Περιεχόμενα

1 Συναρτήσεις **1**

1.1 Έννοια συνάρτησης 1

1.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης 3

1.2.1 Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων 5

1.3 Αξιοσημείωτα είδη συναρτήσεων 11

1.4 Ισότητα και πράξεις συναρτήσεων 14

1.5 Η σύνθεση συναρτήσεων 21

1.6 Μονοτονία συναρτήσεων 26

1.7 Ακρότατα συνάρτησης 32

1.8 Συνάρτηση ένα προς ένα 36

1.9 Η αντίστροφη συνάρτηση 42

2 Όρια Συναρτήσεων **51**

2.1 Έννοια περιοχής 51

2.2 Έννοια ορίου 54

2.3 Υπολογισμός ορίων 57

2.4 Όριο τριγωνομετρικών συναρτήσεων 70

2.5 Όριο σύνθετης συνάρτησης 73

2.6 Όριο και διάταξη 78

2.7 Μη πεπερασμένο όριο 89
2.8 Όριο συνάρτησης στο άπειρο 100
2.8.1 Όριο πολυωνύμων στο άπειρο 106
2.8.2 Όριο τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο άπειρο 107
2.8.3 Όριο εκθετικής συνάρτησης στο άπειρο 108
2.8.4 Όριο λογαριθμικής συνάρτησης στο άπειρο 109

3 Συνέχεια Συναρτήσεων 115
3.1 Έννοια συνέχειας 115
3.1.1 Συνέχεια σε σημείο 115
3.1.2 Συνέχεια σε διάστημα 118
3.2 Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων 130
3.2.1 Το Θεώρημα Bolzano 130
3.2.2 Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών 133
3.2.3 Το Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής 136

1

Συναρτήσεις

The idea of a function is one of the most important concepts in all of mathematics.

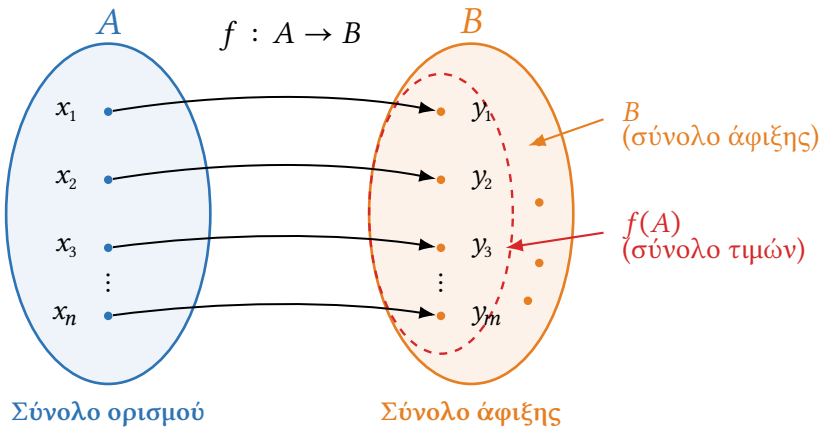
— Richard Courant (1888–1972)

1.1 Έννοια συνάρτησης

Ορισμός 1.1:

Συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται ένας κανόνας που αντιστοιχίζει **κάθε** στοιχείο του συνόλου A σε **ένα μόνο** στοιχείο του συνόλου B.

Η συνάρτηση $f : A \to B$ αντιστοιχίζει κάθε $x \in A$ στο μοναδικό στοιχείο $y = f(x) \in B$, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Στο παραπάνω διάγραμμα διακρίνουμε τρία βασικά σύνολα:

- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f.

- Το σύνολο B λέγεται **σύνολο άφιξης** της συνάρτησης f.
- Το σύνολο

$$f(A) = \{y \in B \mid y = f(x), \text{ για κάθε } x \in A\}$$

λέγεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης f.

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι απαραίτητο να το γνωρίζουμε μαζί με τον τύπο της συνάρτησης. Αν δεν δίνεται, για να το βρούμε ακολουθούμε τους παρακάτω κανόνες.

Μορφή της συνάρτησης f	**Περιορισμός**
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[\nu]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$
$f(x) = \ln\big(P(x)\big)$	$P(x) > 0$
$f(x) = \varepsilon\varphi\big(P(x)\big)$	$P(x) \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \sigma\varphi\big(P(x)\big)$	$P(x) \neq k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \big(P(x)\big)^{Q(x)}$	$P(x) > 0$

1.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Ορισμός 1.2:

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων. Ονομάζεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης f το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει

$$y = f(x) \quad , \quad x \in D_f$$

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τη συμβολίζουμε με C_f.

Παρατήρηση 1.1:

Ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C_f αν και μόνο αν

$$f(x_0) = y_0$$

Παρατήρηση 1.2: Τομές της γραφικής παράστασης με τους άξονες

Τομή με τον άξονα $y'y$

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $y'y$, υπολογίζουμε την τιμή $f(0)$, εφόσον το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού D_f. Τότε η γραφική παράσταση C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$.

Τομή με τον άξονα $x'x$

Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

Αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί

$$x_1, \ x_2, \ \ldots,$$

τότε τα αντίστοιχα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $x'x$ είναι

$$(x_1, 0), \ (x_2, 0), \ \ldots$$

Παρατήρηση 1.3: Σημεία τομής και σχετική θέση δύο γραφικών παραστάσεων

Σημεία τομής δύο γραφικών παραστάσεων

Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g, λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = g(x) \quad , \quad x \in D_f \cap D_g$$

Αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί

$$x_1,\ x_2,\ \dots,$$

τότε τα αντίστοιχα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων είναι

$$(x_1, f(x_1)),\ (x_2, f(x_2)),\ \dots$$

Σχετική θέση δύο γραφικών παραστάσεων

Αν

$$f(x) < g(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f \cap D_g$$

τότε η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση C_g.

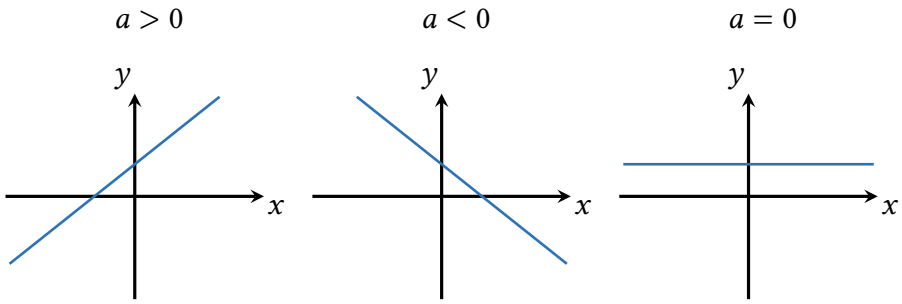
Αν

$$f(x) > g(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f \cap D_g$$

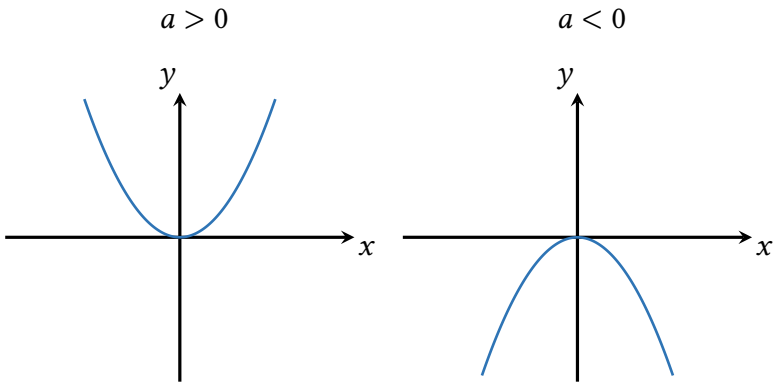
τότε η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση C_g.

1.2.1 Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων

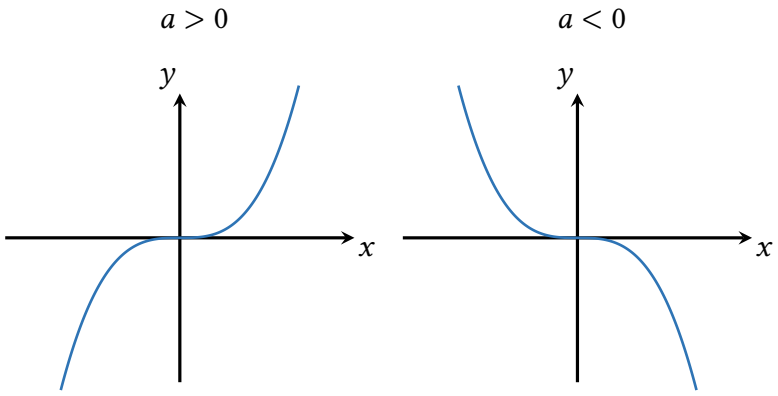
1) Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$



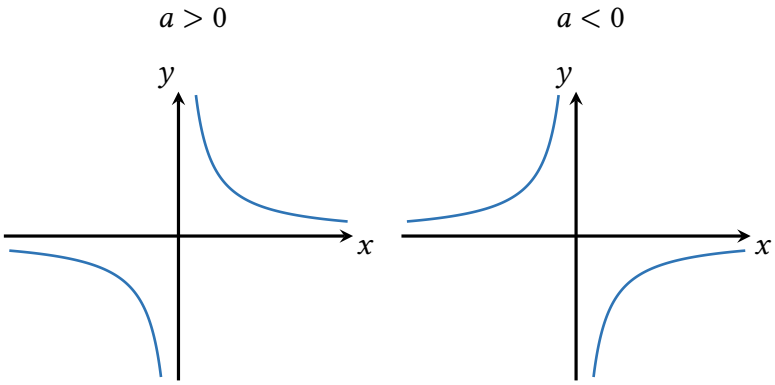
2) Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$



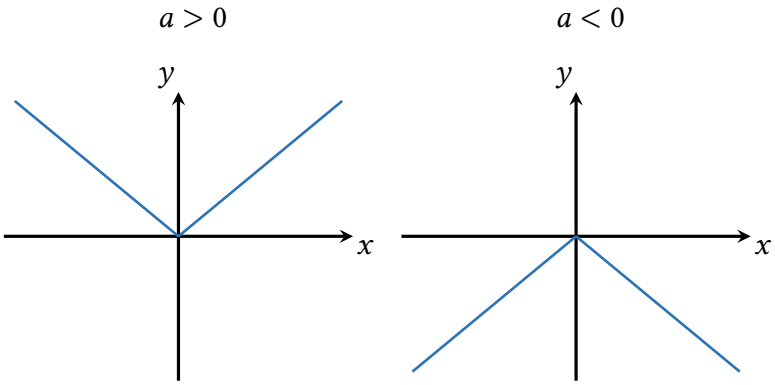
3) Η συνάρτηση $f(x) = ax^3$



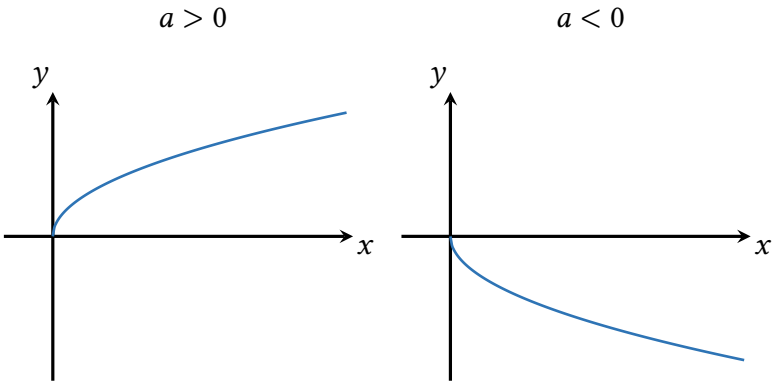
4) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{a}{x}$



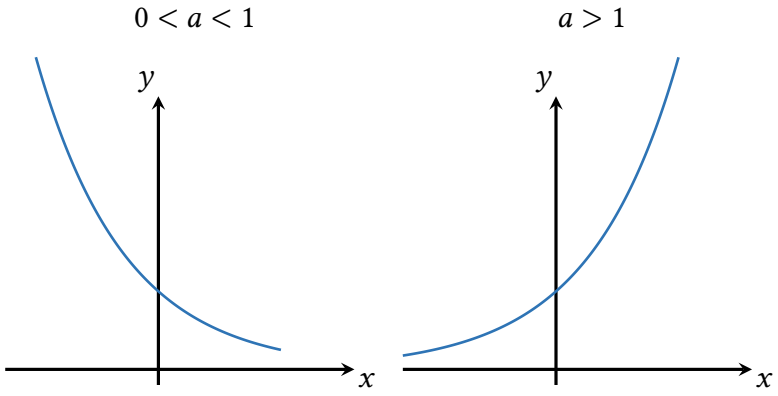
5) Η συνάρτηση $f(x) = a\,|x|$



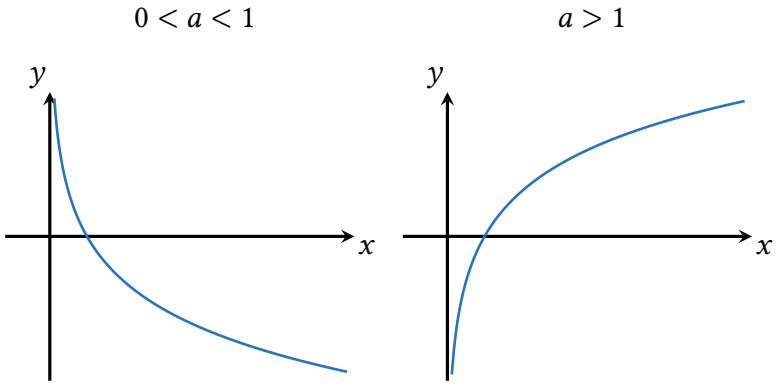
6) Η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x}$



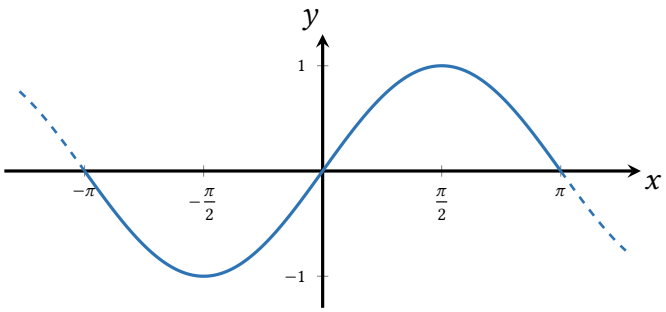
7) Η συνάρτηση $f(x) = a^x$



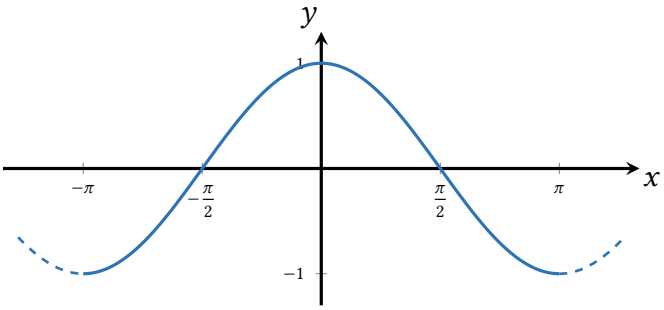
8) Η συνάρτηση $f(x) = log_a x$



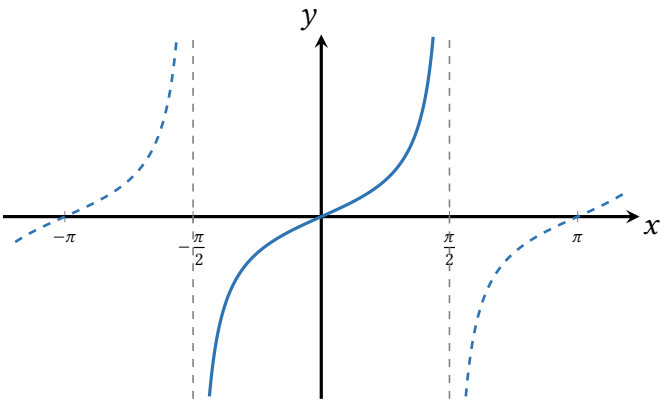
9) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$



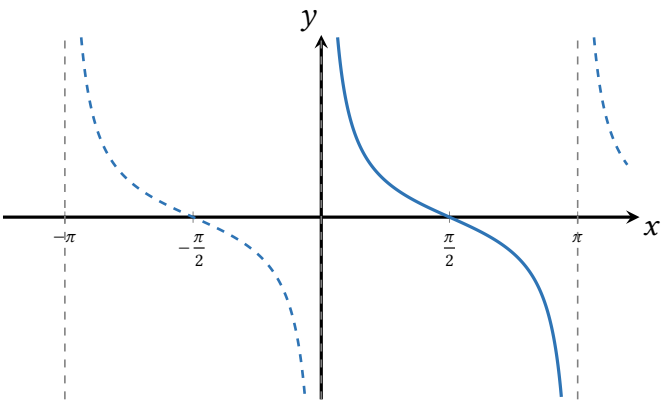
10) Η συνάρτηση $f(x) = συνx$



11) Η συνάρτηση $f(x) = εφx$



12) Η συνάρτηση $f(x) = σφx$



Κανόνες για τη χάραξη γραφικών παραστάσεων

Α. Μετατοπίσεις

Κανόνας 1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(x) + k \quad , \quad k > 0$$

προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα πάνω.

Κανόνας 2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(x) - k \quad , \quad k > 0$$

προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα κάτω.

Κανόνας 3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(x + k) \quad , \quad k > 0$$

προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα αριστερά.

Κανόνας 4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(x - k) \quad , \quad k > 0$$

προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα δεξιά.

Β. Συμμετρίες

Κανόνας 5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = -f(x)$$

είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ως προς τον άξονα $x'x$.

Κανόνας 6. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(-x)$$

είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ως προς τον άξονα $y'y$.

Γ. Απόλυτη τιμή

Κανόνας 7. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = |f(x)|$$

αποτελείται από:

- τα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται πάνω από ή πάνω στον άξονα $x'x$,
- τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Κανόνας 8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(|x|)$$

αποτελείται από:

- το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $x \geq 0$,
- το συμμετρικό του τμήματος αυτού ως προς τον άξονα $y'y$.

1.3 Αξιοσημείωτα είδη συναρτήσεων

Ορισμός 1.3:

Μία συνάρτηση

$$f : D_f \to \mathbb{R}$$

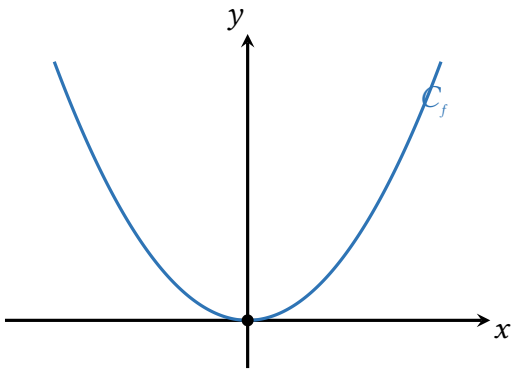
λέγεται **άρτια**, όταν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $-x \in D_f$ και
- για κάθε $x \in D_f$ ισχύει:

$$f(-x) = f(x).$$

Παρατήρηση 1.4:

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



Σχήμα 1.1: Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Ορισμός 1.4:

Μία συνάρτηση

$$f : D_f \to \mathbb{R}$$

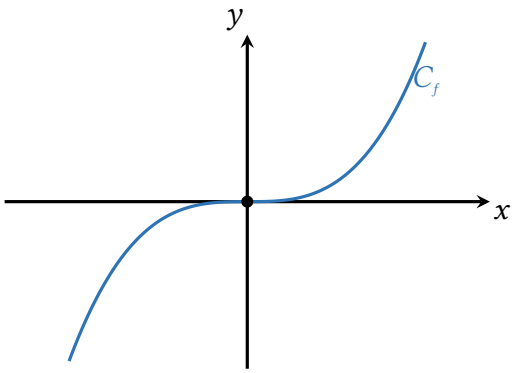
λέγεται **περιττή**, όταν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $-x \in D_f$ και
- για κάθε $x \in D_f$ ισχύει:

$$f(-x) = -f(x).$$

Παρατήρηση 1.5:

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 1.2: Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Ορισμός 1.5:

Μία συνάρτηση

$$f : D_f \to \mathbb{R}$$

λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε:

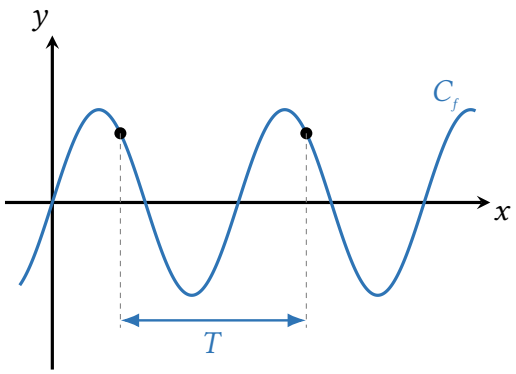
- για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $x + T \in D_f$ και
- για κάθε $x \in D_f$ ισχύει:

$$f(x + T) = f(x).$$

Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

Παρατήρηση 1.6:

Η γραφική παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης επαναλαμβάνεται κατά μήκος του άξονα $x'x$ ανά διαστήματα μήκους ίσου με την περίοδό της.



Σχήμα 1.3: Η γραφική παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης επαναλαμβάνεται ανά διαστήματα μήκους T.

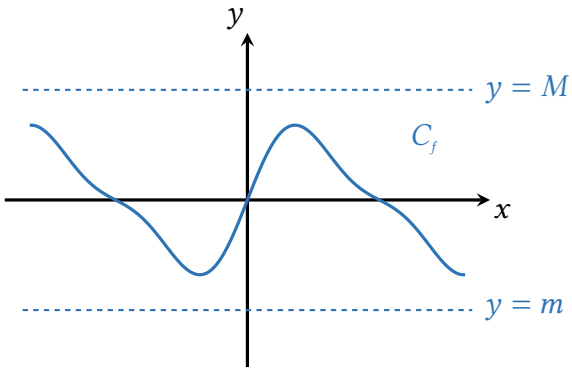
Ορισμός 1.6:

Μία συνάρτηση

$$f : D_f \to \mathbb{R}$$

λέγεται **φραγμένη**, όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m και M τέτοιοι ώστε:

$$m \leq f(x) \leq M \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f$$



Σχήμα 1.4: Η γραφική παράσταση μιας φραγμένης συνάρτησης βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y = m$ και $y = M$.

1.4 Ισότητα και πράξεις συναρτήσεων

Ορισμός 1.7:

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες**, όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού D_f και
- για κάθε $x \in D_f$ ισχύει:
$$f(x) = g(x).$$

Έστω οι συναρτήσεις
$$f : D_f \to \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad g : D_g \to \mathbb{R}.$$

Ορισμός 1.8:

Οι βασικές πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων f και g ορίζονται ως εξής:

- Το **άθροισμα** των συναρτήσεων f και g είναι η συνάρτηση που συμβολίζεται με $f + g$, έχει πεδίο ορισμού
$$D_f \cap D_g \neq \emptyset$$
και τύπο
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
- Το **γινόμενο** των συναρτήσεων f και g είναι η συνάρτηση που συμβολίζεται με $f \cdot g$, έχει πεδίο ορισμού
$$D_f \cap D_g \neq \emptyset$$
και τύπο
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
- Το **πηλίκο** των συναρτήσεων f και g είναι η συνάρτηση που συμβολίζεται με
$$\frac{f}{g},$$
έχει πεδίο ορισμού
$$D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R} : \ g(x) = 0\} \neq \emptyset$$
και τύπο
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2-5x+6}$ ii) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x+1}$

iii) $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x}$ iv) $f(x) = \sqrt{1-|\ln x - 1|}$

Α2 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 2\lambda x + 4\right)$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Α3 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^3-6x^2+9x}$$

Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Α4 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$$

α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β΄) Να αποδείξετε ότι

$$f(4) + f(3) - f(-3) = 0$$

γ΄) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Α5 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^{2x} + e \qquad \text{και} \qquad g(x) = e^x + e^{x+1}$$

Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

Α6 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 3|x| \qquad \text{και} \qquad g(x) = 2|x| - 4$$

α΄) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

β΄) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ΄) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Α7 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 3x^4 - x^3 \qquad \text{και} \qquad g(x) = 9x^2 - 9x + 2$$

Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

Α8 Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τη σχέση

$$1 + f(x) = g(x) + x^2$$

Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

Α9 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + ax + a - 6 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{K}(2, -8)$.

α΄) Να αποδείξετε ότι $a = -2$.

β΄) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

γ΄) Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = 2x - 3 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

Α10 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^x + ae^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{K}\left(\ln 3, \frac{4}{5}\right)$.

α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β΄) Να αποδείξετε ότι $a = -1$.

γ΄) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

δ΄) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τεταγμένη $\frac{3}{5}$.

ε΄) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

ς΄) Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = e^x - 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Α11 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

α΄) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ΄) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a η εξίσωση

$$f(x) = a^2 - 4a + 5$$

έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

Α12 Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f^2(x) + f(x) = x^2 - x + 1$$

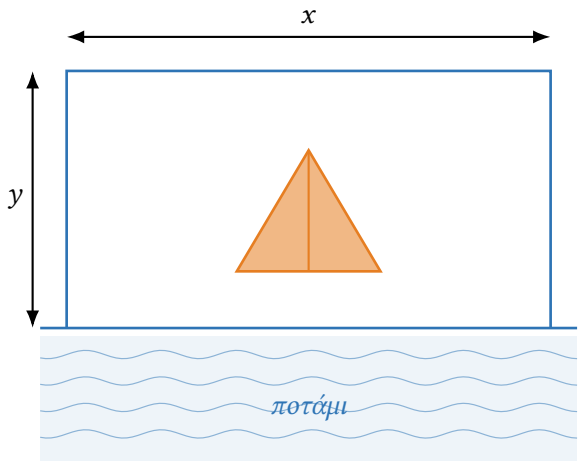
Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Α13 Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f^3(x) + f(x) = -x^2 + 2x - 3$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Α14 Μία παρέα αποφάσισε να κατασκηνώσει δίπλα σε ένα ποτάμι και, για την αποφυγή ερπετών, χρησιμοποίησε σύρμα μήκους 18 m, ώστε να περιφράξει μία ορθογώνια περιοχή. Επειδή η μία πλευρά της περιοχής βρίσκεται δίπλα στο ποτάμι, απαιτείται περίφραξη μόνο στις άλλες τρεις πλευρές.



Αν x είναι το μήκος της πλευράς της περιοχής που είναι παράλληλη στο ποτάμι

α΄) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το εμβαδόν της περιοχής που θα περιφραχθεί.

β΄) Αν το πλάτος της περιοχής είναι 4 m, να υπολογίσετε το εμβαδόν της.

γ΄) Αν απαιτείται να περιφραχθεί περιοχή με εμβαδόν $38\,\text{m}^2$, να εξετάσετε αν το σύρμα έχει το απαιτούμενο μήκος.

Α15 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$, του οποίου οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ μεταβάλλονται έτσι, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να παραμένει σταθερό και ίσο με $1\,\text{m}^2$. Έστω ότι η πλευρά ΑΒ έχει μήκος x m.

α΄) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x

i) το μήκος της πλευράς ΑΓ.

ii) το μήκος της πλευράς ΒΓ.

iii) το μήκος του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

β΄) Να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ, όταν $x = \sqrt{2}$ m.

γ΄) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι μικρότερο από $\sqrt{5}$ m.

Α16 Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

είναι ίσες.
Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες.

Α17 Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-3) \qquad \text{και} \qquad g(x) = \ln\left(x^2 - 2x - 3\right)$$

είναι ίσες.
Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες.

Α18 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{2\lambda x + 1 - \lambda}{x + \lambda + 2} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{\left(\lambda^2 - 3\right)x - 2\lambda + 4}{x + 2\lambda - 1}$$

να είναι ίσες.

Α19 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x-4}{x-2} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{x^2-3x}{x-4}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις

$$f+g, \qquad f \cdot g \qquad \text{και} \qquad \frac{f}{g}$$

Α20 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{|x|}{3+|x|} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{6-2|x|}{x^2-9}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις

$$f+g, \qquad f \cdot g \qquad \text{και} \qquad \frac{f}{g}$$

Α21 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{16-x^2} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-2}$$

α΄) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β΄) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

Α22 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x-2 \qquad \text{και} \qquad g(x) = \sqrt{x+1}$$

α΄) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$.

β΄) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

γ΄) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ που ορίσατε στα προηγούμενα ερωτήματα.

Α23 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 \qquad \text{και} \qquad g(x) = x^2 - 5x + 4$$

α΄) Να ορίσετε τη συνάρτηση

$$\varphi = \frac{f}{g}.$$

β΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$\varphi^2(x) + 4\varphi(x) - 5 = 0$$

όπου φ είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος.

A24 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} x-1 & , \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις

$$f+g \qquad \text{και} \qquad f \cdot g$$

A25 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} & , \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-2} & , \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & , \quad x \leq 1 \\ \dfrac{x-2}{x+1} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις

$$f \cdot g \qquad \text{και} \qquad \frac{f}{g}$$

A26 Για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f^2(x) + g^2(x) \leq 2f(x) + 2g(x) - 2$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

A27 Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$2f^2(x) + g^2(x) + 2(f \cdot g)(x) + 2x^2 = 2xg(x)$$

1.5 Η σύνθεση συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις

$$f : D_f \to \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad g : D_g \to \mathbb{R}.$$

Ορισμός 1.9:

Η **σύνθεση** της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g είναι η συνάρτηση που συμβολίζεται με $g \circ f$, έχει πεδίο ορισμού

$$\{x \in D_f : f(x) \in D_g\} \neq \emptyset$$

και τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Παρατήρηση 1.7:

Η σύνθεση $g \circ f$ ορίζεται όταν το σύνολο τιμών της f έχει τουλάχιστον ένα κοινό στοιχείο με το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή όταν

$$f(D_f) \cap D_g \neq \emptyset.$$

Παρατήρηση 1.8:

Η σύνθεση συναρτήσεων δεν είναι αντιμεταθετική πράξη. Δηλαδή, ακόμη και όταν ορίζονται και οι δύο συνθέσεις,

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Παρατήρηση 1.9:

Η σύνθεση συναρτήσεων είναι προσεταιριστική πράξη. Δηλαδή, αν ορίζονται οι παρακάτω συνθέσεις, τότε

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α28 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x+2} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \ln(4-x)$$

Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$.

Α29 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{5-x} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \ln(x+2)$$

Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$.

Α30 Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(2,2)$, $B(-2,2)$ και $\Gamma(0,-2)$.
Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

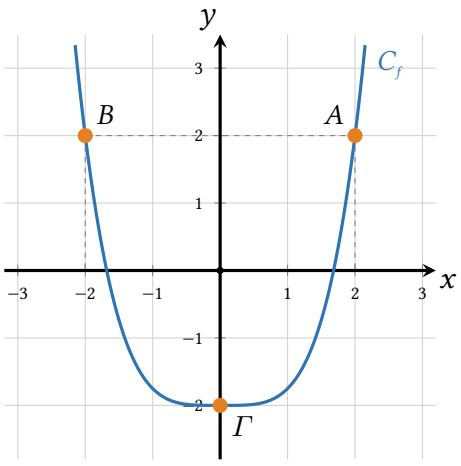
$$g(x) = |x|$$

α΄) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$.

β΄) Να βρείτε τις τιμές

$$(g \circ f)(2), \qquad (g \circ f)(-2) \qquad \text{και} \qquad (g \circ f)(0)$$

γ΄) Η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$.



Α31 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \sqrt{3-x^2}$$

Να βρείτε τη σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g.

Α32 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x - x^2} \qquad \text{και} \qquad g(x) = συν^2 x.$$

α΄) Να βρείτε τη σύνθεση της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f.

β΄) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης που προκύπτει στο προηγούμενο ερώτημα με την ευθεία

$$y = \frac{1}{2}$$

Α33 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = |x - 1| \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad x < 0 \\ 2x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Α34 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & , \quad x \leq 1 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 1 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 0 \\ x + 1 & , \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Α35 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$h(x) = f\left(2 - \sqrt{x - 1}\right)$$

Α36 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$h(x) = f(\ln x)$$

Α37 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(1 + e^x), \qquad g(x) = 2 \ln x \qquad \text{και} \qquad h(x) = \ln(1 + x^2)$$

α΄) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β΄) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

γ΄) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες.

Α38 Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ax - 3}{x - 2} \quad , \quad x \neq 2$$

Να βρείτε την τιμή του a για την οποία ισχύει

$$(f \circ f)(x) = x$$

για κάθε $x \neq 2$.

Α39 Να βρείτε τη συνάρτηση g, αν

$$f(x) = 1 - 2x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 2x + 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Α40 Να βρείτε τη συνάρτηση g, αν

$$f(x) = 3 - x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 11x + 19 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Α41 Να βρείτε τη συνάρτηση g, αν

$$f(x) = e^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$(g \circ f)(x) = e^{2x} + 3 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Α42 Να βρείτε τη συνάρτηση f, αν

$$g(x) = \ln x \quad , \quad x > 0$$

και

$$(f \circ g)(x) = \frac{2 - x}{2 + x} \quad , \quad x > 0$$

Α43 Να βρείτε τη συνάρτηση f, αν

$$g(x) = \sqrt{x + 1} \quad , \quad x \geq -1$$

και

$$(f \circ g)(x) = x + 2\sqrt{x+1} + 3 \quad , \quad x \geq -1$$

A44 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(f \circ f)(x) = 3x - 2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την τιμή του $f(1)$.

A45 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την τιμή του $f(1)$.

A46 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις g και h είναι ίσες.

1.6 Μονοτονία συναρτήσεων

Ορισμός 1.10:

Μία συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2,$$

ισχύει

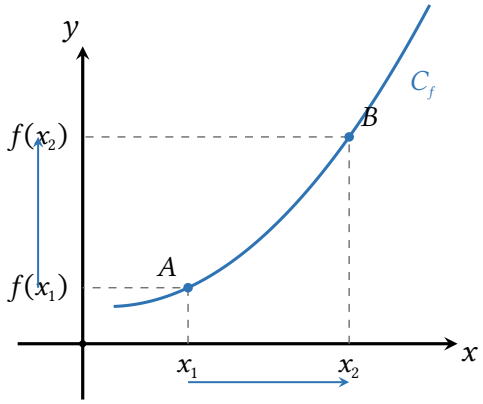
$$f(x_1) < f(x_2)$$

- **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

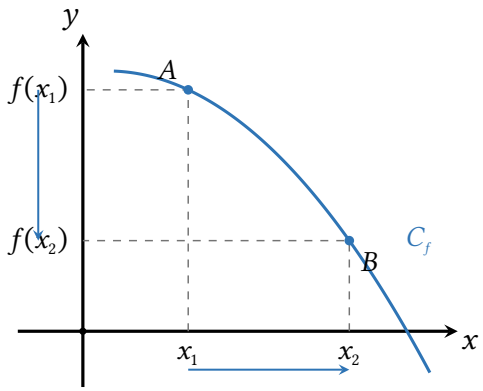
$$x_1 < x_2,$$

ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2)$$



$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$



$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Παρατήρηση 1.10:

Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε λέγεται **γνησίως μονότονη** στο διάστημα Δ.

Παρατήρηση 1.11:

Η μονοτονία μίας συνάρτησης εξετάζεται πάντοτε σε διάστημα και ποτέ σε ένωση διαστημάτων. Αυτό συμβαίνει επειδή μία συνάρτηση μπορεί να έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα, χωρίς να είναι μονότονη στην ένωσή τους.

Παράδειγμα 1.1

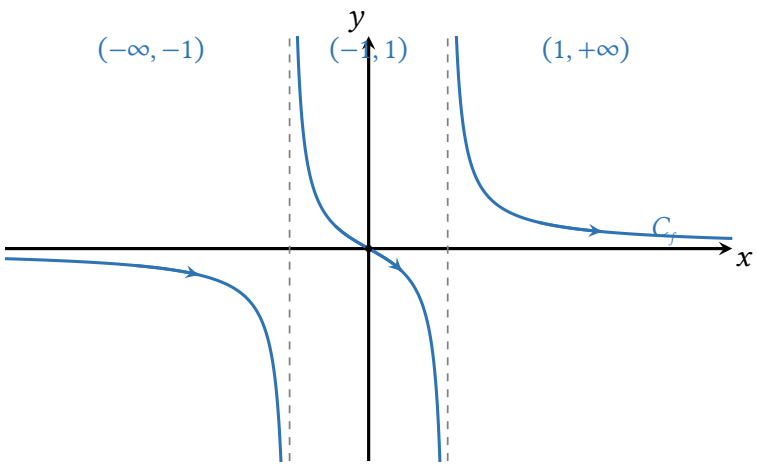
Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα

$$(-\infty, -1), \qquad (-1, 1), \qquad (1, +\infty),$$

αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωσή τους.



Πράγματι, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα. Ωστόσο, δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωσή τους, αφού

$$-2 < 0,$$

ενώ

$$f(-2) = -\frac{2}{3} < 0 = f(0).$$

Άρα

$$f(-2) < f(0),$$

παρόλο που

$$-2 < 0,$$

γεγονός που αντιφάσκει με τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

Παρατήρηση 1.12:

Η μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ μπορεί να ελεγχθεί με το πρόσημο του λόγου

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

όπου

$$x_1 \neq x_2$$

Ειδικότερα:

- αν $\lambda > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ,
- αν $\lambda < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α47 Μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(0,-1)$. Να βρείτε αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Α48 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις

i) $f(x) = x^3 + 5x - 1$

ii) $f(x) = 2 - \sqrt{2-x}$

iii) $f(x) = 2^{x-1} + \sqrt{x-2}$

iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$

v) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

vi) $f(x) = x - e^{-x}$

Α49 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις

i) $f(x) = x^2 - 4x$

ii) $f(x) = x^2 + 6x + 7$

iii) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$

iv) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$

v) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$

vi) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

Α50 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & , \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

Α51 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - x & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Α52 Θεωρούμε μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3x - 2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

A53 Θεωρούμε μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + e^{f(x)} = 4x - 3 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

A54 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, 1]$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

A55 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^2 - 4x + 3) > f(x + 3)$$

A56 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(2^{x+1} - 3\right) < f\left(5\right)$$

A57 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 8)$.

α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β΄) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ και για ποιες βρίσκεται πάνω από αυτόν.

γ΄) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(\ln x) > 0$$

A58 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + 2x$$

α΄) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β΄) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln(x^2 + 1) - 2x > \ln(x + 1) - 2x^2$$

A59 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x$$

α΄) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β΄) Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(x^3 + x^2\right)^3 - (x + 1)^3 > x + 1 - x^3 - x^2$$

Α60 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

α′) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β′) Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} - 3^x < \left(\frac{3}{2}\right)^x - 9\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$$

Α61 Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

α′) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

Α62 Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Να λύσετε την ανίσωση:

$$2 + f(x^2) > 2\ln x$$

Α63 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^5 + x^2 - 1) - f(1 - x + x^2) < 2 - x - x^5$$

1.7 Ακρότατα συνάρτησης

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f.

Ορισμός 1.11:

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D_f$ **ολικό μέγιστο** το $f(x_0)$, αν ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f.$$

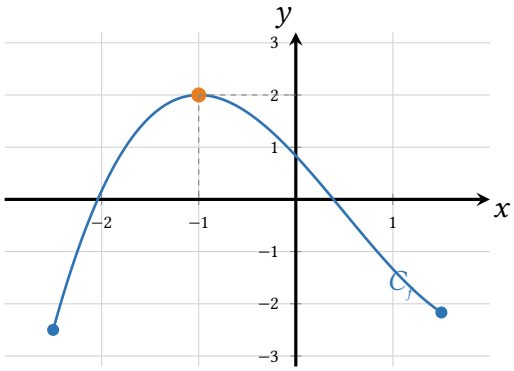
Ορισμός 1.12:

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D_f$ **ολικό ελάχιστο** το $f(x_0)$, αν ισχύει:

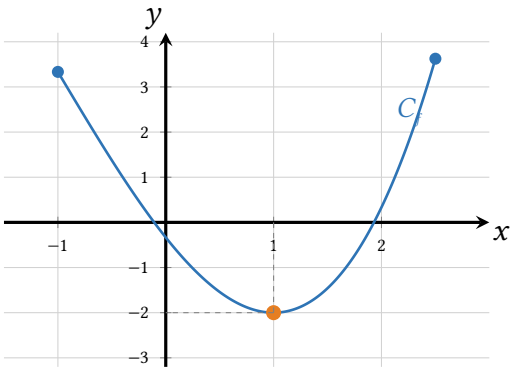
$$f(x) \geq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in D_f.$$

Παρατήρηση 1.13:

Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο μίας συνάρτησης f ονομάζονται **ολικά ακρότατα** της f.



Σχήμα 1.5: Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ ολικό μέγιστο ίσο με 2.



Σχήμα 1.6: Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο ίσο με -2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

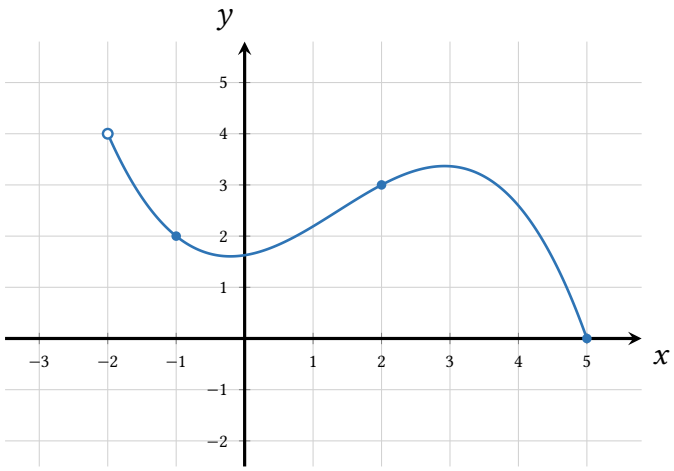
Α64 Έστω μία συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε:

α΄) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

β΄) Τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$.

γ΄) Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f, εφόσον υπάρχουν.

δ΄) Την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1.



Α65 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \qquad \text{και} \qquad g(x) = x - 2$$

α΄) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β΄) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h, όπου:

$$h(x) = |g(x)|$$

γ΄) Με τη βοήθεια των γραφικών τους παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Α66 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 8 & , \quad -4 \leq x \leq -2 \\ -x^2 & , \quad -2 < x < 2 \\ 2x - 8 & , \quad 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β΄) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

γ΄) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

A67 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + 4 - 2|x + 1|$$

α΄) Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

β΄) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ΄) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα ακρότατά της.

δ΄) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) > 0$$

A68 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το $\frac{1}{3}$.

A69 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστο το 2.

A70 Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(2, 3)$, ενώ ισχύει:

$$|2f(x) - 2| \leq 4 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

A71 Να βρείτε τα ακρότατα καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις

i) $f(x) = 2 - |x + 3|$

ii) $f(x) = -1 - 2\eta\mu x$

iii) $f(x) = -x^2 + 2x - 5$

iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

1.8 Συνάρτηση ένα προς ένα

Ορισμός 1.13:

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **ένα προς ένα (1-1)**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ή ισοδύναμα,

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Παρατήρηση 1.14:

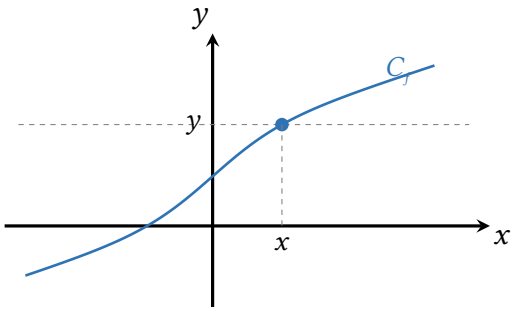
Μία συνάρτηση f είναι συνάρτηση **ένα προς ένα** αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση

$$f(x) = y$$

έχει ακριβώς μία λύση ως προς x στο πεδίο ορισμού της D_f.

Παρατήρηση 1.15:

Μία συνάρτηση f είναι συνάρτηση **ένα προς ένα** αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ μία φορά.



Μία συνάρτηση f είναι συνάρτηση **ένα προς ένα** αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, υπάρχει μοναδικό $x \in D_f$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = y$$

Το παρακάτω θεώρημα συνδέει την έννοια της γνησίως μονότονης συνάρτησης με την έννοια της συνάρτησης ένα προς ένα.

Θεώρημα 1.1:

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι συνάρτηση **ένα προς ένα**.

Παρατήρηση 1.16:

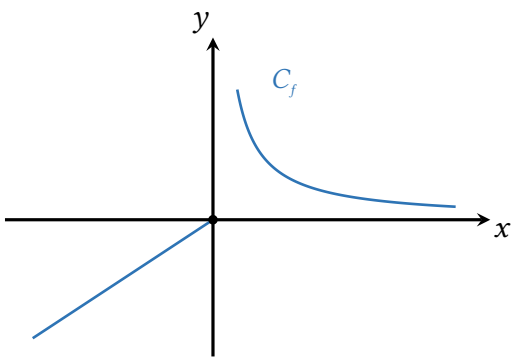
Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνάρτηση **ένα προς ένα** χωρίς να είναι γνησίως μονότονη.

Παράδειγμα 1.2

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

είναι συνάρτηση ένα προς ένα, χωρίς να είναι γνησίως μονότονη.



Πράγματι, κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ μία φορά. Επομένως, η f είναι συνάρτηση **ένα προς ένα**.

Ωστόσο, η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, αφού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α72 Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα

i) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ ii) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

iii) $f(x) = 1 - \sqrt{3-2x}$ iv) $f(x) = \dfrac{2}{x^4+1}$

v) $f(x) = e^{-2x} - x$ vi) $f(x) = 4x + \ln x$

Α73 Να εξετάσετε αν είναι ένα προς ένα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & , \quad x \leq 0 \\ x^2+1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Α74 Να εξετάσετε αν είναι ένα προς ένα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , \quad x \leq 0 \\ x^2+1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Α75 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) + f^3(x) = 3x - 2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

Α76 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = 3x - 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

Α77 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι ένα προς ένα.

Α78 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα. Να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(\ln^2 x + 1\right) = f(3\ln x - 1)$$

Α79 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και $f(0) = 1$. Να λύσετε την εξίσωση

$$f\big(f(x) - 1\big) = 1$$

Α80 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x - 4x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

α΄) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β΄) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} - \left(\frac{4}{5}\right)^x = 4(x-1)$$

Α81 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

α΄) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β΄) Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$ την εξίσωση

$$e^{\eta\mu x} - e^{\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

Α82 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + \sqrt{x} \quad , \quad x > 0$$

α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

β΄) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

i) $\ln x = 1 - \sqrt{x}$

ii) $\ln(\ln x) - \ln 2 = \sqrt{2} - \sqrt{\ln x}$

iii) $x - 2 = \ln 4 - \sqrt{e^x}$

iv) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 3\ln x + x$

Α83 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(2, 3)$.

α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β΄) Να βρείτε το πρόσημο της f.

γ΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(e^{2x} - 2) = f(2e^x - 3)$$

δ΄) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^2 - 2x - 2) \leq f(2x - 3)$$

Α84 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

α΄) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

β΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$e^{x^2-2x} - e^{2x-3} = -x^2 + 4x - 3$$

Α85 Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad , \quad \text{για κάθε } x, y > 0$$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) + f(x^2 + 5) = f(x^2 + 2) + f(x + 1)$$

1.9 Η αντίστροφη συνάρτηση

Ορισμός 1.14:

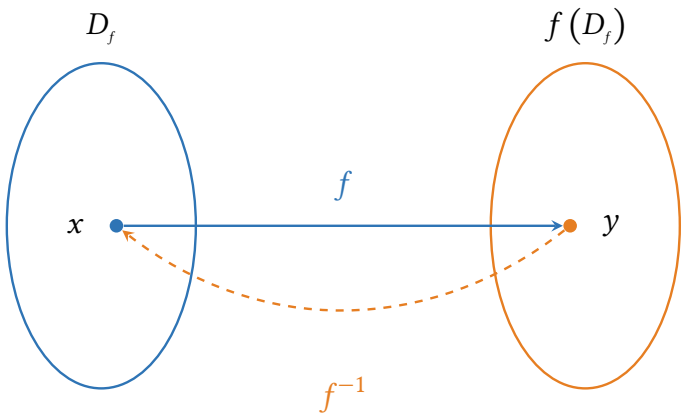
Έστω μία συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνάρτηση **ένα προς ένα**. Τότε ορίζεται η συνάρτηση

$$f^{-1} : f(D_f) \to D_f,$$

η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε $y \in f(D_f)$ το μοναδικό $x \in D_f$ για το οποίο ισχύει

$$f(x) = y.$$

Η συνάρτηση f^{-1} λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f.



Παρατήρηση 1.17:

Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

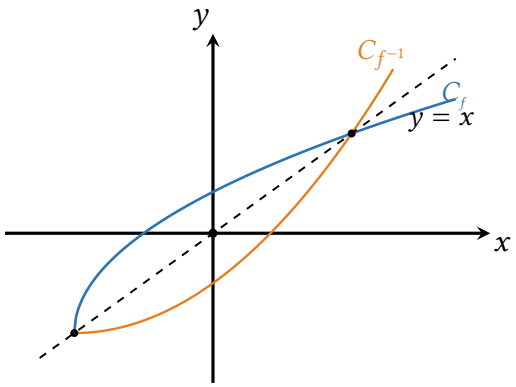
$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x \quad , \quad x \in D_f,\ y \in f(D_f)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad , \quad x \in D_f$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \quad , \quad y \in f(D_f)$$

Παρατήρηση 1.18:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, η οποία διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ των αξόνων.



Στο παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Παρατήρηση 1.19:

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων μιας συνάρτησης f και της αντίστροφής της f^{-1} δεν είναι υποχρεωτικά σημεία της ευθείας $y = x$.

Για να ανήκουν υποχρεωτικά όλα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} στην ευθεία $y = x$, πρέπει η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα.

Παράδειγμα 1.3

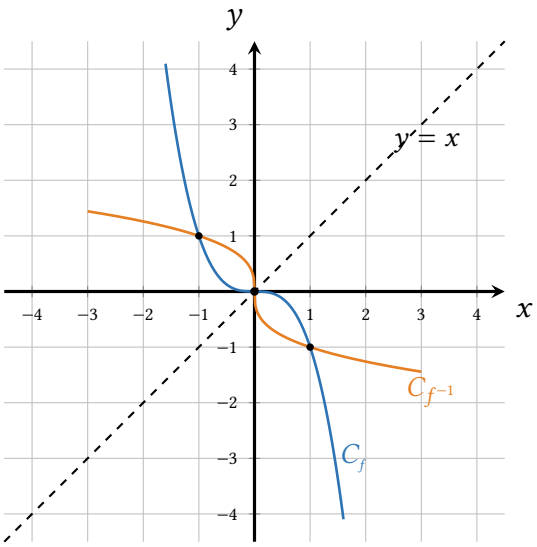
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = -x^3$$

Η αντίστροφη συνάρτησή της είναι

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & , \quad x \leq 0 \\ -\sqrt[3]{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

και οι γραφικές παραστάσεις τους φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι τα σημεία

$$(-1, 1) \qquad \text{και} \qquad (1, -1)$$

είναι κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}, χωρίς όμως να ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α86 Να αποδείξετε ότι δεν είναι αντιστρέψιμη η συνάρτηση:

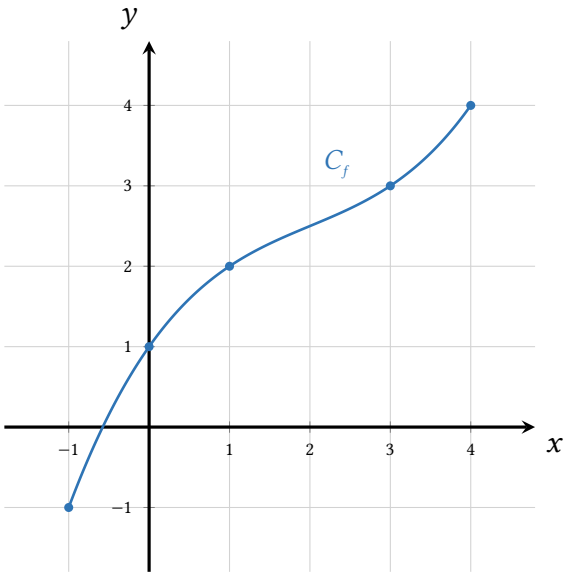
$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

Α87 Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και γραφική παράσταση C_f, η οποία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας την C_f:

α΄) Να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

β΄) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$.

γ΄) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1}.



Α88 Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της αντίστροφής της που ζητείται:

i) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ $\qquad f^{-1}(13) = \ ?$

ii) $f(x) = e^x + e^{2x}$ $\qquad f^{-1}(2) = \ ?$

iii) $f(x) = 1 - \ln(1 + x^3)$ $\qquad f^{-1}(1 - \ln 2) = \ ?$

Α89 Να βρείτε την αντίστροφη καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις

i) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ ii) $f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$

iii) $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{4-x}}$ iv) $f(x) = \ln(x-1) - 2$

Α90 Να βρείτε την αντίστροφη καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις

i) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}, \quad x < 0$ ii) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}+2}$

iii) $f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \geq 2$ iv) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$

v) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ vi) $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$

Α91 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \qquad \text{και} \qquad g(x) = 2 - x$$

α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 3]$ ισχύει:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{3-x} - 1$$

γ΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(x) = (f \circ g)(x)$$

είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της.

Α92 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους

$$f(x) = \ln(x-2) + 5, \quad x > 2 \qquad \text{και} \qquad g(x) = 2x - 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

α΄) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1}.

β΄) i) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.

Α93 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x \leq 1 \\ x^2+2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Α94 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$

α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

β΄) Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει

$$(h \circ g)(x) = x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in (-2, 2)$$

γ΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

Α95 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \qquad \text{και} \qquad g(x) = 2 - x$$

α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β΄) Να ορισθεί η συνάρτηση $f \circ g$.

γ΄) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

δ΄) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f \circ g \circ g$.

Α96 Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,1)$ και $B(-2,5)$. Να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}\big(6 - f^{-1}(2\ln x)\big) + 2 = 0$$

Α97 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = 2\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right) + 3$$

α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

γ΄) Να ορίσετε την f^{-1}.

δ΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}(1+x) = 2$$

Α98 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$$

α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

γ΄) Να ορίσετε την f^{-1}.

δ΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}(x+3) = \ln 3$$

Α99 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + x + 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

β΄) Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $f^{-1}(x) < 3$ ii) $f^{-1}(x+4) \geq x+1$

Α100 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = 3x - 4 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

β΄) Να εκφράσετε τη συνάρτηση f^{-1} συναρτήσει της f.

γ΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = x$$

Α101 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) + f^3(x) = 3x + 4 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

β΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\big(f(x) + x^3 - 4\big)$$

γ΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x^3 + 2x) = f(4 - x)$$

δ΄) Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$, να αποδείξετε ότι $x_0 = 2$.

Α102 Μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επιπλέον ισχύουν:

- $f(xy) = f(x) + f(y) \quad , \quad$ για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$
- $f(1) = 0$
- $f(x) \neq 0 \quad , \quad$ για κάθε $x \neq 1$

Να αποδείξετε ότι:

α΄)
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x > 0$$

β΄) Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

γ΄)
$$f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y) \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Α103 Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, να αποδείξετε ότι η αντίστροφή της είναι και αυτή γνησίως μονότονη, με το ίδιο είδος μονοτονίας, στο $f(\Delta)$.

Α104 Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f^{-1}(x) = f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

2

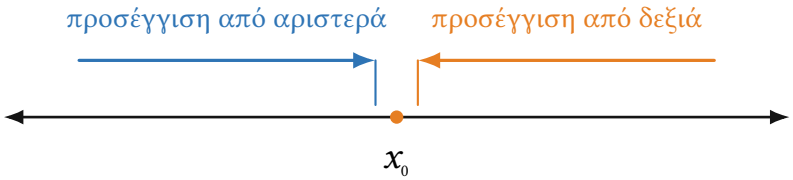
Όρια Συναρτήσεων

Thought is only a gleam in the midst of a long night.
But it is this gleam which is everything.

— Henri Poincaré (1854–1912)

2.1 Έννοια περιοχής

Στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, αν θέλουμε να πλησιάσουμε έναν πραγματικό αριθμό x_0, υπάρχουν μόνο δύο δυνατοί τρόποι. Μπορούμε να τον προσεγγίσουμε από αριθμούς μικρότερους του x_0, δηλαδή από τα αριστερά, ή από αριθμούς μεγαλύτερους του x_0, δηλαδή από τα δεξιά.



Η ιδέα της προσέγγισης ενός σημείου αποτελεί τη βάση της έννοιας του ορίου. Για να περιγράψουμε όμως με μαθηματική ακρίβεια τι σημαίνει ότι ένας αριθμός μπορεί να προσεγγίσει στο x_0, είναι απαραίτητο να εισαγάγουμε πρώτα την έννοια της περιοχής ενός σημείου.

Ορισμός 2.1:

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$. Το ανοικτό διάστημα

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

ονομάζεται **περιοχή** του σημείου x_0 με κέντρο το x_0 και ακτίνα δ.

Παράδειγμα 2.1

Θεωρούμε τα σύνολα:

$$A = \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

και

$$B = (-1, 1) \setminus \left\{\frac{1}{\kappa} \, : \, \kappa \in \mathbb{Z}, \, \kappa \neq 0\right\}$$

Να εξετάσετε ποιο από τα δύο σύνολα περιέχει περιοχή του 0.

Λύση

Το σύνολο A περιέχει περιοχή του 0, αφού

$$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \subseteq A.$$

Αντίθετα, το σύνολο B δεν περιέχει καμία περιοχή του 0.

Πράγματι, όσο μικρό και αν είναι ένα θετικό αριθμητικό διάστημα γύρω από το 0, μπορούμε να επιλέξουμε έναν ακέραιο $\kappa \neq 0$ με αρκετά μεγάλη απόλυτη τιμή, ώστε ο αριθμός

$$\left|\frac{1}{\kappa}\right|$$

να είναι όσο κοντά στο 0 θέλουμε.

Όμως όλοι οι αριθμοί της μορφής

$$\frac{1}{\kappa} \quad , \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad , \quad \kappa \neq 0$$

έχουν αφαιρεθεί από το σύνολο B.

Επομένως, κάθε περιοχή του 0 περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει στο B. Άρα το σύνολο B δεν περιέχει περιοχή του 0.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, κατά τη μελέτη του ορίου μιας συνάρτησης στο σημείο x_0, δεν είναι απαραίτητο η συνάρτηση να ορίζεται στο ίδιο το x_0. Εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι να μπορούμε να πλησιάσουμε το x_0 όσο κοντά θέλουμε, τόσο από τα αριστερά όσο και από τα δεξιά, χρησιμοποιώντας τιμές του x διαφορετικές από το x_0.

Ορισμός 2.2:

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$.
Το σύνολο

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

ονομάζεται περιοχή του σημείου x_0 χωρίς το ίδιο το σημείο x_0.
Λέμε ότι μία συνάρτηση f ορίζεται **κοντά** στο σημείο x_0, όταν το πεδίο ορισμού της περιέχει μία περιοχή του x_0.

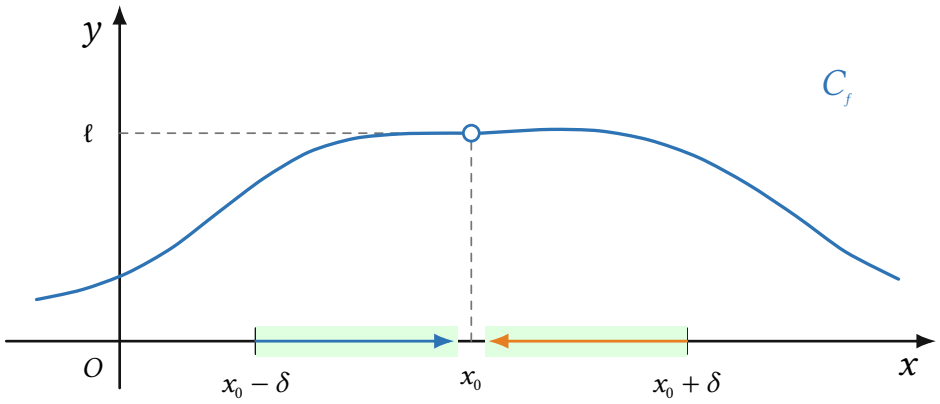
Ορισμός 2.3:

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.
Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει μία ιδιότητα $\mathcal{I}$ **κοντά** στο σημείο x_0, όταν υπάρχει περιοχή του x_0 χωρίς το ίδιο το σημείο x_0, στην οποία η συνάρτηση f έχει την ιδιότητα $\mathcal{I}$.

2.2 Έννοια ορίου

Για να κατανοήσουμε την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης, θα εξετάσουμε πώς συμπεριφέρονται οι τιμές της καθώς το x πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό x_0. Όπως θα δούμε, εκείνο που έχει σημασία δεν είναι η τιμή της συνάρτησης στο ίδιο το σημείο, αλλά η συμπεριφορά των τιμών της όσο το x πλησιάζει το x_0 από τα αριστερά και από τα δεξιά.

Περίπτωση 1: οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν τον ίδιο αριθμό ℓ, όταν το x πλησιάζει το x_0 είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά.

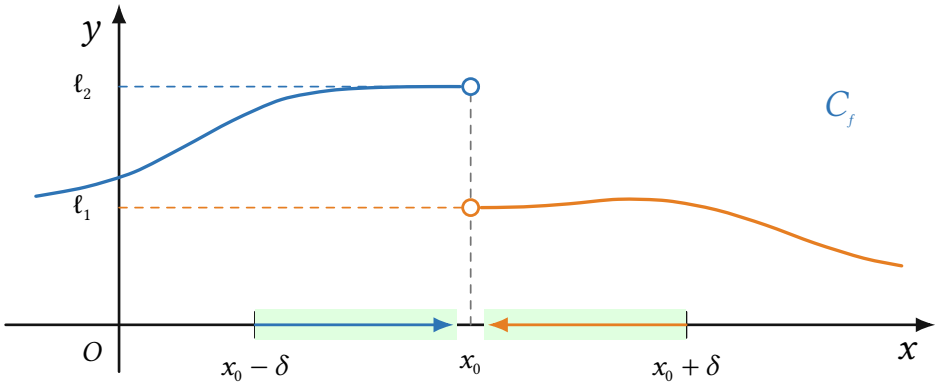


Καθώς το x πλησιάζει το x_0 είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά, δηλαδή καθώς το x παίρνει τιμές σε μία περιοχή του x_0 χωρίς το σημείο x_0, οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν τον αριθμό ℓ.

Λέμε ότι υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 και είναι ίσο με ℓ. Γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Περίπτωση 2: οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν διαφορετικούς αριθμούς ℓ_1 και ℓ_2, όταν το x πλησιάζει το x_0 από τα δεξιά και από τα αριστερά αντίστοιχα.



Καθώς το x πλησιάζει το x_0 από τα αριστερά,
οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν τον αριθμό ℓ_2.
Καθώς το x πλησιάζει το x_0 από τα δεξιά,
οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν τον αριθμό ℓ_1.

Λέμε ότι το αριστερό πλευρικό όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 είναι ίσο με ℓ_2 και συμβολίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$$

Όμοια, λέμε ότι το δεξιό πλευρικό όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 είναι ίσο με ℓ_1 και συμβολίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1$$

Επειδή

$$\ell_1 \neq \ell_2$$

λέμε ότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Να θυμάσαι

- Για να μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο μίας συνάρτησης f στο σημείο x_0, η συνάρτηση πρέπει να ορίζεται σε μία περιοχή του x_0.
- Το σημείο x_0 δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
- Η τιμή της f στο σημείο x_0, αν υπάρχει, δεν είναι απαραίτητο να είναι ίση με το όριό της στο σημείο αυτό.

Παρατήρηση 2.1:

Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής

$$(x_0, b)$$

αλλά δεν είναι ορισμένη σε κανένα διάστημα της μορφής

$$(a, x_0)$$

τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Παρατήρηση 2.2:

Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής

$$(a, x_0)$$

αλλά δεν είναι ορισμένη σε κανένα διάστημα της μορφής

$$(x_0, b)$$

τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

2.3 Υπολογισμός ορίων

Ο υπολογισμός ενός ορίου αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της Ανάλυσης. Πολύ συχνά δεν μας ενδιαφέρει τόσο η τιμή που παίρνει μία συνάρτηση σε ένα συγκεκριμένο σημείο, όσο η συμπεριφορά της όταν το x πλησιάζει το σημείο αυτό. Στην ενότητα αυτή θα γνωρίσουμε τις βασικές τεχνικές υπολογισμού ορίων. Ξεκινώντας από απλές περιπτώσεις και προχωρώντας σταδιακά σε πιο απαιτητικές, θα αναπτύξουμε μεθοδικά τις απαραίτητες δεξιότητες, ώστε να μπορούμε να υπολογίζουμε με ασφάλεια και αποτελεσματικότητα τα όρια συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.1:

Ισχύουν οι παρακάτω βασικές προτάσεις για το όριο μίας συνάρτησης:

1. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = m \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = m$$

2. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = m \iff \lim_{x\to x_0} (f(x) - m) = 0$$

3. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = m \iff \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = m$$

Θεώρημα 2.2:

Για τη σταθερή και την ταυτοτική συνάρτηση ισχύουν:

1. $$\lim_{x\to x_0} c = c$$

2. $$\lim_{x\to x_0} x = x_0$$

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί το βασικότερο εργαλείο για τον υπολογισμό των ορίων. Με τη βοήθειά του μπορούμε να υπολογίζουμε το όριο σύνθετων αλγεβρικών παραστάσεων, αρκεί να είναι γνωστά τα όρια των επιμέρους συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.3:

(Όριο και πράξεις)
Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε ισχύουν:

1. $$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

2. $$\lim_{x\to x_0}(kf(x)) = k\lim_{x\to x_0} f(x) \quad , \quad k\in\mathbb{R}.$$

3. $$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

4. $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$$

   εφόσον
   $$\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

5. $$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

6. $$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)},$$

   εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0 και $n\geq 2$.

7. $$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n \quad , \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Παρατήρηση 2.3:

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα των πράξεων στα όρια, πρέπει πρώτα να υπάρχουν τα όρια των επιμέρους συναρτήσεων.

Αν κάποιο από τα όρια αυτά δεν υπάρχει, τότε το θεώρημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί, ακόμη και αν το όριο της παράστασης υπάρχει όπως θα δείτε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2.2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ -1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα των πράξεων για τον υπολογισμό του

$$\lim_{x \to 0} \big(f(x) + g(x) \big).$$

Λύση

Έχουμε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

οπότε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Ομοίως,

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = -1,$$

άρα ούτε το $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ υπάρχει.

Επομένως **δεν επιτρέπεται** να εφαρμόσουμε το θεώρημα των πράξεων.

Παρατηρούμε όμως ότι

$$f(x) + g(x) = 0, \qquad x \neq 0,$$

οπότε

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \big(f(x) + g(x) \big) = 0.}$$

Άρα, παρότι το όριο του αθροίσματος υπάρχει, τα όρια των δύο συναρτήσεων δεν υπάρχουν και συνεπώς το αποτέλεσμα αυτό **δεν προκύπτει** από το θεώρημα των πράξεων.

Το θεώρημα των πράξεων στα όρια μάς επιτρέπει να υπολογίζουμε εύκολα το όριο κάθε πολυωνύμου. Αρκεί να εφαρμόσουμε διαδοχικά τις ιδιότητες του αθροίσματος, του γινομένου και του γινομένου με σταθερά. Το αποτέλεσμα είναι ότι το όριο ενός πολυωνύμου σε ένα σημείο ισούται με την τιμή του πολυωνύμου στο σημείο αυτό.

Θεώρημα 2.4:

Έστω το πολυώνυμο P με τύπο

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Τότε ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη:

Είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} P(x) &= \lim_{x \to x_0} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} (a_n x^n) + \cdots + \lim_{x \to x_0} (a_1 x) + \lim_{x \to x_0} a_0 \\
&= a_n \lim_{x \to x_0} x^n + \cdots + a_1 \lim_{x \to x_0} x + \lim_{x \to x_0} a_0 \\
&= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 \\
&= P(x_0).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του πηλίκου των ορίων και το προηγούμενο θεώρημα για τα πολυώνυμα, μπορούμε να υπολογίζουμε εύκολα τα όρια των ρητών συναρτήσεων, αρκεί ο παρονομαστής να μην μηδενίζεται στο σημείο στο οποίο υπολογίζουμε το όριο.

Θεώρημα 2.5:

Έστω τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με

$$Q(x_0) \neq 0.$$

Τότε ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

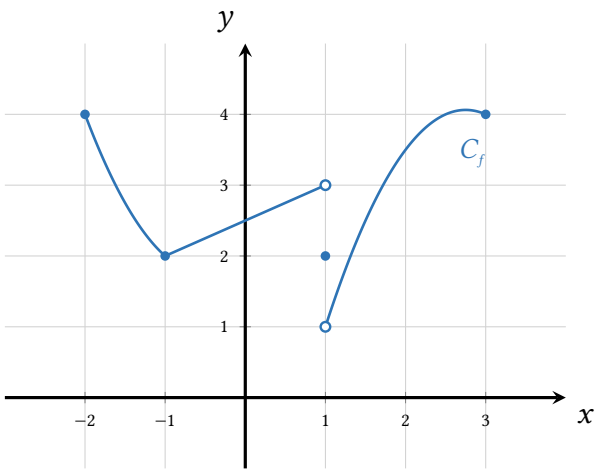
Β1 Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2a - b$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και b ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

Β2 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 3]$.



Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

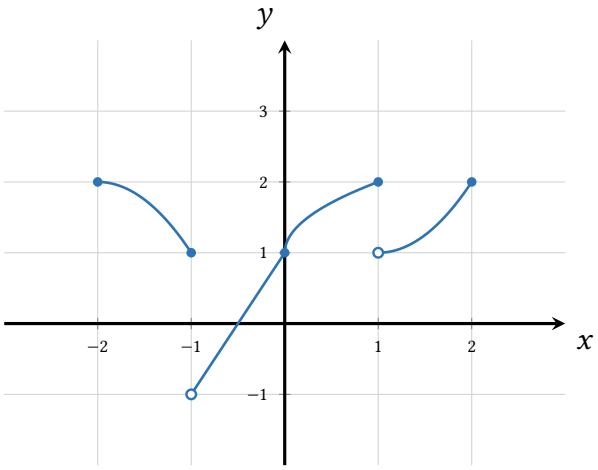
iii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

iv) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

v) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

vi) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

Β3 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 2]$.



Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

iv) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

v) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

B4 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x - 2} \quad , \quad x \neq 2$$

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $K(-1, 2)$.

α΄) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a.

β΄) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

γ΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

B5 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^3 - 2x^2 + x - 1\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + |x^2 + x - 6| + 3x}{x^2 - 9}$

iv) $\lim\limits_{x\to 7} \sqrt{x + 2}$

Β6 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\left|f^2(x) + 2f(x)\right| - |f(x) - 1|\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left|f^2(x) - 3f(x)\right| - 4}{|f(x)| + 2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xf(x) + \sqrt{f^2(x) + 3}}{x - 2}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^3(x) + 2}{f(x) - 1}$

Β7 Θεωρούμε ένα πολυώνυμο P για το οποίο ισχύει:

$$\lim_{x\to 2} P^2(x) + 4 = 4 \lim_{x\to 2} P(x)$$

Να υπολογίσετε το $P(2)$.

Β8 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , \quad x \leq -1 \\ x^2 + x & , \quad -1 < x < 3 \\ x + 2 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ iv) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Β9 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2a^2x^2 + ax + 1 & , \quad x \leq 1 \\ a^2x - 3 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι το όριο

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

δεν υπάρχει για καμία τιμή του πραγματικού αριθμού a.

Β10 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2ax & , \quad x \leq 1 \\ a^2x + 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

και να υπολογίσετε την τιμή του ορίου σε καθεμία από τις περιπτώσεις αυτές.

Β11 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + x - 4}{-x^2 - x + 2}$

iii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$

iv) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 - x - 4}{x^3 + x - 2}$

v) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

vi) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^3 - x^2 - x - 2}$

vii) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x}{x^2 - 4} + \dfrac{x^2}{4 - x^2} \right)$

viii) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x - 20}{x^2 - 16} + \dfrac{2}{x - 4} \right)$

Β12 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 2x - 3}$

ii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 8}{x^2 - 4}$

iii) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}$

iv) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}$

Β13 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3 - x} - 1}{x^2 - 2x}$

ii) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{3 - x}}{x^2 - 1}$

iii) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - \sqrt{x + 6}}$

iv) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - x}{\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{3x + 10}}$

Β14 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-x+4}-2}{x^2+x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5-2x}}{x^2-3x+2}$

v) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$

vi) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

viii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-3}{\sqrt[3]{2x+6}-2}$

B15 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}-5}{x^2-25}$

ii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}-1}{x^2-3x}$

B16 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 2$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to -2} \frac{f^3(x)-8}{4-\sqrt{f^2(x)+12}}$$

B17 Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους:

$$f(x) = x^2 - x + 1 \qquad \text{και} \qquad g(x) = \sqrt{4x-3}$$

α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) \geq \frac{3}{4}$$

β΄) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

γ΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}$$

B18 Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , \ x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , \ x > 1 \end{cases}$$

Β19 Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ για τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & , \quad x<1\\[2ex] \dfrac{x+1}{x^2+3} & , \quad x\geq 1\end{cases}$$

Β20 Έστω n φυσικός αριθμός. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ για τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n-1}{x-1} & , \quad x<1\\[2ex] \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & , \quad x>1\end{cases}$$

Β21 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1} & , \quad x<-1\\[2ex] \kappa x+\mu & , \quad -1\leq x\leq 1\\[2ex] \dfrac{\sqrt{8x-7}-1}{x-1} & , \quad 1<x\leq 2\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ και μ, ώστε να υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to -1} f(x) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 1} f(x)$$

Β22 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3} & , \quad -8\leq x<1\\[2ex] x^2-6 & , \quad 1\leq x\leq 2\\[2ex] \dfrac{x^3-4x^2-4x+16}{x^2-4} & , \quad x>2\end{cases}$$

Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f^3(x)-2f^2(x)-4f(x)+8}{f^2(x)-f(x)-6}$ iv) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{f^2(x)-3}-1}{f^2(x)+3f(x)+2}$

Β23 Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{x^2-4} = \frac{1}{16}$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

Β24 Δίνεται η συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-x^2}{x^2-4} = 7$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-2x}{x^2+x-6}$

Β25 Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)+\sqrt{x}-1}{x^3-1} = \frac{3}{2}$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$

Β26 Δίνεται η συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) \neq \pm 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x)-x}{x^2-5x} = 6$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{f(x)-x^2+20}{x^2-3x-10}$

iii) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{f^2(x)-7f(x)+10}{f^3(x)-5f^2(x)+2f(x)-10}$ iv) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{f(x)+4}-3}{f^2(x)-25}$

Β27 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2-3x+2} = 6 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 2} \left(g(x)(x^2-4)\right) = 1$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$L = \lim_{x\to 2} \left(f(x)\cdot g(x)\right)$$

B28 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) - 6f^2(x) + 12f(x) = x + 8 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

β΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 2} \frac{f^{-1}(x)}{2x^3 - 12x^2 + 24x - 16}$$

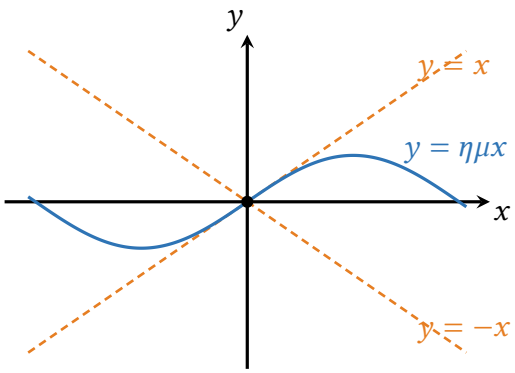
2.4 Όριο τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τον υπολογισμό ορίων στα οποία εμφανίζονται τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Για να μπορέσουμε να αντιμετωπίσουμε αποτελεσματικά τα όρια αυτά, θα παρουσιάσουμε αρχικά ορισμένα βασικά θεωρήματα και χρήσιμες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, τα οποία θα αξιοποιηθούν εκτενώς στις εφαρμογές που ακολουθούν.

Θεώρημα 2.6:

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$|\eta\mu x| \leq |x|$$



Παρατήρηση 2.4:

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτουν οι παρακάτω χρήσιμες παρατηρήσεις

$$|\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$$

Επιπλέον

$$x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta\mu x < x$$

$$x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta\mu x > x$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις παρουσιάζουν μία σημαντική ιδιότητα, η οποία συναντάται και στις πολυωνυμικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, το όριό τους σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού τους είναι ίσο με την τιμή που λαμβάνουν στο σημείο αυτό. Η ιδιότητα αυτή συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.7:

Για κάθε πραγματικό αριθμό x_0 ισχύουν:

$$\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0 \quad , \quad x_0 \neq \frac{\pi}{2} + \kappa\pi \quad , \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\lim_{x \to x_0} \sigma\varphi x = \sigma\varphi x_0 \quad , \quad x_0 \neq \kappa\pi \quad , \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Οι παρακάτω προτάσεις αποτελούν βασικά όρια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και θα χρησιμοποιηθούν συχνά στον υπολογισμό ορίων που οδηγούν στην απροσδιόριστη μορφή

$$\frac{0}{0}$$

Θεώρημα 2.8:

Ισχύουν τα παρακάτω βασικά όρια:

1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Γενικότερα, για κάθε $a \neq 0$ ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu(ax)}{ax} = 1$$

2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Γενικότερα, για κάθε $a \neq 0$ ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu(ax)-1}{ax}=0$$

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες οι οποίες θα σας χρησιμεύσουν στον χειρισμό τριγωνομετρικών παραστάσεων.

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες	
1.	$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \quad , \quad x\in\mathbb{R}$
2.	$\varepsilon\varphi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \quad , \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+\kappa\pi \quad , \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
3.	$\sigma\varphi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \quad , \quad x\neq\kappa\pi \quad , \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
4.	$\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=1 \quad , \quad x\neq\kappa\pi \quad , \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+\kappa\pi \quad , \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
5.	$1+\varepsilon\varphi^2 x=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad , \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+\kappa\pi \quad , \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
6.	$1+\sigma\varphi^2 x=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x} \quad , \quad x\neq\kappa\pi \quad , \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
7.	$\eta\mu 2x=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x \quad , \quad x\in\mathbb{R}$
8.	$\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x=2\sigma\upsilon\nu^2 x-1=1-2\eta\mu^2 x \quad , \quad x\in\mathbb{R}$
9.	$\sigma\upsilon\nu(x+y)=\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y-\eta\mu x\cdot\eta\mu y \quad , \quad x,y\in\mathbb{R}$ $\sigma\upsilon\nu(x-y)=\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu x\cdot\eta\mu y \quad , \quad x,y\in\mathbb{R}$
10.	$\eta\mu(x+y)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y\cdot\sigma\upsilon\nu x \quad , \quad x,y\in\mathbb{R}$ $\eta\mu(x-y)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu y-\eta\mu y\cdot\sigma\upsilon\nu x \quad , \quad x,y\in\mathbb{R}$

2.5 Όριο σύνθετης συνάρτησης

Κατά τον υπολογισμό ορίων συναντάμε συχνά συναρτήσεις που αποτελούνται από τη σύνθεση δύο άλλων συναρτήσεων. Στις περιπτώσεις αυτές, αντί να υπολογίσουμε απευθείας το όριο της σύνθετης συνάρτησης, μπορούμε να αξιοποιήσουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο μας επιτρέπει να υπολογίσουμε διαδοχικά τα αντίστοιχα όρια.

Θεώρημα 2.9:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g, για τις οποίες η σύνθεση $f \circ g$ ορίζεται σε περιοχή του x_0. Αν ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- $$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0$$

  με

  $$g(x) \neq u_0$$

  σε περιοχή του x_0.

- $$\lim_{u \to u_0} f(u) = \ell$$

τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = \ell$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β29 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^3 x}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3-x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3+2x^2+3x}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\eta\mu x}{\varepsilon\varphi x-2x}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-\varepsilon\varphi x}{x^3}$

Β30 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\eta\mu x}-2}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sqrt{x^2+9}-3}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{5}}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{x^2+x}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-\sqrt{1+x^2}+1}{x^2-x}$

Β31 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+\sigma\upsilon\nu x}-2}{x^2}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x+\eta\mu 6x-\eta\mu 3x}{\varepsilon\varphi 2x+\sigma\upsilon\nu 8x-1}$

Β32 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[6]{x+2}-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt[6]{x+1}}$

iv) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[8]{x+3}}{\sqrt[4]{x+3}-\sqrt[8]{x+3}}$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x}}$

vi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{\sqrt{|x-1|+4}-2}$

Β33 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x^2-1}$

ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x-2)-1}{\eta\mu(3x-6)}$

iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\eta\mu x}{(\pi-2x)^2}$

iv) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\varepsilon\varphi x\right)$

v) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-2}$

vi) $\lim\limits_{x\to 2}\left((4-x^2)\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)$

Β34 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(ax)}{x} & , \quad x<0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x+x^2} & , \quad x>0\end{cases}$$

Να βρείτε τιμές του $a\in\mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

Β35 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\eta\mu^2 x}{3x^2-\eta\mu^2 x}$$

Β36 Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες ορίζονται σε περιοχή του 0 και για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)+\frac{\eta\mu 5x}{x}\right)=6 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^-}\left(g(x)-\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)=\frac{3}{2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases}a^2 g(x) & , \quad x<0\\ af(x)+1 & , \quad x>0\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 0} h(x)$$

Β37 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 6 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to -2} f(x) = -3$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{2\left(\sqrt{1+3x}-1\right)}{x}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1} f\left(\dfrac{4\left(1-\sqrt{x}\right)}{x-1}\right)$

Β38 Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0,1)\cup(1,+\infty)$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) + \eta\mu\left(\dfrac{\pi(x-1)}{2}\right) - 1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\pi}{2}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$L_1 = \lim_{x\to 1} f(x) \qquad \text{και} \qquad L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$$

Β39 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + \eta\mu 4x}{x^2+3x} = 2$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{f(\sigma\upsilon\nu x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)\eta\mu 3x + x - x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x) + f(-x) + \sqrt{x+1} - 1}{\eta\mu 5x}$

Β40 Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-2}{x} = 3 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)+1}{x} = -2$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)g(x)+2}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(2f(x)+g(x)-3)}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{f(x)+2}-2}{x}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(f(x)-2)(g(x)+1)}{x^2}$

Β41 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2x^2 f(x) = 3\eta\mu^3 x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Αν

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = a \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι $a = 1$ και να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(f(x))}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f\left(x^2 - x\right)}{x^2 - 3x + 2}$

Β42 Δίνεται περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 2} f(x-1) = 5$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1} \left(f(x-2) + f(3-2x)\right)$

2.6 Όριο και διάταξη

Η διάταξη δύο συναρτήσεων σε μία περιοχή ενός σημείου συνδέεται άμεσα με τη διάταξη των ορίων τους. Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τα βασικά θεωρήματα που περιγράφουν τη σχέση μεταξύ ορίων και ανισοτήτων και θα τα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό και την εκτίμηση ορίων.

Θεώρημα 2.10:

Ισχύουν τα παρακάτω:

1) Αν
$$\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$$
τότε
$$f(x) > 0$$
σε περιοχή του x_0.

2) Αν
$$\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$$
τότε
$$f(x) < 0$$
σε περιοχή του x_0.

Παρατήρηση 2.5:

Το αντίστροφο των παραπάνω θεωρημάτων δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η συνάρτηση
$$f(x) = x^2$$
είναι θετική σε περιοχή του 0, ενώ
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Θεώρημα 2.11:

Έστω δύο συναρτήσεις f και g που έχουν όριο στο x_0. Αν

$$f(x) \leq g(x)$$

σε περιοχή του x_0, τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Παρατήρηση 2.6:

Το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν η ανισότητα είναι αυστηρή. Δηλαδή, αν

$$f(x) < g(x)$$

σε περιοχή του x_0.

Θεώρημα 2.12:

(Κριτήριο παρεμβολής)
Έστω οι συναρτήσεις f, g και h για τις οποίες ισχύουν:

- $$h(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

  σε περιοχή του x_0.

- $$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

Τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Τα θεωρήματα που ακολουθούν δεν περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη του σχολικού βιβλίου. Ωστόσο, αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για τον υπολογισμό ορίων και οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να τα αποδεικνύουν.

Θεώρημα 2.13:

Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

Τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Απόδειξη:

Για κάθε x σε μία περιοχή του x_0 ισχύει:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Επιπλέον,

$$\lim_{x \to x_0} (-|f(x)|) = -\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

και, σύμφωνα με την υπόθεση,

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Θεώρημα 2.14:

Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f^2(x) = 0$$

Τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Απόδειξη:

Από την υπόθεση έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f^2(x) = 0$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

Άρα, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Θεώρημα 2.15:

Έστω δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$
- Υπάρχει πραγματικός αριθμός $k > 0$ τέτοιος ώστε

  $$|g(x)| \leq k,$$

  για κάθε x σε μία περιοχή του x_0.

Τότε

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = 0$$

Απόδειξη:

Για κάθε x σε μία περιοχή του x_0 ισχύει:

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x)| &= |f(x)|\,|g(x)| \\ &\leq k\,|f(x)|\,. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$-k\,|f(x)| \leq f(x) \cdot g(x) \leq k\,|f(x)|$$

Επειδή

$$\lim_{x \to x_0} (-k\,|f(x)|) = \lim_{x \to x_0} (k\,|f(x)|) = 0$$

από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β43 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-2|-x^2}{x^2-x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left|x^2-1\right|-1}{x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{x-\sqrt{x^2}}$

Β44 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|+x^2-3x+2}{x-1}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|+x^2-1}{|x-2|-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\left|x^3-3x+2\right|}{x^3+8}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left|x^2-1\right|-x+1}{\left|x^2-x\right|}$

Β45 Θεωρούμε ένα πολυώνυμο P για το οποίο ισχύει $P(0)=1$.
Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{|xP(x)+1|-|xP(x)-1|}{x}$$

Β46 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

και $f(x)\neq 2$ σε μία περιοχή του 1.
Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left|f^2(x)-5f(x)+6\right|}{|f(x)-2|}$$

Β47 Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-2x+1}{\sqrt{x^2+3}-2} = 3$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-1}{x-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|f(x)-2|+\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left|f^2(x)-4\right|}{\sqrt{f^2(x)+5}-3}$

Β48 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(x) \cdot \eta\mu x \geq x^3 + x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \to 0} f(x) = m \quad , \quad m \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $m = 1$.

Β49 α΄) Αν

$$\lim_{x \to 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$$

να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

β΄) Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$xg(x) + 2 \leq 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} g(x)$$

αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

γ΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\epsilon\phi^2 x + x^2 g(x)}$$

Β50 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$x \cdot f(x) \cdot \eta\mu^2 x \leq \sqrt{x^4 + 1} - 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \to 0} f(x) = m \quad , \quad m \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $m = 0$.

Β51 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$3x - x^2 \leq f(x) \leq 3x + x^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

B52 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 - 2x - 3 \leq f(x)(x-3) \leq 2x^2 - 8x + 6 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

B53 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$3x - \left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) \leq f(x) \leq 3x + (1 - \sigma\upsilon\nu x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

B54 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x \leq f(x) \leq x^2 - 1 - \eta\mu^2 x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+1}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+1+\eta\mu^2 x}{x^2}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+2\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}$

B55 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x - x^2 \leq f(x) - 1 \leq x + x^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

B56 Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x) - x| \leq \sqrt{x^2+1} - 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

Β57 Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\left|\frac{f(x)-2x^2}{x-1}\right|\leq (x-1)^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x\neq 1$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Β58 Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$|x\cdot \eta\mu x\cdot f(x)|\leq \sqrt{x^4+1}-1 \quad , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

Β59 Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|xf(x)-4|x||\leq x^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

Β60 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2f(x)-\eta\mu f(x)=x \qquad , \qquad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α΄) Να αποδείξετε ότι

$$|2f(x)-x|\leq |f(x)|$$

β΄) Να αποδείξετε ότι

$$|f(x)|\leq |x|$$

γ΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

δ΄) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

Β61 Για μία συνάρτηση f ισχύει

$$\lim_{x\to 2}\frac{|f(x)+x|}{x-2}=2$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

Β62 Για μία συνάρτηση f ισχύει

$$\lim_{x\to 1}\left(2f(x)-f^2(x)\right)=1$$

Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

Β63 Για μία συνάρτηση f ισχύει

$$f^2(x)-2f(x)+1\leq \eta\mu^2 x \quad , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι

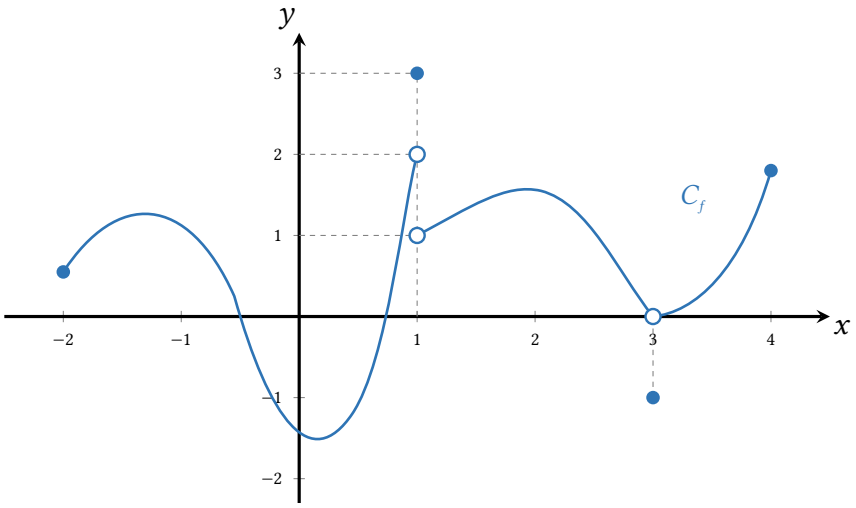
$$\lim_{x\to 0} f(x)=1$$

Β64 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\eta\mu(x-1)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\right)$

Β65 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2,4]$.



Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 1^-}(|f(x)-2|-f(x))$

ii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

iii) $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x-3}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{f(x)+3}-2\right)$

v) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|f(x)-2|}{4-f^2(x)}$

vi) $\lim\limits_{x\to 3}\left(f^2(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)$

B66 Έστω $k>0$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$0<|g(x)|<k \quad , \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

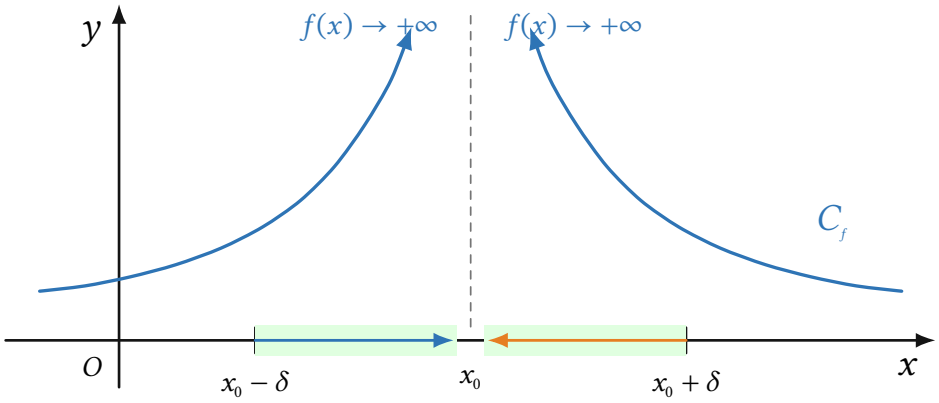
Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$$

2.7 Μη πεπερασμένο όριο

Μέχρι τώρα μελετήσαμε περιπτώσεις στις οποίες το όριο μίας συνάρτησης είναι ένας πραγματικός αριθμός. Ωστόσο, υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων οι τιμές αυξάνονται ή ελαττώνονται απεριόριστα όταν το x πλησιάζει ένα συγκεκριμένο σημείο. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μη πεπερασμένο όριο. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε με ακρίβεια την έννοια αυτή, θα γνωρίσουμε τους σχετικούς συμβολισμούς και θα μάθουμε να υπολογίζουμε μη πεπερασμένα όρια.

Μη πεπερασμένο όριο: οι τιμές της $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα, όταν το x πλησιάζει το x_0 είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά.

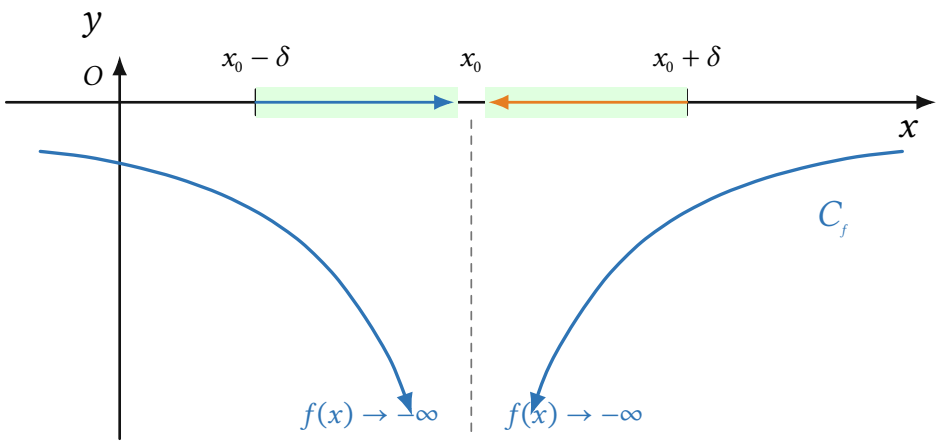


Καθώς το x πλησιάζει το x_0 είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά, δηλαδή καθώς το x παίρνει τιμές σε μία περιοχή του x_0 χωρίς το σημείο x_0, οι τιμές της $f(x)$ γίνονται απεριόριστα μεγάλες.

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο $+\infty$, καθώς το x τείνει στο x_0. Γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Μη πεπερασμένο όριο: οι τιμές της $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα, όταν το x πλησιάζει το x_0 είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά.



Καθώς το x πλησιάζει το x_0 είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά, δηλαδή καθώς το x παίρνει τιμές σε μία περιοχή του x_0 χωρίς το σημείο x_0, οι τιμές της $f(x)$ γίνονται απεριόριστα μικρές.

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο $-\infty$, καθώς το x τείνει στο x_0. Γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Για τα μη πεπερασμένα όρια ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Βασικές προτάσεις για τα μη πεπερασμένα όρια

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \big(-f(x)\big) = \mp\infty$

3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{|f(x)|} = +\infty$ για κάθε θετικό ακέραιο $n > 1$.

5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ σε μία περιοχή του x_0, τότε

   $$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

   Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ σε μία περιοχή του x_0, τότε

   $$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει περιοχή του x_0 στην οποία ισχύει $f(x) > 0$.

   Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε υπάρχει περιοχή του x_0 στην οποία ισχύει $f(x) < 0$.

Για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα «Όριο και πράξεις» σε περιπτώσεις όπου εμφανίζονται μη πεπερασμένα όρια, κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων που περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα. Αυτό είναι απαραίτητο, επειδή τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς και, επομένως, δεν υπακούουν στους κανόνες των πράξεων των πραγματικών αριθμών. Για τον λόγο αυτό, οι πράξεις με μη πεπερασμένα όρια αντιμετωπίζονται με ιδιαίτερη προσοχή και βασίζονται στις αντίστοιχες ιδιότητές του.

Όριο αθροίσματος δύο συναρτήσεων

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Α.Μ.**	**Α.Μ.**	$-\infty$

Όριο γινομένου δύο συναρτήσεων

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$a>0$	$a>0$	$a<0$	$a<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Α.Μ.**	**Α.Μ.**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στον πλαίσιο που ακολουθεί παρουσιάζονται όλες οι απροσδιόριστες μορφές που μπορούν να προκύψουν κατά τον υπολογισμό ορίων.

$$\frac{0}{0} \quad , \quad (+\infty)-(+\infty) \quad , \quad (-\infty)-(-\infty) \quad , \quad (+\infty)+(-\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad , \quad 0\cdot(\pm\infty) \quad , \quad 0^0 \quad , \quad (+\infty)^0 \quad , \quad 1^{\pm\infty}$$

Το παρακάτω θεώρημα, παρόλο που δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη του σχολικού βιβλίου, μπορεί να χρησιμοποιείται ελεύθερα στις ασκήσεις, χωρίς να απαιτείται η απόδειξή του.

Θεώρημα 2.16:

Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

1) Έστω δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες σε μία περιοχή του x_0 ισχύει:

$$f(x) \geq g(x)$$

Αν

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

2) Έστω δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες σε μία περιοχή του x_0 ισχύει:

$$f(x) \leq g(x)$$

Αν

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β67 Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{(x-2)^2}$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8-5x}{x^2-4x+4}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{2x-x^2-1}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x+1}{(x^2-4)(x^2-5x+6)}$

v) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{|x-2|-2}$

Β68 Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|2x+1|-1}{x^3-3x+2}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}-2)}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x+8}-2}$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Β69 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)+10|-1}{f^2(x)}$$

Β70 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$$

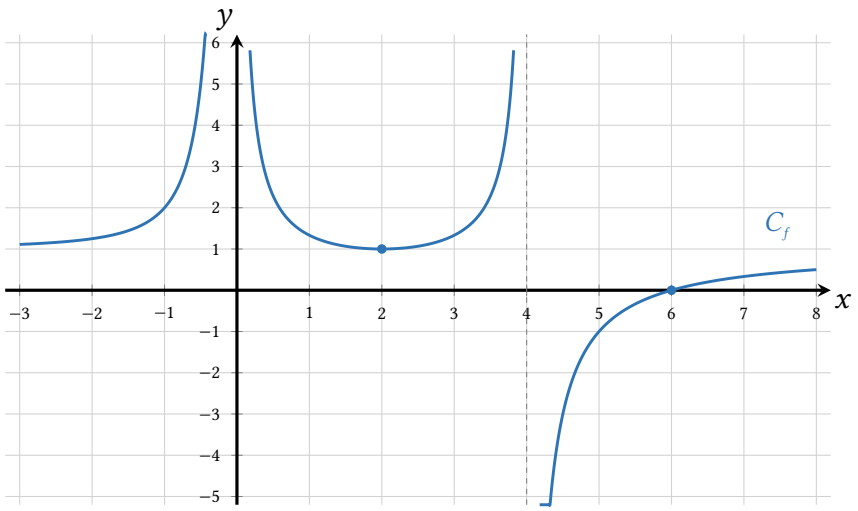
Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{xf(x)}{f^2(x)-f(x)}$

ii) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{xf^2(x)+xf(x)}{f^2(x)-|f(x)|}$

iii) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\sqrt{f^4(x)+x^2}-f^2(x)\right)$

Β71 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.



Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 4} |f(x)|$

iv) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{f(x)}$

v) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$

vi) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)-1}$

vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2f^2(x)-3f(x)-2}{f^2(x)-5f(x)-1}$

viii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(f(x)-f^2(x)\right)$

ix) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{f^2(x)+f(x)}$

x) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-3)\,f(x)}{-x^2+7x-12}$

xi) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(f(x))}$

xii) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{f^2(x)+2f(x)+1}{f^3(x)+f^2(x)}$

Β72 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχει, το όριο

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+a}{|x-1|}$$

Β73 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχει, το όριο

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{x+a}{x^3-3x+2}$$

Β74 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχει, το όριο

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - ax^2 + a - 2}{x \cdot \eta\mu x}$$

Β75 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^3 - ax^2 + 4}{x - 2} & , \quad x < 2 \\ \dfrac{x^2 + ax + 4}{x - 2} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

Β76 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + bx + 4}{(x - 2)^2} & , \quad x < 2 \\ \dfrac{cx^2 - 3x + 2}{x - 2} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b και c ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

και να είναι πραγματικός αριθμός.

Β77 Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)} & , \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \dfrac{ax + 1}{2(x^2 - 4)} & , \quad x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5$$

και

$$g(x + 3) = g(x) + f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 1, 2\}$$

α΄) Να βρείτε το a, αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

β΄) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$ iv) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

Β78 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)f(x)}{x^2-4} = +\infty$$

να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

Β79 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \left[(x^2-1)f(x) + 2x\right] = -\infty$$

να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Β80 Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{f(x)} = +\infty$$

Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

Β81 Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)\cdot \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x^2+3}-2} = -\infty$$

Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Β82 Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x + 2}{|f(x) - x|} = +\infty$$

Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Β83 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$\lim_{x\to 0}\big(f(x)g(x)\big) = 1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

Β84 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{|x|}\right) + 2}{|x|}$

Β85 Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)\cdot \eta\mu 2x}{\sqrt{1+x} - 1} = -\infty$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu\big(f(x)\big)}{f(x)}$

Β86 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq \sqrt{|x-1|}\sqrt[3]{|x-1|} \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{|x-1|}$$

Β87 Έστω μία άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$x^3 f(x) \geq 2x - \eta\mu x$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

2.8 Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Ορισμός 2.4:

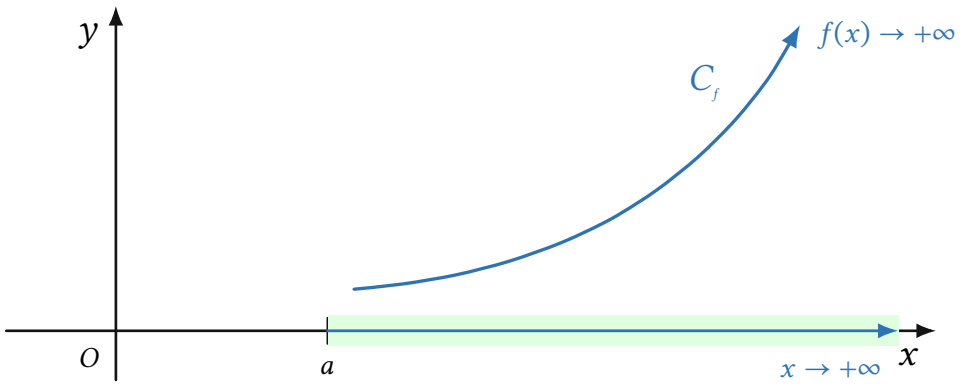
1. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f ορίζεται σε περιοχή του $+\infty$, όταν το πεδίο ορισμού της D_f περιέχει ένα διάστημα της μορφής

$$(a, +\infty) \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

2. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f ορίζεται σε περιοχή του $-\infty$, όταν το πεδίο ορισμού της D_f περιέχει ένα διάστημα της μορφής

$$(-\infty, a) \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

Όριο στο $+\infty$: οι τιμές της $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα, καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες θετικές τιμές.

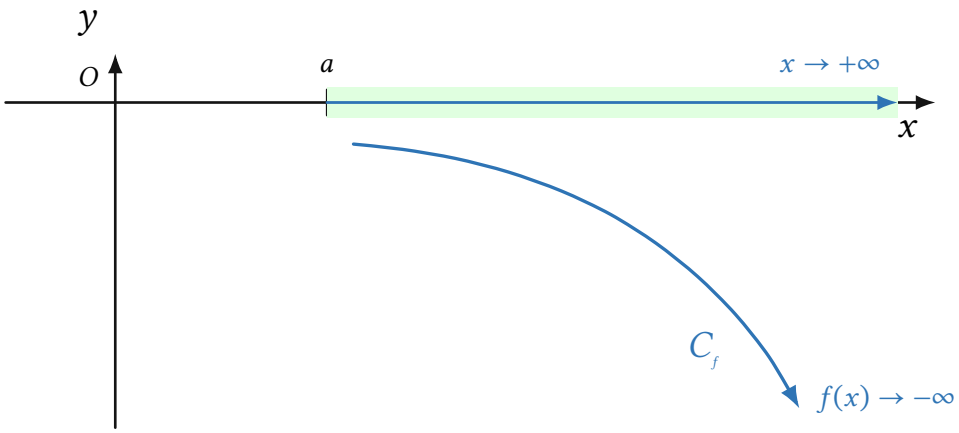


Καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες θετικές τιμές, οι αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ γίνονται απεριόριστα μεγάλες.

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο $+\infty$, καθώς το x τείνει στο $+\infty$. Γράφουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Όριο στο $+\infty$: οι τιμές της $f(x)$ μειώνονται απεριόριστα, καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες θετικές τιμές.

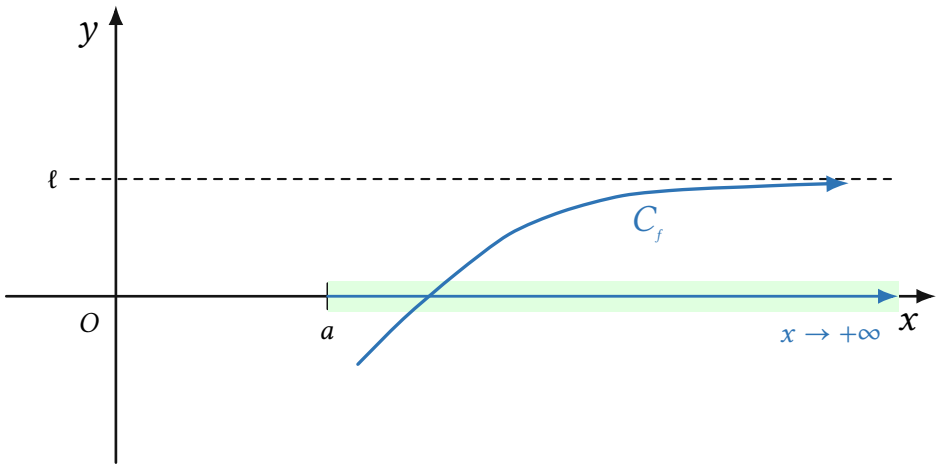


Καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες θετικές τιμές, οι αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ γίνονται απεριόριστα μικρές.

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο $-\infty$, καθώς το x τείνει στο $+\infty$. Γράφουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Όριο στο $+\infty$: οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες θετικές τιμές.

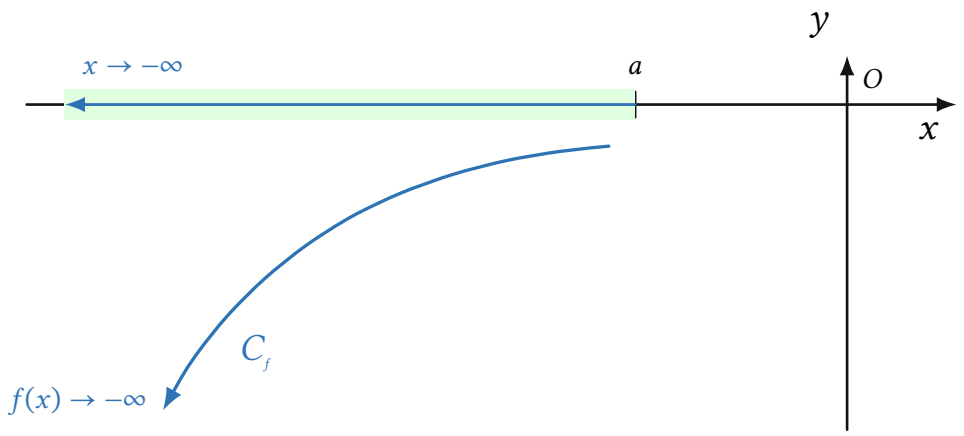


Καθώς το x παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες θετικές τιμές, οι αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό ℓ.

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x τείνει στο $+\infty$. Γράφουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

Όριο στο $-\infty$: οι τιμές της $f(x)$ μειώνονται απεριόριστα, καθώς το x παίρνει ολοένα και μικρότερες τιμές.

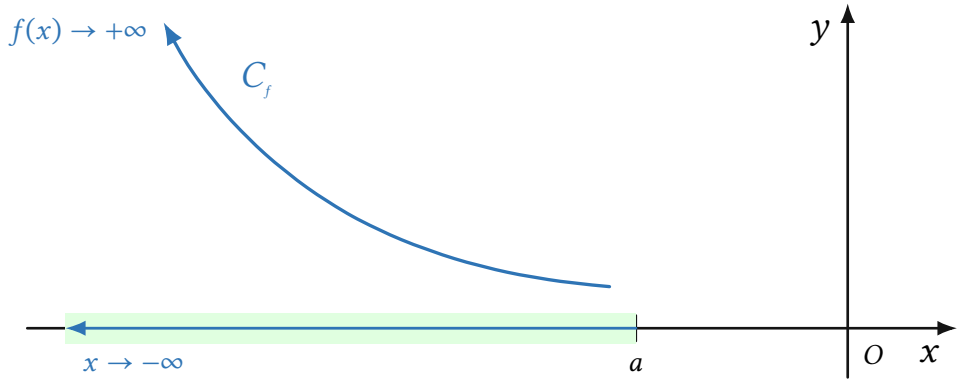


Καθώς το x παίρνει ολοένα και μικρότερες τιμές, οι αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ γίνονται απεριόριστα μικρές.

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο $-\infty$, καθώς το x τείνει στο $-\infty$. Γράφουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Όριο στο $-\infty$: οι τιμές της $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα, καθώς το x παίρνει ολοένα και μικρότερες τιμές.

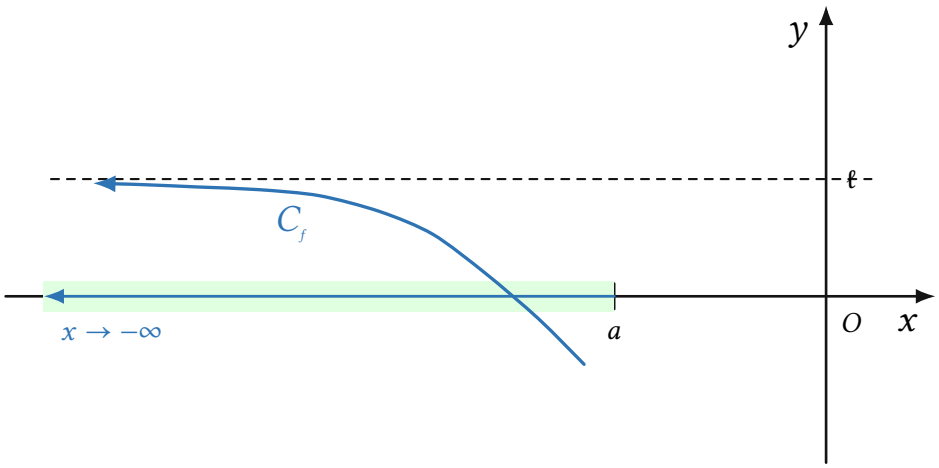


Καθώς το x παίρνει ολοένα και μικρότερες τιμές, οι αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ γίνονται απεριόριστα μεγάλες.

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο $+\infty$, καθώς το x τείνει στο $-\infty$. Γράφουμε:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Όριο στο $-\infty$: οι τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x παίρνει ολοένα και μικρότερες τιμές.



Καθώς το x παίρνει ολοένα και μικρότερες τιμές, οι αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ πλησιάζουν τον πραγματικό αριθμό ℓ.

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x τείνει στο $-\infty$. Γράφουμε:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell.$$

2.8.1 Όριο πολυωνύμων στο άπειρο

Θεώρημα 2.17:

Για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύουν:

1)
$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

2)
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,} \\ -\infty, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

3)
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Θεώρημα 2.18:

(Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης)
Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0.$$

Τότε ισχύει

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n)$$

Θεώρημα 2.19:

(Όριο ρητής συνάρτησης)
Έστω η ρητή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0} \quad , \quad a_n \neq 0 \quad , \quad \beta_k \neq 0.$$

Τότε ισχύει

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a_n x^n}{\beta_k x^k} \right)$$

2.8.2 Όριο τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο άπειρο

Λόγω της περιοδικότητάς τους, οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν προσεγγίζουν κάποια συγκεκριμένη τιμή όταν $x \to +\infty$ ή όταν $x \to -\infty$. Επομένως, τα όριά τους στο άπειρο δεν υπάρχουν.

Να θυμάσαι

Δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \eta\mu x$$

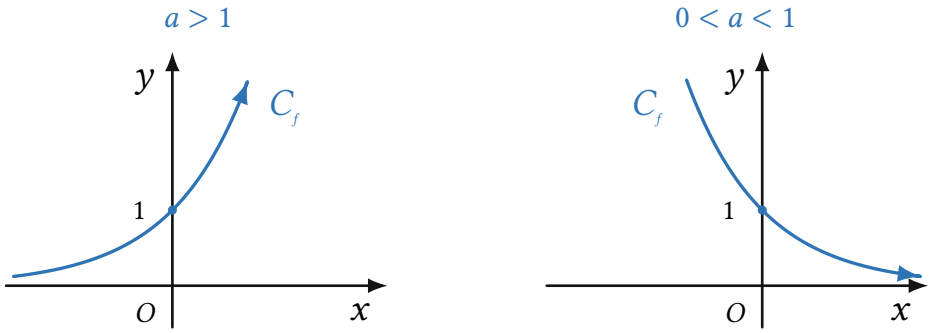
$$\lim_{x \to \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \epsilon\varphi x$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sigma\varphi x$$

2.8.3 Όριο εκθετικής συνάρτησης στο άπειρο

Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$ για $a > 1$ και $0 < a < 1$.



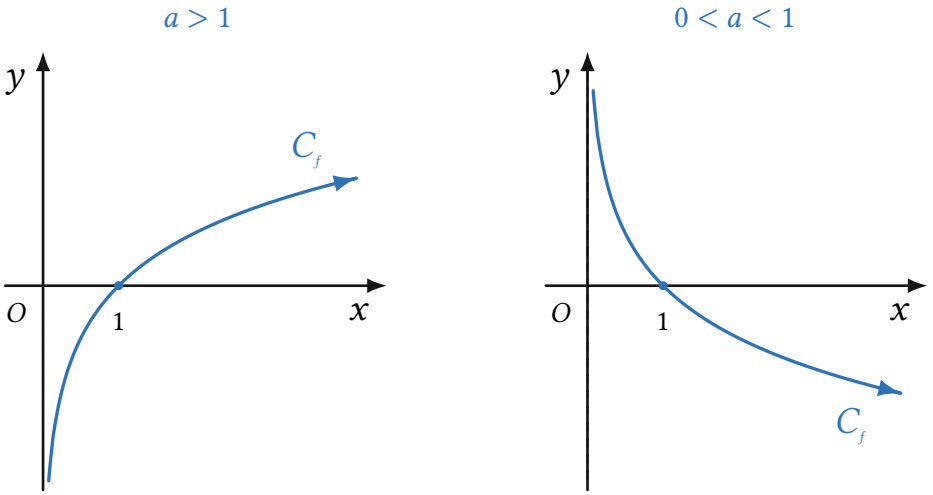
Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις προκύπτουν τα ακόλουθα όρια:

Όρια εκθετικής συνάρτησης στο άπειρο

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

2.8.4 Όριο λογαριθμικής συνάρτησης στο άπειρο

Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = log_a x$ για $a > 1$ και $0 < a < 1$.



Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις προκύπτουν τα ακόλουθα όρια:

Όρια λογαριθμικής συνάρτησης

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β88 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^6-3x^2+7x+2\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+4x^2-5x+2\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^3-3x^2+6x-8\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^5-x^4+3x-5\right)$

Β89 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{3x^2-x}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+x-3}{x^3+4x-2}$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-1}{x^2+x+2}$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{5x^4+x^2-4}$

Β90 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x-1|+|x-2|}{x-3}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-2x|+3}{|x-1|-2}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^3-2|-|x^2+2x-4|}{x^2+1}$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-6x+9}}{\sqrt{25-20x+4x^2}}$

Β91 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+|x-x^2|}}$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-6x\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+12x+5}+3x\right)$

Β92 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+3x\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+2}-x\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-x}{x}$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{|x+1|}$

Β93 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+7}+2x\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x-\sqrt{16x^2+2x+1}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-x^2+2\right)$

Β94 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α΄)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{4x^2+x+2}+x\right)$$

β΄)
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}+2x\right)$$

Β95 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\eta\mu x}{x}$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Β96 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^x}{4^x}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2^x}{e^x-2^x}$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cdot5^x+2\cdot6^x}{4\cdot5^x+5\cdot6^x}$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^x+7^x}{4^x-7^x}$

vi) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+2^x+3^x}{1+e^x+5^x}$

Β97 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to0^+}[(x+2)\ln x]$

ii) $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-\ln x)$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{\ln x}$

Β98 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to1^+}\ln(\ln x)$

ii) $\lim\limits_{x\to0^+}e^{1/x}$

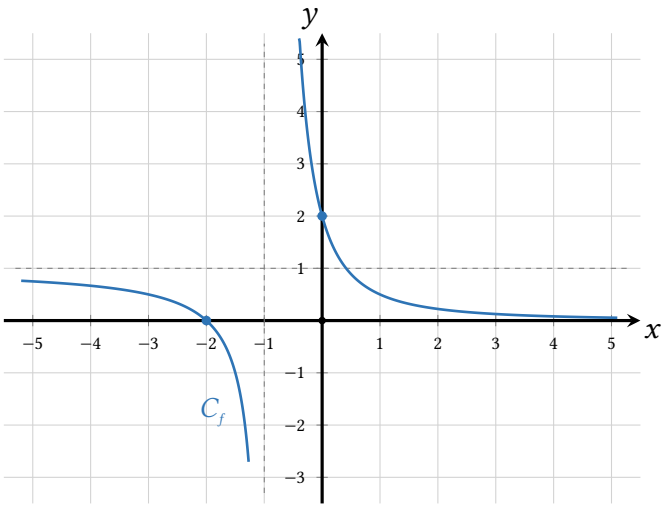
iii) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3-2\ln x}{1+2\ln x}$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\,e^{1/x})$

v) $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)$

vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9^x-3^{x+1}+2}-3^x\right)$

Β99 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, για την οποία γνωρίζουμε ότι τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2 και τον άξονα $y'y$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2.



α΄) Από τη γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

β΄) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας

i) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{f(x)}$

ii) $\lim\limits_{x\to -2^-} \ln\big(f(x)\big)$

Β100 Δίνεται η ένα προς ένα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) = 3$ και

$$f(f(x)) + f(x) = 3x + 2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α΄) Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

β΄) Να βρείτε το $f(3)$.

γ΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}(x) = 3$$

δ΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2}$$

B101 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{(a+1)x^3 - ax^2 + 2ax - 1}{x + 2}$$

B102 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 - x + 1}{(a-1)x^2 + 1}$$

B103 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^3 + bx^2 - 4x + 9}{5x^2 + 2x - 1} = 8$$

B104 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + ax \right)$$

B105 Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να διερευνήσετε το όριο

$$L = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + ax \right)$$

B106 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 5} + 2x \cdot \eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\omega$$

όπου $0 < \varphi, \omega < \pi$.
Να βρείτε τα φ, ω ώστε

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

B107 Για τις διάφορες τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού a, να διερευνήσετε το όριο

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x + 2^x - 1}{a^x - 2^x + 1}$$

B108 Για τις διάφορες τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού a, να διερευνήσετε το όριο

$$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+1} - a^x}{e^x + a^{x+1}}$$

3

Συνέχεια Συναρτήσεων

Natura non facit saltus.

— Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

3.1 Έννοια συνέχειας

3.1.1 Συνέχεια σε σημείο

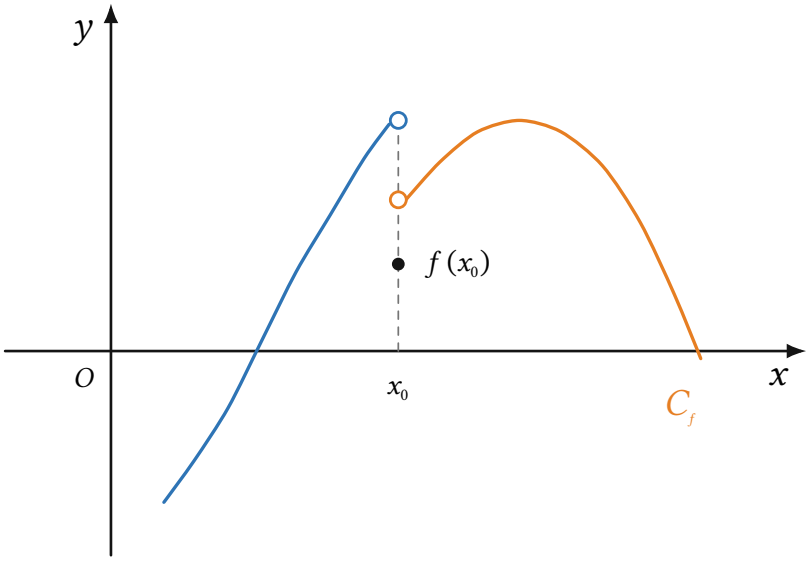
Η έννοια της συνέχειας αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης. Μία συνεχής συνάρτηση μεταβάλλεται χωρίς απότομες μεταβολές ή διακοπές, γεγονός που επιτρέπει την ασφαλή μελέτη της συμπεριφοράς της και τη σύνδεση πολλών σημαντικών θεωρημάτων της Ανάλυσης. Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε με ακρίβεια τη συνέχεια μίας συνάρτησης σε σημείο και σε διάστημα, θα γνωρίσουμε τα βασικά θεωρήματα που τη διέπουν και θα μελετήσουμε τις σημαντικότερες εφαρμογές τους.

Ορισμός 3.1:

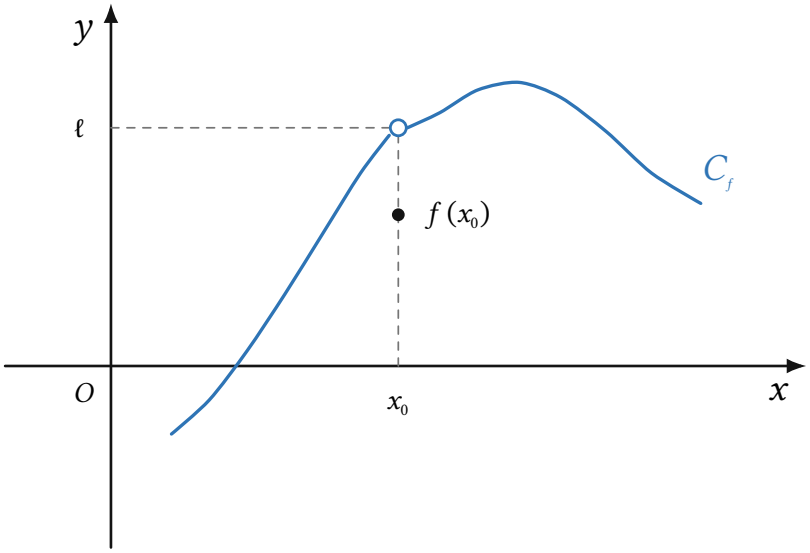
Μία συνάρτηση f λέγεται **συνεχής** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

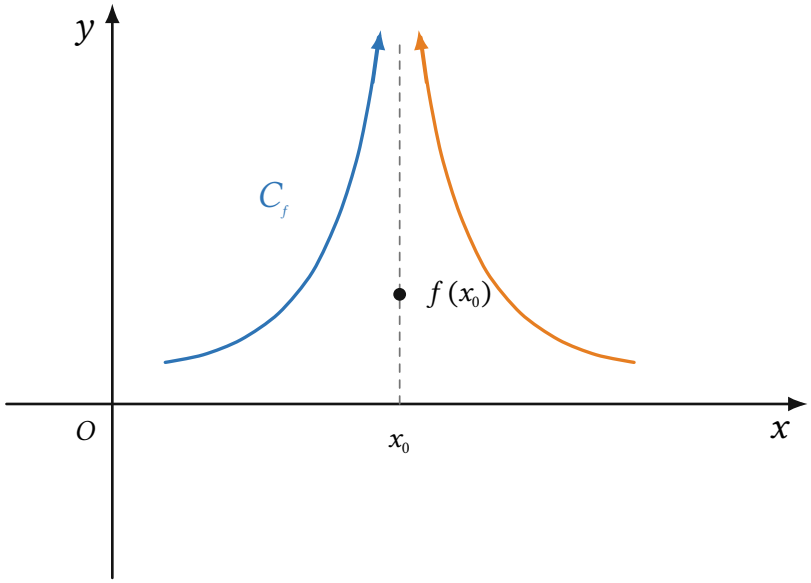
Στα παρακάτω σχήματα θα δείξουμε γραφικά σε ποιες περιπτώσεις μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.



Τα δύο πλευρικά όρια της f στο x_0 είναι διαφορετικά. Επομένως το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει και η f δεν είναι συνεχής στο x_0.



Υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, αλλά $\ell \neq f(x_0)$.
Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο x_0.



Ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Επομένως το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός και δεν μπορεί να είναι ίσο με $f(x_0)$. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

3.1.2 Συνέχεια σε διάστημα

Ορισμός 3.2:

Μία συνάρτηση f λέγεται **συνεχής**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Ορισμός 3.3:

Μία συνάρτηση f λέγεται **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (a, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (a, β).

Ορισμός 3.4:

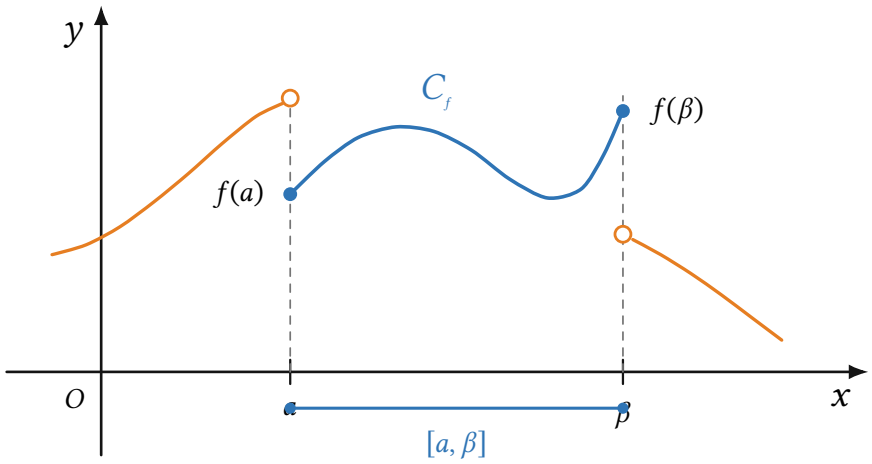
Μία συνάρτηση f λέγεται **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (a, β) και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί όταν εξετάζουμε αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα. Η συνέχεια στα άκρα του διαστήματος δεν ελέγχεται με τον ίδιο τρόπο όπως στα εσωτερικά του σημεία, αφού στα άκρα χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα πλευρικά όρια. Έτσι, μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, χωρίς να είναι συνεχής στα σημεία a και β με την έννοια της συνέχειας σε σημείο. Το παρακάτω παράδειγμα αναδεικνύει τη σημαντική αυτή διαφορά.

Παράδειγμα 3.1

Η συνάρτηση του παρακάτω σχήματος



είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, διότι:

- είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοικτού διαστήματος (a, β).
- ισχύει

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

Παρόλα αυτά, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στα σημεία a και β, αφού δεν ισχύουν οι ισότητες

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \beta} f(x) = f(\beta).$$

Από τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει ότι οι βασικές πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων διατηρούν τη συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει τα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 3.1:

Έστω οι συναρτήσεις f και g, οι οποίες είναι συνεχείς στο x_0. Τότε είναι επίσης συνεχείς στο x_0 οι συναρτήσεις:

$$f+g \quad , \quad a\cdot f \quad , \quad f\cdot g \quad , \quad \frac{f}{g} \quad , \quad |f|$$

όπου $a \in \mathbb{R}$, ενώ για τη συνάρτηση $\sqrt[\nu]{f}$ απαιτείται επιπλέον να ορίζεται σε διάστημα που περιέχει το x_0.

Ειδικότερα, η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0, εφόσον $g(x_0) \neq 0$.

Θεώρημα 3.2:

Έστω οι συναρτήσεις f και g. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Από το προηγούμενο θεώρημα και τις ιδιότητες των στοιχειωδών συναρτήσεων προκύπτει το ακόλουθο χρήσιμο συμπέρασμα.

Παρατήρηση 3.1:

Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους:

- οι πολυωνυμικές συναρτήσεις,
- οι ρητές συναρτήσεις (πηλίκα πολυωνύμων),
- οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις,
- οι εκθετικές συναρτήσεις $f(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$,
- οι λογαριθμικές συναρτήσεις $f(x) = \log_a x$, με $0 < a \neq 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ1 Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & , \quad x < 1 \\ 3 & , \quad x = 1 \\ \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Γ2 Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} & , \quad x < 0 \\ 1 + x^3 \cdot \eta\mu 2x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Γ3 Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} & , \quad x < 1 \\ \dfrac{\eta\mu(x-1) + (x-1)^3}{x - 1} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Γ4 Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Γ5 Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x + e| - |x - e|}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Γ6 Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x - x^2|} & , \quad x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 1}} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Γ7 Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{\eta\mu x} & , \quad x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$$

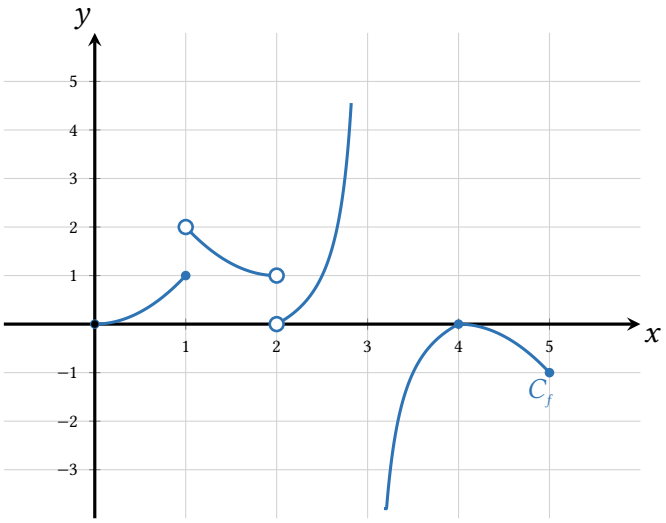
Γ8 Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)}{2x-\pi} & , \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & , \quad x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Γ9 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού

$$D_f=[0,2)\cup(2,3)\cup(3,5],$$

η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0,0)$ και $(4,0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1)=1$.



Με βάση το παραπάνω σχήμα:

α΄) Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β΄) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ΄) Να βρείτε τα παρακάτω όρια

i) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{f(x)}$

Γ10 Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο διάστημα $(0,2)$ και στο διάστημα $[0,2]$ τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x & , \quad x<2 \\ 4+2x & , \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Γ11 Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(a)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{x+1}+2^{x+2}}{a^{x+2}+2^{x+1}} \quad , \quad a>0$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f και να την εξετάσετε ως προς τη συνέχεια.

Γ12 Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x+\eta\mu x} & , \quad x\neq 0 \\ a & , \quad x=0 \end{cases}$$

Γ13 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f(x)=\begin{cases} 2\eta\mu x+1 & , \quad x\leq -\dfrac{\pi}{2} \\ a\eta\mu x+b & , \quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x+2 & , \quad x\geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Γ14 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f(x)=\begin{cases} 3ae^{x+1}+x & , \quad x\leq -1 \\ 2x^2-ax+3b & , \quad -1<x<0 \\ b\eta\mu x+a\sigma\upsilon\nu x+1 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Γ15 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|+x^2-4x+3}{x-1} & , \quad x<1 \\ x^2+2x+a+b & , \quad 1\leq x<2 \\ -2ax+3b & , \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Γ16 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+(b-a)x-b}{x-1} & , \quad x<1\\ 2 & , \quad x=1\\ \dfrac{bx\sqrt{x}-bx-a\sqrt{x}+a}{x-1} & , \quad x>1\end{cases}$$

Γ17 Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2-2ax+x^2} & , \quad x\leq 1\\ a+\dfrac{x}{2} & , \quad x>1\end{cases}$$

Γ18 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-(a^3+2)x+4 & , \quad x\leq 1\\ 3x^3-(a^2+b)x+a & , \quad x>1\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $a,b\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2,12)$.

Γ19 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+a\eta\mu x}{x-x^2} & , \quad x<0\\ b & , \quad x=0\\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x & , \quad x>0\end{cases}$$

α΄) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b.

β΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

γ΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Γ20 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{2x+5}-3} & , \quad -\dfrac{5}{2}\leq x<2\\ ax^2+(b-1)x & , \quad x\geq 2\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $a \in \mathbb{R}^*$ και $b \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και επιπλέον οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = (a+1)x^2 + ax + 3b \qquad \text{και} \qquad h(x) = x^2 - 2bx + b$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Γ21 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x + a}{x - 1} & , \quad x < 1 \\ bx + 2a - 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Γ22 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί a και b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} b + \dfrac{2ax^2 - 2a\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ b\sqrt{8 + x} + 4ax + 3 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Γ23 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + ax + 3b}{x - 3} & , \quad x < 2 \\ 7 & , \quad x = 2 \\ \dfrac{x^2 + bx - 3a}{x - 1} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Γ24 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x + b}{x - 2} & , \quad x < 2 \\ b - a & , \quad x = 2 \\ \dfrac{4x^2 + ax - b}{x - 2} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Γ25 Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a + b \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Γ26 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1} \quad , \quad x \neq -1, 1$$

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι ορισμένη και συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε το $f(1)$.

Γ27 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$xf(x) = 2x + \eta\mu 2x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να βρείτε το $f(0)$.

Γ28 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$x^2 f(x) = \eta\mu 2x \cdot \eta\mu 5x \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Γ29 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$xf(x) - \eta\mu 3x \leq x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}^*$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Γ30 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$x^2 f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu^2 x$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f.

Γ31 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία ισχύει

$$xf(x) \geq \eta\mu 4x \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Γ32 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$-x^2 + \eta\mu x \leq xf(x) \leq x^2 + x$$

να βρείτε το $f(0)$.

Γ33 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία ισχύει

$$2x + \eta\mu x \leq xf(x) \leq 3x^2 + 2x + \eta\mu x \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Γ34 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία ισχύει

$$\left|x^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu x - 1\right| \leq \eta\mu^4 x \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Γ35 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία ισχύει

$$\frac{3x - \eta\mu 2x}{1 + x^2} \leq xf(x) \leq \frac{3x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}^*$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Γ36 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για την οποία ισχύει

$$xf(x) + |\eta\mu x| \leq |x| \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Γ37 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$|xf(x) - |x|| \leq x^2 \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Γ38 Έστω μία συνάρτηση g, η οποία είναι συνεχής στο x_0 και ισχύει $g(x_0) = 0$.
Έστω επίσης μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

Γ39 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) \leq 2f(x)g(x) + x^2 \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Αν η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Γ40 Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)f(x) + x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = 12$$

Να υπολογίσετε το $f(1)$.

Γ41 Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu^2 x - x^2 f(x) + 3x^2}{x\eta\mu x + x^3} = 2$$

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, 2)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

Γ42 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 2x}{x - 2} = 5$$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 2} \frac{xf(x) - 2x^2 + 3f(2) - 6x}{x^2 - 4}$$

Γ43 Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} = 2$$

α΄) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$.

β΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1}$$

Γ44 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο a.

Γ45 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ46 Έστω μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x, y > 0$$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$.

3.2 Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

3.2.1 Το Θεώρημα Bolzano

Θεώρημα 3.3:

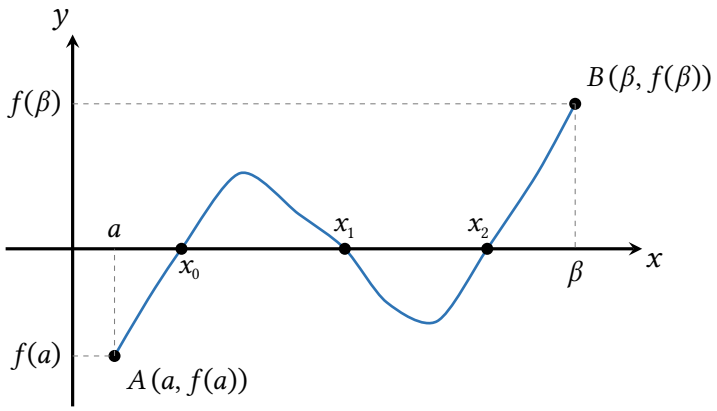
(Θεώρημα Bolzano)

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0$$



Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 που ανήκει στο (a, β).

Παρατήρηση 3.2:

Είναι φανερό και από το παραπάνω σχήμα ότι το σημείο x_0 του Θεωρήματος Bolzano δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό.

Παρατήρηση 3.3:

Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, β).

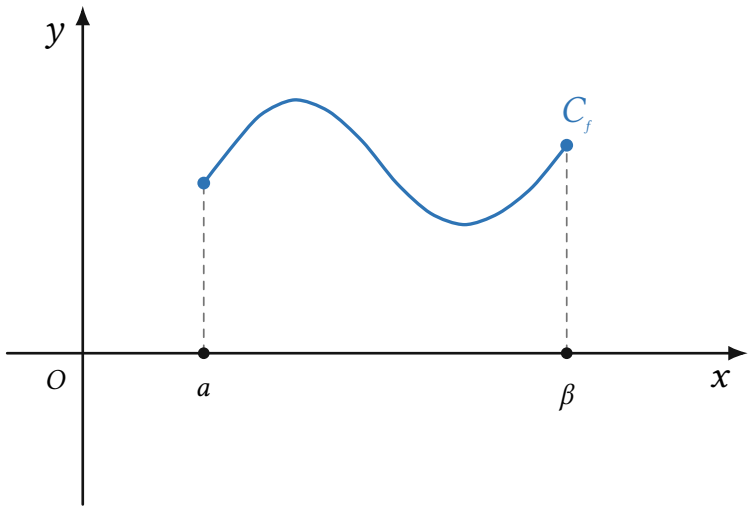
Συνέπεια του Θεωρήματος Bolzano είναι οι παρακάτω προτάσεις:

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι

$$f(x) \neq 0 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

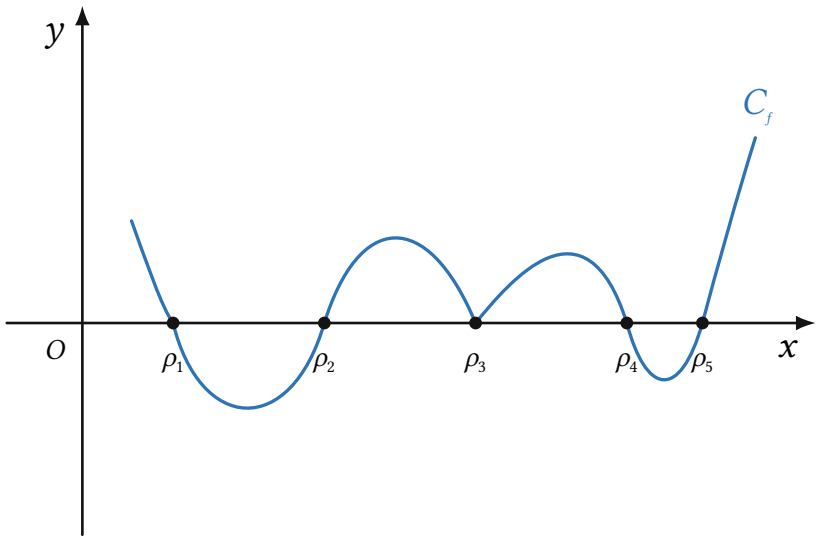
τότε η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ, δηλαδή ισχύει μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$, ή
- $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$.



Σχήμα 3.1: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$.

Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Σχήμα 3.2: Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζονται από δύο διαδοχικές ρίζες της.

3.2.2 Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Θεώρημα 3.4:

(Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.))

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε:

$$f(a) < \eta < f(\beta) \tag{1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \eta \quad , \quad x \in [a, \beta].$$

Έχουμε ότι:

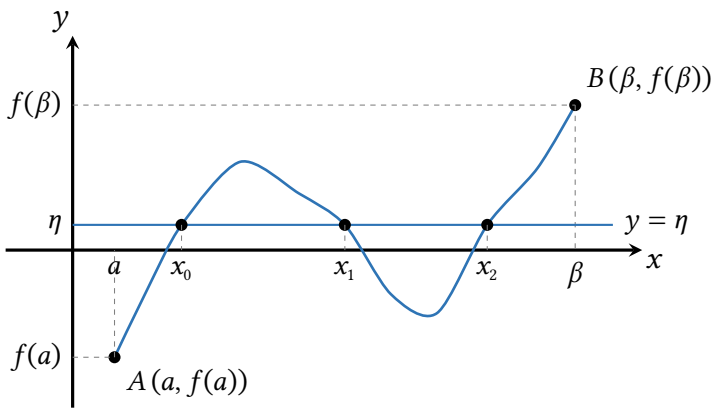
- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$
- $g(a) = f(a) - \eta \overset{(1)}{<} 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta \overset{(1)}{>} 0$

οπότε:

$$g(a) \cdot g(\beta) < 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta$$



Γεωμετρική ερμηνεία: Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία $y = \eta$, όπου το η βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, σε ένα τουλάχιστον σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο ανοικτό διάστημα (a, β).

Παρατήρηση 3.4:

Είναι φανερό και από το παραπάνω σχήμα ότι το x_0 του θεωρήματος δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό.

Παρατήρηση 3.5:

Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, η εξίσωση

$$f(x) = \eta$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, β).

Παρατήρηση 3.6:

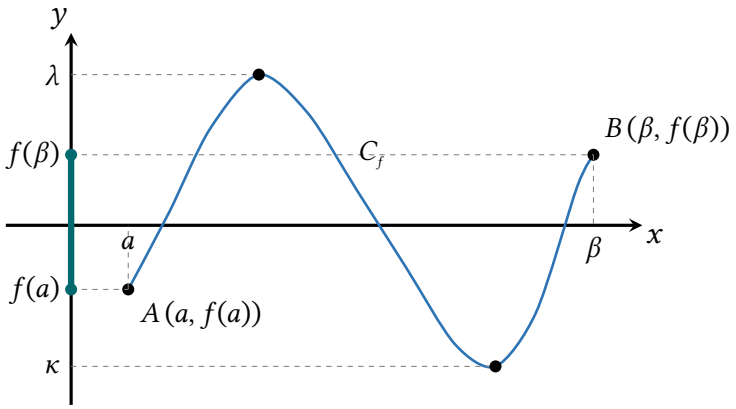
Το Θεώρημα Bolzano αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών. Πράγματι, αν $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ τότε το 0 βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$. Επομένως, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0$$

Παρατήρηση 3.7:

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$, αυτό δεν σημαίνει ότι η f παίρνει μόνο τιμές μεταξύ των αριθμών $f(a)$ και $f(\beta)$.

Στο σχήμα που ακολουθεί, η f παίρνει και τιμές έξω από το διάστημα που ορίζουν οι αριθμοί $f(a)$ και $f(\beta)$.



Σχήμα 3.3: Η f παίρνει τιμές και εκτός του διαστήματος $[f(a), f(\beta)]$.

Επομένως:

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$, τότε το διάστημα που ορίζουν οι τιμές $f(a)$ και $f(\beta)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f.

3.2.3 Το Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής

Θεώρημα 3.5:

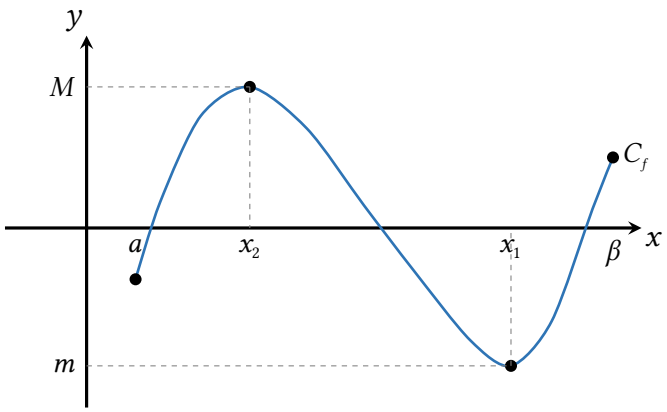
(Το Θεώρημα Μέγιστης–Ελάχιστης Τιμής (Θ.Μ.Ε.Τ.))

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια ώστε:

$$f(x_1) = m \qquad \text{και} \qquad f(x_2) = M$$

και ισχύει:

$$m \leq f(x) \leq M \quad , \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta].$$



Παρατήρηση 3.8:

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Δηλαδή, αν μία συνεχής συνάρτηση f, η οποία δεν είναι σταθερή, έχει πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, τότε το σύνολο τιμών $f(\Delta)$ είναι υποχρεωτικά διάστημα.

Μόνο στην περίπτωση που η f είναι σταθερή στο Δ, το σύνολο τιμών της είναι μονοσύνολο.

Μάλιστα, αν το Δ είναι κλειστό διάστημα, τότε και το $f(\Delta)$ είναι κλειστό διάστημα.

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε για το σύνολο τιμών της $f(\Delta)$ έχουμε:

Σύνολο τιμών συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης

Διάστημα Δ	**Μονοτονία f**	**Σύνολο τιμών $f(\Delta)$**
$[a, \beta]$	Γνησίως αύξουσα	$[f(a), f(\beta)]$
	Γνησίως φθίνουσα	$[f(\beta), f(a)]$
$(a, \beta]$	Γνησίως αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(\beta)\right]$
	Γνησίως φθίνουσα	$\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right)$
$[a, \beta)$	Γνησίως αύξουσα	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)\right)$
	Γνησίως φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x), f(a)\right]$
(a, β)	Γνησίως αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)\right)$
	Γνησίως φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ47 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2}\ln(8x + 1)$$

α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β΄) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$.

γ΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Γ48 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Γ49 Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in (0, 2)$ η εξίσωση

$$x^3 + ax^2 - 6x + a = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Γ50 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = x$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Γ51 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x + 2x \cdot \eta\mu x = 1 + \sigma\upsilon\nu 2x$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Γ52 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x(e^x + 3) = 2$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Γ53 Αν $0 < a < 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^{x-\ln x} = a + e - \ln x$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Γ54 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \eta\mu x \qquad \text{και} \qquad g(x) = e^{-x}$$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Γ55 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$f^5(x) + 3f^3(x) + 2f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (0, 1)$.

Γ56 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α΄) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$$

β΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

γ΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$$

δ΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) - \xi = 0$$

Γ57 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$3x + \eta\mu x - 2 = 0$$

έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Γ58 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln\left(x^2+1\right)+x-1=0$$

έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Γ59 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x^4+2}{x-1}+\frac{x^2+3}{x-2}=0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Γ60 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{e^x}{x+1}+\frac{x}{x-2}=1$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1,2)$.

Γ61 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln x+x=e^{-x}$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Γ62 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\eta\mu x}{x-1}=x+1$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

Γ63 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3-6x^2+3=0$$

έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

Γ64 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x-2=4\eta\mu x$$

έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-\pi,0)$.

Γ65 Αν $a\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3+3x^2=ax+3$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[-1,1]$.

Γ66 Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f:[0,4]\to[-5,0]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f^2(x)+5f(x)+16=x^2$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0,4]$.

Γ67 Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$0\le f(x)\le \ln 2$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$f(συν(\pi x_0))=\ln(x_0+1)$$

Γ68 Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f:[a,a+1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(a)+f(a+1)=0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)=0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[a,a+1]$.

Γ69 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3+3x-2=0$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

Γ70 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^{-x}-x+2=0$$

έχει ακριβώς μία ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(2,3)$.

Γ71 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2^x+4^x=1$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1,0)$.

Γ72 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$3\ln x + 2x = 0$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Γ73 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

όπου $b > 0$ και $a + b + 1 < 0$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Γ74 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

όπου

$$a > 0 \quad , \quad d < 0 \quad , \quad a + c < b + d$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς δύο αρνητικές και μία θετική ρίζα.

Γ75 Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(a) f(b) + ab < af(b) + bf(a)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = x_0$$

Γ76 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) + \xi = 1$$

Γ77 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$f^2(\xi) + f(\xi) = \xi^2 + \xi$$

Γ78 Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

με

$$a_0 \cdot a_n < 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

Γ79 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(a) + f(b) = a + b$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$(f(\xi) - b)(\xi - b) = (f(\xi) - a)(\xi - a)$$

Γ80 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$f^3(x) + 3x f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(x) > 0 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ81 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\left(e^{f(x)} - 1\right)(f(x) - 2) > 0$$

Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Γ82 Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $A(2,-1)$.
- Οι $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι

α΄) Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β΄) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.

γ΄)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$$

Γ83 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = e^{2x} + 2e^x + 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α΄) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β΄) Αν $f(0) = -2$, να βρείτε τον τύπο της f.

γ΄) Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$$

δ΄) Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$$

Γ84 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x)g(x) = e^x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α΄) Αν $f(1) < 0$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και g.

β΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(1)x^4 + 3x^3 + 1}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)\, x^3 + (\theta - 1)x - 1} \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

γ΄) Αν $g(-2) > -2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-2, 1)$.

Γ85 Δίνεται μία περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = -4$. Αν η εξίσωση

$$f(x) = x^2 + x - 3$$

είναι αδύνατη, τότε:

α΄) Να προσδιορίσετε το $f(0)$.

β΄) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

Γ86 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$f^2(x) + xf(x) = 1$$

α΄) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο.

β΄) Αν $f(0) > 0$, να βρείτε τη συνάρτηση f.

Γ87 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$(f(x) - x)(f(x) + x) = 3x^2 + 1$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f.

Γ88 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$f^2(x) + 2x = x^2 + 1$$

Να βρείτε όλες τις δυνατές συναρτήσεις f.

Γ89 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει

$$f(0) + f(1) + f(2) = 0$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

Γ90 Να μελετήσετε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα:

i) $f(x) = \eta\mu 2x - \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, \pi]$ ii) $f(x) = \ln(1 - \sigma\upsilon\nu x), \quad x \in (0, 2\pi)$

Γ91 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3}{27} + \sigma\upsilon\nu(\pi x) + 4 \quad , \quad x \in [-3, 3]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-3, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 3$$

Γ92 Αν $n \in \mathbb{N}$ και $a \in (1, 3)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^{2n+1} + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = a$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Γ93 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$$

α΄) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$.

Γ94 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1$$

α΄) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική ρίζα.

δ΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$$

Γ95 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$$

α΄) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

β΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 50$ έχει μοναδική λύση, η οποία ανήκει στο διάστημα $(-6, -5)$.

γ΄) Να λύσετε την ανίσωση

$$3x \cdot 2^x + 2^x < 1$$

Γ96 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x \quad , \quad x > 0$$

τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ακριβώς ένα σημείο.

Γ97 Έστω μία συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = \frac{2f(2) + 4f(4) + 6f(6)}{12}$$

έχει ακριβώς μία ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $(2, 6)$.

Γ98 Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : [1,5] \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(5,12)$.

α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$.

γ΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (2,4)$ τέτοιος ώστε

$$f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9}$$

Γ99 Έστω μία συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(1) + 4f(1) - 6f(5) + f^2(5) + 13 = 0$$

α΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β΄) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η εξίσωση

$$f(x) = \frac{3a^2 - 1}{a^2 + 1}$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1,5)$.

Γ100 Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : [1,3] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [1,3]$ τέτοιο ώστε

$$5f(x_0) = 2f(1) + 3f(3)$$

Γ101 Δίνεται μία περιττή και συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - x - 1}{\sqrt{x+3} - 2} \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = 1$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Γ102 Έστω μία συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(100) = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Γ103 Έστω $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - (\kappa + \lambda) x^2 - \kappa\lambda x + \kappa\lambda$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{(1-\kappa)(1-\lambda)}{2}$$

Γ104 Οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$|\xi - a_1| + |\xi - a_2| + \ldots + |\xi - a_{50}| = 25$$

Γ105 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [1, 2]$ τέτοιο ώστε

$$2x_0 f(x_0) = f(1) + 2f(2)$$

Γ106 Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1) + f(2) = f(3) + f(4)$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

Γ107 Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$. Αν υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί $0 < a < b < c$ με $b^2 \neq ac$, για τους οποίους ισχύει

$$f\left(\frac{a}{b}\right) \cdot f\left(\frac{b}{c}\right) \cdot f\left(\frac{c}{a}\right) = 1$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = x_0$$