
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΥΧΟΣ Β

Βλαχάκης Ιωάννης

4 ΛΥΚΕΙΟ ΓΛΥΦΑΔΑΣ

Περιεχόμενα

I	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ	5
1	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	7
1.1	ΕΝΝΟΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ	8
1.2	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ	12
1.3	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	16
1.3.1	Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων	17
1.3.2	Κανόνες παραγωγίσης	20
1.3.3	Παράγωγος βασικών συναρτήσεων (συνέχεια)	22
1.3.4	Παράγωγος και εφαπτομένη	31
1.3.5	Παράγωγος και ρυθμός μεταβολής	35
1.4	ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE	37
1.5	ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ	41
1.6	ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ	45
1.7	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ	51
1.8	ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	57
1.9	ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ	65
1.10	ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL	72
II	ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	77
2	ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	79
2.1	ΕΝΝΟΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	80
2.2	ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	83
2.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	86
2.4	ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ	102

Μέρος Ι

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Κεφάλαιο 1

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΕΝΝΟΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ορισμός: 1.1 Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$. Δηλαδή ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Π Ισοδύναμος ορισμός για την παράγωγο: Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Π Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί.

Π Με την βοήθεια της παραγώγου θα ορίσουμε την εφαπτομένη ευθεία στην γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

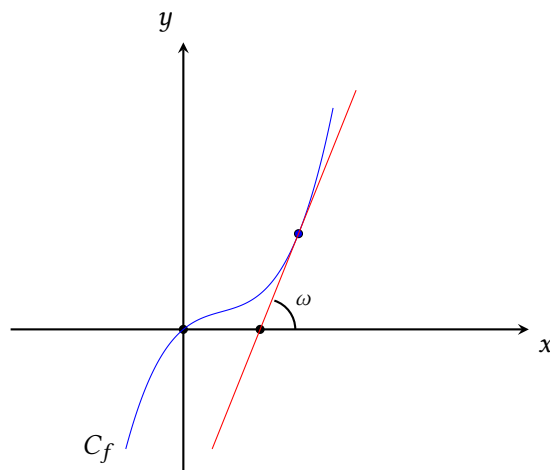
Ορισμός: 1.2 Έστω μία συνάρτηση f και ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής της παράστασης. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της A , την ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και έχει συντελεστή διεύθυνσης την παράγωγο $f'(x_0)$. Δηλαδή η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$(\varepsilon) : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Π Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ του πεδίου ορισμού της, τότε όπως είδαμε ορίζεται εφαπτομένη στην γραφική της παράσταση στο σημείο A . Η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$, πράγμα που σημαίνει ότι αν η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα x' , θα ισχύει:

$$f'(x_0) = \varepsilon \varphi \omega$$

Για τον λόγο αυτό τον αριθμό $f'(x_0)$ τον ονομάζουμε και **κλίση** της C_f στο σημείο A ή κλίση της f στο x_0 .



Σχήμα 1.1: Η $\varepsilon\varphi\omega$ είναι ίση με την παράγωγο $f'(x_0)$.

Π Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x και y συνδέονται με την σχέση $y = f(x)$ και η f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε η παράγωγος $f'(x_0)$ ονομάζεται και **ρυθμός μεταβολής** του y ως προς το x στο σημείο x_0 .

Για παράδειγμα, η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού την χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή:

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

Η στιγμιαία επιτάχυνση ενός κινητού την χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος της συνάρτησης της ταχύτητας $x = v(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή:

$$\alpha(t_0) = v'(t_0)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.1 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 + x$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. ■

Άσκηση: 1.2 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. ■

Άσκηση: 1.3 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = -1$. ■

Άσκηση: 1.4 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. ■

Άσκηση: 1.5 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

$$f(x) = \sin^2 x$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. ■

Άσκηση: 1.6 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 & , \quad x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. ■

Άσκηση: 1.7 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sin x & , \quad x \leq 0 \\ x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x > 0 \end{cases}$$

■ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. ■

1.2 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Θεώρημα: 1.1 Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

Π Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση:

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αφού:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$

Π Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.8 Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και b ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} & , \quad x < 1 \\ x^2 + ax + b & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. ■

Άσκηση: 1.9 Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και b ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & , \quad x \leq 1 \\ \frac{x^2 + bx + 1}{x + 1} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. ■

Άσκηση: 1.10 Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και b ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \quad x < 1 \\ 4\sqrt{x + 3} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. ■

Άσκηση: 1.11 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) - 6f(x) \eta \mu x + \eta \mu^2 3x = 0$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 3$. ■

Άσκηση: 1.12 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x) - 2f^2(x) + 3f(x) = x^2 - 2x$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. ■

Άσκηση: 1.13 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Αν η συνάρτηση $g(x) = f(|x|)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$. ■

Άσκηση: 1.14 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την

σχέση:

$$x^3 + |\eta\mu 2x| \leq f(x) \leq x^3 + 2|x|$$

Να αποδείξετε ότι:

1. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
2. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

■

Άσκηση: 1.15 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν την σχέση:

$$|xf(x) - g(x)| \leq x^2$$

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0)$$

■

Άσκηση: 1.16 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$ και $h'(x_0) = g'(x_0) = m \in \mathbb{R}$ και οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν την σχέση:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

Να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = m$.

■

Άσκηση: 1.17 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(1) = 2$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt{x} - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(1)}{\sqrt{x} - 1}$

■

Άσκηση: 1.18 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = f'(2) = 3$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 3x + 2}$$

■

Άσκηση: 1.19 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a} = af'(a) - f(a)$

ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(x) - af(a)}{x - a} = af'(a) + f(a)$

■

Άσκηση: 1.20 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x^2 - x_0 \cdot x} = f'(x_0) - \frac{f(x_0)}{x_0}$$

■

Άσκηση: 1.21 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = \frac{3}{4}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. ■

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: 1.3 Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A , ή απλά ότι είναι **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

Ορισμός: 1.4 Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (a, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$.

Ορισμός: 1.5 Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

Ορισμός: 1.6 Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Έστω A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μία νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A_1 η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in A_1$ τον παράγωγο αριθμό $f'(x)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** της f ή απλά **παράγωγος** της f και συμβολίζεται $f'(x)$.

Π Με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε την πρώτη παράγωγο, ορίσουμε την δεύτερη παράγωγο, την τρίτη παράγωγο και ούτω καθεξής. Η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται f'' , η τρίτη παράγωγος f''' και η n -οστή παράγωγος $f^{(n)}$. Δηλαδή ισχύει:

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)} \right]'$$

1.3.1 Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Θεώρημα: 1.2 Έστω η συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$(c)' = 0$$

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

Θεώρημα: 1.3 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$(x)' = 1$$

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

Δηλαδή $f'(x) = (x)' = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

Θεώρημα: 1.4 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x_0^{n-1}) \\ &= x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} \\ &= nx_0^{n-1} \end{aligned}$$

Δηλαδή $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

Θεώρημα: 1.5 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Απόδειξη. Έστω $x_0 > 0$. Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Δηλαδή $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

■

Θεώρημα: 1.6 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

Θεώρημα: 1.7 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

Θεώρημα: 1.8 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$(e^x)' = e^x$$

Θεώρημα: 1.9 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

1.3.2 Κανόνες παραγωγίσισης

Θεώρημα: 1.10 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 . Τότε η συνάρτηση cf , $c \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

Θεώρημα: 1.11 Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 . Τότε η συνάρτηση $f + g$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη. Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 , ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

■

Θεώρημα: 1.12 Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 . Τότε η συνάρτηση $f \cdot g$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Θεώρημα: 1.13 Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 με $g(x_0) \neq 0$. Τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Θεώρημα: 1.14 Έστω δύο συναρτήσεις f και g όπου η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $g(x_0)$. Τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

1.3.3 Παράγωγος βασικών συναρτήσεων (συνέχεια)

Θεώρημα: 1.15 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{(1)'x^n - 1(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$$

■

Θεώρημα: 1.16 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ και ισχύει:

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\phi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' \\ &= \frac{(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

■

Θεώρημα: 1.17 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ και ισχύει:

$$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

Θεώρημα: 1.18 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$$

Επομένως,

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

■

Θεώρημα: 1.19 Έστω η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Επομένως,

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \cdot 1 \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

■

Θεώρημα: 1.20 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $x > 0$, τότε:

$$(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- αν $x < 0$, τότε:

$$(\ln |x|)' = (\ln (-x))' = \frac{1}{-x} (-x)' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

■

Στον πίνακα που ακολουθεί, συνοψίζουμε όλα τα αποτελέσματα που βρήκαμε για τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων.

Συνάρτηση	Παράγωγος	Σύνολο που παραγωγίζεται
$c, c \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$x^a, a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$	ax^{a-1}	$(0, +\infty)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\mathbb{R}$
$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\mathbb{R}$
$\varepsilon\varphi x$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\sigma\varphi x$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x, 0 < a \neq 1$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$

Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τους κανόνες παραγωγίσης συναρτήσεων σε διαστήματα που οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες. Τονίζουμε ότι κάποιος πρέπει να δείχνει ιδιαίτερη προσοχή κατά πόσον μπορεί να χρησιμοποιήσει τους κανόνες αυτούς.

Οι κανόνες παραγωγίσης

1. $(cf(x))' = cf'(x) \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Γενικότερα αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_k$ είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x)$$

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Ο κανόνας επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Για παράδειγμα για τρεις συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

5. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα παραγωγίσις σύνθετης συνάρτησης, δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

Μορφή συνάρτησης	Παράγωγος συνάρτησης
$f^a(x)$, $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$	$a f^{a-1}(x) \cdot f'(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\eta\mu(f(x))$	$\sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x)$
$\sigma\upsilon\nu(f(x))$	$-\eta\mu(f(x)) \cdot f'(x)$
$\varepsilon\varphi(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(f(x))}$
$\sigma\varphi(f(x))$	$-\frac{f'(x)}{\eta\mu^2(f(x))}$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$, $0 < a \neq 1$	$a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$\ln f(x) $	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.22 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 - x + 1$ ii) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2$ iii) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \sqrt{x}, x > 0$ ■

Άσκηση: 1.23 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x + \varepsilon\varphi x$ ii) $f(x) = x^2 - \ln x$ iii) $f(x) = x^3 + e^x$ ■

Άσκηση: 1.24 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 \eta\mu x$ ii) $f(x) = (x^2 - 2x) \sigma\upsilon\nu x$ iii) $f(x) = x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ ■

Άσκηση: 1.25 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 \ln x$ ii) $f(x) = (x^2 + 1) e^x$ iii) $f(x) = x e^x \ln x$ ■

Άσκηση: 1.26 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ ii) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$ iii) $f(x) = \frac{1 - \eta\mu x}{2 + \eta\mu x}$ ■

Άσκηση: 1.27 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 + e^x}$ ii) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ iii) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ ■

Άσκηση: 1.28 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = (x^2 + x + 1)^3$ ii) $f(x) = (x^2 + 1)^{-2}$ iii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ■

Άσκηση: 1.29 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ ii) $f(x) = \eta\mu^3 2x$ iii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu (\eta\mu x)$ ■

Άσκηση: 1.30 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = e^{1-x^2}$ ii) $f(x) = x^2 e^{-x}$ iii) $f(x) = e^{x \sigma\upsilon\nu x}$ ■

Άσκηση: 1.31 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = 2^{\eta\mu x} \qquad \text{ii) } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \qquad \text{iii) } f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x\ln x}$$

Άσκηση: 1.32 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \ln(x^2 - 4x) \qquad \text{ii) } f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x) \qquad \text{iii) } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Άσκηση: 1.33 Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης: $f(x) = |2x - 4| - x$

Άσκηση: 1.34 Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x & , \quad x < 0 \\ x^2 + x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση: 1.35 Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Άσκηση: 1.36 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \sqrt[3]{x+1} \qquad \text{ii) } f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4} \qquad \text{iii) } f(x) = \eta\mu(\sqrt{x})$$

Άσκηση: 1.37 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = x^{\ln x} \qquad \text{ii) } f(x) = (x^2 + 1)^x \qquad \text{iii) } f(x) = x^{\sigma\upsilon\nu x}$$

Άσκηση: 1.38 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x \leq 1 \\ \frac{x^2 + ax - 1}{x + 1} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου a ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

Άσκηση: 1.39 Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2 & , \quad x < 1 \\ x^4 + 5x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Άσκηση: 1.40 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{ax} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$xf''(x) + (1-x)f(x) = f'(x)$$

Άσκηση: 1.41 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = f(x)$$

Άσκηση: 1.42 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x\eta\mu x + 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'(\frac{\pi}{2})$.
2. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση φ με:

$$\varphi(x) = f'(x) - \frac{1}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ισχύουν: $\varphi(0) < 0$ και $\varphi(\frac{\pi}{2}) > 0$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\varphi(x) = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.43 Να βρείτε ένα πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ικανοποιεί την σχέση:

$$P(x) + P'(x) - P''(x) = x^3 - 7x^2 - 20x + 18$$

Άσκηση: 1.44 Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x)$ με βαθμό $n \geq 2$.

1. Να αποδείξετε ότι το $(x - \rho)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν:

$$P(\rho) = P'(\rho) = 0$$

2. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου:

$$P(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n$$

Άσκηση: 1.45 Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν την σχέση:

$$f(x)g(x) = e^{\eta\mu x} - 1$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0) \neq 0$.

Άσκηση: 1.46 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(x)$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = 1$.

Άσκηση: 1.47 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
2. Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την παράγωγό της.

Άσκηση: 1.48 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \varepsilon\varphi x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
2. Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την παράγωγό της.

1.3.4 Παράγωγος και εφαπτομένη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.49 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = xe^x + \eta\mu^2 x + 2$$

στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Άσκηση: 1.50 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x & , \quad x \leq 1 \\ 2 - x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Άσκηση: 1.51 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , \quad x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
2. Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.52 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = \frac{\pi}{3}$ είναι άρτια και παραγωγίσιμη. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$g(x) = \sin(f(x))$$

στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Άσκηση: 1.53 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε την τιμή $(g \circ f)(0)$.
2. Να βρείτε την παράγωγο $g'(2)$.
3. Να βρείτε την παράγωγο της $g \circ f$ στο $x_0 = 0$.
4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.54 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & , \quad x < 1 \\ \frac{c}{x} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a, b, c για τις οποίες η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $M(1, f(1))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$(\zeta) : 4x - y - 2 = 0$$

Άσκηση: 1.55 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = ax - \frac{x^3}{4} \quad , \quad a > 0$$

Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$ να σχηματίζει με αυτόν γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Άσκηση: 1.56 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες είναι:

1. Παράλληλες στον άξονα $x'x$.
2. Κάθετες στην ευθεία $(\zeta) : x + 2y - 1 = 0$.

Άσκηση: 1.57 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (1 - x) \ln(x - 1)$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.

Άσκηση: 1.58 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση: 1.59 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \ln x$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση: 1.60 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2, 0)$.

Άσκηση: 1.61 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 1$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία τέμνει τους θετικούς ημιάξονες κατά ίσα τμήματα.

Άσκηση: 1.62 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{-x} \text{ και } g(x) = \ln x$$

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g , οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων, είναι κάθετες.

Άσκηση: 1.63 Να εξετάσετε αν η ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x + 4$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 + 4x + 5$$

Άσκηση: 1.64 Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a ώστε η ευθεία $(\varepsilon) : y = ax - 3$ να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 + 2x - 2$$

Άσκηση: 1.65 Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και b ώστε η ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x - 1$ να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

στο σημείο $M(1, 2)$.

Άσκηση: 1.66 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 - x - 1 \text{ και } g(x) = -\frac{1}{x}$$

εφάπτονται στο σημείο $M(1, -1)$.

Άσκηση: 1.67 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ και } g(x) = x^3 - x$$

εφάπτονται.

Άσκηση: 1.68 Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 + a - 2 \text{ και } g(x) = -x^2 + ax$$

να εφάπτονται.

Άσκηση: 1.69 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{-x} \text{ και } g(x) = -\ln x$$

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A και η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

Άσκηση: 1.70 Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = 2x^2 + 2x$$

Άσκηση: 1.71 Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = 4 - x^2 \text{ και } g(x) = -x^2 + 8x - 20$$

1.3.5 Παράγωγος και ρυθμός μεταβολής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.72 Η ακτίνα ενός κύκλου αυξάνεται με ρυθμό $10 \frac{cm}{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου την χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα του είναι ίση με $10cm$.

Άσκηση: 1.73 Ένα παραλληλόγραμμο έχει πλευρές $8cm$ και $12cm$ και η οξεία γωνία του ελαττώνεται με ρυθμό $\frac{\pi}{90} \frac{rad}{min}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του παραλληλογράμμου την χρονική στιγμή που η γωνία του είναι ίση με $\frac{\pi}{6} rad$.

Άσκηση: 1.74 Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου η βάση $B\Gamma$ είναι σταθερή και ίση με $8cm$, ενώ οι δύο άλλες πλευρές του αυξάνονται με ρυθμό $3 \frac{cm}{sec}$. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου την χρονική στιγμή που οι ίσες πλευρές του είναι ίσες με $5cm$.

Άσκηση: 1.75 Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(a, 0)$ και $B(0, a)$ με $a > 0$. Ένα σημείο M ξεκινά από την αρχή των αξόνων O και κινείται στον θετικό ημιάξονα Ox με ταχύτητα $0.4 \frac{m}{sec}$. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $O\hat{B}M$ την χρονική στιγμή που το M φτάνει στο σημείο A .

Άσκηση: 1.76 Δύο σωματίδια A και B ξεκινούν ταυτόχρονα από την αρχή O των αξόνων και κινούνται κατά μήκος των θετικών ημιαξόνων Ox και Oy με σταθερές ταχύτητες $v_A = 4 \frac{m}{sec}$ και $v_B = 5 \frac{m}{sec}$ αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB την χρονική στιγμή $t = 2sec$.

Άσκηση: 1.77 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \eta \mu x$$

Όταν το M διέρχεται από το σημείο $A(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ η απόστασή του από τον άξονα $y'y$ μειώνεται με ρυθμό $2 \frac{cm}{sec}$. Την ίδια χρονική στιγμή, να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης του M από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση: 1.78 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Η τετμημένη του M αυξάνεται με ρυθμό $0.4 \frac{cm}{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μείωσης του εμβαδού του τριγώνου OAM , όπου $A(2, 0)$, την χρονική στιγμή που είναι $\widehat{OAM} = 90^\circ$.

■

Άσκηση: 1.79 Ένα σημείο M ξεκινά από την αρχή των αξόνων O και κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

ώστε η γωνία $\widehat{xOM}$ να ελαττώνεται με ρυθμό $\frac{\pi}{14} \frac{rad}{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης OM την χρονική στιγμή που είναι $\widehat{xOM} = \frac{\pi}{6}$.

■

1.4 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Θεώρημα: 1.21 (Το Θεώρημα Rolle)

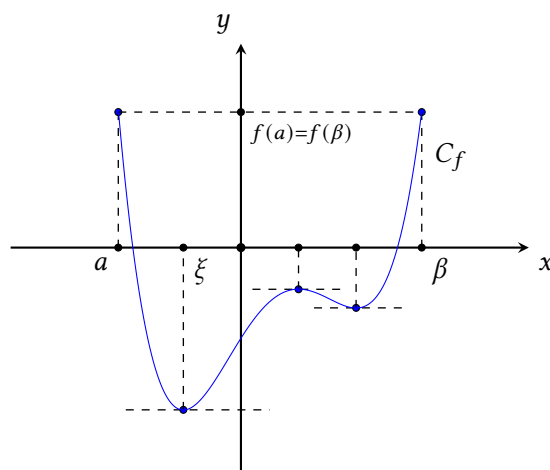
Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$
- είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β)
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = 0$$

Π Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφικής της παράστασης, με $\xi \in (a, \beta)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.



Σχήμα 1.2: Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle.

- Π** Είναι φανερό και από το παραπάνω σχήμα ότι το ξ του θεωρήματος δεν είναι κατά ανάγκη μοναδικό.
- Π** Το θεώρημα Rolle μας λέει ότι αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, β) . Θα το χρησιμοποιήσουμε επομένως στην επίλυση εξισώσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.80 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln^2 x - \ln x + 1, \quad x \in [1, e]$$

1. Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, e]$.
2. Να βρείτε την τιμή του $\xi \in (1, e)$ για την οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Άσκηση: 1.81 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύει $f(0) = 0$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$F(x) = (x - 2)f(x)$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 2]$.

2. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$(2 - \xi)f'(\xi) = f(\xi)$$

Άσκηση: 1.82 Δίνεται η άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = e^{1-2x^2} \cdot f(x)$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$.

2. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 4\xi \cdot f(\xi)$$

Άσκηση: 1.83 Δίνεται μία συνάρτηση: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με $a > 0$, η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και για την οποία ισχύει:

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$\xi \cdot f'(\xi) = f(\xi)$$

Άσκηση: 1.84 Δίνεται μία συνάρτηση: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με $0 < a < b$, η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και για την οποία ισχύει:

$$e^{f(a)-f(b)} = \frac{b}{a}$$

Να δείξετε η εξίσωση:

$$xf'(x) = -1$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο (a, b) .

Άσκηση: 1.85 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f : [a, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\ln f(\beta) - \ln f(a) = \beta - a$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = f(x_0)$$

Άσκηση: 1.86 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$4x^3 - 3(a+1)x^2 + a = 0$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση: 1.87 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$5x^4 + 4ax^3 - 1 = a$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση: 1.88 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-1) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x) = 2xf^2(x)$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Άσκηση: 1.89 Δίνεται μία συνάρτηση: $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και για την οποία ισχύει: $f(a) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$xf'(x) + f(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (a, β) .

Άσκηση: 1.90 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(\pi) = 0$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x) \cdot \sin x = f(x) \cdot \eta \mu x$$

έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(0, \pi)$.

Άσκηση: 1.91 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) + f(x_0) \cdot \sigma \varphi x_0 = 0$$

Άσκηση: 1.92 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{2\xi} = f(1) - f(0)$$

Άσκηση: 1.93 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.
- $f'(a) = f'(b)$ και $f(a) = f(b)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(\xi) \cdot f(\xi) = (f'(\xi))^2$$

Άσκηση: 1.94 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^3 - 3x + a = 0$$

έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a .

Άσκηση: 1.95 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^3 - 12x + a = 0$$

έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(-2, 2)$, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a .

Άσκηση: 1.96 Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^{2n} + ax + \beta = 0$$

έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

1.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Θεώρημα: 1.22 (Το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ))

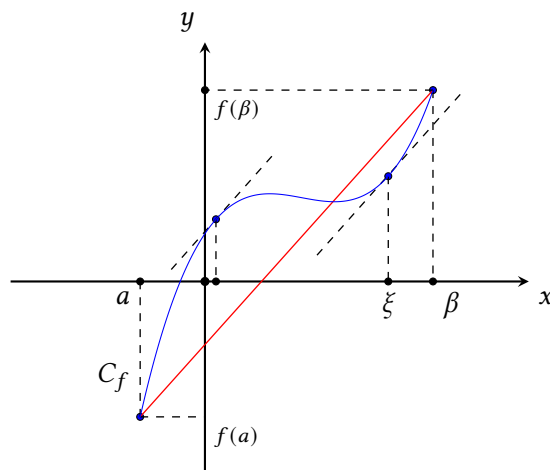
Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$
- είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Π **Γεωμετρική ερμηνεία:** Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφικής της παράστασης, με $\xi \in (a, \beta)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$.



Σχήμα 1.3: Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Π Είναι φανερό και από το παραπάνω σχήμα ότι το ξ του θεωρήματος δεν είναι κατά ανάγκη μοναδικό.

Π Το Θεώρημα Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής όταν $f(a) = f(\beta)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.97 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x \eta \mu \left(\frac{\pi}{x} \right), \quad x \in [2, 6]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 6)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta) : x - 4y + 1 = 0$. ■

Άσκηση: 1.98 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $3f(5) + f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = f(5)$$

Άσκηση: 1.99 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και ισχύουν:

- $f(a) = -a^2 - 2a - 4$ και $f(b) = b^2 + 1$.
- $f'(x) \leq 2$, για κάθε $x \in (a, b)$.

Να αποδείξετε ότι $a = -2$ και $b = 1$. ■

Άσκηση: 1.100 Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ και για την οποία ισχύει:

$$f(1) = \frac{f(3)}{3} = 1$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 3)$, με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε:

$$f'(x_1) + f'(x_2) = 2$$

Άσκηση: 1.101 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) \eta \mu x$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, \pi)$, με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε:

$$g'(x_1) + g'(x_2) = 0$$

Άσκηση: 1.102 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(5) = f(1) + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$$

Άσκηση: 1.103 Δίνεται μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) και για την οποία ισχύουν:

$$f(a) = \frac{a}{5} \text{ και } f(b) = \frac{b}{5}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, b)$, με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε:

$$3f'(x_1) + 2f'(x_2) = 1$$

Άσκηση: 1.104 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 1 - x_0$$

- Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$$

Άσκηση: 1.105 Η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(x_0) = 0$$

Άσκηση: 1.106 Αν $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{b-a}{\sin^2 a} < \varepsilon \varphi b - \varepsilon \varphi a < \frac{b-a}{\sin^2 b}$$

Άσκηση: 1.107 Αν $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$|\sin^2 x - \sin^2 y| \leq |x - y|$$

■

Άσκηση: 1.108 Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, να αποδείξετε ότι:

$$x < \eta \mu x < x \sigma \nu x$$

■

Άσκηση: 1.109 Για κάθε $x < 0$, να αποδείξετε ότι:

$$e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1$$

■

Άσκηση: 1.110 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ όπου η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Αν $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$f'(1) < f(1) < f'(0)$$

■

1.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Θεώρημα: 1.23 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο Δ .
- $f'(x) = 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ .

Τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα Δ .

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία x_1 και x_2 του διαστήματος Δ . Θα αποδείξουμε ότι:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ αφού η f είναι συνάρτηση.

Έστω $x_1 < x_2$. Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Όμως το ξ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ , συνεπώς ισχύει:

$$f'(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

■

Π Το παραπάνω θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Θεώρημα: 1.24 Έστω δύο συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και για τις οποίες ισχύουν:

- Οι f και g είναι συνεχείς στο Δ .
- $f'(x) = g'(x)$, για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ .

Τότε υπάρχει σταθερά c , τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in \Delta$$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα Δ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, η συνάρτηση h είναι σταθερή στο διάστημα Δ , δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} h(x) &= c \\ \Leftrightarrow f(x) - g(x) &= c \\ \Leftrightarrow f(x) &= g(x) + c \end{aligned}$$

■

Π Όπως και προηγουμένως, η πρόταση ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 2x, \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = g'(x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ εντούτοις δεν υπάρχει σταθερά c ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Θεώρημα: 1.25 (Η πρόταση υπάρχει σαν εφαρμογή στο σχολικό βιβλίο και μπορεί να χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη.)

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο Δ .
- $f'(x) = f(x)$, για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ .

Τότε υπάρχει σταθερά c , τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = ce^x$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.111 Δίνεται μία συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) \sqrt{1+x^2} = f(x)$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x \right) f(x)$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

2. Να βρείτε την συνάρτηση f .

Άσκηση: 1.112 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(e) = 1$
- $f(x) = -\frac{xf'(x)}{2} \cdot \ln x$, για κάθε $x > 1$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) \cdot \ln^2 x$$

είναι σταθερή στο $(1, +\infty)$.

2. Να βρείτε την συνάρτηση f .

Άσκηση: 1.113 Δίνεται μία συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$|f(x) - f(y)| + \sin(x - y) \leq 1$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 1.114 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\pi) = 2$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = 2\sin 2x - \eta \mu x$$

Άσκηση: 1.115 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = \ln 5$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 5}$$

Άσκηση: 1.116 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, η οποία για κάθε $x \in (0, \pi)$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f'(x) \eta \mu x = f(x) \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu^2 x$$

■

Άσκηση: 1.117 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, η οποία για κάθε $x \in (0, \pi)$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f'(x) \eta \mu x + (1 + f(x)) \sigma \upsilon \nu x = 1$$

■

Άσκηση: 1.118 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, με $f(1) = 9$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}$$

■

Άσκηση: 1.119 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(e) = e$, για την οποία για κάθε $x > 1$ ισχύει:

$$f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = 1$$

■

Άσκηση: 1.120 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$\sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x) = x e^{-f(x)}$$

■

Άσκηση: 1.121 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 2$, για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x f'(x) = f(x)$$

■

Άσκηση: 1.122 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, με $f(0) = -1$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f'(x) = 2x f^2(x)$$

Άσκηση: 1.123 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = -1$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f(x) \cdot f'(x) = x$$

Άσκηση: 1.124 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f'(x) = 2f(x)$$

Άσκηση: 1.125 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = e$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f'(x) = 2xf(x)$$

Άσκηση: 1.126 Η συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(0) = f'(0) = 1$
- $(f'(x))^2 = f(x)f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε την συνάρτηση f .

Άσκηση: 1.127 Να βρείτε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(-1) = -4$ και $f(1) = 3$, για την οποία για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$f'(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2}$$

Άσκηση: 1.128 Έστω μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$, με $f'(1) = 1$ και για την οποία για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) = x \ln x$$

Άσκηση: 1.129 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, η οποία για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f'(x) \sin x = f(x) (\eta \mu x + \sigma \nu \nu x)$$

Άσκηση: 1.130 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, με $f(1) = e^e$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f'(x) = f(x) \cdot \ln f(x)$$

Άσκηση: 1.131 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = e$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x)$$

Άσκηση: 1.132 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$(x^2 + 1) f'(x) = (x - 1)^2 f(x)$$

Άσκηση: 1.133 Η συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x+y) = \frac{1}{2} f(x) f(y)$$

Αν η ευθεία $y = 2x+2$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(0, f(0))$, να βρείτε την συνάρτηση f .

1.7 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Θεώρημα: 1.26 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν:

- $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .
- $f'(x) < 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .

Απόδειξη. Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ . Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ . Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ του διαστήματος Δ . Θα αποδείξουμε ότι:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Όμως το ξ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ , συνεπώς ισχύει:

$$f'(\xi) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \quad (\text{αφού } x_1 - x_2 < 0)$$

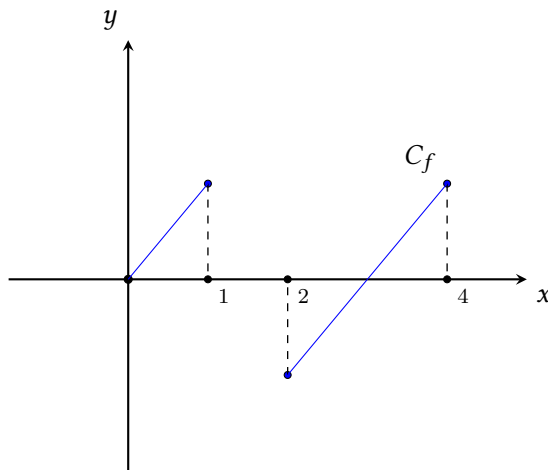
$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

■

- Π Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις το θεώρημα δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 1 \\ x - 3 & , 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Για την συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = 1 > 0$ για κάθε $x \in [0, 1] \cup [2, 4]$, παρόλα αυτά η συνάρτηση δεν είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $[0, 1] \cup [2, 4]$, αφού για παράδειγμα είναι $1 < 2$ αλλά $f(1) = 1 > -1 = f(2)$.

- Π Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ , η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ . Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$, η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Στην πραγματικότητα αν μία συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ , είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε ισχύει $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) \leq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , με τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου να συμβαίνει ενδεχομένως σε μεμονωμένα σημεία του διαστήματος Δ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.134 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 1$

ii) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 40x$ ■

Άσκηση: 1.135 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

ii) $f(x) = x\sqrt{x-1}$ ■

Άσκηση: 1.136 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$

ii) $f(x) = \frac{x + \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$, $x \in (0, 2\pi)$ ■

Άσκηση: 1.137 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ii) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$, $x \in (0, 2\pi)$ ■

Άσκηση: 1.138 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \ln(2x^2 - 2x + 4)$

ii) $f(x) = x^2(2\ln x - 1) - 8x(\ln x - 1)$ ■

Άσκηση: 1.139 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = (x+2)e^{-x}$

ii) $f(x) = xe^{-x^2}$ ■

Άσκηση: 1.140 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^2 - 2x + (x-1)\ln x$

ii) $f(x) = \frac{x\ln x}{x-1}$ ■

Άσκηση: 1.141 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = e^{\eta\mu x}$, $x \in [-\pi, \pi]$

ii) $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$ ■

Άσκηση: 1.142 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & , x < 0 \\ x\sqrt{x} & , x \geq 0 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1 & , x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 5 & , x \geq 1 \end{cases}$ ■

Άσκηση: 1.143 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln x + 2x, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = e^{x+2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$.
2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι ένα προς ένα.
3. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της g .

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.144 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = 4x^3 - 3kx^2 + 12x + 2$$

να είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 1.145 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = -\frac{2x^3}{3} + 2kx^2 - 2x + k^2$$

να είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 1.146 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού $a \neq 0$ ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + a^2}$$

να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση: 1.147 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln x + x - 1 = 0$$

έχει ακριβώς μία ρίζα την οποία να προσδιορίσετε.

Άσκηση: 1.148 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2}$$

έχει ακριβώς μία ρίζα την οποία να προσδιορίσετε.

Άσκηση: 1.149 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$xe^x + 1 = e^x$$

έχει ακριβώς μία ρίζα την οποία να προσδιορίσετε. ■

Άσκηση: 1.150 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - 1)^3 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Τράπεζα Θεμάτων ■

Άσκηση: 1.151 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + 3x + 2, \quad x > 0$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
2. α'. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
β'. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση: $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση.

Τράπεζα Θεμάτων ■

Άσκηση: 1.152 Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. ■

Άσκηση: 1.153 Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. ■

Άσκηση: 1.154 Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(\eta\mu x) - x + \frac{\pi}{2}, \quad x \in (0, \pi)$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
2. Να βρείτε, στο διάστημα $(0, \pi)$, το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\ln(\eta\mu x) = x - \frac{\pi}{2}$$

■

Άσκηση: 1.155 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$x^3 - 3x + \lambda = 0$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

■

Άσκηση: 1.156 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + \lambda = 0$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

■

Άσκηση: 1.157 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$3e^x + x^2 - 3x = a$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a .

■

1.8 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός: 1.7 Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ λέγεται **τοπικό μέγιστο** της συνάρτησης f .

Ορισμός: 1.8 Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ λέγεται **τοπικό ελάχιστο** της συνάρτησης f .

- Π** Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε όπως είδαμε, η f παρουσιάζει στο x_0 **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $f(x_0)$, ενώ αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε όπως είδαμε, η f παρουσιάζει στο x_0 **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.
- Π** Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** ή, απλά, **ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** της συνάρτησης.
- Π** Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.
- Π** Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

Θεώρημα: 1.27 (Το Θεώρημα Fermat.)

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και έστω x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ισχύει:

$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη. Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό μέγιστο, τότε επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Έστω ότι $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Τότε $x - x_0 < 0$ και $f(x) - f(x_0) \leq 0$, οπότε $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ και κατά συνέπεια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \stackrel{(1)}{\implies} f'(x_0) \geq 0$$

Έστω ότι $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Τότε $x - x_0 > 0$ και $f(x) - f(x_0) \leq 0$, οπότε $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ και κατά συνέπεια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \stackrel{(1)}{\implies} f'(x_0) \leq 0$$

Λόγω των παραπάνω σχέσεων προκύπτει:

$$f'(x_0) = 0$$

■

Π Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Π Το αντίστροφο του Θεωρήματος Fermat δεν ισχύει. Δηλαδή αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ και ισχύει $f'(x_0) = 0$, δεν σημαίνει ότι στο σημείο x_0 η συνάρτηση παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχει $f'(x) = 3x^2$ με $f'(0) = 0$, αλλά η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια δεν έχει ακρότατα.

Π Μία συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$, όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

- Π Μία συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο σε άκρο του πεδίου ορισμού της χωρίς εκεί η παράγωγός της να είναι ίση με 0.
Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με $x \in [-1, 1]$ έχει μέγιστη τιμή:

$$f(-1) = f(1) = 1$$

όμως $f'(-1) = -2 \neq 0$ και $f'(1) = 2 \neq 0$.

- Π Με βάση τα παραπάνω, οι **πιθανές θέσεις** των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
- Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Ορισμός: 1.9 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ .

Για να διαπιστώσουμε τελικά αν ένα κρίσιμο σημείο είναι θέση τοπικού ακροτάτου, χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα: 1.28 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του διαστήματος (a, β) στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x) > 0$ στο διάστημα (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο διάστημα (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f .
- Αν $f'(x) < 0$ στο διάστημα (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο διάστημα (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f .
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης f και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) .

Απόδειξη. i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(a, x_0]$. Επομένως για κάθε $x \in (a, x_0]$ ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, \beta)$. Επομένως για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (2)$$

Λόγω των σχέσεων (1) και (2) για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και κατά συνέπεια είναι και τοπικό μέγιστο της f .

iii) Έστω ότι για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει:

$$f'(x) > 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , θα είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

Έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(a, x_0]$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, \beta)$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- αν $x_1 < x_0 < x_2$, όπως είδαμε προηγουμένως ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) . ■

Π

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι η f αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0 .

Για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \left| x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση ακολουθεί:

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστη τιμή ίση με 0, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \geq 0 = f(0)$, όμως δεν υπάρχει διάστημα της μορφής $(a, 0)$ στο οποίο η f να είναι γνησίως φθίνουσα ή διάστημα της μορφής $(0, \beta)$ στο οποίο η f να είναι γνησίως αύξουσα.

Π

Δύο διάσημες ανισότητες:

- i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^x \geq x + 1$$

με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

- ii) Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\ln x \leq x - 1$$

με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $x = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.158 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 12$ ii) $f(x) = x^2 e^x$ ■

Άσκηση: 1.159 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ ii) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ ■

Άσκηση: 1.160 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ ii) $f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 2\sqrt{2}$, $x \in [0, \pi]$ ■

Άσκηση: 1.161 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{3\ln x + 1}{x^3}$ ii) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$ ■

Άσκηση: 1.162 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ ii) $f(x) = x^2 - 4x + 2x \cdot \ln x$ ■

Άσκηση: 1.163 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30 & , \quad x < 1 \\ x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x - 20 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$
 ■

Άσκηση: 1.164 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & , \quad -3 \leq x \leq 1 \\ e^{x-1} + 1 & , \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
 ■

Άσκηση: 1.165 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\ln x \leq ex - 2$$
 ■

Άσκηση: 1.166 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^2 + \frac{1}{x} + \ln x \geq 2x$$

Άσκηση: 1.167 Αν $a > \frac{1}{2}$ και $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$ax^2 + \eta\mu x \geq x$$

Άσκηση: 1.168 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^x \geq e^{x-1}$$

Άσκηση: 1.169 Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad x \in (0, 1)$$

1. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία.
2. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x), \quad x \in (0, 1)$$

3. Αν $x, y > 0$ με $x + y = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$x^x \cdot y^y \geq \frac{1}{2}$$

Άσκηση: 1.170 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β για τις οποίες η f παρουσιάζει ακρότατα στις θέσεις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Άσκηση: 1.171 Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Άσκηση: 1.172 Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^5(x) + f^3(x) + f(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. ■

Άσκηση: 1.173 Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 3f(x) = 3x \cdot \eta\mu 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 0$ τοπικό ελάχιστο. ■

Άσκηση: 1.174 Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν $a, b > 0$ με $a < b$ τέτοιοι ώστε:

$$af'(a) + bf'(b) = 0$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$. ■

Άσκηση: 1.175 Η συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύει:

$$f(0) > f(2) > f(1)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = 0$$

Άσκηση: 1.176 Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο, ισχύει $f'(0) > 0$ και δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \xi^2$$

Άσκηση: 1.177 Δίνεται μία παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$f(x) \leq e^{-x}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f'(0) = -1$$

Άσκηση: 1.178 Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a , αν για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$ax \ln x \geq x - 1$$

■

Άσκηση: 1.179 Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a και b ισχύει:

$$a^x + b^x \geq 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

$$ab = 1$$

■

Άσκηση: 1.180 Έστω $a, b > e$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = (\ln a)^x + (\ln b)^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 3$, να αποδείξετε ότι:

$$b^{\ln a} = e$$

■

Άσκηση: 1.181 Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Έστω ένα σημείο $M(a, f(a))$ της C_f με $a \in (1, 2)$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M και οι ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και $y = 0$ ορίζουν ένα τραπεζίο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν του τραπεζίου.

■

1.9 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Ορισμός: 1.10 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο διάστημα Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο διάστημα Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Π Για να δηλώσουμε ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\curvearrowright$, ενώ για να δηλώσουμε ότι μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\curvearrowleft$.

Π Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Π Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Θεώρημα: 1.29 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Π Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) στο Δ , η δεύτερη παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ . Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^4$, αν και είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αφού η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12x^2$, η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$. Στην πραγματικότητα αν μία συνάρτηση f , που είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ , τότε ισχύει $f''(x) \geq 0$ (ή αντίστοιχα $f''(x) \leq 0$) σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , με τον μηδενισμό της δεύτερης παραγώγου να συμβαίνει ενδεχομένως σε μεμονωμένα σημεία του διαστήματος Δ .

Ορισμός: 1.11 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν:

- η f είναι κυρτή στο (a, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f .

Π Όταν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 **καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**.

Π Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη.

- Π Υπάρχει περίπτωση μία συνάρτηση να μην είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αλλά να ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο αυτό; Η απάντηση είναι ναι, όταν η εφαπτομένη στο σημείο είναι κατακόρυφη ευθεία. Επειδή όμως οι κατακόρυφες εφαπτομένες δεν είναι στην εξεταστέα ύλη, δεν θα αντιμετωπίσουμε τέτοια περίπτωση.

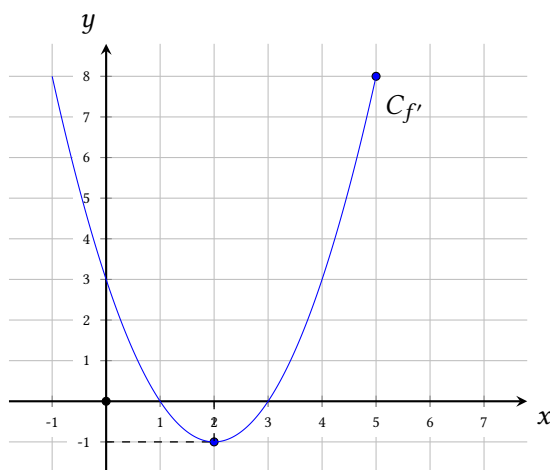
Θεώρημα: 1.30 Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε:

$$f''(x_0) = 0$$

- Π Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ και ισχύει $f''(x_0) = 0$, δεν σημαίνει ότι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f . Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^4$ έχει $f''(x) = 12x^2$ με $f''(0) = 0$, αλλά το σημείο $O(0, f(0))$ δεν είναι σημείο καμπής της C_f , αφού η f'' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 .
- Π Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, οι **πιθανές θέσεις** σημείων καμπής μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται.
 - τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.182 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μίας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1, 5]$.



1. Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2, -1)$, με την βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1, 2]$ και κυρτή στο $[2, 5]$.
2. Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;
3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2) - 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.183 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$

ii) $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3}$

Άσκηση: 1.184 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

ii) $f(x) = e^{2x} - 12e^x + 4x^2$

Άσκηση: 1.185 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^2(2\ln x - 5)$

ii) $f(x) = \ln x - \ln^2 x$

Άσκηση: 1.186 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 2\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [-\pi, \pi]$ ii) $f(x) =$

Άσκηση: 1.187 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.188 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις: $f'(x) = 0$ και $f''(x) = 0$.
2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής της.

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 1.189 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & , \quad x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση: 1.190 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 15 & , \quad x < 2 \\ 9 - x^2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση: 1.191 Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a για την οποία η γραφική

παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \left(a - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$$

έχει σημείο καμπής το σημείο $M\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$. ■

Άσκηση: 1.192 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a και b ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 36x + 5$$

να έχει στο σημείο $x_0 = 3$ τοπικό ακρότατο και η γραφική της παράσταση να έχει σημείο καμπής το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. ■

Άσκηση: 1.193 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Αν η γραφική παράσταση της f έχει δύο διαφορετικά σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι:

$$3a^2 > 8b$$

Άσκηση: 1.194 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 + 2kx^3 + 6x^2 + 3x + 2$$

να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. ■

Άσκηση: 1.195 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{4}ax^4 + ax^3 + (a^2 - 1)x^2$$

είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. ■

Άσκηση: 1.196 Να βρείτε την μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός k , ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + k)$$

να μην έχει σημεία καμπής. ■

Άσκηση: 1.197 Έστω μία συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για

την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) + xf(x) + x^2 = 5f(x)$$

Να αποδείξετε ότι το διάγραμμα της f δεν έχει σημεία καμπής. ■

Άσκηση: 1.198 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f'(x))^2 - f'(x) = (x+1)e^{-x} + x$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής. ■

Άσκηση: 1.199 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x^2 + 2x + 3)f''(x) + xe^{f(x)} = 0$$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. ■

Άσκηση: 1.200 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό ακρότατο ίσο με 0 και επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$$

Να αποδείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x)e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι κυρτή.

2. $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
-

Άσκηση: 1.201 Η συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει:

$$f^2(x) + (f'(x))^2 = 1$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη. ■

Άσκηση: 1.202 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -\ln(\ln x)$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $M(e, 0)$.
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει:

$$e \cdot \ln(\ln x) \leq x - e$$

■

Άσκηση: 1.203 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x \ln x$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $M(1, 0)$.
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

4. Αν για τους θετικούς αριθμούς a, b, c ισχύει $abc = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$$

■

Άσκηση: 1.204 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = xe^x, \quad x > 0$$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $-4 < x < -2$ ισχύει:

$$-\frac{4}{x} - 1 < e^{x+2}$$

3. Αν για τρεις αριθμούς $-4 < a, b, c < -2$ ισχύει $a + b + c = -6$, να αποδείξετε ότι:

$$abc > (4 + a)(4 + b)(4 + c)$$

■

Άσκηση: 1.205 Η συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ είναι κυρτή. Να αποδείξετε ότι:

$$f(0) + f(2) > 0$$

■

1.10 ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Θεώρημα: 1.31 (Η μορφή $\frac{0}{0}$)

Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
- Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε μία περιοχή του x_0 . (Δεν είναι απαραίτητο να είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .)
- $g'(x) \neq 0$, σε μία περιοχή του x_0 .

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Θεώρημα: 1.32 (Η μορφή $\frac{\infty}{\infty}$)

Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$
- Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε μία περιοχή του x_0 . (Δεν είναι απαραίτητο να είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .)
- $g'(x) \neq 0$, σε μία περιοχή του x_0 .

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Π Οι κανόνες De L' Hospital εφαρμόζονται και στην περίπτωση που το όριο είναι πλευρικό, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Π Οι κανόνες De L' Hospital μπορούν να εφαρμοστούν περισσότερες από μία φορές, αρκεί κάθε φορά να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Π Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, **δεν σημαίνει** ότι δεν υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Για παράδειγμα, έστω το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x}$$

Το όριο αυτό είναι της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$ και υπάρχει αφού:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

Όμως για το όριο αυτό ο κανόνας De L' Hospital δεν οδηγεί σε αποτέλεσμα αφού:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \eta\mu x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sigma\upsilon\nu x)$$

και όπως ξέρουμε το τελευταίο όριο δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.206 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x - \eta\mu x}$

Άσκηση: 1.207 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \varepsilon\varphi x}{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^3}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

Άσκηση: 1.208 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$

Άσκηση: 1.209 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sigma\varphi x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + \ln x}$

Άσκηση: 1.210 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + e^{-x})}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln(2x - \pi)}{\varepsilon\varphi x}$

Άσκηση: 1.211 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln^2 x}{x^2 + \ln x}$

Άσκηση: 1.212 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 3 \ln x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

Άσκηση: 1.213 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x})$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sigma\varphi x)$

Άσκηση: 1.214 Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta\mu x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \left(\frac{1}{x} \right) \right)^x$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\ln x}$

Άσκηση: 1.215 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} ((e^x - 1) \ln x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot \ln(x + 1)) \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x)$$

Άσκηση: 1.216 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2} = 4$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x - e^x}{1 - \sin x}$$

Άσκηση: 1.217 Έστω μία συνάρτηση f με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu x - xe^x}$$

Άσκηση: 1.218 Έστω μία συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$$

Άσκηση: 1.219 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύουν:

$$f(1) = -1 \quad \text{και} \quad f'(1) = 4$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(e^x) + \eta\mu x}{x^2 + \eta\mu^2 x}$$

Άσκηση: 1.220 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , \quad x \neq 0 \\ f'(0) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

έχει συνεχή παράγωγο.

Άσκηση: 1.221 Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 4f(x-2h) + 3f(x-3h)}{h^2} = 6f''(x)$$

■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
(Μελέτη συνάρτησης)

Άσκηση: 1.222 Να μελετήσετε και να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x + \frac{4}{x+1}$$

Άσκηση: 1.223 Να μελετήσετε και να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Άσκηση: 1.224 Να μελετήσετε και να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Άσκηση: 1.225 Να μελετήσετε και να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Μέρος II

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Κεφάλαιο 2

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

2.1 ΕΝΝΟΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός: 2.1 Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα** της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για την οποία ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Π Αποδεικνύεται ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε έχει παράγουσα στο διάστημα Δ .

Θεώρημα: 2.1 Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ .

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ έχει την μορφή:

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη. Επειδή η F είναι μία παράγουσα της f στο Δ , για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$F'(x) = f(x)$$

i) Κάθε συνάρτηση της μορφής: $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

ii) Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $G'(x) = f(x)$, οπότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$F'(x) = G'(x) \Leftrightarrow G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

■

Π Αν F και G είναι αρχικές συναρτήσεις των συναρτήσεων f και g σε ένα διάστημα Δ , τότε:

- η συνάρτηση $f + g$ έχει στο διάστημα Δ αρχικές συναρτήσεις τις:

$$F(x) + G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- η συνάρτηση λf , με $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει στο διάστημα Δ αρχικές συναρτήσεις τις:

$$\lambda F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Στον πίνακα που ακολουθεί, παραθέτουμε τις βασικές συναρτήσεις και τις αρχικές τους.

Συνάρτηση	Οι αρχικές της
$f(x) = 0$	$F(x) = c$
$f(x) = a, a \neq 0$	$F(x) = ax + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$
$f(x) = x^a, a \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$f(x) = \eta\mu x$	$F(x) = -\sigma\nu x + c$
$f(x) = \sigma\nu x$	$F(x) = \eta\mu x + c$
$f(x) = \frac{1}{\sigma\nu^2 x}$	$F(x) = \varepsilon\varphi x + c$
$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x) = -\sigma\varphi x + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Στον πίνακα που ακολουθεί, παραθέτουμε τις αρχικές συναρτήσεις βασικών σύνθετων συναρτήσεων.

Συνάρτηση	Οι αρχικές της
$g(x) = f^n(x) f'(x), n \in \mathbb{N}^*$	$G(x) = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$
$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$G(x) = \ln f(x) + c$
$g(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$G(x) = \sqrt{f(x)} + c$
$g(x) = \sin(f(x)) \cdot f'(x)$	$G(x) = \eta\mu(f(x)) + c$
$g(x) = \eta\mu(f(x)) \cdot f'(x)$	$G(x) = -\sin(f(x)) + c$
$g(x) = \frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}$	$G(x) = \varepsilon\varphi(f(x)) + c$
$g(x) = \frac{f'(x)}{\eta\mu^2(f(x))}$	$G(x) = -\sigma\varphi(f(x)) + c$
$g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$G(x) = e^{f(x)} + c$
$g(x) = a^{f(x)} \cdot f'(x), 0 < a \neq 1$	$G(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$

2.2 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός: 2.2 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε n υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{n}$ το καθένα, χρησιμοποιώντας τα σημεία:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad \dots, \quad x_n = \beta$$

Από καθένα από τα διαστήματα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, με $\kappa = 1, 2, \dots, n$, επιλέγουμε αυθαίρετα έναν αριθμό ξ_κ , με $\kappa = 1, 2, \dots, n$. Σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$S_n = f(\xi_1) \Delta x + f(\xi_2) \Delta x + \dots + f(\xi_n) \Delta x$$

το οποίο λέγεται **άθροισμα Riemann** και συμβολίζουμε:

$$S_n = \sum_{\kappa=1}^n f(\xi_\kappa) \Delta x$$

Ορισμός: 2.3 Αποδεικνύεται ότι καθώς $n \rightarrow +\infty$, το όριο του αθροίσματος Riemann είναι πραγματικός αριθμός, ο οποίος δεν εξαρτάται από τους αριθμούς ξ_κ που επιλέξαμε για τον σχηματισμό του. Το όριο αυτό ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της f από το a στο β και συμβολίζεται $\int_a^\beta f(x) dx$, επομένως:

$$\int_a^\beta f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\kappa=1}^n f(\xi_\kappa) \Delta x \right)$$

Π

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x) dx$ εκφράζει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$. Δηλαδή:

$$\int_a^\beta f(x) dx = E(\Omega)$$

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Για το ορισμένο ολοκλήρωμα έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^\beta f(x) dx = - \int_\beta^a f(x) dx$
- $\int_a^\beta \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^\beta f(x) dx$
- $\int_a^\beta (f(x) + g(x)) dx = \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta g(x) dx$
- $\int_a^\beta (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^\beta f(x) dx + \mu \int_a^\beta g(x) dx$

Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$$

Ισχύουν επίσης τα παρακάτω:

- Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$$

και επιπλέον αν η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) dx > 0$$

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$$

και επιπλέον αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παντού ίσες στο διάστημα αυτό, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx$$

(Την πρόταση αυτή θα την χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.1 Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[0, 1]$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\int_0^1 (2f(x) - 3g(x)) dx = 6 \quad \text{και} \quad \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3g(x) dx$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_0^1 g(x) dx$$

Άσκηση: 2.2 Έστω μία συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\int_0^3 f(x) dx = 5, \quad \int_3^8 f(x) dx = 10 \quad \text{και} \quad \int_2^8 f(x) dx = 12$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^8 f(x) dx, \quad \int_0^2 f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_2^3 f(x) dx$$

Άσκηση: 2.3 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_\gamma^\delta f(x) dx$$

να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\gamma f(x) dx = \int_\beta^\delta f(x) dx$$

Άσκηση: 2.4 Για μία συνεχή συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι:

$$\int_a^\beta f(x) dx = 0$$

Να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[a, \beta]$.

Άσκηση: 2.5 Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού a για τον οποίον ισχύει:

$$\int_{6a}^{a^2+4} \frac{2^{x+1}}{1+2^x} dx = -8 + \int_{a^2+4}^{6a} \frac{2}{1+2^x} dx$$

2.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Θεώρημα: 2.2 (Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού (μορφή 1))

Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in \Delta$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$



Με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα ισχύει:

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Θεώρημα: 2.3 (Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού (μορφή 2))

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) dx = G(\beta) - G(a)$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, \beta]$$

είναι, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, μία παράγουσα της f στο διάστημα $[a, \beta]$. Επειδή και η G είναι μία παράγουσα της f στο διάστημα $[a, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta]$$

Από την παραπάνω σχέση για $x = a$ έχουμε:

$$G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t) dt + c = c$$

Άρα,

$$G(x) = F(x) + G(a), \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta]$$

Από την παραπάνω σχέση για $x = \beta$ έχουμε:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(t) dt + G(a)$$

Συνεπώς,

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

■

- Π** Για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις στην δεύτερη μορφή του θεωρήματος, συμβολίζουμε τη διαφορά $G(\beta) - G(a)$ με $[G(x)]_a^\beta$, οπότε η ισότητα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται:

$$\int_a^\beta f(t) dt = [G(x)]_a^\beta$$

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων έχουμε:

1) Η ιδανική κατάσταση:

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ ισχύει:

$$\int_a^\beta f'(x) dx = f(\beta) - f(a)$$

2) Η παραγοντική ολοκλήρωση:

Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και οι παράγωγοί τους f' και g' είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$. Τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x) \cdot g(x) dx$$

3) Η ολοκλήρωση με αντικατάσταση:

Έστω μία συνάρτηση g η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, η παράγωγός της g' είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $g([a, \beta])$. Τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

όπου $u_1 = g(a)$ και $u_2 = g(\beta)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.6 Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\int_2^3 f(x) dx = 2, \quad \int_1^3 f(x) dx = 4 \quad \text{και} \quad \int_1^7 f(x) dx = 10$$

να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_3^2 f(x) dx \quad \text{ii) } \int_3^7 f(x) dx \quad \text{iii) } \int_7^2 f(x) dx \quad \text{iv) } \int_1^3 (f(x) - x) dx$$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση: 2.7 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^1 (1+x^2) dx \quad \text{ii) } \int_{-\pi}^{\pi} \eta \mu x dx \quad \text{iii) } \int_1^2 \frac{x-1}{x^2} dx$$

Άσκηση: 2.8 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^2 (1-x)^2 dx \quad \text{ii) } \int_0^4 x\sqrt{x} dx \quad \text{iii) } \int_0^1 2^x dx$$

Άσκηση: 2.9 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_2^4 (e^x - e^{-x}) dx \quad \text{ii) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu 2x dx \quad \text{iii) } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\eta \mu^2 x} + \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} \right) dx$$

Άσκηση: 2.10 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad \text{ii) } \int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad \text{iii) } \int_0^1 e^{2x} dx$$

Άσκηση: 2.11 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^2 |x^2 - x| dx \quad \text{ii) } \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx \quad \text{iii) } \int_0^{2\pi} (|\eta \mu x| + |\sigma \upsilon \nu x|) dx$$

Άσκηση: 2.12 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad \text{ii) } \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx \quad \text{iii) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu 2x}{1 + \eta \mu^2 x} dx$$

Άσκηση: 2.13 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_2^3 \frac{1}{x-1} dx$

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi x dx$

iii) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

Άσκηση: 2.14 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x^2 \cdot \eta \mu x + x^3 \cdot \sigma \upsilon \nu x) dx$

ii) $\int_{-1}^1 (x+1) e^x dx$

iii) $\int_1^e (2x \cdot \ln x + x) dx$

Άσκηση: 2.15 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x \cdot \eta \mu x - x^2 \cdot \sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu^2 x} dx$

ii) $\int_{\sqrt{e}}^e \frac{2x \cdot \ln x - x}{\ln^2 x} dx$

iii) $\int_0^{\pi} \frac{\sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x}{e^x} dx$

Άσκηση: 2.16 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_{-1}^1 (2x+1) (x^2+x+1)^3 dx$

ii) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$

iii) $\int_0^1 \frac{1+e^x}{(x+e^x)^2} dx$

Άσκηση: 2.17 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$

ii) $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$

iii) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-4} dx$

Άσκηση: 2.18 Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: I_0 , I_1 και I_2 .

Άσκηση: 2.19 Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n} - I_n$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

■

Άσκηση: 2.20 Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_0^4 f(x) dx = f(x) + 3$$

■

Άσκηση: 2.21 Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$xf(x) = \ln x - \int_1^e f(x) dx$$

■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
 (παραγοντική ολοκλήρωση)

Άσκηση: 2.22 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^1 (1-x) e^x dx$ ii) $\int_{-1}^1 (x+1) e^{x-1} dx$ iii) $\int_0^1 x 2^x dx$ ■

Άσκηση: 2.23 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^1 x^2 e^x dx$ ii) $\int_1^2 x e^{2-x} dx$ iii) $\int_0^1 (x^2 + 1) e^{-2x} dx$ ■

Άσκηση: 2.24 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_1^e \ln x dx$ ii) $\int_1^e \ln^2 x dx$ iii) $\int_e^{e^2} x^2 \ln x dx$ ■

Άσκηση: 2.25 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ ii) $\int_2^3 \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) dx$ iii) $\int_0^1 \ln(\sqrt{x+1}) dx$ ■

Άσκηση: 2.26 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^\pi x \sin x dx$ ii) $\int_0^\pi x^2 \eta \mu x dx$ iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu 2x dx$ ■

Άσκηση: 2.27 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sigma \upsilon \nu 2x dx$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x-1) \sigma \upsilon \nu 3x dx$ iii) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\eta \mu^2 x} dx$ ■

Άσκηση: 2.28 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^\pi e^x \cdot \sigma \upsilon \nu x dx$ ii) $\int_0^\pi e^{-x} \cdot \eta \mu x dx$ iii) $\int_0^\pi e^x \cdot \sigma \upsilon \nu 2x dx$ ■

Άσκηση: 2.29 Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$I_n = \int_1^e x \cdot \ln^n x dx$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει:

$$I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} \cdot I_{n-1}$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^e x \cdot \ln^4 x dx$$

Άσκηση: 2.30 Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^n x dx$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n > 2$ ισχύει:

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^4 x dx$$

Άσκηση: 2.31 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 5$, η οποία έχει συνεχή παράγωγο και για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 f(x) dx = 2$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x f'(x) dx$$

Άσκηση: 2.32 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(0) = f'(\pi) = 3$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sin x dx = -6$$

Άσκηση: 2.33 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = f'(1)$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 (x^2 f''(x) + x f'(x)) dx = 0$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

Άσκηση: 2.34 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$ και $f(1) = f'(1)$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 (f(x) - f''(x)) e^x dx = 2$$

Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

Άσκηση: 2.35 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή παράγωγο και για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 x f'(x) dx = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$|f(1)| \geq 2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
 (ολοκλήρωση με αντικατάσταση)

Άσκηση: 2.36 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_0^1 2x(x^2 + 1)^2 dx \quad \text{ii)} \int_0^1 (2x^4 - 3x + 5)(8x^3 - 3) dx \quad \text{iii)} \int_0^2 x(x-1)^5 dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.37 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_{-1}^0 \frac{2}{(2x-5)^2} dx \quad \text{ii)} \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad \text{iii)} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.38 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_{-3}^1 \sqrt{2x+7} dx \quad \text{ii)} \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx \quad \text{iii)} \int_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2} dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.39 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \quad \text{ii)} \int_4^9 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{iii)} \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+1} dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.40 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})} dx \quad \text{ii)} \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx \quad \text{iii)} \int_{25}^{62} \frac{1}{2-\sqrt[3]{x+2}} dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.41 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\eta\mu x} dx \quad \text{ii)} \int_0^\pi \eta\mu^3 x dx \quad \text{iii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x \cdot \sin x dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.42 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x dx \quad \text{ii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\eta\mu x} \cdot \sin x dx \quad \text{iii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta\mu^2 x - 4} dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.43 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\varepsilon\varphi x}{\sin^2 x} dx \quad \text{ii)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^3 x}{1-\eta\mu x} dx \quad \text{iii)} \int_0^\pi \sqrt{1-\sin x} \cdot \sin^7\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.44 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx \quad \text{ii)} \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad \text{iii)} \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.45 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ii)} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{2x}{x+1}} dx \quad \text{iii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta \mu x} \cdot \eta \mu 2x dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.46 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\eta \mu x} + 1}{e^{\eta \mu x} + \eta \mu x} \cdot \sigma \upsilon \nu x dx \quad \text{ii)} \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x e^x + 1} dx \quad \text{iii)} \int_0^1 \frac{1 + e^{-x}}{1 + x e^{-x}} dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.47 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ii)} \int_0^{\pi^2} \eta \mu \sqrt{x} dx \quad \text{iii)} \int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.48 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \eta \mu x^2 dx \quad \text{ii)} \int_1^{e^{\pi}} \eta \mu(\ln x) dx \quad \text{iii)} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.49 Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Θεωρούμε τα ολοκληρώματα:

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \quad \text{και} \quad I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{1-x} dx$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} \cdot I_{n-1}$$

2. Να δείξετε ότι $I_0 = \frac{2}{3}$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x} dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.50 Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 (f(x) + f(x+1)) dx = \int_0^2 f(x) dx \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.51 Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(4-x) = f(x)$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^3 xf(x) dx = 2 \int_1^3 f(x) dx$$

Άσκηση: 2.52 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2^x}{2^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + f(-x) = x^2 + 1$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

Άσκηση: 2.53 Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια, ισχύει:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

2. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή, ισχύει:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sin x} dx \quad \text{και} \quad \int_{-1}^1 |x| e^{|x|} dx$$

Άσκηση: 2.54 Θεωρούμε μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ με:

$$f(x) + f(a + \beta - x) = c, \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta]$$

όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(x) dx = (\beta - a) f\left(\frac{a + \beta}{2}\right) = \frac{\beta - a}{2} (f(a) + f(\beta))$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^4 \frac{1}{4+2^x} dx$$

Άσκηση: 2.55 Θεωρούμε μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[0, a]$.

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^4 + (1-x)^4} dx \quad \text{και} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} dx$$

Άσκηση: 2.56 Θεωρούμε μία συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και για την οποία για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \eta\mu^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

Άσκηση: 2.57 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $a > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$a \int_1^a \frac{1}{x^2} \cdot f\left(\frac{a}{x}\right) dx = \int_1^a f(x) dx$$

Άσκηση: 2.58 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^2 f(x) + 2f\left(\frac{2}{x}\right) = 2x$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 f(x) dx = \ln 2$$

Άσκηση: 2.59 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^3 f^{-1}(x) dx$$

■

Άσκηση: 2.60 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x^2}, \quad x \geq 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της.
2. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln x} dx = e$$

■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
 (Ολοκλήρωμα και ανισοτικές σχέσεις)

Άσκηση: 2.61 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x^2-x}, \quad x \in [0, 2]$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.
2. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 f(x) dx < 2e^2$$

Άσκηση: 2.62 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4}{3} < \int_{-2}^2 \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} dx < 12$$

Άσκηση: 2.63 Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{3} < \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx < \sqrt{6}$$

Άσκηση: 2.64 Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x^2 + 1} dx < e - 1$$

Άσκηση: 2.65 Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$0 < \int_0^1 \ln(1+x^n) dx < \frac{1}{n+1}$$

Άσκηση: 2.66 Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^e \ln(1+x) dx < \int_0^e \frac{x}{x+1} dx$$

Άσκηση: 2.67 Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

$$f(a) < \frac{1}{\beta - a} \int_a^\beta f(x) dx < f(\beta)$$

Άσκηση: 2.68 Η συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^\pi (f^2(x) + 2f(x) \sin x) dx \geq -\frac{\pi}{2}$$

Άσκηση: 2.69 Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει:

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 e^x f(x) dx \leq \frac{e^2 + 1}{4}$$

Άσκηση: 2.70 Η συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει:

$$|f(x)| \leq m$$

όπου $m > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq m(\beta - a)$$

Άσκηση: 2.71 Η συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει:

$$\int_a^\beta f^2(x) dx = \int_a^\beta (f'(x))^2 dx = I$$

Να αποδείξετε ότι:

$$I \geq \frac{f^2(\beta) - f^2(a)}{2}$$

Άσκηση: 2.72 Για μία συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x) dx = 2 \int_0^1 xf(x) dx$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

■

Άσκηση: 2.73 Για μία συνεχή συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sqrt{\sin x} dx = 1$$

Να βρείτε την συνάρτηση f .

■

Άσκηση: 2.74 Δίνεται μία συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[a, \beta]$ και για την οποία ισχύουν:

$$f(a)f'(a) = f(\beta)f'(\beta) \quad \text{και} \quad \int_a^\beta f(x)f''(x) dx = 0$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

■

Άσκηση: 2.75 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 \ln x, \quad x > 0$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f .
3. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 f(x) dx > \frac{1}{2}$$

■

2.4 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Θεώρημα: 2.4 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x)| dx$$

Θεώρημα: 2.5 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων και των ευθειών $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με:

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.76 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$. ■

Άσκηση: 2.77 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$. ■

Άσκηση: 2.78 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x-1} - 1, \quad x \geq 1$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 4$. ■

Άσκηση: 2.79 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 0$. ■

Άσκηση: 2.80 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{5\pi}{2}$. ■

Άσκηση: 2.81 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = 5$. ■

Άσκηση: 2.82 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = -\frac{2}{x}, x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις.

Άσκηση: 2.83 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{2x-1} - e^x + 2, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = e^{x-1} + 1, x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις.

Άσκηση: 2.84 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}, x \neq -2 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{2}{x+2}, x \neq -2$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και την ευθεία $x = 1$.

Άσκηση: 2.85 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(1+x), x > -1 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(1-x), x < 1$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και την ευθεία $x = \frac{1}{2}$.

Άσκηση: 2.86 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x(2x-1)}, x \in \mathbb{R}^* - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και τις ευθείες $x = -2$ και $x = -1$.

Άσκηση: 2.87 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x\sqrt{9-x^2}, x \in [-3, 3] \quad \text{και} \quad g(x) = -x, x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και τις ευθείες $x = -3$ και $x = 3$.

Άσκηση: 2.88 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 12 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = x$ και $y = 4x$. ■

Άσκηση: 2.89 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και την ευθεία $y = 2$. ■

Άσκηση: 2.90 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{2-x}, \quad x \leq 2 \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και την ευθεία $y = 1$. ■

Άσκηση: 2.91 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δίνονται επίσης οι ευθείες $(\varepsilon) : y = 8$ και $(\delta) : y = a^3$ με $0 < a < 2$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a για την οποία η ευθεία (δ) χωρίζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία (ε) σε δύο ισεμβαδικά χωρία. ■