''(x) + g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = g(0) + 1$ και $f'(0) = g'(0)$

Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - g(x) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$G(x) = h'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + h(x) \cdot \eta\mu x$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να την βρείτε.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$\varphi(x) = h'(x) \cdot \eta\mu x - h(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να την βρείτε.

iii) Να βρείτε την συνάρτηση h.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2\pi$.

v) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{h(x)-1} - \frac{11}{e}x^2 = e^{x^2} - \frac{11}{e}(h(x) - 1)$

vi) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \displaystyle\int_{e^{\pi}}^{e^{2\pi}} h(lnx)\,dx$

262

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(xy) \leq x \cdot f(y) + y \cdot f(x)$, για κάθε $x, y > 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 1$

i) (α΄) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$.
   (β΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $x + f(x) - xf'(x) = 0$

ii) Να βρείτε την συνάρτηση f.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι δεν έχει σημεία καμπής.

iv) (α΄) Να βρείτε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = a$, όπου $0 < a < 1$.
   (β΄) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{a \to 0} E(a)$

263

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, με $a > 0$, για την οποία γνωρίζουμε ότι:

- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$
- Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[a, \beta]$
- $\displaystyle\int_a^\beta xf(x)f'(x)\,dx = -ln2$
- $\beta f^2(\beta) = af^2(a)$
- $f'(x) \neq 0$, για κάθε $[a, \beta]$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$g(x) = xf^2(x) \quad , \quad x \in [a, \beta]$$

στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^2, τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι ίσο με $ln4$.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \beta]$.

iv) Έστω ότι η συνάρτηση F είναι μια αρχική της f στο $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει:

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} < f(a)$$

264

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\,(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν).

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$.

265

266

267