

Φυλλάδιο Μαθηματικών Κατεύθυνσης

Για την Γ Λυκείου

ΤΕΥΧΟΣ Α

Βλαχάκης Γιάννης

Περιεχόμενα

I	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	5
1	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	7
1.1	ΕΝΝΟΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	8
1.2	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	10
1.3	ΑΡΤΙΑ-ΠΕΡΙΤΤΗ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ-ΦΡΑΓΜΕΝΗ	12
1.4	ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	16
1.5	ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	18
1.6	ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	21
1.7	ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	25
1.8	ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	31
1.9	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ	34
1.10	Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	40
2	ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	51
2.1	ΟΡΙΟ ΟΤΑΝ ΤΟ x ΤΕΙΝΕΙ ΣΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ	52
2.2	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ	62
2.3	ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	67
2.4	ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ	70
2.5	ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ	75
2.6	ΟΡΙΟ ΟΤΑΝ ΤΟ x ΤΕΙΝΕΙ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ	82
2.7	ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ	94
3	ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	101
3.1	ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	102
3.2	ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO	113
3.3	ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ	120
3.4	ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ	122

Μέρος Ι

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 1

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1 ΕΝΝΟΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός: 1.1 Συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ ονομάζεται ένας κανόνας που αντιστοιχίζει **κάθε** στοιχείο του συνόλου A **σε ένα μόνο** στοιχείο του συνόλου B .

- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f .
- Το σύνολο B λέγεται **σύνολο άφιξης** της συνάρτησης f .
- Το σύνολο:

$$f(A) = \{y \in B / y = f(x) \text{ για όλα τα } x \in A\}$$

λέγεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης f .

Το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης είναι απαραίτητο να το γνωρίζουμε μαζί με τον τύπο της συνάρτησης. Αν δεν δίνεται, για να το βρούμε πρέπει να ακολουθήσουμε τους παρακάτω κανόνες:

Μορφή της συνάρτησης f	Περιορισμός
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$
$f(x) = \ln(P(x))$	$P(x) > 0$
$f(x) = \varepsilon\varphi(P(x))$	$P(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \sigma\varphi(P(x))$	$P(x) \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = (P(x))^{Q(x)}$	$P(x) > 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

Άσκηση: 1.2 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x + 1}$$

Άσκηση: 1.3 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x}$$

Άσκηση: 1.4 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{1 - |\ln x - 1|}$$

Άσκηση: 1.5 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = (1 - x^2)^{\sqrt{x}}$$

Άσκηση: 1.6 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x^2 + 2\lambda x + 4)$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

1.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός: 1.2 Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων. Ονομάζεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης f το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$ με $x \in D_f$. Την γραφική παράσταση της συνάρτησης f την συμβολίζουμε C_f .

Π Ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στην γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f αν και μόνο αν:

$$f(x_0) = y_0$$

Κανόνες για την χάραξη γραφικών παραστάσεων

Κανόνας 1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + k$, όπου $k > 0$, προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα πάνω.

Κανόνας 2: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) - k$, όπου $k > 0$, προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα κάτω.

Κανόνας 3: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x + k)$, όπου $k > 0$, προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα αριστερά.

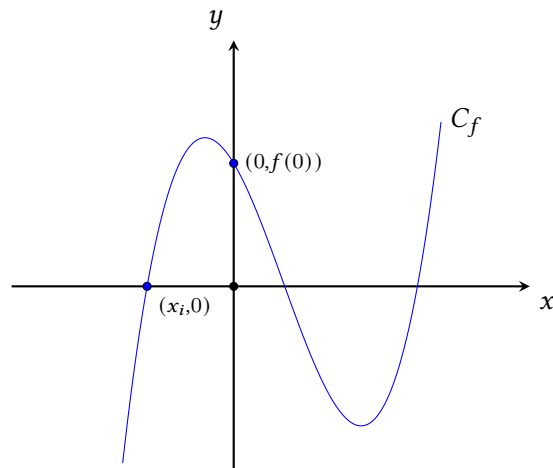
Κανόνας 4: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x - k)$, όπου $k > 0$, προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα δεξιά.

Κανόνας 5: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -f(x)$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ως προς τον άξονα $x'x$.

Κανόνας 6: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(-x)$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ως προς τον άξονα $y'y$.

Κανόνας 7: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Κανόνας 8: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(|x|)$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται στο πρώτο και στο τέταρτο τεταρτημόριο και από τα συμμετρικά των τμημάτων αυτών ως προς τον άξονα $y'y$.

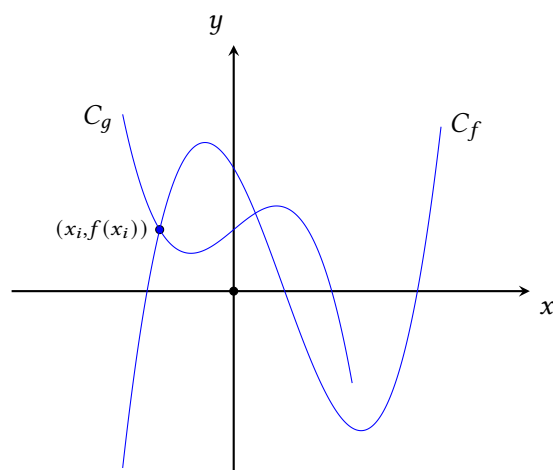


Π Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, υπολογίζουμε το $f(0)$, υπό την προϋπόθεση ότι το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Το σημείο αυτό θα είναι τότε το $(0, f(0))$.

Π Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, $x \in D_f$. Τα σημεία αυτά θα είναι τότε τα $(x_i, 0)$, όπου x_i είναι κάθε μία από τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Αν $f(x) < 0$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Αν $f(x) > 0$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.



Π Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f με την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης g , λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$, $x \in D_f \cap D_g$. Τα σημεία αυτά θα είναι τότε τα $(x_i, f(x_i))$, όπου x_i είναι κάθε μία από τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Αν $f(x) < g(x)$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

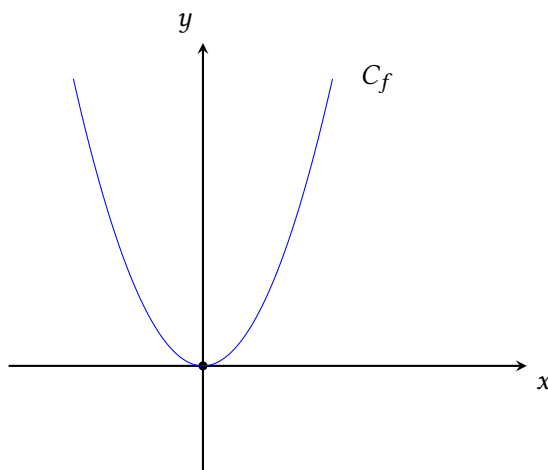
Αν $f(x) > g(x)$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

1.3 ΑΡΤΙΑ-ΠΕΡΙΤΤΗ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ-ΦΡΑΓΜΕΝΗ

Ορισμός: 1.3 Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **άρτια** όταν:

- για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$ και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(-x) = f(x)$.

Π Η γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

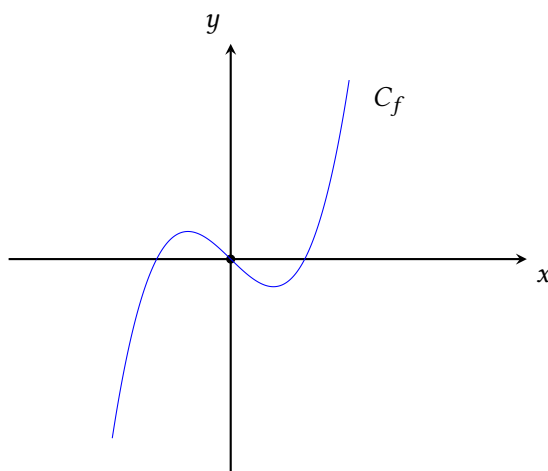


Σχήμα 1.1: Η συνάρτηση f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Ορισμός: 1.4 Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **περιττή** όταν:

- για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$ και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(-x) = -f(x)$.

Π Η γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

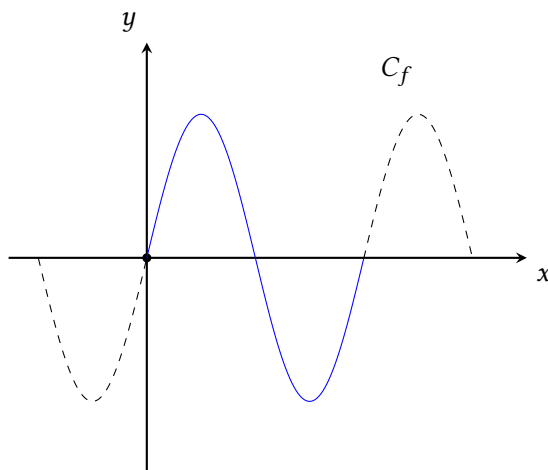


Σχήμα 1.2: Η συνάρτηση f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Ορισμός: 1.5 Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **περιοδική** με περίοδο T όταν:

- για κάθε $x \in A \Rightarrow x - T$ και $x + T \in A$ και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

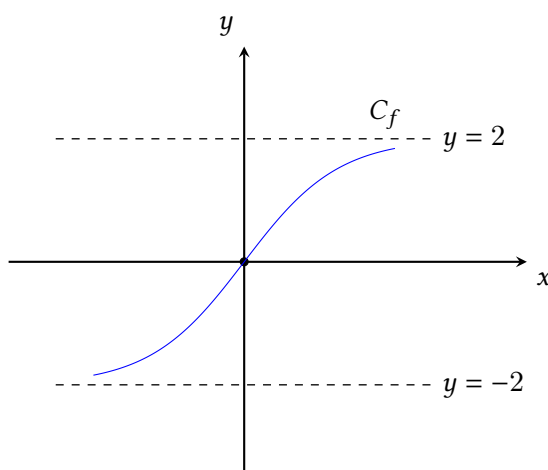
Π Η γραφική παράσταση μίας περιοδικής συνάρτησης επαναλαμβάνεται ίδια σε μήκος μίας περιόδου.



Σχήμα 1.3: Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π .

Ορισμός: 1.6 Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **φραγμένη** όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m_1 και m_2 για τους οποίους ισχύει:

$$m_1 \leq f(x) \leq m_2, \text{ για κάθε } x \in A$$



Σχήμα 1.4: Η συνάρτηση f είναι φραγμένη αφού $-2 \leq f(x) \leq 2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.7 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες x' και $y'y$. ■

Άσκηση: 1.8 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{2x} + e \quad \text{και} \quad g(x) = e^x + e^{x+1}$$

Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων. ■

Άσκηση: 1.9 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 3x^4 - x^3 \quad \text{και} \quad g(x) = 9x^2 - 9x + 2$$

Να βρείτε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων. ■

Άσκηση: 1.10 Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιούν την σχέση:

$$1 + f(x) = g(x) + x^3, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων. ■

Άσκηση: 1.11 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

1. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
3. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού k η εξίσωση:

$$f(x) = k^2 + 2k + 2$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. ■

Άσκηση: 1.12 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

■ Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. ■

Άσκηση: 1.13 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) - 2f^2(x) + 3f(x) = -x^2 + x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

■ Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. ■

1.4 ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός: 1.7 Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = g(x)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.14 Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες. ■

Άσκηση: 1.15 Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(x-1) + \ln(x-2) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$$

είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες. ■

Άσκηση: 1.16 Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) \quad \text{και} \quad g(x) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες. ■

Άσκηση: 1.17 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{2\lambda x + 1 - \lambda}{x + \lambda + 2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{(\lambda^2 - 3)x - 2\lambda + 4}{x + 2\lambda - 1}$$

■

1.5 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω οι συναρτήσεις $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε:

Ορισμός: 1.8 Ως **άθροισμα** των συναρτήσεων f και g , την συνάρτηση που συμβολίζεται $f + g$, έχει πεδίο ορισμού το $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ και τύπο:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Ορισμός: 1.9 Ως **γινόμενο** των συναρτήσεων f και g , την συνάρτηση που συμβολίζεται $f \cdot g$, έχει πεδίο ορισμού το $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ και τύπο:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Ορισμός: 1.10 Ως **πηλίκο** των συναρτήσεων f και g , την συνάρτηση που συμβολίζεται $\frac{f}{g}$, έχει πεδίο ορισμού το $D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\} \neq \emptyset$ και τύπο:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.18 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x-4}{x-2} \text{ και } g(x) = \frac{x^2-3x}{x-2}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$f+g, \quad f \cdot g \text{ και } \frac{f}{g}$$

Άσκηση: 1.19 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{|x|}{3+|x|} \text{ και } g(x) = \frac{6-2|x|}{x^2-9}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$f+g, \quad f \cdot g \text{ και } \frac{f}{g}$$

Άσκηση: 1.20 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}-1 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} & , \quad x > 0 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}+1 & , \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$f+g \text{ και } f \cdot g$$

Άσκηση: 1.21 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ και } g(x) = \ln x$$

1. Να ορίσετε την συνάρτηση: $f \cdot g$
2. Να ορίσετε την συνάρτηση: $\frac{f}{g}$
3. Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (1) και (2).

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.22 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
2. Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.23 Για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f^2 + g^2)(x) \leq 2(f + g)(x) - 2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις είναι ίσες.

Άσκηση: 1.24 Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$2f^2(x) + g^2(x) + 2(f \cdot g)(x) + 2x^2 = 2xg(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1.6 ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω οι συναρτήσεις $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε:

Ορισμός: 1.11 Ως **σύνθεση** της συνάρτησης f με την συνάρτηση g , την συνάρτηση που συμβολίζεται $g \circ f$, έχει πεδίο ορισμού το $A = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} \neq \emptyset$ και τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Π Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g \circ f$ μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$A = f(D_f) \cap D_g$$

Π Η σύνθεση συναρτήσεων δεν είναι *αντιμεταθετική* πράξη. Δηλαδή αν για δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε γενικά αυτές δεν θα είναι ίσες:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Π Η σύνθεση συναρτήσεων είναι όμως *προσεταιριστική* πράξη. Δηλαδή αν για τρεις συναρτήσεις f , g και h ορίζεται η σύνθεση $h \circ (g \circ f)$, τότε θα ορίζεται και η σύνθεση $(h \circ g) \circ f$ και θα ισχύει:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.25 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \text{ και } g(x) = \ln(9-x^2)$$

Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$.

Άσκηση: 1.26 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \text{ και } g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Να βρείτε την σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g .

Άσκηση: 1.27 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x-x^2} \text{ και } g(x) = \sin^2 x$$

Να βρείτε την σύνθεση της συνάρτησης g με την συνάρτηση f .

Άσκηση: 1.28 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = |x-1| \text{ και } g(x) = \begin{cases} 1-x & , x < 0 \\ 2x & , x \geq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε την συνάρτηση $f \circ g$.

Άσκηση: 1.29 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h ώστε :

$$f(x) = \ln(1+e^x) \text{ , } g(x) = 2\ln x \text{ και } h(x) = \ln(1+x^2)$$

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
3. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.30 Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{ax-3}{x-2} \text{ , } x \neq 2$$

Να βρείτε την τιμή του a για την οποία για κάθε $x \neq 2$ ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = x$$

Άσκηση: 1.31 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $(-1, 1)$.
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.
3. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι η:

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

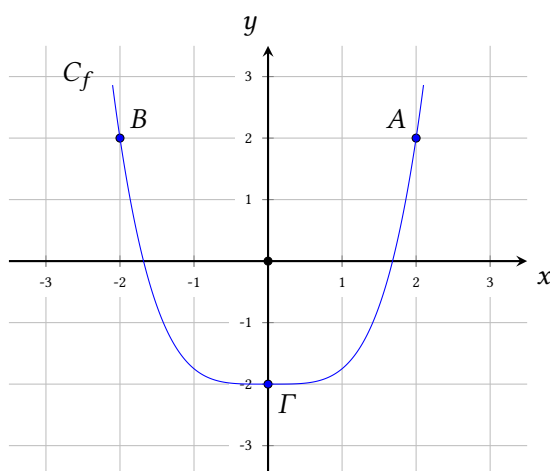
Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.32 Η γραφική παράσταση μίας πολυωνυμικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = |x|$$

1. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$.
2. Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$.
3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$.



Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.33 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$h(x) = f(2 - \sqrt{x-1})$$

■

Άσκηση: 1.34 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$h(x) = f(\ln x)$$

■

Άσκηση: 1.35 Να βρείτε την συνάρτηση g αν ισχύει:

$$f(x) = 1 - 2x, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad (g \circ f)(x) = 4x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$$

■

Άσκηση: 1.36 Να βρείτε την συνάρτηση g αν ισχύει:

$$f(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad (g \circ f)(x) = 4x^2 + 4, x \in \mathbb{R}$$

■

Άσκηση: 1.37 Να βρείτε την συνάρτηση f αν ισχύει:

$$g(x) = \ln x, x > 0 \quad \text{και} \quad (f \circ g)(x) = \frac{2-x}{2+x}, x > 0$$

■

Άσκηση: 1.38 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = 3x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το $f(1)$.

■

Άσκηση: 1.39 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το $f(1)$.

■

Άσκηση: 1.40 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$g \circ f = h \circ f$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις g και h είναι ίσες.

■

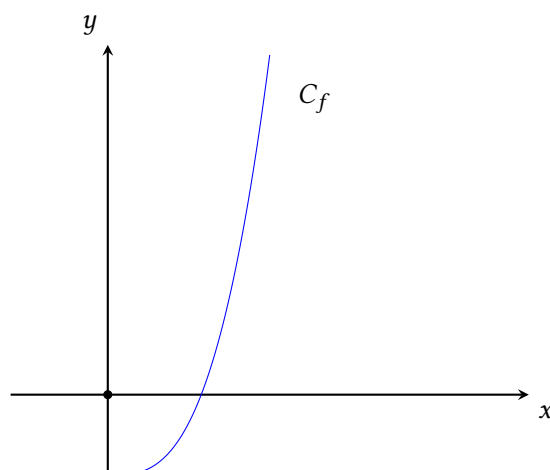
1.7 MONOTONIA ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός: 1.12 Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει:

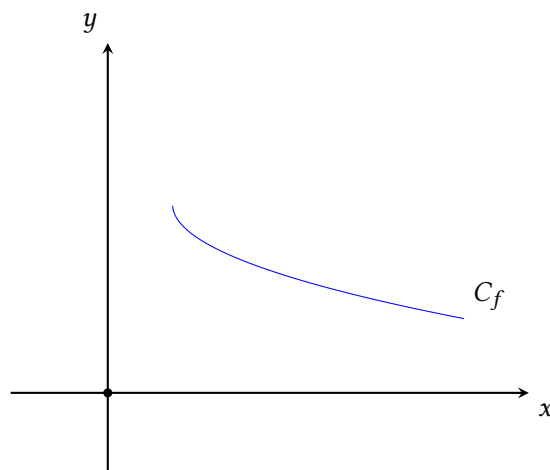
$$f(x_1) < f(x_2)$$

Ορισμός: 1.13 Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$



Σχήμα 1.5: Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.



Σχήμα 1.6: Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

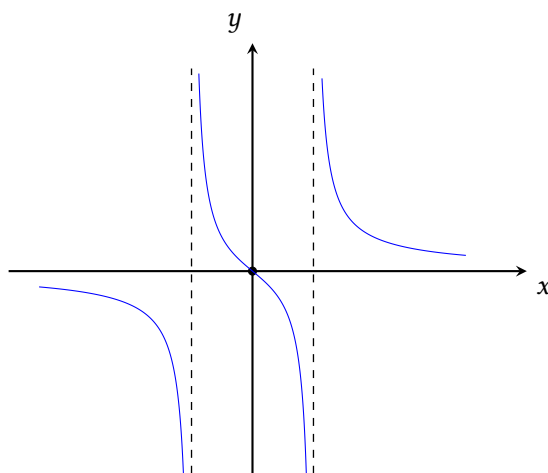
Π Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , θα λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη** στο Δ .

- Π Η μονοτονία μίας συνάρτησης ελέγχεται πάντοτε σε διάστημα και **ποτέ** σε ένωση διαστημάτων, διότι μία συνάρτηση μπορεί να έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα Δ_1 και Δ_2 αλλά να μην είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, +\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωσή τους, αφού:

$$-2 < 0 \text{ και } f(-2) = -\frac{2}{3} < f(0) = 0$$



Σχήμα 1.7: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

- Π Μπορούμε να ελέγξουμε την μονοτονία μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ χρησιμοποιώντας τον λόγο:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Ειδικότερα:

- αν $\lambda > 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .
- αν $\lambda < 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
(Έλεγχος μονοτονίας)

Άσκηση: 1.41 Μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(0, -1)$. Να βρείτε την μονοτονία της f . ■

Άσκηση: 1.42 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + 5x - 1$$

Άσκηση: 1.43 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση:

$$f(x) = 2 - \sqrt{2 - x}$$

Άσκηση: 1.44 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$$

Άσκηση: 1.45 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 4x$$

Άσκηση: 1.46 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(e^x - 1)$$

Άσκηση: 1.47 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση:

$$f(x) = x - e^{-x}$$

Άσκηση: 1.48 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{και} \quad g(x) = 2\ln x$$

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
2. Να ορίσετε την συνάρτηση $f + g$.
3. Να μελετήσετε την συνάρτηση $f + g$ ως προς τη μονοτονία.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.49 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & , \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 2x-1 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

Άσκηση: 1.50 Θεωρούμε μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = 5x + 2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 1.51 Θεωρούμε μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + e^{f(x)} = 2x - 3, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 1.52 Έστω μία συνάρτηση $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Χρήση μονοτονίας σε ανισότητες και ανισώσεις)

Άσκηση: 1.53 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2 - 3x + 1) > f(4x + 1)$$

Άσκηση: 1.54 Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Να λύσετε την ανίσωση:

$$2 + f(x^2) > 2\ln x$$

Άσκηση: 1.55 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 8)$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
2. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ και για ποιες είναι πάνω από τον $x'x$.
3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln x) > 0$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.56 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^5 + x^2 - 1) - f(1 - x + x^2) < 2 - x - x^5$$

Άσκηση: 1.57 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + x$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
2. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln(x^2 + x + 1) + x^2 < \ln(x + 2) + 1$$

Άσκηση: 1.58 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x + 1$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(f(x) - 2) < 2$$

Άσκηση: 1.59 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + 2x$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
2. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x^3 + x^2)^3 - (x + 1)^3 > 2(x + 1 - x^3 - x^2)$$

Άσκηση: 1.60 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
2. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(2^{x^2-2} + 4^{x^2-2}) \cdot 7^x > (2^x + 4^x) \cdot 7^{x^2-2}$$

Άσκηση: 1.61 Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με :

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

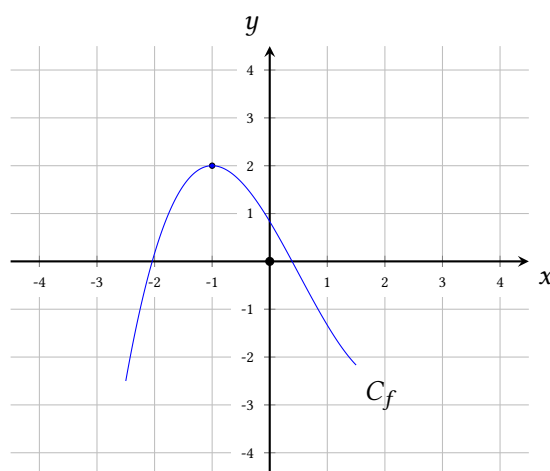
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

1.8 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A .

Ορισμός: 1.14 Θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** το $f(x_0)$, αν ισχύει:

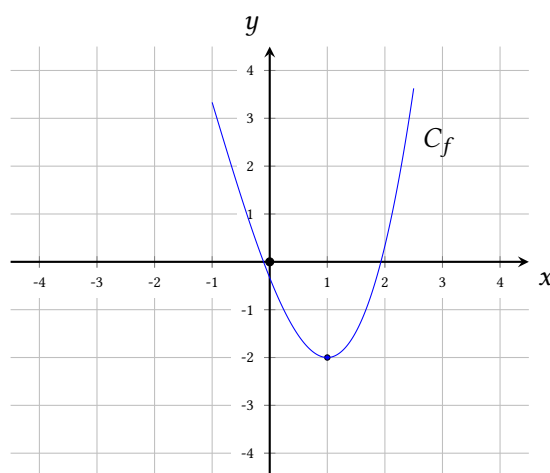
$$f(x) \leq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in A$$



Σχήμα 1.8: Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ μέγιστο ίσο με 2.

Ορισμός: 1.15 Θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** το $f(x_0)$, αν ισχύει:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in A$$



Σχήμα 1.9: Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ελάχιστο ίσο με -2 .

Π Τα (ολικά) μέγιστα και τα (ολικά) ελάχιστα μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα A λέγονται **ολικά ακρότατα** της f .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.62 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το $\frac{1}{3}$ ■

Άσκηση: 1.63 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστο το 2. ■

Άσκηση: 1.64 Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(1, 3)$, ενώ ισχύει:

$$|2f(x) - 5| \leq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . ■

Άσκηση: 1.65 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x) = 2 - |x + 3|$$

Άσκηση: 1.66 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x) = -1 - 2\eta\mu x$$

Άσκηση: 1.67 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

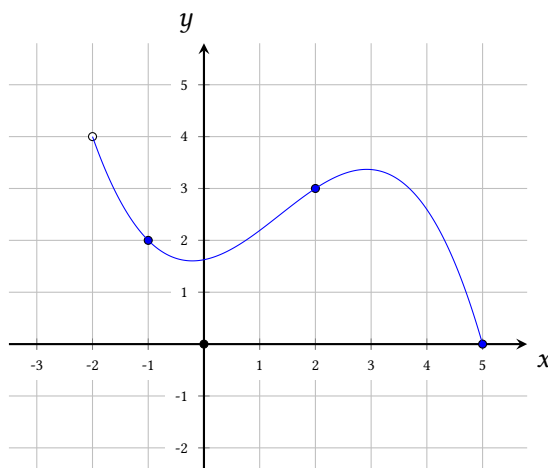
$$f(x) = -x^2 + 2x - 5$$

Άσκηση: 1.68 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Άσκηση: 1.69 Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας την γραφική παράσταση της f να βρείτε:

1. Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
2. Τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$.
3. Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν.
4. Την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 .



Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.70 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad \text{και} \quad g(x) = x - 2$$

1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$.
3. Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h .

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.71 Έστω $\lambda \neq 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \lambda x^2 - 2\lambda x + 4$$

Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

1.9 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ

Ορισμός: 1.16 Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση **ένα προς ένα (1-1)**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ή ισοδύναμα

Ορισμός: 1.17 Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση **ένα προς ένα (1-1)**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

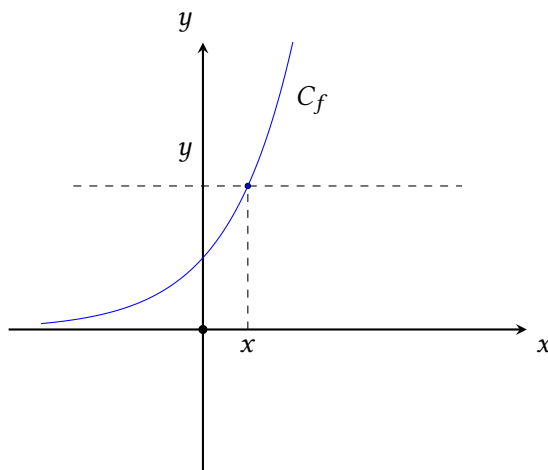
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Π Μία συνάρτηση f είναι συνάρτηση ένα προς ένα αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση:

$$f(x) = y$$

έχει ακριβώς μία λύση ως προς x στο πεδίο ορισμού της.

Π Μία συνάρτηση f είναι συνάρτηση ένα προς ένα αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση το πολύ μία φορά.



Σχήμα 1.10: Η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της υπάρχει μοναδικό x στο πεδίο ορισμού της, τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

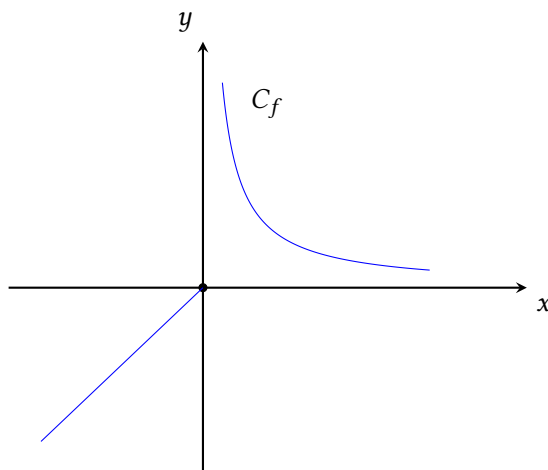
Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τις έννοιες γνησίως μονότονη συνάρτηση και συνάρτηση ένα προς ένα.

Θεώρημα: 1.1 Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι συνάρτηση ένα προς ένα.

Π Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Μία συνάρτηση f μπορεί να είναι ένα προς ένα σε ένα διάστημα Δ , χωρίς να είναι γνησίως μονότονη σε αυτό. Για παράδειγμα, θεωρήστε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 1.11: Η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα, αφού φανερά κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση μία μόνο φορά. Όμως δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, αφού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
(Έλεγχος για 1-1)

Άσκηση: 1.72 Να εξετάσετε αν είναι ένα προς ένα η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

■

Άσκηση: 1.73 Να εξετάσετε αν είναι ένα προς ένα η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(e^x - 1)$$

■

Άσκηση: 1.74 Να εξετάσετε αν είναι ένα προς ένα η συνάρτηση:

$$f(x) = 1 - \sqrt{3 - 2x}$$

■

Άσκηση: 1.75 Να εξετάσετε αν είναι ένα προς ένα η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2}{x^4 + 1}$$

■

Άσκηση: 1.76 Να εξετάσετε αν είναι ένα προς ένα η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{-2x} - x$$

■

Άσκηση: 1.77 Να εξετάσετε αν είναι ένα προς ένα η συνάρτηση:

$$f(x) = 4x + \ln x$$

■

Άσκηση: 1.78 Να εξετάσετε αν είναι ένα προς ένα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , \quad x \leq 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.79 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) + f^3(x) = 3x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα. ■

Άσκηση: 1.80 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - f(x) = 2x^3 - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα. ■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
(Συναρτήσεις 1-1 και εξισώσεις)

Άσκηση: 1.81 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(\ln^2 x) = f(\ln x + 2)$$

Άσκηση: 1.82 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και $f(0) = 1$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(f(x) - 1) = 1$$

Άσκηση: 1.83 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 5x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^x = 5(x-1)$$

Άσκηση: 1.84 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
2. Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$ την εξίσωση:

$$e^{\eta\mu x} - e^{\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

Άσκηση: 1.85 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$$

1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0, 1]$
2. α'. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.
β'. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(x)) = 0$, $x \in [0, 1]$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.86 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + x, \quad x > 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } x + \ln x = 1$$

$$\text{ii) } \ln(\ln x) = 1 - \ln x$$

$$\text{iii) } \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = -e^{-x} - e^x + 2$$

Άσκηση: 1.87 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{3x-x^2} - e^{6-2x} = x^2 - 5x + 6$$

Άσκηση: 1.88 Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x, y > 0$ ισχύει:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$$

1.10 Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: 1.18 Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι ένα προς ένα. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μία νέα συνάρτηση, η οποία θα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f και η οποία θα αντιστοιχίζει σε κάθε $y \in f(A)$ το μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει:

$$f(x) = y$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται f^{-1} .

Π Για κάθε $x \in A$ και $y \in f(A)$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

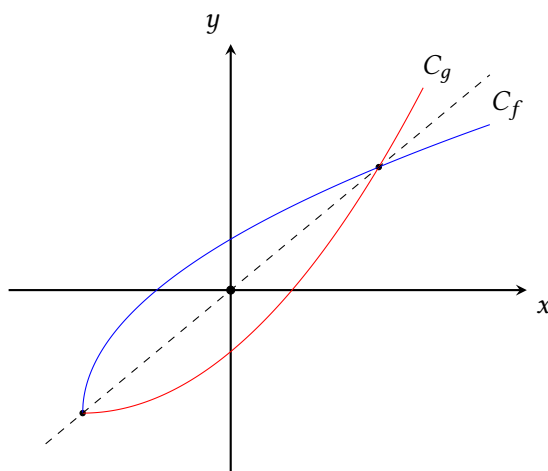
Π Για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Π Για κάθε $y \in f(A)$ ισχύει:

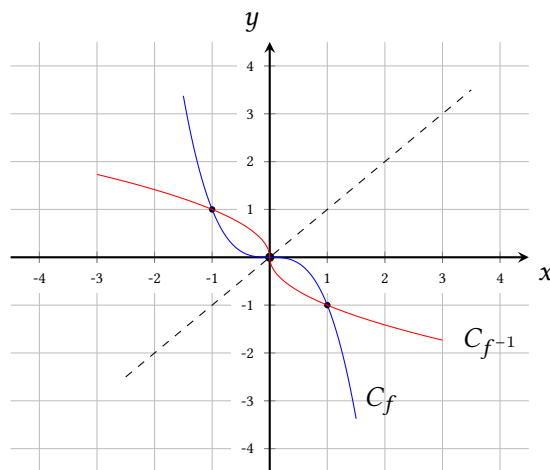
$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Π Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ των αξόνων. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το παραπάνω γεωμετρικό αποτέλεσμα.



Σχήμα 1.12: Οι συναρτήσεις f και g είναι αντίστροφες και οι γραφικές παραστάσεις τους είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Π Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} δεν είναι υποχρεωτικά πάνω στην ευθεία $y = x$. Για παράδειγμα στο παρακάτω γράφημα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3$ και της αντίστροφής της καθώς και τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων. Τα σημεία $(-1, 1)$ και $(1, -1)$ είναι κοινά τους σημεία, αλλά δεν ανήκουν στην ευθεία $y = x$. Για να είναι τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} υποχρεωτικά πάνω στην ευθεία $y = x$ πρέπει η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα.



Σχήμα 1.13: Η γραφική παράσταση της $f(x) = -x^3$ και της αντίστροφής της. Προσέξτε ότι δεν είναι όλα τα σημεία τομής τους πάνω στην ευθεία $y = x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.89 Να αποδείξετε ότι δεν είναι αντιστρέψιμη η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

Άσκηση: 1.90 Να αποδείξετε ότι κάθε μία από τις συναρτήσεις που ακολουθούν είναι αντιστρέψιμες και στην συνέχεια να βρείτε τις τιμές των αντιστρόφων που ζητούνται:

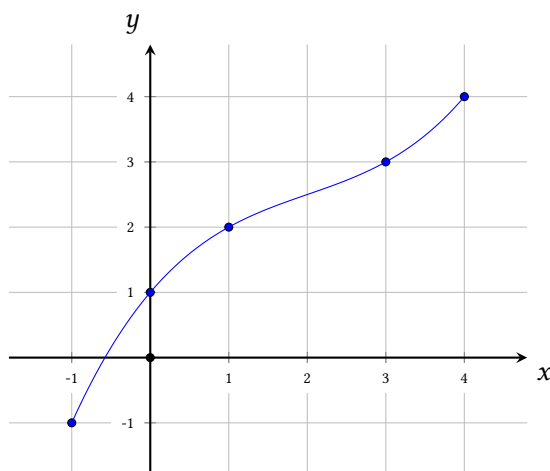
i) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ $f^{-1}(13) = ?$

ii) $f(x) = e^x + e^{2x}$ $f^{-1}(2) = ?$

iii) $f(x) = 1 - \ln(1 + x^3)$ $f^{-1}(1 - \ln 2) = ?$

Άσκηση: 1.91 Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας την C_f :

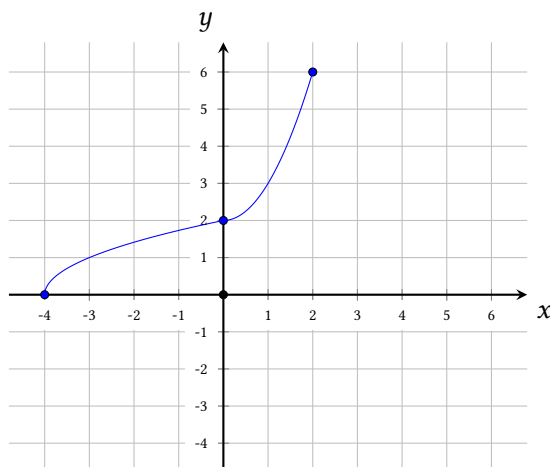
1. Να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
2. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$.
3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .



Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.92 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μίας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
2. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$.
3. Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f .



Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.93 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1}$$

Άσκηση: 1.94 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$$

Άσκηση: 1.95 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{4-x}}$$

Άσκηση: 1.96 Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad x < 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
3. α'. Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.
β'. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.97 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο:

$$f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και τύπο:

$$g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2$$

Με δεδομένο ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα:

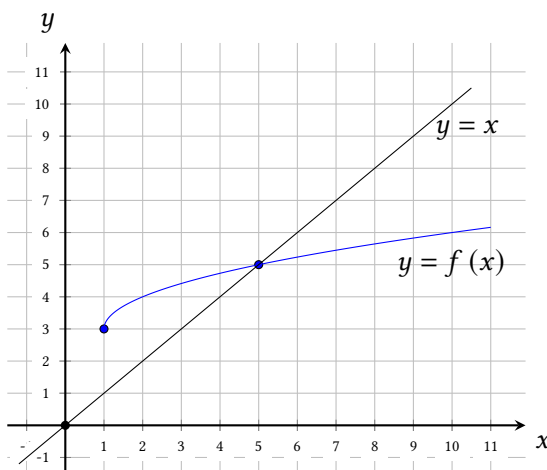
1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f .
2. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$, για κάθε x που ανήκει στο $[0, 1)$.
3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.98 Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x-1} + 3, \quad x \geq 1$$

1. Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f .
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας xOy . Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .



Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.99 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \geq 2$$

Άσκηση: 1.100 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$$

Άσκηση: 1.101 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Άσκηση: 1.102 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Άσκηση: 1.103 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(1 - e^{-x})$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.
2. Να βρείτε την f^{-1} .

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.104 Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = a + e^{x-1}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
2. Αν ισχύει $f^{-1}(4) = 1$, τότε:
 - α'. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .
 - β'. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

Άσκηση: 1.105 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 2 - x$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
2. Να αποδείξετε ότι για $x \in (-\infty, 3]$ είναι:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{3-x} - 1$$

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (f \circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.106 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = \ln(x-2) + 5, \quad x > 2 \quad \text{και} \quad g(x) = 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. α'. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.
β'. Να βρείτε την συνάρτηση g^{-1} .
2. α'. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.
β'. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.107 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = -2\ln x + 1$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
2. Να βρείτε την συνάρτηση f^{-1} .
3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = 1 - \ln x^2$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στην συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.108 Να βρείτε την αντίστροφή της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Άσκηση: 1.109 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln(1 - \ln x)$$

Άσκηση: 1.110 Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε :

$$g(x) = 2\ln x, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad h(x) = \ln(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι:
 - α'. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.
 - β'. $g^{-1}(x) = e^{x/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$
2. Να ορίσετε την συνάρτηση $h \circ g^{-1}$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.111 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

Άσκηση: 1.112 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \quad x \leq 1 \\ x^2 + 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση: 1.113 Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(-1, 4)$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(5 - f^{-1}(3\ln x)) + 1 = 0$$

Άσκηση: 1.114 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, με $f(3) = 5$, για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = 2f(x) - x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

2. Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(3)$.
3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = 5$$

Άσκηση: 1.115 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) + f^3(x) = 2x + 6, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
2. Να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + x^3 - 6 \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2x^3 + x) = f(4 - x)$$

4. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$, να αποδείξετε ότι $x_0 = 2$.

Άσκηση: 1.116 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
2. Να ορίσετε την συνάρτηση f^{-1} ως συνάρτηση της f .
3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = x$$

Άσκηση: 1.117 Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } f^{-1}(x) < 3$$

$$\text{ii) } f^{-1}(x - 1) \geq x + 5$$

Άσκηση: 1.118 Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , να αποδείξετε ότι η αντίστροφή της είναι και αυτή γνησίως μονότονη, με το ίδιο είδος μονοτονίας, στο $f(\Delta)$.

Άσκηση: 1.119 Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f^{-1}(x) = f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Άσκηση: 1.120 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$(g \circ f)(x) + x = 0 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
2. Να δείξετε ότι:

$$g(x) + f^{-1}(x) = 0 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in f(\mathbb{R})$$

Άσκηση: 1.121 Μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επιπλέον ισχύουν:

- $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$
- $f(1) = 0$
- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \neq 1$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, για κάθε $x > 0$
2. Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.
3. $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

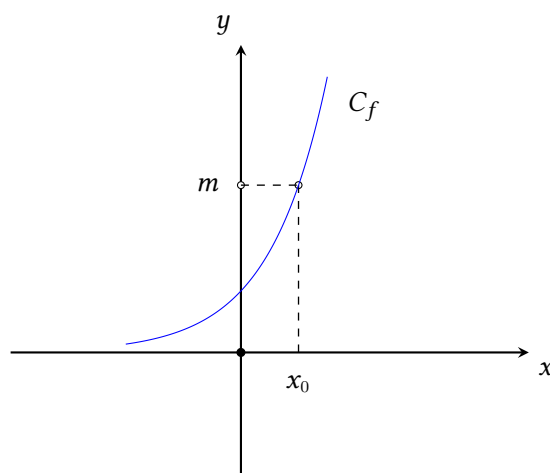
Κεφάλαιο 2

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

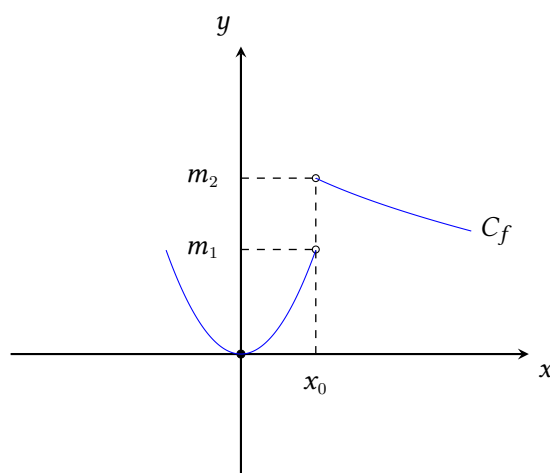
2.1 ΟΠΩΣ ΟΤΑΝ ΤΟ x ΤΕΙΝΕΙ ΣΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

Ορισμός: 2.1 Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f ορίζεται σε μία περιοχή του πραγματικού αριθμού $x_0 \in \mathbb{R}$ ή ότι η f ορίζεται κοντά στο x_0 , όταν στο πεδίο ορισμού της f υπάρχει σύνολο της μορφής $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, όπου ο δ μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρός θετικός πραγματικός αριθμός.

Ορισμός: 2.2 Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει μία ιδιότητα σε μία περιοχή του $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν η συνάρτηση f έχει την ιδιότητα αυτή σε σύνολο της μορφής $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, όπου ο δ μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρός θετικός πραγματικός αριθμός.



Σχήμα 2.1: Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με m



Σχήμα 2.2: Τα πλευρικά όρια της f στο x_0 είναι διαφορετικά και δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Στο σχήμα 2.1 παρατηρούμε ότι όσο πλησιάζουμε τον πραγματικό αριθμό x_0 είτε από αριστερά είτε από δεξιά, οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό m . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 και είναι ίσο με m . Θα συμβολίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m$$

Στο σχήμα 2.2 παρατηρούμε ότι όσο πλησιάζουμε τον πραγματικό αριθμό x_0 από αριστερά, οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό m_1 . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι υπάρχει το όριο της f από αριστερά καθώς το x τείνει στο x_0 και είναι ίσο με m_1 και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = m_1$$

Όταν όμως πλησιάζουμε τον πραγματικό αριθμό x_0 από δεξιά, οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό m_2 . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι υπάρχει το όριο της f από δεξιά καθώς το x τείνει στο x_0 και είναι ίσο με m_2 και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m_2$$

Επειδή $m_1 \neq m_2$, η συνάρτηση f δεν έχει όριο στο x_0 .

- Π Για να μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο μίας συνάρτησης στο σημείο x_0 πρέπει η συνάρτηση f να ορίζεται σε μία περιοχή του x_0 .
- Π Το x_0 δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .
- Π Η τιμή της f στο x_0 , αν υπάρχει, δεν είναι απαραίτητο να είναι ίση με το όριό της στο x_0 .
- Π Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, b) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (a, x_0) , τότε ορίζουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- Π Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (a, x_0) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, b) , τότε ορίζουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Ισχύουν οι παρακάτω βασικές προτάσεις για το όριο μίας συνάρτησης:

Θεώρημα: 2.1 Ισχύουν:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - m) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = m$

Για την σταθερή και την ταυτοτική συνάρτηση ισχύουν:

Θεώρημα: 2.2 Ισχύουν:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.1 Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2a + b \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3a + 2b - 3$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και b ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$

■

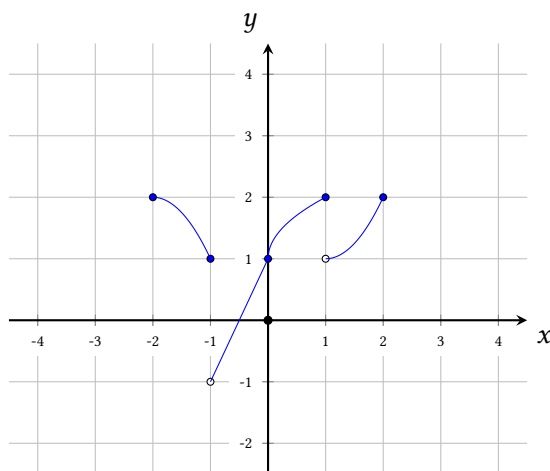
Άσκηση: 2.2 Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και για κάποιον πραγματικό αριθμό a ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = a + 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(2 + h) = 2a + 3$$

Να αποδείξετε ότι $a = -2$.

■

Άσκηση: 2.3 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 2]$.

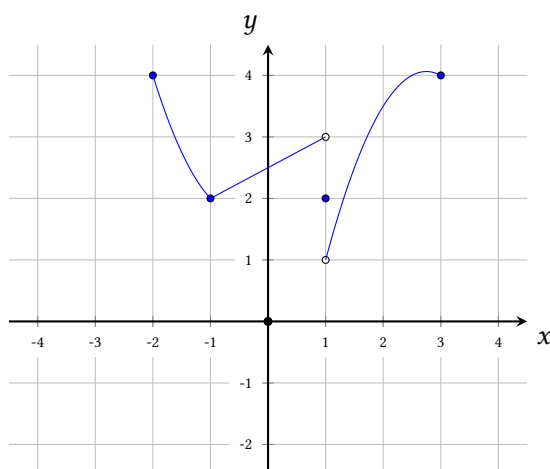


Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ iv) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ v) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

■

Άσκηση: 2.4 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 3]$.



Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ iv) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ v) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

Άσκηση: 2.5 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x - 2}, \quad x \neq 2$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $K(-1, 2)$.

1. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .
2. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
3. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Το παρακάτω θεώρημα είναι το κεντρικό στον υπολογισμό των ορίων.

Θεώρημα: 2.3 (Όριο και πράξεις)

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύουν:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$
εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 και φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1.
7. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Θεώρημα: 2.4 Έστω το πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη. Είναι,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + a_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= P(x_0) \end{aligned}$$

■

Θεώρημα: 2.5 Έστω τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.6 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + x - 1) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + |x^2 + x - 6| + 3x}{x^2 - 9}$$

Άσκηση: 2.7 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} (|f^2(x) - f(x)| - |f(x)|) & \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f^2(x) - f(x)| - 2}{|f(x)| + 1} \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sqrt{f^2(x)}}{x - 1} & \end{aligned}$$

Άσκηση: 2.8 Θεωρούμε ένα πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} P^2(x) + \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow 1} P(x)$$

Να υπολογίσετε το $P(1)$.

Άσκηση: 2.9 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , \quad x \leq -1 \\ 2x^2 - 3x - 5 & , \quad -1 < x < 3 \\ x + 2 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Άσκηση: 2.10 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2a^2x^2 + ax + 1 & , \quad x \leq 1 \\ a^2x - 3 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Άσκηση: 2.11 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & , \quad x \leq a \\ x^2 + 1 & , \quad x > a \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Άσκηση: 2.12 Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται σε μία περιοχή του 0 και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) + x^2 - 6x - 1) = 2$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
 (Η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$)

Άσκηση: 2.13 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{-x^2 - x + 2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$

Άσκηση: 2.14 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - x - 4}{x^3 + x - 2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^3 - x^2 - x - 2}$

Άσκηση: 2.15 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x}{x^2 - 4} + \frac{x^2}{4 - x^2} \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - 20}{x^2 - 16} + \frac{2}{x - 4} \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{27}{x^3 - 27} - \frac{1}{x - 3} \right)$

Άσκηση: 2.16 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}{x - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

Άσκηση: 2.17 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 4} - 2}{x^2 + x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x - 3} - \sqrt{5 - 2x}}{x^2 - 3x + 2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - \sqrt{3x + 1} + 1}$

Άσκηση: 2.18 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{\sqrt{x + 8} - 3}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - \sqrt{x} - 2}$

Άσκηση: 2.19 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{\sqrt[3]{2x + 6} - 2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{2x + 2} - \sqrt[3]{x + 5}}{x - 3}$

Άσκηση: 2.20 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1 + x} - 3}{2 - \sqrt[3]{x}}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 2} - 1}{\sqrt[3]{x + 9} - 2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 7} - \sqrt{x + 3}}{x - 1}$

Άσκηση: 2.21 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - 8}{4 - \sqrt{f^2(x) + 12}}$$

Άσκηση: 2.22 Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους:

$$f(x) = x^2 - x + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{4x - 3}$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \geq \frac{3}{4}$
2. Να βρείτε την συνάρτηση $h = g \circ f$.
3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 2.23 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , \quad x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση: 2.24 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & , \quad x < 1 \\ \frac{x+1}{x^2+3} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Άσκηση: 2.25 Έστω n φυσικός. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^n - 1}{x - 1} & , \quad x < 1 \\ \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση: 2.26 Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 4x + 3} = 2$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Άσκηση: 2.27 Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x + 5}{x - 2} = 2$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) + 6}{x^2 - x - 2}$$

Άσκηση: 2.28 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = 6 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(g(x) (x^2 - 4) \right) = 1$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$$

Άσκηση: 2.29 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) - 3f^2(x) + 3f(x) = x + 9, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της.
2. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(x)}{x^2 - 5x + 6}$$

2.2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Θεώρημα: 2.6 Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$|\eta\mu x| \leq |x|$$

Π Επισημαίνεται ότι:

$$|\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow (\eta\mu x = x \text{ ή } \eta\mu x = -x) \Leftrightarrow x = 0$$

Αν $x > 0$, τότε: $\eta\mu x < x$

Αν $x < 0$, τότε: $\eta\mu x > x$

Θεώρημα: 2.7 Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0, \text{ αν } x_0 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\varphi x = \sigma\varphi x_0, \text{ αν } x_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Οι παρακάτω προτάσεις αποτελούν βασικά όρια που αφορούν στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και μας επιτρέπουν να αντιμετωπίσουμε την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Θεώρημα: 2.8 Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \quad \text{και γενικότερα αν } a \neq 0 \text{ ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 \quad \text{και γενικότερα αν } a \neq 0 \text{ ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu(ax) - 1}{ax} = 0$$

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες οι οποίες θα σας χρησιμεύσουν στον χειρισμό τριγωνομετρικών παραστάσεων.

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 2. $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, για κάθε $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
 3. $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, για κάθε $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 4. $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$, για κάθε $x \neq k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
 5. $1 + \varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, για κάθε $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
 6. $1 + \sigma\varphi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, για κάθε $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 7. $\eta\mu 2x = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 8. $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 1 - 2\eta\mu^2 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 9. $\sigma\upsilon\nu (x + y) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y - \eta\mu x \cdot \eta\mu y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
 $\sigma\upsilon\nu (x - y) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y + \eta\mu x \cdot \eta\mu y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
 10. $\eta\mu (x + y) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y + \eta\mu y \cdot \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
 $\eta\mu (x - y) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y - \eta\mu y \cdot \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
-

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.30 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^3 x}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3 - x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \eta\mu x}{x + \eta\mu x}$

Άσκηση: 2.31 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3 + 2x^2 + 3x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \eta\mu x}{\varepsilon\varphi x - 2x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \varepsilon\varphi x}{x^3}$

Άσκηση: 2.32 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \eta\mu x} - 2}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{3x^2 + 5} - \sqrt{5}}$

Άσκηση: 2.33 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x}{x^2 + x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \sqrt{x^4 + x^2}}{x^2 - x}$

Άσκηση: 2.34 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x \cdot \eta\mu x}$

Άσκηση: 2.35 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{x^2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + \sigma\upsilon\nu x} - 2}{x^2}$

Άσκηση: 2.36 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta\mu x} - \sqrt{\sigma\upsilon\nu 2x}}{\varepsilon\varphi x}$

Άσκηση: 2.37 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi x} - \sqrt{1 - \varepsilon\varphi x}}{\eta\mu x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{1 - \sqrt{1 + \eta\mu x}}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^3 x}{x \cdot \eta\mu 2x}$

Άσκηση: 2.38 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \right)}{1 - \sin 2x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sin x}{x \cdot \varepsilon \varphi x} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 6x}{\eta \mu 2x}$$

Άσκηση: 2.39 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 3x - \eta \mu 2x}{x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 3\eta \mu x}{x + \eta \mu 2x} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x + \eta \mu 8x}{\eta \mu x + \eta \mu 4x}$$

Άσκηση: 2.40 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 1) \eta \mu 2x}{2x^2 + x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 5x + \eta \mu 6x - \eta \mu 3x}{\varepsilon \varphi 2x + \sin 8x - 1} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\eta \mu x + \eta \mu^2 2x}{x^2 - \eta \mu 2x}$$

Άσκηση: 2.41 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x^2 + \eta \mu^2 2x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + \eta \mu^2 2x}{x^2 + \eta \mu^2 2x} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - \eta \mu 2x}}{x}$$

Άσκηση: 2.42 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x) = e^{3x+2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x^2$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
2. Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$.
3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta \mu^2 x - 4}{x}$$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 2.43 Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta \mu^2 x}{2x^2 - \eta \mu^2 x}$$

Άσκηση: 2.44 Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες ορίζονται σε περιοχή του 0 και για

τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x) + \frac{\eta \mu 5x}{x} \right) = 6 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (g(x) - \sigma \upsilon \nu x) = 1$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{cases} a^2 g(x) & , \quad x < 0 \\ af(x) + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. ■

2.3 ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θεώρημα: 2.9 Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες η σύνθεση $f \circ g$ ορίζεται σε περιοχή του x_0 . Αν:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, με $g(x) \neq u_0$, σε περιοχή του x_0 .
- $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$

τότε θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.45 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[6]{x+2} - 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt[6]{x+1}}$

Άσκηση: 2.46 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[8]{x+3}}{\sqrt[4]{x+3} - \sqrt{x+3}}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{\sqrt{|x-1|+4} - 2}$

Άσκηση: 2.47 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+3}} - 3}{x-4}$

ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1}{2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} - 1}$

Άσκηση: 2.48 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sigma\upsilon\nu(x-2) - 1}{\eta\mu(3x-6)}$

iii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta\mu x}{(\pi - 2x)^2}$

Άσκηση: 2.49 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \varepsilon\varphi x \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(\pi x)}{x-2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\left(4 - x^2 \right) \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi x}{4} \right) \right)$

Άσκηση: 2.50 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi x) - 1}{2x - 8}$

iii) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu x}{\pi^2 - x^2}$

Άσκηση: 2.51 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x} - \sqrt{2\pi}}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(2\pi x)}{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \cdot \eta\mu \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right)$

Άσκηση: 2.52 1. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 9) - 1}{\sin(\sqrt{x+1} - 2) - 1}$$

Άσκηση: 2.53 Έστω μία συνάρτηση f η οποία ορίζεται στο σύνολο $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \eta \mu \left(\frac{\pi(x-1)}{2} \right) - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\pi}{2}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{και} \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$$

2.4 ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

Θεώρημα: 2.10 Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$, σε περιοχή του x_0 .

Θεώρημα: 2.11 Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$, σε περιοχή του x_0 .



Το αντίστροφο των θεωρημάτων δεν ισχύει. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι θετική σε περιοχή του 0, αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Θεώρημα: 2.12 Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει:

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{ή} \quad f(x) < g(x), \quad \text{σε περιοχή του } x_0$$

τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Θεώρημα: 2.13 (Το κριτήριο παρεμβολής)

Έστω οι συναρτήσεις f , g και h για τις οποίες ισχύουν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, σε περιοχή του x_0 .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Θεώρημα: 2.14 (πρόταση που δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο και πρέπει να αποδεικνύεται)

Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Απόδειξη. Για κάθε x σε μία περιοχή του x_0 ισχύει:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)|) = \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Π Η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \neq 0$. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Για την συνάρτηση f δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

αλλά $|f(x)| = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και προφανώς $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$.

Συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι και το εξής:

Θεώρημα: 2.15 (πρόταση που δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο και πρέπει να αποδεικνύεται)

Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Απόδειξη. Πράγματι, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ και προκύπτει από το προηγούμενο. ■

Θεώρημα: 2.16 (πρόταση που δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο και πρέπει να αποδεικνύεται)

Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και μία συνάρτηση g για την οποία ισχύει $|g(x)| \leq k$, για κάθε x σε μία περιοχή του x_0 . Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

Απόδειξη. Για κάθε x σε μία περιοχή του x_0 ισχύει:

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x)| &= |f(x)| |g(x)| \\ \Leftrightarrow |f(x) \cdot g(x)| &\leq k |f(x)| \\ \Leftrightarrow -k |f(x)| &\leq f(x) \cdot g(x) \leq k |f(x)| \end{aligned}$$

και επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} (-k |f(x)|) = \lim_{x \rightarrow x_0} (k |f(x)|) = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.54 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1| - 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 2| - x^2}{x^2 - x}$$

Άσκηση: 2.55 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - 1| - 1}{x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2} - 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x - \sqrt{x^2}}$$

Άσκηση: 2.56 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1| + x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1| + x^2 - 1}{|x - 2| - 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 3x| + x - 3}{x^2 - 9}$$

Άσκηση: 2.57 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^3 - 3x + 2|}{x^3 + 8}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + |x - 1| - 2x|x - 2|}{x^2 - x}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - x + 1}{|x^2 - x|}$$

Άσκηση: 2.58 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{8x}}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
2. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Άσκηση: 2.59 Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)$ με $P(0) = 1$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|xP(x) + 1| - |xP(x) - 1|}{x}$$

Άσκηση: 2.60 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ και $f(x) \neq 2$ σε μία περιοχή του 1. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2f^2(x) - 5f(x)| - 2}{|f(x)| - 2}$$

Άσκηση: 2.61 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x) \cdot \eta\mu x \geq x^3 + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = m \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $m = 1$.

■

Άσκηση: 2.62 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$x \cdot f(x) \cdot \eta\mu^2 x \leq \sqrt{x^4 + 1} - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = m \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $m = 0$.

■

Άσκηση: 2.63 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2x - 5x^2 \leq f(x) \leq 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

■

Άσκηση: 2.64 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x - x^2 \leq f(x) - 1 \leq x + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

■

Άσκηση: 2.65 Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x) - x| \leq \sqrt{x^2 + 1} - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

■

Άσκηση: 2.66 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left| \frac{f(x) - 4x^2}{x - 1} \right| \leq x^2 - 2x + 1, \text{ για κάθε } x \neq 1$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Άσκηση: 2.67 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|x \cdot \eta\mu x \cdot f(x)| \leq \sqrt{x^4 + 1} - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Άσκηση: 2.68 Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν:

$$|f(x) - 3| \leq |x| \text{ και } |g(x) + 4| \leq |x|, \text{ για κάθε } |x| < 1$$

να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x))$

Άσκηση: 2.69 Αν για την συνάρτηση f ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) - f^2(x)) = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Άσκηση: 2.70 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{1}{x} \right) \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \left(\frac{1}{x} \right)}{x^2 + x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 - x}{x - \sqrt{x}} \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{1}{x} \right) \right)$

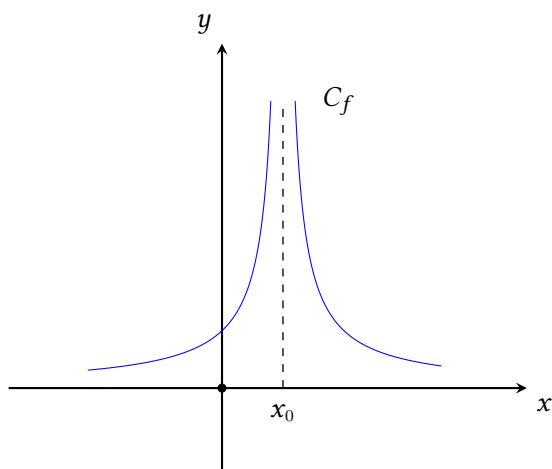
Άσκηση: 2.71 Έστω $k > 0$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$0 < |g(x)| < k, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

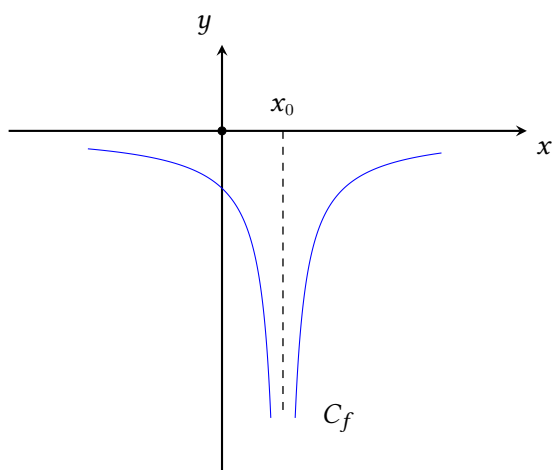
Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$$

2.5 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ



Σχήμα 2.3: Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $+\infty$



Σχήμα 2.4: Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $-\infty$

Στο σχήμα 2.3 βλέπουμε ότι όσο οι τιμές του x πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό x_0 τόσο οι τιμές της συνάρτησης f μεγαλώνουν απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Στο σχήμα 2.4 βλέπουμε ότι όσο οι τιμές του x πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό x_0 τόσο οι τιμές της συνάρτησης f μικραίνουν απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Για τα μη πεπερασμένα όρια ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = \mp\infty$
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{|f(x)|} = +\infty$ για κάθε θετικό ακέραιο $n, n > 1$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ σε μία περιοχή του x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
 Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ σε μία περιοχή του x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει περιοχή του x_0 στην οποία ισχύει $f(x) > 0$.
 Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε υπάρχει περιοχή του x_0 στην οποία ισχύει $f(x) < 0$.

Για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα όριο και πράξεις, όταν υπάρχουν μη πεπερασμένα όρια, κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων που περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) =$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) =$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$m \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & , \text{ αν } m > 0 \\ -\infty & , \text{ αν } m < 0 \end{cases}$
$-\infty$	$m \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & , \text{ αν } m > 0 \\ +\infty & , \text{ αν } m < 0 \end{cases}$

Οι απροσδιόριστες μορφές στον υπολογισμό των ορίων είναι:

$$\frac{0}{0}, (+\infty) - (+\infty), (-\infty) - (-\infty), (+\infty) + (-\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot (\pm\infty), 0^0, (+\infty)^0, 1^{\pm\infty}$$

Θεώρημα: 2.17 (Κριτήριο παρεμβολής: πρόταση που δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο και μπορείτε να την χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη.)

- Έστω δύο συναρτήσεις για τις οποίες σε μία περιοχή του x_0 ισχύει: $f(x) \geq g(x)$. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

- Έστω δύο συναρτήσεις για τις οποίες σε μία περιοχή του x_0 ισχύει: $f(x) \leq g(x)$. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.72 Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8-5x}{x^2-4x+4}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x-x^2-1}$$

Άσκηση: 2.73 Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{(x^2-4)(x^2-5x+6)}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$$

Άσκηση: 2.74 Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5}{x^4-6x^3+12x^2-8x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{|x-1|}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{|x-2|-2}$$

Άσκηση: 2.75 Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|-x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x+1}{|x|-1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2x+1|-1}{x^3-3x+2}$$

Άσκηση: 2.76 Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}-2)}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+8}-2}$$

Άσκηση: 2.77 Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-\sin x}{\eta \mu x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{1-\sin x}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin x - \eta \mu x}$$

Άσκηση: 2.78 Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sin x}{x \cdot \eta \mu x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{|\eta \mu x| - |x|}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}$$

Άσκηση: 2.79 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) + 2| - 1}{f^2(x)}$$

Άσκηση: 2.80 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{xf(x)}{f^2(x) - f(x)} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{xf^2(x) + xf(x)}{f^2(x) - |f(x)|} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\sqrt{f^2(x) + x^2} - f^2(x) \right)$$

Άσκηση: 2.81 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + a}{|x - 1|}$$

Άσκηση: 2.82 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \lambda}{x^3 - 3x + 2}$$

Άσκηση: 2.83 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \lambda x^2 + \lambda - 2}{x \cdot \eta \mu x}$$

Άσκηση: 2.84 Για τις διάφορες τιμές των $a, b \neq 0$, να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}$$

Άσκηση: 2.85 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^3 - ax^2 + 4}{x - 2} & , \quad x < 2 \\ \frac{x^2 + ax + 4}{x - 2} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Άσκηση: 2.86 Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{f(x)} = +\infty$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$$

Άσκηση: 2.87 Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x - 1)}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} = -\infty$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Άσκηση: 2.88 Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 2}{|f(x) - x|} = +\infty$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Άσκηση: 2.89 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

Άσκηση: 2.90 Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2} \right)$$

Άσκηση: 2.91 Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{|x|}\right) + 2}{|x|}$$

Άσκηση: 2.92 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq \sqrt[3]{|x-1|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|x-1|}$$

Άσκηση: 2.93 Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \eta\mu 2x}{\sqrt{1+x}-1} = -\infty$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$$

Άσκηση: 2.94 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια και για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^3 f(x) \geq x + \eta\mu x$$

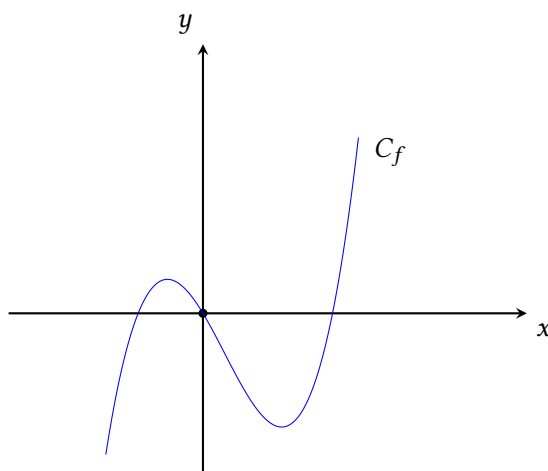
Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

2.6 ΟΡΙΟ ΟΤΑΝ ΤΟ x ΤΕΙΝΕΙ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Ορισμός: 2.3 Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f ορίζεται σε περιοχή του $+\infty$ όταν το πεδίο ορισμού της f περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

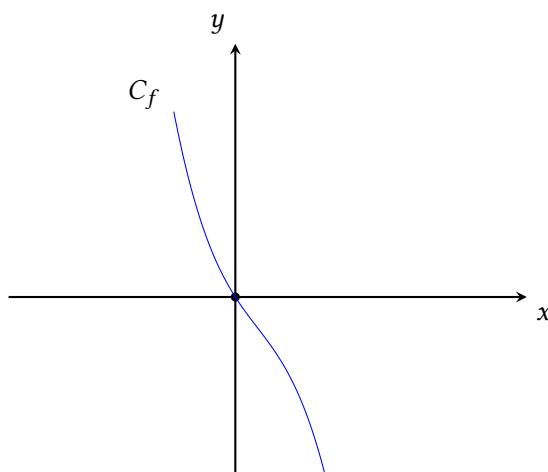
Ορισμός: 2.4 Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f ορίζεται σε περιοχή του $-\infty$ όταν το πεδίο ορισμού της f περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 2.5: Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $+\infty$.

Στο σχήμα 2.5 βλέπουμε ότι όσο το x μεγαλώνει (δηλαδή $x \rightarrow +\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f μεγαλώνουν συνεχώς. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε:

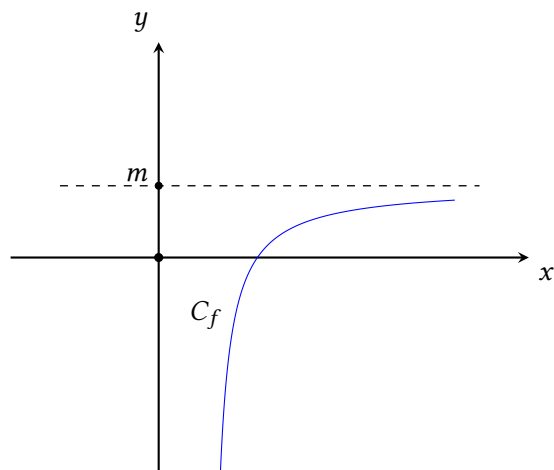
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Σχήμα 2.6: Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $-\infty$.

Στο σχήμα 2.6 βλέπουμε ότι όσο το x μεγαλώνει (δηλαδή $x \rightarrow +\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f μικραίνουν συνεχώς. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε:

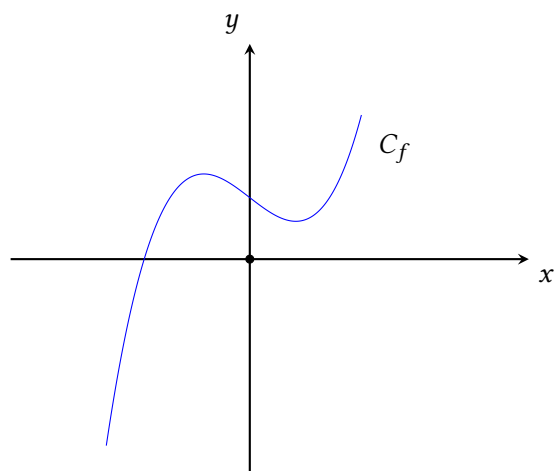
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



Σχήμα 2.7: Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με m

Στο σχήμα 2.7 βλέπουμε ότι όσο το x μεγαλώνει (δηλαδή $x \rightarrow +\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό m . Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε:

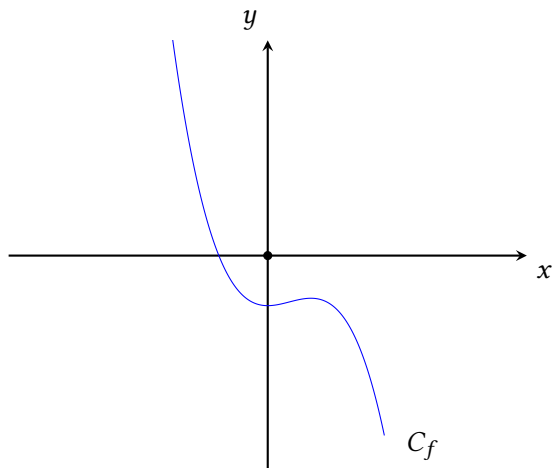
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$$



Σχήμα 2.8: Το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $-\infty$

Στο σχήμα 2.8 βλέπουμε ότι όσο το x μικραίνει (δηλαδή $x \rightarrow -\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f μικραίνουν συνεχώς. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε:

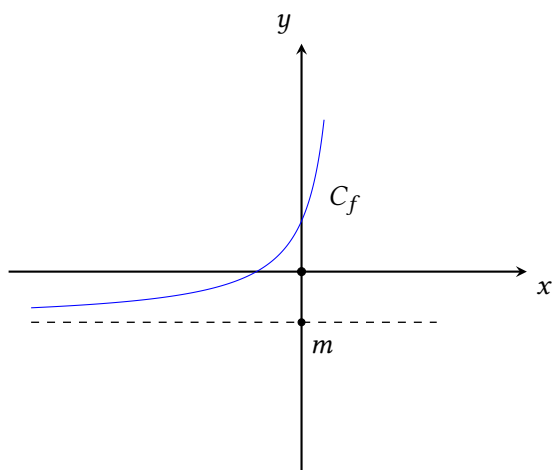
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



Σχήμα 2.9: Το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $+\infty$

Στο σχήμα 2.9 βλέπουμε ότι όσο το x μικραίνει (δηλαδή $x \rightarrow -\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f μεγαλώνουν συνεχώς. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Σχήμα 2.10: Το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με m

Στο σχήμα 2.10 βλέπουμε ότι όσο το x μικραίνει (δηλαδή $x \rightarrow -\infty$), οι τιμές της συνάρτησης f πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό m . Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$$

Θεώρημα: 2.18 Αν ο n είναι θετικός ακέραιος ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & , \text{ αν } n \text{ άρτιος} \\ -\infty & , \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Θεώρημα: 2.19 (Όριο πολωνυμικής συνάρτησης.)

Έστω η πολωνυμική συνάρτηση:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \text{ με } a_n \neq 0$$

Τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n)$$

Θεώρημα: 2.20 (Όριο ρητής συνάρτησης.)

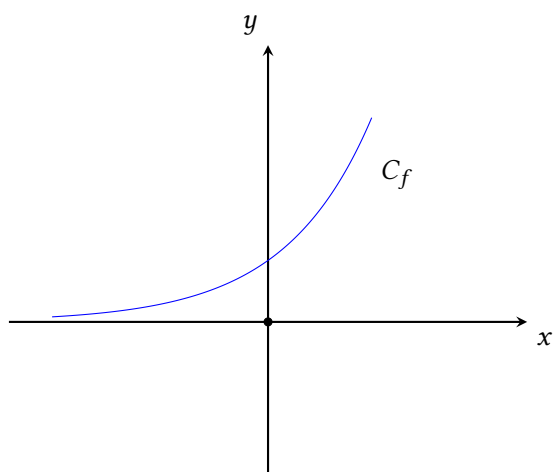
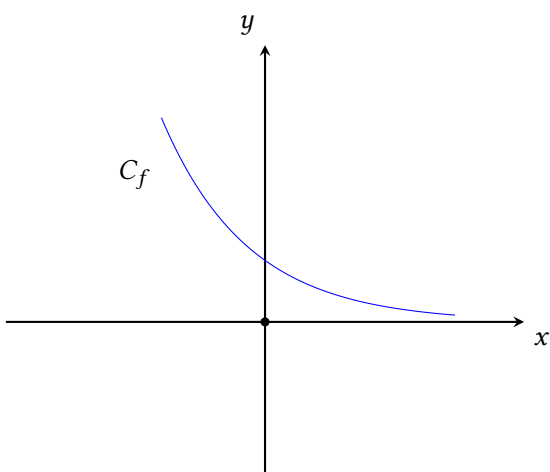
Έστω η ρητή συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 + \beta_0} \text{ με } a_n \neq 0, \beta_k \neq 0$$

Τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a_n x^n}{\beta_k x^k} \right)$$

Η εκθετική συνάρτηση: Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$ για $a > 1$ και $0 < a < 1$.

(α') Η γραφική της παράσταση για $a > 1$ (β') Η γραφική της παράσταση για $0 < a < 1$

Από τα παραπάνω σχήματα προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

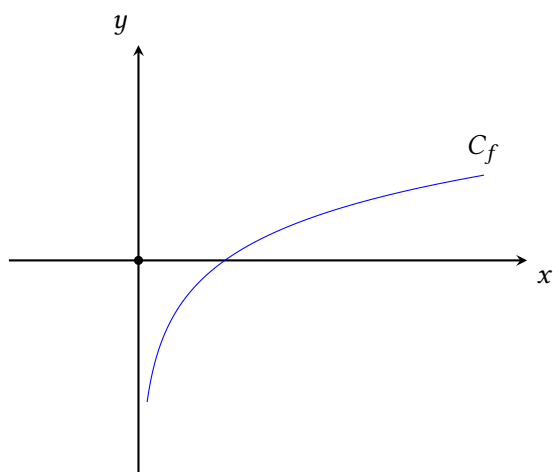
Για $a > 1$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

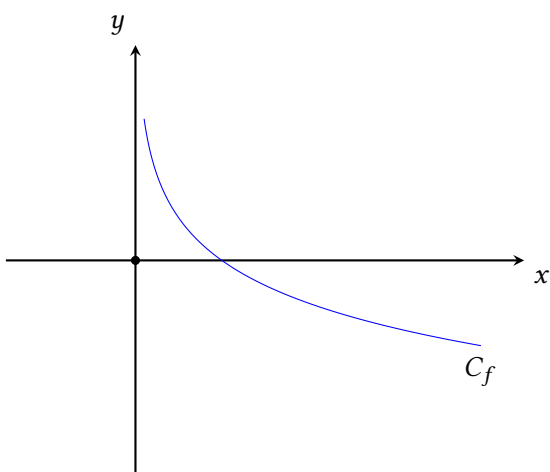
Για $0 < a < 1$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

Η λογαριθμική συνάρτηση: Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log_a x$ για $a > 1$ και $0 < a < 1$.



(α') Η γραφική της παράσταση για $a > 1$



(β') Η γραφική της παράσταση για $0 < a < 1$

Από τα παραπάνω σχήματα προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

Για $a > 1$:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

Για $0 < a < 1$:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.95 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^6 - 3x^2 + 7x + 2)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 4x^2 - 5x + 2)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 3x^2 + 6x - 8)$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5 - x^4 + 3x - 5)$

Άσκηση: 2.96 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{3x^2 - x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + x - 3}{x^3 + 4x - 2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 1}{x^2 + x + 2}$

Άσκηση: 2.97 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 2} - \frac{2}{x^2 + 1} \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} - \frac{x}{x + 2} \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2}{x + 1} - \frac{x^2 + 3}{x - 1} \right)$

Άσκηση: 2.98 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x - 1| + |x - 2|}{x - 3}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 2x| + 3}{|x - 1| - 2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - 2| - |x^2 + 2x - 4|}{x^2 + 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}}{\sqrt{25 - 20x + 4x^2}}$

Άσκηση: 2.99 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 3}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{x^2 + x + 1})$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + |x - x^2|}}$

Άσκηση: 2.100 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - 6x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 12x + 5} + 3x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 2x - 1)$

Άσκηση: 2.101 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 3x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 6} - 4x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - \sqrt{2x^4 + x})$

Άσκηση: 2.102 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2} - x}{x}$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{|x + 1|}$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 5}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Άσκηση: 2.103 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - \sqrt{x^2 - 3x + 4}}$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + 2} - x \right)$$

Άσκηση: 2.104 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x \right)$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 5x + 7} + 2x \right)$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x - \sqrt{16x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - x^2 + 2 \right)$$

Άσκηση: 2.105 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 1} - x \right)$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

Άσκηση: 2.106 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{4x^2 + x + 2} + x \right)$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} + 2x \right)$$

Άσκηση: 2.107 Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

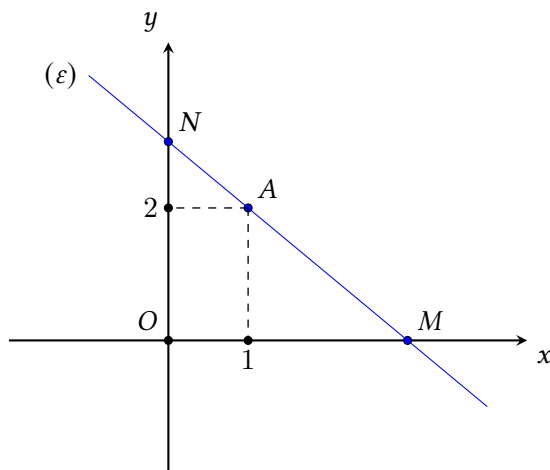
1. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2) < f(x)$
2. Αν $a^2 < a$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left[f(a^2 - a) - f(0) \right] \cdot x \right) = -\infty$$

3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(e^x - 1) = f(0)$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 2.108 Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $M(k, 0)$ και N αντίστοιχα.



1. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου OMN ως συνάρτηση της τετμημένης k του σημείου M .
2. Να βρείτε το όριο του εμβαδού όταν $k \rightarrow +\infty$ και όταν $k \rightarrow 1$.

Άσκηση: 2.109 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Άσκηση: 2.110 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^x \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (6^x - 7^x) \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x}{4^x}$$

Άσκηση: 2.111 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2^x}{e^x - 2^x} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^x}{4 \cdot 5^x + 5 \cdot 6^x}$$

Άσκηση: 2.112 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 7^x}{4^x - 7^x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x + 7^x}{2^x + 3^x + 5^x} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 2^x + 3^x}{1 + e^x + 5^x}$$

Άσκηση: 2.113 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+2) \ln x] \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - \ln x) \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} [(2x+1) \ln x - \ln x^3]$$

Άσκηση: 2.114 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x - \ln x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\ln x}$

Άσκηση: 2.115 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(x-1) \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}$$

1. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

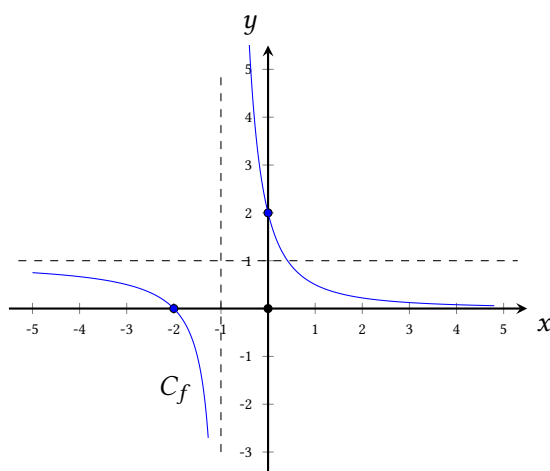
i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

2. Να βρείτε:

α'. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \cdot g$.β'. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 2.116 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , για την οποία γνωρίζουμε ότι τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2 και τον άξονα $y'y$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2 .

1. Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

2. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 2.117 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(\ln x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - 2\ln x}{1 + 2\ln x}$

Άσκηση: 2.118 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{1/x})$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x - 1}\right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x - 3^{x+1} + 2} - 3^x)$

Άσκηση: 2.119 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α'. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $h(x) = (f \circ g)(x)$.
- β'. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης: $h(x) = (f \circ g)(x)$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι ένα προς ένα.
- Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 2.120 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 - x + 1}{(a-1)x^2 + 1}$$

Άσκηση: 2.121 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a+2)x^3 + x^2 + 1}{ax^2 + 2x + 1}$$

Άσκηση: 2.122 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + 2x + 1}{2x^2 + 3x + 4} = 12$$

Άσκηση: 2.123 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + ax \right)$$

Άσκηση: 2.124 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + ax \right)$$

Άσκηση: 2.125 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 2} + ax + b \right) = 0$$

Άσκηση: 2.126 Για τις διάφορες τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού a , να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x + 2^x - 1}{a^x - 2^x + 1}$$

Άσκηση: 2.127 Για τις διάφορες τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού a , να διερευνήσετε το όριο:

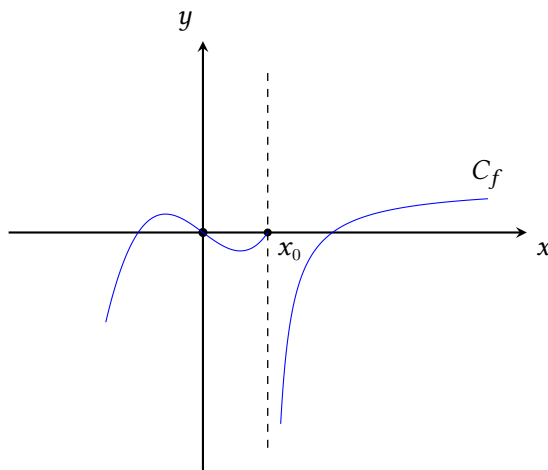
$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} - a^x}{e^x + a^{x+1}}$$

Άσκηση: 2.128 Για τις διάφορες τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού a , να διερευνήσετε το όριο:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$$

2.7 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Ορισμός: 2.5 Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.



Σχήμα 2.13: Ένα από τα πλευρικά όρια της f στο x_0 είναι ίσο με ∞ και η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

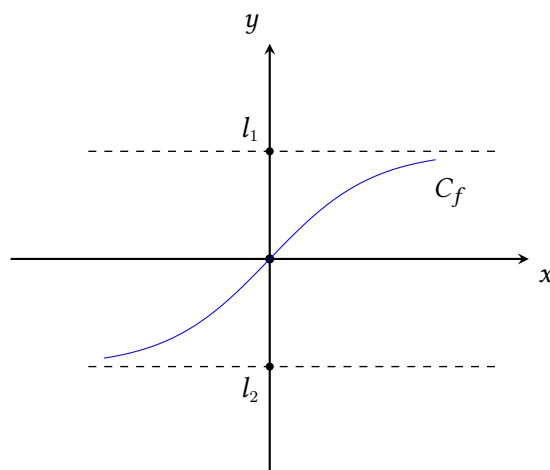
- Π** Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:
- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
 - Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Ορισμός: 2.6 Η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$), αν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

ή αντίστοιχα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$



Σχήμα 2.14: Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι ίσο με l_1 , η ευθεία $y = l_1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ είναι ίσο με l_2 , η ευθεία $y = l_2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

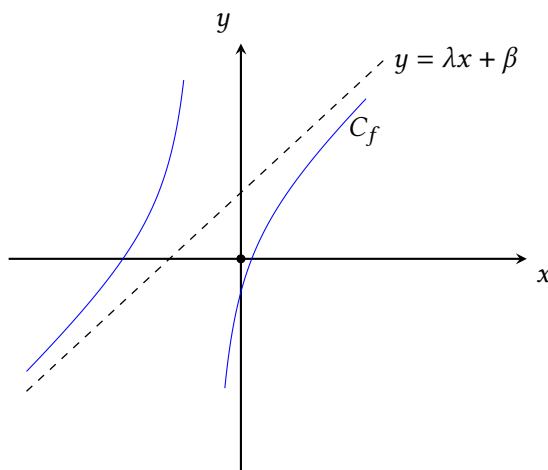
- Π** Αναζητούμε οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ ή αντίστοιχως σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$.

Ορισμός: 2.7 Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$), αν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

ή αντίστοιχα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$



Σχήμα 2.15: Τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)]$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)]$ είναι ίσα με 0, η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f .

Το παρακάτω θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε με εύκολο τρόπο την ασύμπτωτη μίας συνάρτησης f .

Θεώρημα: 2.21 Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

ή αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

- Π** Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι οριζόντια αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη**.
- Π** Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ ή αντιστοίχως σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$.
- Π** Οι πολωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

- Π** Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο μονάδες του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.129 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Άσκηση: 2.130 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

Άσκηση: 2.131 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

Άσκηση: 2.132 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$$

Άσκηση: 2.133 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = x + \frac{\eta\mu x}{x}$$

Άσκηση: 2.134 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$$

1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\epsilon) : y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
2. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της ευθείας $(\epsilon) : y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνάρτηση ένα προς ένα.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 2.135 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(a-1)x^2 + bx}{x^2 - 4}$$

1. Για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού a η συνάρτηση f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 2$;
2. Για την τιμή του a που βρήκατε και για $b \neq -4$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 2$.

■

Άσκηση: 2.136 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{ax^2 - x + 1}{x + 1}$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και b για τις οποίες η ευθεία $y = bx + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

■

Άσκηση: 2.137 Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{4x^2 + x}) = \frac{3}{4}$$

Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

■

Άσκηση: 2.138 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{iv) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$$

Τράπεζα Θεμάτων

■

Άσκηση: 2.139 Οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν στο $+\infty$ ασύμπτωτες αντίστοιχα τις ευθείες $y = 2x + 1$ και $y = 4$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xg(x) + f(x) + \eta\mu x}{xf(x) - 2x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}$$

■

Άσκηση: 2.140 Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) - g(x) = x - 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f καθώς $x \rightarrow +\infty$.

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$

2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g καθώς $x \rightarrow +\infty$.

Θέμα εξετάσεων

Άσκηση: 2.141 Έστω μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 2$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f^2(x)}{x} - f(x) \right) = 2$$

Κεφάλαιο 3

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

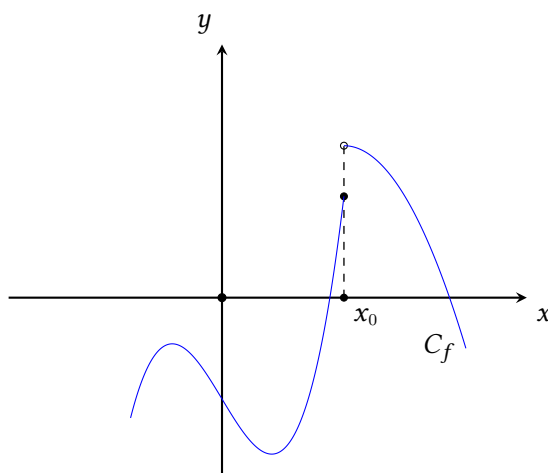
3.1 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός: 3.1 Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

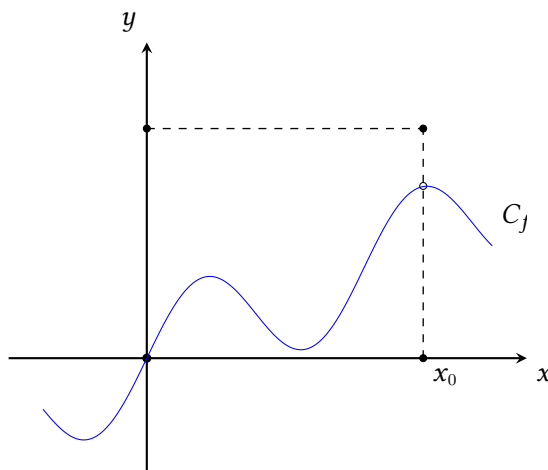
Π Έστω μία συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Η f δεν θα είναι συνεχής στο x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:

- όταν δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 .

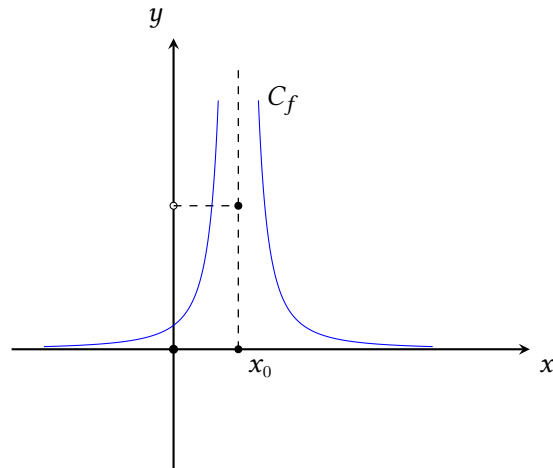


Σχήμα 3.1: Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

- όταν το όριο της f στο x_0 δεν είναι ίσο με την τιμή της $f(x_0)$.



Σχήμα 3.2: Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αλλά δεν είναι ίσο με το $f(x_0)$ και η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .



Σχήμα 3.3: Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ∞ και δεν μπορεί να είναι ίσο με το $f(x_0)$ και η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

Ορισμός: 3.2 Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής**, όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

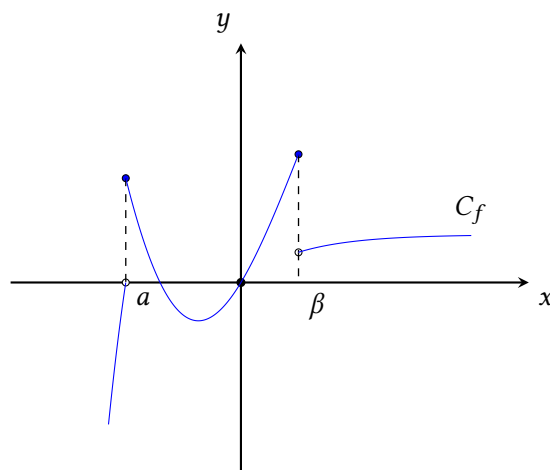
ειδικότερα

Ορισμός: 3.3 Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (a, β) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) .

Ορισμός: 3.4 Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[a, \beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Π Μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ χωρίς να είναι απαραίτητα συνεχής στα άκρα του διαστήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 3.4: Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία a και β γιατί τα όρια $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x)$ φανερά δεν υπάρχουν, όμως η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ αφού τα όρια $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ είναι ίσα με $f(a)$ και $f(\beta)$ αντίστοιχα.

Θεώρημα: 3.1 Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις.
- Οι ρητές συναρτήσεις (πηλίκια πολυωνύμων).
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
- Οι εκθετικές συναρτήσεις, $f(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$.
- Οι λογαριθμικές συναρτήσεις, $f(x) = \log_a x$, με $0 < a \neq 1$.

Θεώρημα: 3.2 (Συνέχεια και πράξεις)

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις:

$$f + g, \quad cf \ (c \in \mathbb{R}), \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f|, \quad \sqrt[n]{f}$$

είναι συνεχείς στο x_0 , υπό την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε διάστημα που περιέχει το x_0 .

Θεώρημα: 3.3 (Συνέχεια και σύνθεση)

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.1 Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & , \quad x < 1 \\ 3 & , \quad x = 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.2 Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x - x^2|} & , \quad x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 1}} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.3 Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{\eta\mu x} & , \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.4 Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln^2 x} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

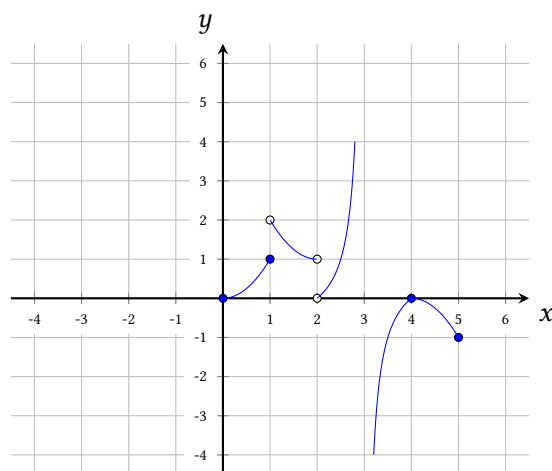
Άσκηση: 3.5 Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)}{2x - \pi} & , \quad x \neq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2} & , \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Άσκηση: 3.6 Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{1 + e^{1/x}} & , \quad x < 0 \\ \ln(1 + x) & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.7 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 5]$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0, 0)$ και $(4, 0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1) = 1$.



Με βάση το παραπάνω σχήμα:

1. Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f , αιτιολογώντας την απάντησή σας.
2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
3. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 3.8 Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια στο διάστημα $(0, 2)$ και στο διάστημα $[0, 2]$ την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & , \quad x < 2 \\ 4 + 2x & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.9 Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x + \eta \mu x} & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.10 Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2 + 2 & , \quad x \leq a \\ 3ax - 1 & , \quad x > a \end{cases}$$

Άσκηση: 3.11 Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} & , \quad x \leq 1 \\ a + \frac{x}{2} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.12 Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(x-2)} & , \quad x < 2 \\ \ln(a+x) & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.13 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + 3b}{x - 1} & , \quad x < 2 \\ 7 & , \quad x = 2 \\ \frac{x^2 + bx - 3a}{x - 3} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.14 Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - a} & , \quad x \neq a \\ b & , \quad x = a \end{cases}$$

Άσκηση: 3.15 Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a + b \cdot \sin x}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Άσκηση: 3.16 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax + \varepsilon \varphi x}{x} & , \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ b & , \quad x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\eta \mu x} & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Άσκηση: 3.17 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$xf(x) \geq \eta \mu 2x$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Άσκηση: 3.18 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^2 f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x$$

Να βρείτε την συνάρτηση f .

Άσκηση: 3.19 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$xf(x) + |\eta \mu x| \leq |x|$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Άσκηση: 3.20 Έστω μία συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής στο x_0 με $g(x_0) = 0$ και μία συνάρτηση f για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x)| \leq |g(x)|$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 .

Άσκηση: 3.21 Έστω f μία συνάρτηση, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x) - 2x| \leq (x - 1)^2$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(1) = 2$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 3.22 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^2 f(x) = \eta\mu x \cdot \eta\mu 3x$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Άσκηση: 3.23 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$xf(x) \leq x^2 + 4x + \eta\mu x$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Άσκηση: 3.24 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$xf(x) - \eta\mu 3x \leq x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$$

Να βρείτε την συνάρτηση f .

Άσκηση: 3.25 Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) + x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = 12$$

Να υπολογίσετε το $f(1)$.

Άσκηση: 3.26 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x+9}}{\eta\mu x} = \frac{17}{6}$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Άσκηση: 3.27 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x - x^2 f(x) + 3x^2}{x \eta \mu x + x^3} = 2$$

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(0, 2)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. ■

Άσκηση: 3.28 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = a$. ■

Άσκηση: 3.29 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x - 2} = 5$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x f(x) - 2x^2 + 3f(2) - 6x}{x^2 - 4}$$

Άσκηση: 3.30 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x - 2x^2 \leq f(x) \leq x + 5x^2$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. ■

Άσκηση: 3.31 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|x f(x) - |x|| \leq x^2$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. ■

Άσκηση: 3.32 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|x f(x) - \eta \mu x| \leq x^2 + 1 - \sigma \nu 2x$$

Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$. ■

Άσκηση: 3.33 Έστω $m > 0$. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq m |x - y|$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 3.34 Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) + g^2(x) = (x - 1)^2$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $x_0 = 1$.

Άσκηση: 3.35 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και για την οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

1. Να υπολογίσετε το $f(0)$.
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 3.36 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(xy) = f(x) + f(y) + xy - x - y$$

1. Να υπολογίσετε το $f(1)$.
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 3.37 Έστω μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x, y > 0$ ισχύει:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$.

3.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Θεώρημα: 3.4 (Το Θεώρημα Bolzano)

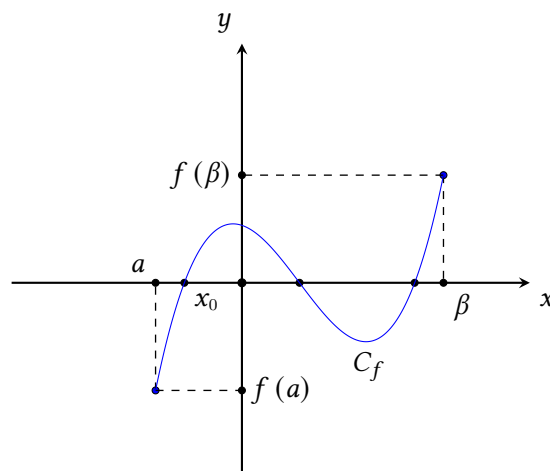
Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 0$$

Π Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 που ανήκει στο (a, β) .



Σχήμα 3.5: Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano.

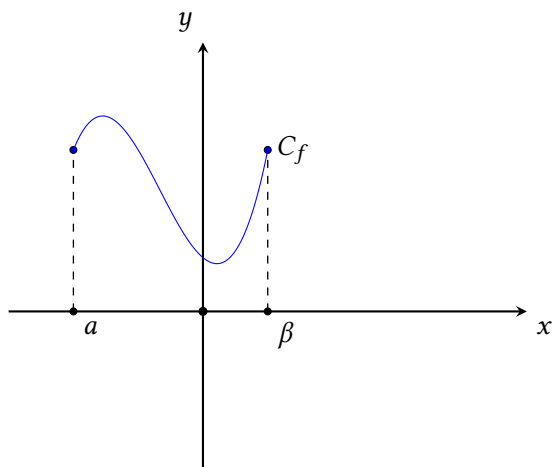
- Π** Είναι φανερό και από το παραπάνω σχήμα ότι το x_0 του θεωρήματος δεν είναι κατά ανάγκη μοναδικό.
- Π** Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, β) .
- Π** Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή αν για μία συνεχή συνάρτηση f , που ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, υπάρχει κάποιο $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

Π Συνέπεια του Θεωρήματος Bolzano είναι η παρακάτω πρόταση:

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι:

$$f(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

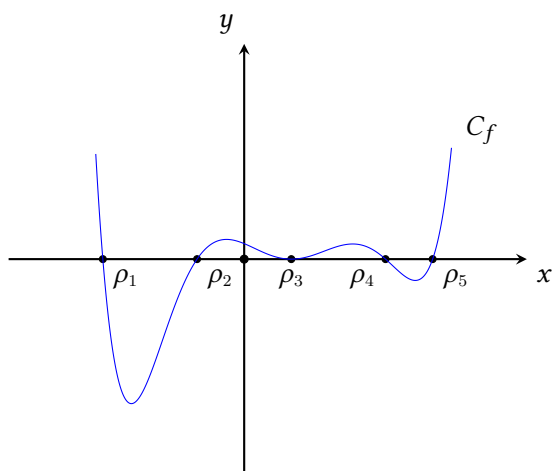
τότε η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ , δηλαδή η f είτε είναι θετική είτε είναι αρνητική σε όλα τα σημεία του διαστήματος Δ .



Σχήμα 3.6: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, επομένως διατηρεί πρόσημο στο $[a, \beta]$.

Π Συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι και η παρακάτω πρόταση:

Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Σχήμα 3.7: Η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.38 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8x + 1)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
2. Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 3.39 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση: 3.40 Να αποδείξετε ότι για κάθε $0 < a < 2$ η εξίσωση:

$$x^3 + ax^2 - 5x + a = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση: 3.41 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άσκηση: 3.42 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x + x \eta \mu x = 1 + \sigma \upsilon \nu 2x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Άσκηση: 3.43 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x(e^x + 2) = 1$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση: 3.44 Αν $0 < a < 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$e^{x-\ln x} = a + e - \ln x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$. ■

Άσκηση: 3.45 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2x + \sin x + 1 = 0$$

έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα. ■

Άσκηση: 3.46 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln(x^2 + 1) + x - 1 = 0$$

έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα. ■

Άσκηση: 3.47 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x^4 + 1}{x - 1} + \frac{x^3 + 1}{x - 2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. ■

Άσκηση: 3.48 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{\eta \mu x}{x - 1} = x + 1$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$. ■

Άσκηση: 3.49 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln x + \eta \mu x = e^{-x}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. ■

Άσκηση: 3.50 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^3 - 6x^2 + 3 = 0$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$. ■

Άσκηση: 3.51 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x - 1 = 3\eta\mu x$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\pi, 0)$. ■

Άσκηση: 3.52 Αν $a \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^3 + 3x^2 = ax + 3$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$. ■

Άσκηση: 3.53 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x - 1 \leq f(x) \leq x^2$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(\sin x) = \eta\mu x - 1$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. ■

Άσκηση: 3.54 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^3 + 3x - 2 = 0$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$. ■

Άσκηση: 3.55 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2^x + 3^x = 1$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$. ■

Άσκηση: 3.56 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2\ln x + ex = 0$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$. ■

Άσκηση: 3.57 Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(a)f(b) + ab < af(b) + bf(a)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = x_0$$

Άσκηση: 3.58 Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

με $a_0 \cdot a_n < 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$P(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

Άσκηση: 3.59 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε:

$$f^2(\xi) + f(\xi) = \xi^2 + \xi$$

Άσκηση: 3.60 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(a) + f(b) = a + b$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε:

$$(f(\xi) - b)(\xi - b) = (f(\xi) - a)(\xi - a)$$

Άσκηση: 3.61 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow [-\pi, \pi]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [-\pi, \pi]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\eta\mu\xi) + f(\sigma\upsilon\nu\xi) + 2\xi = 0$$

Άσκηση: 3.62 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(e^{f(x)} - 1)(f(x) + 1) > 0$$

Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 3.63 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x) + 2xf(x) = x^4 + x^2 + 1$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση: 3.64 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) + xf(x) = 1$$

1. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο.
2. Αν $f(0) > 0$, να βρείτε την συνάρτηση f .

■

Άσκηση: 3.65 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$f(0) + f(1) + f(2) = 0$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

■

Άσκηση: 3.66 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) + 2x = x^2 + 1$$

Να βρείτε την συνάρτηση f .

■

Άσκηση: 3.67 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f(x) - x)(f(x) + x) = x^2 + 1$$

Να βρείτε την συνάρτηση f .

■

Άσκηση: 3.68 Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$f(x) = \eta\mu 2x - \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

στο διάστημα $[0, \pi]$.

■

Άσκηση: 3.69 Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln(1 - \sigma\upsilon\nu x)$$

στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

■

3.3 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Θεώρημα: 3.5 (Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (Θ.Ε.Τ))

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(\beta)$, τότε θα ισχύει:

$$f(a) < \eta < f(\beta) \quad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \eta, \quad x \in [a, \beta]$$

Έχουμε ότι:

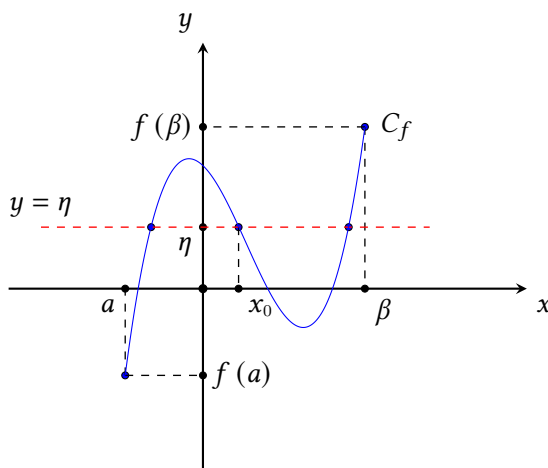
- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$
- $g(a) = f(a) - \eta \stackrel{(1)}{<} 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta \stackrel{(1)}{>} 0$, άρα $g(a) \cdot g(\beta) < 0$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta$$

■

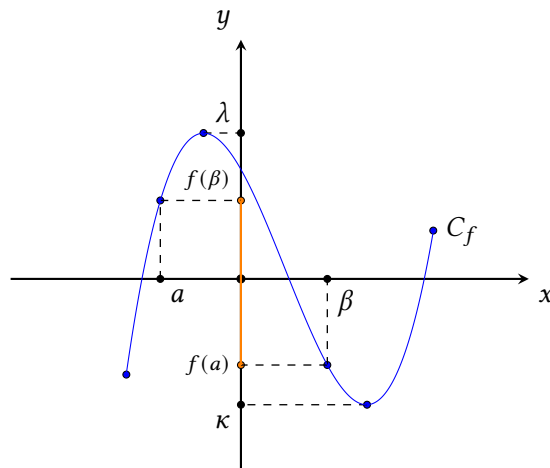
Π Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία $y = \eta$, όπου το η βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $f(a)$ και $f(\beta)$, σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο ανοικτό διάστημα (a, β) .



Σχήμα 3.8: Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών.

Π Είναι φανερό και από το παραπάνω σχήμα ότι το x_0 του θεωρήματος δεν είναι κατά ανάγκη μοναδικό.

- Π** Το Θεώρημα Bolzano είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών. Όταν τα $f(a)$ και $f(\beta)$ είναι ετερόσημα, ο αριθμός 0 είναι ανάμεσά τους.
- Π** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$, δεν σημαίνει ότι η συνάρτηση f παίρνει μόνο τιμές που είναι ανάμεσα στους αριθμούς $f(a)$ και $f(\beta)$. Στο σχήμα που ακολουθεί η συνάρτηση f παίρνει τιμές και έξω από το διάστημα που ορίζουν τα $f(a)$ και $f(\beta)$.



Σχήμα 3.9: Η f παίρνει τιμές και εκτός του διαστήματος $[f(a), f(\beta)]$.

Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι το εξής:

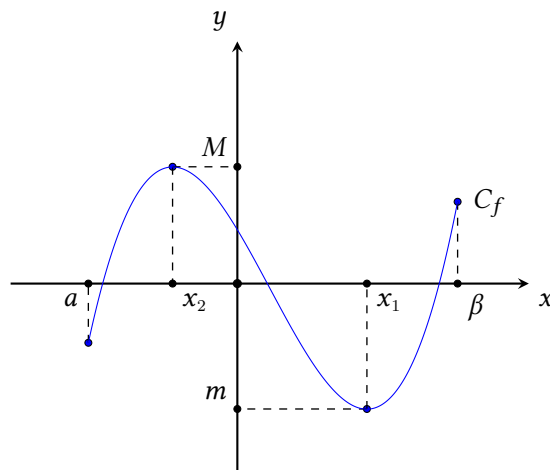
Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$, τότε το διάστημα που ορίζουν οι τιμές $f(a)$ και $f(\beta)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f .

3.4 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Θεώρημα: 3.6 (Το Θεώρημα Μέγιστης Ελάχιστης Τιμής (Θ.Μ.Ε.Τ))

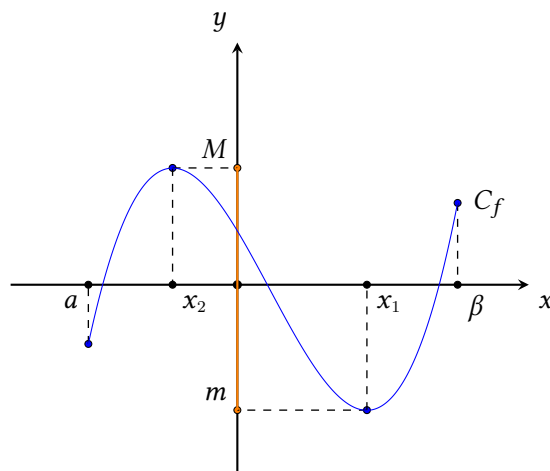
Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m , δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ με $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$, τέτοια ώστε:

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [a, \beta]$$



Σχήμα 3.10: Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Π Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Δηλαδή, αν έχουμε μία συνεχή συνάρτηση f , η οποία δεν είναι σταθερή και έχει πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ , τότε το σύνολο τιμών της $f(\Delta)$ θα είναι υποχρεωτικά διάστημα. Μόνο στην περίπτωση που η f είναι σταθερή στο Δ , το σύνολο τιμών της είναι μονοσύνολο. Μάλιστα, στην περίπτωση που το Δ είναι κλειστό διάστημα, τότε το $f(\Delta)$ θα είναι και αυτό κλειστό διάστημα.

Σχήμα 3.11: Το σύνολο τιμών της f είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$.



Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε για το σύνολο τιμών της $f(\Delta)$ έχουμε:

Μορφή διαστήματος Δ	Μονοτονία f	Σύνολο τιμών $f(\Delta)$
$[a, \beta]$	Γνησίως αύξουσα	$[f(a), f(\beta)]$
	Γνησίως φθίνουσα	$[f(\beta), f(a)]$
$(a, \beta]$	Γνησίως αύξουσα	$\left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(\beta) \right]$
	Γνησίως φθίνουσα	$\left[f(\beta), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$
$[a, \beta)$	Γνησίως αύξουσα	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$
	Γνησίως φθίνουσα	$\left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(a) \right]$
(a, β)	Γνησίως αύξουσα	$\left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$
	Γνησίως φθίνουσα	$\left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.70 Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3}{32} + \sin(\pi x) + 7, \quad x \in [-4, 4]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-4, 4)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{15}{2}$$

■

Άσκηση: 3.71 Αν $n \in \mathbb{N}$ και $a \in (1, 4)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^{2n+1} + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 = a$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

■

Άσκηση: 3.72 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$. Αν είναι $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να αποδείξετε ότι:

1. Η ευθεία $y = 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.
2. Υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

Θέμα εξετάσεων

■

Άσκηση: 3.73 Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in [0, 2]$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[0, 2]$.
2. Να αποδείξετε ότι:
 - α'. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$.
 - β'. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
 - γ'. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Τράπεζα Θεμάτων

■

Άσκηση: 3.74 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = \frac{2f(2) + 4f(4) + 6f(6)}{12}$$

έχει ακριβώς μία ρίζα, η οποία περιέχεται στο διάστημα $(2, 6)$.

Άσκηση: 3.75 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και για την οποία ισχύει:

$$f(1) + f(2) + \dots + f(100) = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Άσκηση: 3.76 Έστω $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - (\kappa + \lambda)x^2 - \kappa\lambda x + \kappa\lambda$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{(1 - \kappa)(1 - \lambda)}{2}$$

Άσκηση: 3.77 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) - f(x_0) \geq x - x_0, \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

Άσκηση: 3.78 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε:

$$2x_0 f(x_0) = f(1) + 2f(2)$$

Άσκηση: 3.79 Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$. Αν υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί $0 < a < b < c$ με $b^2 \neq ac$ για τους οποίους ισχύει:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) \cdot f\left(\frac{b}{c}\right) \cdot f\left(\frac{c}{a}\right) = 1$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = x_0$$