

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ



Επιμέλεια :
Παλαιολόγου Παύλος
Μαθηματικός

Αγαπητοί μαθητές.

αυτό το βιβλίο αποτελεί ένα βοήθημα στην ύλη της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, που είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθήματα, καθώς περιέχει απαραίτητες γνώσεις για τις επόμενες τάξεις του Λυκείου.

Κάθε κεφάλαιο περιέχει :

- Βασική Θεωρία
- Μεθοδολογίες και σχόλια
- Λυμένα παραδείγματα
- Ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας
- Θέματα από την τράπεζα της Α΄ Λυκείου του υπουργείου

Καλή μελέτη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1	ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ.....	3
2.2	ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ	10
2.3	ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.....	17
2.4	ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.....	23

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1 ^ο Υ ΒΑΘΜΟΥ.....	31
3.2	Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^y = \alpha$	38
3.3	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2 ^ο Υ ΒΑΘΜΟΥ.....	39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.1	ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1 ^ο Υ ΒΑΘΜΟΥ.....	52
4.2	ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2 ^ο Υ ΒΑΘΜΟΥ.....	85
4.3	ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ.....	103

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : ΠΡΟΟΔΟΙ

5.1	ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.....	107
5.2	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ.....	110
5.3	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ.....	114

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

6.1	Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	128
6.2	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	132
6.3	Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x + \beta$	137

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο : ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

7.1	ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \alpha x^2$	158
7.2	ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \frac{\alpha}{x}$	160
7.3	ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$	163

2.1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

- **Ρητός** ονομάζεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β είναι ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Ρητοί αριθμοί: $Q = \left\{ \frac{\kappa}{\lambda} / \kappa, \lambda \in \mathbb{Z} \right\} \lambda \neq 0$.

Έτσι π.χ. οι αριθμοί $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{12}$ κτλ. είναι ρητοί. Όμως και όλοι οι ακέραιοι μπορούν να γραφούν στη μορφή κλάσματος π.χ. $3 = \frac{3}{1}$. Άρα και οι ακέραιοι ανήκουν στους ρητούς.

- **Άρρητοι** λέγονται οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν στη μορφή κλάσματος. Τέτοιοι αριθμοί είναι αυτοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία μη επαναλαμβανόμενα όπως οι ρίζες των μη τέλειων τετραγώνων π.χ. $\sqrt{2} = 1,414213562..$ ή όπως το $\pi = 3,14...$
 Άρρητοι αριθμοί: $Q' = \{..., -\sqrt{2}, ..., \pi, ..., \sqrt{5}, ...\}$

- **Πραγματικοί** είναι το σύνολο των αριθμών που αποτελείται από τους ρητούς και από τους άρρητους. Πραγματικοί αριθμοί: $R = Q \cup Q'$

- **Πράξεις και Ιδιότητες**

Αντιμεταθετική: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$

Προσεταιριστική: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

Ουδέτερο Στοιχείο: Πρόσθεση: $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, Πολλαπλασιασμός: $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$

Αντίθετο και Αντίστροφο Στοιχείο:

- $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$, οι αριθμοί α και $-\alpha$ λέγονται αντίθετοι.
- $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$, οι αριθμοί α και $\frac{1}{\alpha}$, με $\alpha \neq 0$ λέγονται αντίστροφοι.

Επιμεριστική: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

- **Οι Πράξεις της Αφαίρεσης και της Διαίρεσης**

Ονομάζουμε διαφορά του β από το α δηλαδή: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. (Αφαίρεση είναι η πρόσθεση του αντιθέτου)

Ονομάζουμε πηλίκο του α δια β δηλαδή $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, $\beta \neq 0$. (Διαίρεση είναι ο πολλαπλασιασμός του αντιστρόφου)

➤ **Πρόσθεση – Πολλαπλασιασμός Κατά Μέλη**

Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$

Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha\gamma = \beta\delta$

➤ **Νόμος Διαγραφής**

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

Αν $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha\gamma = \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta$

➤ **Ιδιότητα Γινομένου**

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ ή }, \beta = 0$$

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0, \text{ και }, \beta \neq 0$$

➤ **Δυνάμεις**

Αν α πραγματικός αριθμός και n φυσικός τότε:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n-\text{φορές}}, \alpha^1 = \alpha, \alpha^0 = 1 (\alpha \neq 0), \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}, \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

Αν n περιττός : $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ενώ αν n άρτιος : $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

$$\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}, \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}, (\alpha \cdot \beta)^\kappa = \alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa = \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}, (\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$$

➤ **Ταυτότητες**

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

➤ Ιδιότητα : $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ ή }, \beta = 0$

π.χ. $(6-3x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow 6-3x = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

ή $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

➤ Όταν έχουμε $\alpha\beta = \alpha\gamma$, χωρίς περιορισμό για το α , τότε :

$\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha(\beta - \gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = \gamma$

π.χ. $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

➤ $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ και }, \beta = 0$

➤ $(-\alpha - \beta)^2 = [-(\alpha + \beta)]^2 = (\alpha + \beta)^2$ δηλ. $(-\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$

➤ $(-\alpha + \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2 = \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2$

➤ $(-\alpha - \beta)^3 = [-(\alpha + \beta)]^3 = -(\alpha + \beta)^3$

➤ $(-\alpha + \beta)^3 = (\beta - \alpha)^3$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παραγοντοποίηση λέγεται η διαδικασία κατά την οποία μια παράσταση από άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων. Τα εργαλεία της παραγοντοποίησης είναι :

➤ **ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ**

1. **ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ** π.χ.1 $2y^2 - 5y = y(2y - 5)$,

π.χ.2 $x(x-3) - 2(3-x) = x(x-3) + 2(x-3) = (x-3)(x+2)$

2. **ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ** π.χ.2 $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x-4) + 5(x-4) = (x-4)(3x^2 + 5)$

➤ **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**

1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x-1)(4x+1)$

ii) $(3x-1)^2 - 81 = (3x-1)^2 - 9^2 = (3x-1-9)(3x-1+9) = (3x-10)(3x+8)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 52 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Δίνεται η παράσταση : $A = \left[(x^2 \cdot y^3)^{-2} \cdot (x \cdot y^3)^4 \right] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}} \right)^{-3}$

i. Να δείξετε ότι $A = x^9 \cdot y^9$

- ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 2010$ και $y = \frac{1}{2010}$

Λύση:

$$i. A = \left[(x^2 \cdot y^3)^{-2} \cdot (x \cdot y^3)^4 \right] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}} \right)^{-3} = (x^{-4} \cdot y^{-6} \cdot x^4 \cdot y^{12}) : \frac{x^{-9}}{y^3} = (x^{-4+4} \cdot y^{-6+12}) \cdot \frac{y^3}{x^{-9}} = x^0 \cdot y^6 \cdot y^3 \cdot \frac{1}{x^{-9}} = y^9 \cdot x^9 = x^9 \cdot y^9$$

- ii. Έχω $A = x^9 \cdot y^9 = (x \cdot y)^9$ αν $x = 2010$ και $y = \frac{1}{2010}$ τότε :

$$A = \left(2010 \cdot \frac{1}{2010} \right)^9 = 1^9 = 1$$

2. (Άσκηση 4 σελ. 52 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

- i. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$
- ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999} \right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999} \right)^2$

Λύση:

- i. Ένας τρόπος για να αποδείξω μια ισότητα είναι να ξεκινήσω από το ένα μέλος και με διαδοχικές ισότητες να καταλήξω στο άλλο :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 &= \\ = 2\alpha\beta + 2\alpha\beta &= 4\alpha\beta \end{aligned}$$

- ii. Από i. έδειξα ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$, άρα αν $\alpha = \frac{999}{1000}$ και $\beta = \frac{1000}{999}$ τότε :

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999} \right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999} \right)^2 = 4 \frac{999}{1000} \frac{1000}{999} = 4$$

3. (Άσκηση 6 σελ. 52 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών ακεραίων (του μικρότερου από τον μεγαλύτερο) ισούται με το άθροισμα τους.

Λύση: Έστω n ένας φυσικός ακέραιος, τότε ο $n+1$ είναι ο επομένως φυσικός ακέραιος. Για να δείξω ότι η διαφορά των τετραγώνων τους (του μικρότερου από τον μεγαλύτερο) ισούται με το άθροισμα τους αρκεί να δείξω ότι :

$$(n+1)^2 - n^2 = n + (n+1) \Leftrightarrow (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

Ξεκινώ από το πρώτο μέλος και έχω : $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ άρα ισχύει.

4. (Άσκηση 1 σελ. 53 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i. $\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha}$

ii. $\frac{(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1}$

Λύση :

- i. Για να απλοποιήσω ένα κλάσμα, θα πρέπει πρώτα να παραγοντοποιήσω αριθμητή και παρονομαστή :

$$\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - 1} = \alpha - 1$$

ii.
$$\frac{(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$$

5. (Άσκηση 2 σελ. 53 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i.
$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3}$$

ii.
$$\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1}$$

Λύση :

i.
$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^2(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^3} = \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^3} =$$

$$((\alpha - 1)(\alpha + 1))^2 \cdot \frac{1}{(\alpha + 1)^2} = (\alpha - 1)^2 \cdot (\alpha + 1)^2 \cdot \frac{1}{(\alpha + 1)^2} = (\alpha - 1)^2$$

ii.
$$\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)} = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6. Να υπολογίσετε την τιμή στις επόμενες παραστάσεις, αν οι x,y είναι αντίστροφοι :

i.
$$A = \frac{2^{15} x^5 (-3)^{16} y}{6^{14} x^4}$$

ii.
$$B = \left[\left(\frac{2^{15} x^5 (-3)^{14} y}{6^{10} (6x)^4} \right)^{-1} \right]^{-2}$$

iii.
$$\Gamma = \frac{[(x^2 y^3)^{-1} (xy^3)^2]^2}{(x^3 y)^{-3}}$$

7. Να αποδείξετε τις ταυτότητες που ακολουθούν :

i.
$$\alpha^2 - (\alpha - \beta)^2 = 2\alpha\beta - \beta^2$$

ii.
$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2 = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \quad (\alpha \neq 0)$$

iii.
$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$$

iv.
$$(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y)$$

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $x^2 = (x - 1)(x + 1) + 1$. Στη συνέχεια με τη βοήθεια της να υπολογίσετε τις δυνάμεις : α) 99^2 β) 999^2 γ) 1999^2

9. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται :

i. $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 3x}$

ii. $\frac{x^2 - x + 5x - 5}{x^2 - 1}$

iii. $\frac{x(x-4)+4}{(x-2)(x+1)}$

iv. $\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

v. $\frac{(x-2)(x-3) - (3-x)(x-7)}{x^2 - 9}$

vi. $\frac{(x-1)(x+1)^3 - x^4 + 1}{2x^3 - 2x}$

10. Αν $x, y \neq 0$, να εκτελέσετε τις πράξεις:

i. $\left(\frac{x}{y}\right)^5 \cdot x^{-3} \cdot y^8$

ii. $\left(\frac{x^3}{y^{-2}}\right)^4 \cdot \left(\frac{x^5}{y^{-3}}\right)^{-2}$

iii. $\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{y^2}{x^3}\right)^3$

iv. $\left(\frac{x^{-3}}{y^{-5}}\right)^{-3} : \left(\frac{x}{y^3}\right)^7$

v. $(x^6 \cdot y^7)^{-2} : (x^{-5} \cdot y^{-4})^3$

vi. $(x^5 : y^4)^3 : (x^4 : y^2)^4$

11. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων, αν $x=8$ και $y=2$:

$A = (x^4 y^{-1})^{-3} \cdot (x^3 y^{-2})^5 \cdot y^2$

$B = \frac{(x^{-2} y)^{-4}}{(xy)^3 \cdot (xy)^{-1}}$

12. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(x+2)^3 - 6(x+1)^2$

ii. $(2a-5)^2 - 4(a-2)(a+2)$

iii. $4(x-3)^2 - (2x+6)^2$

iv. $(1-x)^3 - x(x+2)(2-x) - 3(x+1)^2$

13. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $(2x-3)^2 - [2(x+1)]^2 = 5 - 20x$

ii. $(x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = [(x-y)(x+y)]^2$

iii. $(a+2\beta)^2 + (2\alpha-\beta)^2 = 5[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$

iv. $(x+2)^2 - 2(2-x)(2+x) = (2x)^2 - (x-2)^2$

v. $x(x+1)^2 - (2x)^2 = (x-1)^2 - (1-x)^3$

vi. $(\alpha-3)^3 - 9(1-\alpha) = \alpha^3 - 9(\alpha-2)^2$

vii. $(\omega+2)^3 - 6(\omega+1)^2 = \omega^3 + 2$

viii. $(3-x)^3 - (x-1)^2 = 18x^2 + 26 - x(x+5)^2$

14. Αν ισχύει $(\alpha+1)^2 - (\beta-1)^2 - (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = 6$ να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=3$

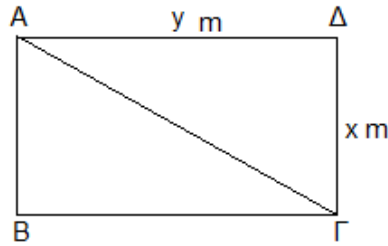
15. Αν ισχύει ότι $\alpha-\beta=2$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 - 3\alpha^2 = \beta^3 + 3\beta^2 - 4$

16. Να αποδείξετε ότι, αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε ισχύει :

$(\alpha + \beta)^2 + (\beta + \gamma)^2 + (\gamma + \alpha)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

17.

- i. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $x^2 + y^2 - (x - y)^2 = 2xy$
- ii. Στο παρακάτω ορθογώνιο οικόπεδο το πλάτος του x διαφέρει από το μήκος του y κατά 10m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του οικοπέδου.



ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.1 :

18.

ΘΕΜΑ 2

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

- β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ (Μονάδες 13)

19.

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$

- α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$. (Μονάδες 12)

- β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης;

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy} \quad (\text{Μονάδες } 13)$$

20.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{a^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{a}{\beta}$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

- β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{a^{22} \cdot (\beta^3)^8}{a^{-2} \cdot (a\beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ **Ορισμός της Διάταξης :** $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ και $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$

➤ **Κανόνες Προσήμων Διάταξης :**

i. $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$

ii. $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$

iii. $\alpha, \beta \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$

iv. $\alpha, \beta \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow \alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$

v. $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (το "=" ισχύει μόνο όταν $\alpha=0$)

➤ **Ιδιότητες των Ανισοτήτων**

i. Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$

ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

iii. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

iv. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

v. Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω :
 $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

vi. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

➤ **Διάταξη και Δυνάμεις**

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και n φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :

i. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$

ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$ (Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε :

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n > \beta^n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \alpha^n < \beta^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

➤ **Διαστήματα**

i. Κλειστό διάστημα : $\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta]$

ii. Ανοιχτό διάστημα : $\alpha < x < \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta)$

iii. Ανοιχτό δεξιά διάστημα : $\alpha \leq x < \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta)$

iv. Ανοιχτό αριστερά διάστημα : $\alpha < x \leq \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta]$

v. $x \leq \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha]$

vi. $x < \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha)$

vii. $x \geq \alpha \Leftrightarrow x \in [\alpha, +\infty)$

viii. $x > \alpha \Leftrightarrow x \in (\alpha, +\infty)$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

➤ $\alpha > \beta \Leftrightarrow -\alpha < -\beta$

➤ Δεν αντιστρέφουμε τα μέλη μιας ανισότητας, εκτός αν ξέρουμε το πρόσημο τους.

Ισχύει : Αν α, β ομόσημοι και $\alpha > \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

Αν α, β ετερόσημοι και $\alpha > \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

➤ Δεν υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη μιας ανισότητας, εκτός αν ξέρουμε ότι και τα δυο είναι θετικά οπότε η φορά παραμένει ίδια ή ότι και τα δυο είναι αρνητικά οπότε η φορά αλλάζει.

➤ Δεν μπορούμε να κάνουμε «χιαστή» σε ανισοτικές σχέσεις, εκτός αν ξέρουμε το πρόσημο των παρανομαστών οπότε και κάνουμε απαλοιφή.

➤ Πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό κατά μέλη γίνεται μόνο σε ανισότητες που έχουν την ίδια φορά. Δεν γίνεται ούτε αφαίρεση, ούτε διαίρεση κατά μέλη.

➤ $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ και } \beta = 0$

➤ Όπως είπαμε αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και n φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει : $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$. Αν όμως α, β είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί τότε για κάθε n φυσικό αριθμό ισχύει : $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^n = \beta^n$ (το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα).

Όμως ισχύει ότι : $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \alpha = \beta, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 59 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

i. $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$

ii. $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

Λύση :

i. $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 3 + 3^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 \geq 0$ που ισχύει.

ii. $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει.

2. (Άσκηση 1 σελ. 59 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση :

$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 1 + 1^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - \beta)^2 + \beta^2 \geq 0$ που ισχύει καθώς $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ και $\beta^2 \geq 0$ άρα και για το άθροισμα τους θα ισχύει ότι $(\alpha - \beta)^2 + \beta^2 \geq 0$.

Για την ισότητα : $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $(\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ και $\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$. Άρα η ισότητα ισχύει αν $\alpha = \beta = 0$

3. (Άσκηση 3 σελ. 59 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. Αν $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$

ii. Αν $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

Λύση :

i. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και $(y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow y+1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$

ii. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y+2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$

4. (Άσκηση 4 σελ. 60 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $4,5 < x < 4,6$ και $5,3 < y < 5,4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις :

i. $x+y$ ii. $x-y$ iii. $\frac{x}{y}$ iv. $x^2 + y^2$

Λύση :

i. $4,5 < x < 4,6$ (1) και $5,3 < y < 5,4$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω :

$4,5 + 5,3 < x + y < 4,6 + 5,4 \Leftrightarrow 9,8 < x + y < 10$

ii. Επειδή δεν γίνεται αφαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη, θα σχηματίσω το $-y$

πολλαπλασιάζοντας τη (2) με -1 οπότε έχω : $-5,3 > -y > -5,4 \Leftrightarrow -5,4 < y < -5,3$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (3) και έχω :

$4,5 - 5,4 < x - y < 4,6 - 5,3 \Leftrightarrow -0,9 < x - y < -0,7$

iii. Επειδή δεν γίνεται διαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη, θα σχηματίσω το $\frac{1}{y}$. Για να γίνει

αυτό αντιστρέφουμε τα μέλη της (2) που είναι θετικά οπότε έχω : $\frac{1}{5,3} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5,4} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{5,4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5,3}$ (4). Πολλαπλασιάζω κατά μέλη (1) και (4) και έχω :

$4,5 \cdot \frac{1}{5,4} < x \cdot \frac{1}{y} < 4,6 \cdot \frac{1}{5,3} \Leftrightarrow \frac{4,5}{5,4} < \frac{x}{y} < \frac{4,6}{5,3}$

iv. Πρέπει να σχηματίσω τα x^2, y^2 . Τα μέλη των (1) και (2) είναι θετικά, άρα αν τα υψώσω στο τετράγωνο δεν αλλάζει η φορά τους. Δηλαδή :

$(4,5)^2 < x^2 < (4,6)^2 \Leftrightarrow 20,25 < x^2 < 21,16$ (5)

$(5,3)^2 < y^2 < (5,4)^2 \Leftrightarrow 28,09 < y^2 < 29,16$ (6) Προσθέτω κατά μέλη τις (5)&(6) και έχω

$20,25 + 28,09 < x^2 + y^2 < 21,16 + 29,16 \Leftrightarrow 48,34 < x^2 + y^2 < 50,32$

5. (Άσκηση 6 σελ. 60 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $0 \leq \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$.

Λύση:

Έχω ότι $0 \leq \alpha < \beta$ άρα $1+\alpha > 0$ ομοίως και $0 \leq \alpha < \beta$ άρα $1+\beta > 0$

Στην ανισότητα $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$ απαγορεύεται το χιαστή, μπορώ όμως να κάνω απαλοιφή

παρανομαστών αφού γνωρίζω ότι το ΕΚΠ των παρανομαστών $(1+\alpha)(1+\beta) > 0$. Έχω :

$$(1+\alpha)(1+\beta)\frac{\alpha}{1+\alpha} < (1+\alpha)(1+\beta)\frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow (1+\beta)\alpha < (1+\alpha)\beta \Leftrightarrow \alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

που ισχύει από το δεδομένο $0 \leq \alpha < \beta$.

6. (Άσκηση 2 σελ. 60 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\alpha > 1 > \beta$, να δείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$.

Λύση:

$$\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta - 1 - \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha - \alpha\beta + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha(1-\beta) + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha(\beta-1) + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow (\beta-1)(-\alpha+1) > 0 \Leftrightarrow (\beta-1)(1-\alpha) > 0 \quad (1). \text{ Αρκεί να δείξω ότι}$$

ισχύει η σχέση (1). Από τη σχέση $\alpha > 1 > \beta$ έχω ότι :

$$1 > \beta \Leftrightarrow 0 > \beta - 1 \Leftrightarrow \beta - 1 < 0. \text{ Επίσης :}$$

$$\alpha > 1 \Leftrightarrow 0 > 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0. \text{ Άρα } (\beta-1)(1-\alpha) > 0$$

7. (Άσκηση 4 σελ. 60 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι : i. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ ii. $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

Λύση:

$$\text{i. } \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{ii. } \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Αν x,y είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι :

$$\text{i. } x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\text{ii. } x^2 + 4y^2 \geq -4xy$$

$$\text{iii. } (x+y)^2 \geq 4xy$$

9. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β να αποδείξετε ότι :

$$\text{i. } \alpha^2 + \alpha\beta \geq \beta(3\alpha - \beta)$$

$$\text{ii. } (1+\alpha^2)(1+\beta^2) \geq 4\alpha\beta$$

$$\text{iii. } (\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 4) \geq 4(\alpha + \beta)^2$$

10. Αν $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι :

- i. $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \geq 2$ ii. $\frac{1}{\alpha^4} + 1 \geq \frac{2}{\alpha^2}$
11. Να αποδείξετε ότι :
- i. αν $x > 4$, τότε $5(x-1) > 15$
- ii. αν $\alpha > 3$ και $\beta > 1$, τότε $\alpha\beta + 3 > \alpha + 3\beta$
- iii. αν $\kappa \geq 4$ και $\lambda \leq 3$, τότε $\kappa(\lambda-3) \leq 4\lambda - 12$
12. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha + \beta = 6$, τότε :
- i. $\alpha\beta \leq 9$ ii. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 18$
13. Αν οι αριθμοί x, y είναι ομοσημοί με $x < y$, να αποδείξετε ότι : $x - y < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.
14. Αν ισχύει : $x < y < z$, να αποδείξετε ότι : α) $x < \frac{3x+4y}{7} < y$ β) $x < \frac{x+y+z}{3} < z$
15. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει:
- i. $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha - \beta) + 2 = 0$ ii. $\alpha^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\beta - 2\alpha)$
- iii. $\alpha^2 + \beta^2 = 4(\beta - 1)$ iv. $(\alpha + 5)^2 + (\beta - 2)^2 = 4(\alpha + \beta + 1)$
16. Αν $\alpha > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:
- i. $\alpha^2\beta - \alpha^3$ και $\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta$ ii. $(\alpha + 1)^3$ και $1 + 3\alpha + 3\alpha^2$
17. Να αποδείξετε ότι: i. $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ ii. $2\alpha^2 - 10\alpha + 25 > 0$
18. Αν ισχύει $1 < \alpha < 2$ και $-3 < \beta < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις: i. $4\alpha - 3\beta$ ii. $\alpha^2 + \beta^2$ iii. $\alpha\beta - 2$
19. Αν $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$, να αποδείξετε ότι :
- i. $12 < 3x + 2y < 19$
- ii. $-8 < -x - y < -5$
- iii. $0 < x - y + 3 < 3$
- iv. $\frac{2}{5} < \frac{x}{y} < 1$
20. Αν $1 < \alpha < 3$ και $2 < \beta < 7$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών είναι οι παραστάσεις :
- i. $A = 2\alpha + 5\beta$
- ii. $B = -\alpha + 4\beta - 3$
- iii. $\frac{A}{B}$
21. α) Να αποδειχθεί ότι: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$
- β) Ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαστάσεις είναι x και y , έχει περίμετρο 20m.
- i. Να εκφραστεί το y με τη βοήθεια του x .

- ii. Να εκφραστεί το εμβαδόν E του ορθογωνίου με τη βοήθεια του x , χρησιμοποιώντας τη σχέση του ερωτήματος (α).
 iii. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν E είναι μικρότερο ή ίσο των 25m^2 .

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.2 :

22.

ΘΕΜΑ 2

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha} \quad (\text{Μονάδες 12})$$

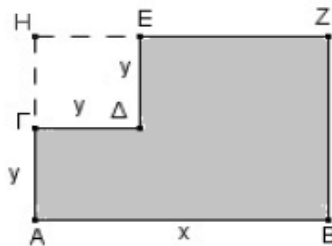
23.

ΘΕΜΑ 2

Από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma\Delta E\text{H}$ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZBA\Gamma\Delta$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = 2x + 4y$$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

24.

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει:

$$4 \leq x \leq 7 \text{ και } 2 \leq y \leq 3 \text{ τότε:}$$

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

25.

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \quad \text{και} \quad -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

26.

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

27.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

28.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $L = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq L$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=L$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ **Ορισμός Απόλυτης Τιμής :** $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$

➤ **Συνέπειες του Ορισμού :**

1. $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$

2. $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$

3. $|\alpha|^2 = \alpha^2$

4. Για κάθε $\theta > 0$ ισχύει : $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

π.χ.1 $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

π.χ.2 $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x-1=3$ ή $2x-1=-3 \Leftrightarrow$

$$2x=4 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$$

5. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

π.χ.1 $|x+3| = 3|x-2| \Leftrightarrow x+3 = 3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = 3x-6 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

$$\text{ή } x+3 = -3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = -3x+6 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

➤ **Ιδιότητες Απολύτων Τιμών :**

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, π.χ. $|x^2 - 4| = |x^2 - 2^2| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| \cdot |x+2|$

2. $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, π.χ. $\left| \frac{x^2 - 4}{x+2} \right| = \frac{|x^2 - 4|}{|x+2|} = \frac{|(x-2)(x+2)|}{|x+2|} = \frac{|x-2| \cdot |x+2|}{|x+2|} = |x-2|$

3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

➤ **Απόσταση Δυο Αριθμών :**

Ισχύει : $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$,

π.χ1. $d(-4, 2) = |-4 - 2| = |-6| = 6$

π.χ.2 $d(x, 3) = 5 \Leftrightarrow |x-3| = 5 \Leftrightarrow x-3=5$ ή $x-3=-5 \Leftrightarrow$

$$x=8 \text{ ή } x=-2$$

Επίσης :

1. $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow d(x, x_0) < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$

2. $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow d(x, x_0) > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho, \text{ ή } x > x_0 + \rho$

π.χ.1 $|x+3| < 4 \Leftrightarrow d(x, -3) < 4 \Leftrightarrow x \in (-3-4, -3+4) \Leftrightarrow x \in (-7, 1) \text{ ή } -7 < x < 1$

π.χ.2 $|x-4| > 2 \Leftrightarrow d(x, 4) > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 4-2) \cup (4+2, +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

$$\text{ή } x < 2, \text{ ή } x > 6$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Όταν σε μια άσκηση υπάρχουν απόλυτες τιμές και θέλω να απαλλαγώ από αυτές τότε :

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα θετική, τότε φεύγει η απόλυτη τιμή και η παράσταση που είναι μέσα της γράφεται όπως είναι.

Δηλ. **π.χ.1** $|x^2 + 3| = x^2 + 3$, επειδή $x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

π.χ.2 $|\sqrt{7} - 2| = \sqrt{7} - 2 =$, επειδή $\sqrt{7} - 2 > 0$

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα αρνητική, τότε η απόλυτη τιμή γίνεται παρένθεση και βγαίνει ένα μείων (-) απέξω. Δηλ.

π.χ.1 $|-x^2 - 3| = -(-x^2 - 3) = x^2 + 3$, επειδή $-x^2 - 3 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

π.χ.2 $|\sqrt{8} - 3| = -(\sqrt{8} - 3) = -\sqrt{8} + 3$, επειδή $\sqrt{8} - 3 < 0$.

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις με βάση τον ορισμό.

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x), & \text{αν } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{αν } A(x) < 0 \end{cases}$$

$$\text{Δηλ } |x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x+3 \geq 0 \\ -(x+3), & \text{αν } x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \geq -3 \\ -x-3, & \text{αν } x < -3 \end{cases}$$

Το ίδιο μπορεί να γίνει με πινακάκι και περιπτώσεις : Μηδενίζω την παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή, βρίσκω τη ρίζα ή τις ρίζες της και κάνω πινακάκι. Από το πινακάκι διακρίνω τις αντίστοιχες περιπτώσεις και βγάζω το πρόσημο της παράστασης στο διάστημα που θέλω. Δηλ. $|x+3|$, το $x+3$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα, $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
x+3	-	0	+

- Αν $x \geq -3$ ή $x \in [-3, +\infty)$ τότε $|x+3| = x+3$ (αφού $x+3 \geq 0$ για κάθε $x \in [-3, +\infty)$)
- Αν $x < -3$ ή $x \in (-\infty, -3)$ τότε $|x+3| = -(x+3) = -x-3$ (αφού $x+3 < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -3)$)

➤ $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$

➤ $|\alpha^n| = |\alpha|^n$

➤ $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 66 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

- i. $|\pi - 3|$
- ii. $|\pi - 4|$
- iii. $|3 - \pi| + |4 - \pi|$
- iv. $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$

Λύση :

- i. Επειδή $\pi - 3 > 0$, τότε $|\pi - 3| = \pi - 3$
- ii. Επειδή $\pi - 4 < 0$, τότε $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = -\pi + 4 = 4 - \pi$
- iii. Επειδή $3 - \pi < 0$ και $4 - \pi > 0$, τότε $|3 - \pi| + |4 - \pi| = -(3 - \pi) + 4 - \pi = -3 + \pi + 4 - \pi = 1$
- iv. Επειδή $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ και $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, τότε
 $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 0$

2. (Άσκηση 2 σελ. 66 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $3 < x < 4$ να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $|x - 3| + |x - 4|$

Λύση :

Επειδή $3 < x < 4$, τότε : $x - 3 > 0$ και $x - 4 < 0$

Οπότε : $|x - 3| + |x - 4| = x - 3 - (x - 4) = x - 3 - x + 4 = 1$

3. (Άσκηση 3 σελ. 66 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $|x - 3| - |4 - x|$ όταν :

- i. $x < 3$
- ii. $x > 4$

Λύση :

i. Επειδή $x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0$, επίσης $x < 3$ άρα και $x < 4 \Leftrightarrow 0 < 4 - x \Leftrightarrow 4 - x > 0$

Οπότε : $|x - 3| - |4 - x| = -(x - 3) - (4 - x) = -x + 3 - 4 + x = -1$

ii. Επειδή $x > 4 \Leftrightarrow 0 > 4 - x \Leftrightarrow 4 - x < 0$, επίσης $x > 4$ άρα και $x > 3 \Leftrightarrow x - 3 > 0$

Οπότε : $|x - 3| - |4 - x| = x - 3 + (4 - x) = x - 3 + 4 - x = 1$

4. (Άσκηση 4 σελ. 67 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left| \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} \right|$

Λύση :

Έχω : $\left| \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} \right| = \frac{|\alpha - \beta|}{|\beta - \alpha|} = \frac{|\alpha - \beta|}{|-(\alpha - \beta)|} = \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha - \beta|} = 1$

5. (Άσκηση 2 σελ. 68 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\alpha > \beta$ να δείξετε ότι

$$i. \quad \alpha = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$$

$$ii. \quad \beta = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$$

Λύση :

i. Επειδή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

$$\text{Οπότε : } \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

ii. Επειδή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

$$\text{Οπότε : } \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$i. \quad A = |\sqrt{6} + 3| + |\sqrt{5} - 3| - |1 - \sqrt{6}| + |2 - \sqrt{5}|$$

$$ii. \quad B = |1 - \sqrt{2}| - |5 + \sqrt{2}| + |-x^2 - 2| - |x^2 + 4|, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$iii. \quad \Gamma = |5 - \pi| + |\sqrt{8} + \pi| - |-\sqrt{8} - 3|$$

7. Αν $\alpha < 2 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i. \quad A = |\alpha - 2| - |2 - \beta| \quad ii. \quad B = |\alpha - 2| + |\beta - 2| \quad iii. \quad A = |\beta - \alpha| - 2|\alpha - \beta|$$

8. Αν $x < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις : $A = |x - 3| - 2|x - 4| + |x - 5|$ και

$$B = 5|3 - x| + |2x - 7|$$

9. Αν $0 < x < 2$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις : $A = |x + 1| + |x + 2| + 2|x - 2|$ και

$$B = |x - 2| + |2x - 5| + |3x|$$

10. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $A = |x + 2| + |x - 2|$ όταν :

$$i. \quad x < -2 \quad ii. \quad -2 \leq x < 2 \quad iii. \quad x > 2$$

11. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

$$i. \quad A = |x - 3| \quad ii. \quad B = |x + 2| + x \quad iii. \quad \Gamma = 2x - |x - 1|$$

$$iv. \quad \Delta = x - |4 - x| \quad v. \quad E = x + 1 - |2x - 6| \quad vi. \quad Z = 3 - |2 - x|$$

12. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$i. \quad A = \frac{x^4 + 2|x^5|}{2|x| + 1} \quad ii. \quad B = \frac{x^2 + 2|x|}{|x| + 2} \quad iii. \quad \Gamma = \frac{|x|^3 + 3x^2}{2|x| + 6} \quad iv. \quad \Delta = \frac{x^2 + 4|x| + 4}{|x| + 2}$$

$$v. \quad E = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1} \quad vi. \quad Z = \frac{|x - 1|}{|1 - x|} + \frac{|2x + 2|}{|-x - 1|} + \frac{|x^2 - 1|}{|1 - x^2|}, \quad x \neq -1 \text{ και } x \neq 1$$

13. Να αποδείξετε ότι:

$$i. \quad |\alpha + 1|^2 - 4\alpha = |\alpha - 1|^2$$

$$ii. \quad (|a| - |\beta|)^2 + 2|\alpha\beta| = \alpha^2 + \beta^2$$

$$iii. \quad |\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \quad iv. \quad \alpha^2 - (|\alpha| - |\beta|)(|\alpha| + |\beta|) = \beta^2$$

14. Αν $\alpha < 1 < \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $K = d(1, \alpha) + d(1, \beta) - d(\alpha, \beta)$

15. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x < 3$		
$ x \leq 4$		
$ x > 2$		
$ x \geq 5$		
		$x \in [-1, 1]$
		$x \in (-6, 6)$
		$x \in (-\infty, -8) \cup [8, +\infty)$
		$x \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$
	$d(x, 3) < 5$	
	$d(x, -4) \leq 7$	
	$d(x, -3) > 5$	
	$d(x, 1) \geq 3$	

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.3 :

16.

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$. (Μονάδες 10)

17.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| + |y - 3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

18.

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$$

(Μονάδες 15)

19.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

20.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4| + |x-14| = 18 \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

21.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

$$\text{i) } |x+2| \quad (\text{Μονάδες } 4)$$

$$\text{ii) } |x-7| \quad (\text{Μονάδες } 4)$$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2| + |x-7| \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ **Ορισμός Τετραγωνικής Ρίζας :** Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α . Δηλαδή : $x = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow x^2 = \alpha$, με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$. Η $\sqrt{\alpha}$, με $\alpha \geq 0$, παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

➤ **Ιδιότητες Τετραγωνικής Ρίζας :**

1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ ή $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

2. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε : $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ και $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\beta \neq 0$

3. Για κάθε πραγματικό αριθμό α είναι : $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ (Προσοχή : $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$)

➤ **Ορισμός ν-οστής Ρίζας :** Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στη ν, δίνει τον α . Δηλαδή : $x = \sqrt[n]{\alpha} \Leftrightarrow x^n = \alpha$, με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$. Η $\sqrt[n]{\alpha}$, με $\alpha \geq 0$, παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = \alpha$.

π.χ. $\sqrt[3]{27} = 3$ γιατί $3^3 = 27$. Η $\sqrt[3]{27} = 3$ είναι η μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^3 = 27$.

Επίσης : $\sqrt[n]{\alpha} = \alpha$, ενώ $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$

➤ **Ιδιότητες Ριζών :**

1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ ή $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$, αλλά και $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$

2. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$

3. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε : $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$ και $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\beta \neq 0$

4. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[n\mu]{\alpha}$, π.χ. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{7}} = \sqrt[6]{7}$

5. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $\sqrt[n]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[n\rho]{\alpha^\mu}$, π.χ.1 $\sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^4} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2}$

π.χ.2 $\sqrt[15]{8^5} = \sqrt[3 \cdot 5]{8^5} = \sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{8} = 2$

6. Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[n]{\alpha^\mu}$

π.χ.1 $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, π.χ.2 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

- Όταν κάτω από τη ρίζα υπάρχει αριθμός που είναι τέλειο τετράγωνο τότε εύκολα υπολογίζω το αποτέλεσμα. π.χ. $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{144} = 12$ κτλ. Όταν όμως ο αριθμός δεν είναι τέλειο τετράγωνο κοιτώ μήπως μπορώ να απλοποιήσω τη ρίζα γράφοντας τον αριθμό σαν γινόμενο δυο αριθμών εκ των οποίων ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο.

$$\text{π.χ.1 } \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{π.χ.2 } \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{π.χ.3 } \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{3}$$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει μια ρίζα, τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη ρίζα αυτή ώστε να προκύψει κλάσμα που στον παρανομαστή δεν έχει ρίζα.

$$\text{π.χ.1 } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{π.χ.2 } \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει παράσταση της μορφής $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha} \pm \beta$, $\alpha \pm \sqrt{\beta}$, τότε για να απαλλαγώ από τη ρίζα στον παρανομαστή πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρανομαστή.

$$\text{π.χ.1 } \frac{2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{2(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2)} = \frac{2\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5}^2 - 2^2} = \frac{2\sqrt{5} - 4}{5 - 4} = 2\sqrt{5} - 4$$

$$\text{π.χ.2 } \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{6})}{(\sqrt{5} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{5} + \sqrt{6}^2}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{\sqrt{30} + 6}{5 - 6} = -(\sqrt{30} + 6) = -\sqrt{30} - 6$$

$$\text{π.χ.3 } \frac{3}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{3 \cdot (2\sqrt{3} + 3)}{(2\sqrt{3} - 3) \cdot (2\sqrt{3} + 3)} = \frac{6\sqrt{3} + 9}{(2\sqrt{3})^2 - 9} = \frac{6\sqrt{3} + 9}{12 - 9} = \frac{3(2\sqrt{3} + 3)}{3} = 2\sqrt{3} + 3$$

- Απαραίτητη προϋπόθεση όταν έχουμε ρίζα είναι η υπόριζη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν.

$$\text{π.χ.1 } \text{η παράσταση } \sqrt{x-3} \text{ έχει νόημα μόνο όταν } x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$\text{π.χ.2 } \text{η παράσταση } \sqrt[3]{6-2x} \text{ έχει νόημα μόνο όταν } 6-2x \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq 2x \Leftrightarrow 3 \geq x \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$\text{π.χ.3 } \text{η παράσταση } \sqrt{\pi-4} \text{ δεν έχει νόημα, δηλαδή είναι λάθος, αφού } \pi-4 < 0$$

- Αν $x, y \geq 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία : $x \leq y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να υπολογίσετε τις ρίζες :

- i. $\sqrt{100}$ $\sqrt[3]{1000}$ $\sqrt[4]{10000}$ $\sqrt[5]{100000}$
 ii. $\sqrt{4}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[4]{16}$ $\sqrt[5]{32}$
 iii. $\sqrt{0,01}$ $\sqrt[3]{0,001}$ $\sqrt[4]{0,0001}$ $\sqrt[5]{0,00001}$

Λύση :

- i. $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$ $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$ $\sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = 10$ $\sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$
 ii. $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$ $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$
 iii. $\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$ $\sqrt[3]{0,001} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{1}{10}$
 $\sqrt[4]{0,0001} = \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{1}{10}$ $\sqrt[5]{0,00001} = \sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{100000}} = \frac{1}{10}$

2. (Άσκηση 2 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς τις ρίζες :

- i. $\sqrt{(\pi - 4)^2}$
 ii. $\sqrt{(-20)^2}$
 iii. $\sqrt{(x - 1)^2}$
 iv. $\sqrt{\frac{x^2}{4}}$

Λύση :

- i. $\sqrt{(\pi - 4)^2} = |\pi - 4| \stackrel{\pi - 4 < 0}{=} -(\pi - 4) = -\pi + 4 = 4 - \pi$
 ii. $\sqrt{(-20)^2} = |-20| = 20$
 iii. $\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, \alpha \nu \ x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), \alpha \nu \ x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1, \alpha \nu \ x \geq 1 \\ -x + 1, \alpha \nu \ x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x - 1, \alpha \nu \ x \geq 1 \\ 1 - x, \alpha \nu \ x < 1 \end{cases}$
 iv. $\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{4}} = \frac{|x|}{2}$

3. (Άσκηση 3 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι : $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = 1$

Λύση : Έχω $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| \stackrel{\substack{2 - \sqrt{5} < 0 \\ 3 - \sqrt{5} > 0}}{=} -(2 - \sqrt{5}) + 3 - \sqrt{5} = -2 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 1$

4. (Άσκηση 4 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι : $(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3})=-8$

Λύση: Πρώτα πρέπει να πάρω περιορισμούς, πρέπει :

$x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ (1) και $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ (2). Άρα από (1) και (2) έχω $x \geq 5$.

$$\begin{aligned} \text{Exw: } & (\sqrt{x-5} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3}) \stackrel{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=} \sqrt{x-5}^2 - \sqrt{x+3}^2 = x-5 - (x+3) = \\ & = x-5-x-3 = -8 \end{aligned}$$

5. (Άσκηση 5 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

i. $(\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32})=-14$

Λύση :

i. $\begin{aligned} \text{E}\chi\omega \left(\sqrt{8} - \sqrt{18} \right) \left(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32} \right) &= \left(\sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} \right) \left(\sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} \right) = \\ &= \left(\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \right) \left(\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \right) = \left(2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \right) \left(5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \right) = \\ &= \left(-\sqrt{2} \right) \left(7\sqrt{2} \right) = -7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -7\sqrt{2}^2 = -7 \cdot 2 = -14 \end{aligned}$

6. (Άσκηση 6 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

ii. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}} = 2$

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{ii. } \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y} &= \sqrt[3]{x \cdot y} \\ \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6 \end{aligned}$$

7. (Άσκηση 7 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

ii. $\sqrt[5]{2\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2}$

Λύση :

ii. $\sqrt[5]{2\sqrt{2^3}2} = \sqrt[5]{2\sqrt{3}2^3 \cdot 2} = \sqrt[5]{2^6 2^4} = \sqrt[5]{6^2 2^6 \cdot 2^4} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2}$

8. (Άσκηση 8 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

ii. $\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[18]{2^{13}}$

Λύση :

ii. $\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{8}{9}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{8}{9} + \frac{5}{6}} = 2^{\frac{16}{18} + \frac{15}{18}} = 2^{\frac{31}{18}} = 2^{\frac{18}{18} + \frac{13}{18}} = 2^{1 + \frac{13}{18}} = 2 \cdot 2^{\frac{13}{18}} = 2 \cdot \sqrt[18]{2^{13}}$

9. (Άσκηση 10 σελ. 75 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές :

iii. $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$

Λύση :

iii. $\text{Ex} \omega \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})}{(\sqrt{7} - \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^2}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^2}{7 - 6} = (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2 =$

$$\sqrt{7}^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 7 + 2\sqrt{42} + 6 = 13 + 2\sqrt{42}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\sqrt[7]{5^4} \cdot \sqrt[7]{5^3}$ ii. $\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[6]{3}$ iii. $\frac{\sqrt[5]{4^9}}{\sqrt[5]{4^4}}$ iv. $\sqrt[5]{7^{11}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{7^6}}$ v. $\frac{\sqrt[7]{5^8} \cdot \sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^5}}$ vi. $\frac{\sqrt[5]{3^6} \cdot \sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[5]{3^9}}$

11. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $A = (\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27})\sqrt{3}$ ii. $B = (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18})\sqrt{8}$
 iii. $\Gamma = (\sqrt{20} + \sqrt{45})(\sqrt{80} - \sqrt{5})$ iv. $\Delta = (\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54})\sqrt[3]{4}$

12. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$ ii. $(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})$
 iii. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$ iv. $2\sqrt{5} - (\sqrt{5} + 1)^2$

13. Να δείξετε ότι :

i. $A = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ii. $B = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}} = \sqrt[12]{3}$ iii. $\Gamma = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{3^5}$ iv. $\Delta = \sqrt[5]{5^2\sqrt{5\sqrt{5}}} = \sqrt[20]{5^{11}}$

14. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις :

i. $\sqrt{x+1}$ ii. $\sqrt[4]{-2x+4}$ iii. $\sqrt[7]{9-3x}$

15. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις.

i. $A = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$ ii. $B = \sqrt{2x-6} - \sqrt[3]{x-5}$ iii. $\Gamma = \frac{\sqrt[3]{3x+12}}{\sqrt[4]{7-x}}$
 iv. $\Delta = \sqrt{12-4x} + \frac{1}{\sqrt[4]{2x-14}}$

16. Αν ισχύει ότι: $x = 2 - \sqrt{3}$ και $y = 2 + \sqrt{3}$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $A = (y-x)^2$ ii. $B = x^2 + y^2$ iii. $\Gamma = xy$ iv. $\Delta = x^2 + 3xy + y^2$

17. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $A = \sqrt{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ii. $B = \sqrt{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{32}) \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}$
 iii. $\Gamma = \sqrt[3]{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2(7-2\sqrt{10})}$ iv. $\Delta = \sqrt[3]{\frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}-3} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}+3}}$

18. i. Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\sqrt{3}+2)^2$ και $(\sqrt{3}-2)^2$.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} \right) \sqrt{3}$

19. Αν ισχύει $-1 < x < 3$, να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

20. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x+4} - \sqrt{2-x})(\sqrt{x+4} + \sqrt{2-x})$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
- ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

21. Να δείξετε ότι : $(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-7})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-7}) = 9$

22. Να δείξετε ότι : $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2} + \sqrt{(5-\sqrt{10})^2} = 2$

23. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές: i. $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ii. $\frac{-6}{\sqrt{5}-4}$ iii. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}-3}$ iv. $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{243}}{\sqrt{48}+\sqrt{147}}$ v. $\frac{9\sqrt{20}}{2\sqrt{45}}$

24. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i. $A = \sqrt[4]{(\sqrt{2}-\sqrt{7})^4} + \sqrt[3]{(\pi-2\sqrt{2})^3} - \sqrt[5]{(\pi+\sqrt{7})^5} + \sqrt[6]{(1-3\sqrt{2})^6}$

ii. $B = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + 2\sqrt{(2-x)^4} - \sqrt[6]{(2x-4)^6} + \sqrt[8]{(\sqrt{3}-1)^8} - 3\sqrt[10]{(-2)^{10}}$

25. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

i. $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \geq 4\sqrt{\alpha\beta}$ ii. $\frac{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2}{2} \leq \alpha + \beta$

iii. $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \geq 2(\sqrt{\alpha\beta} - \beta)$ iv. $\sqrt{\frac{\alpha+4\beta}{2}} \geq \frac{\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta}}{2}$

26. Δίνεται ο αριθμός: $\alpha = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{12}$

i. Να βρείτε τον αριθμό α .

ii. Να βρείτε τον αριθμό $\beta = \sqrt{8} \cdot (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}) \cdot \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}$

iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = (\sqrt{6} + \beta\sqrt{\alpha} - 3)(1 + \sqrt{2})$

27. Να μετατρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

i. $\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$ ii. $\frac{20}{\sqrt[5]{6^3} \cdot \sqrt[4]{5}}$ iii. $\frac{4}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})}$

iv. $\frac{8}{\sqrt[3]{3} \cdot (3 - \sqrt{5})}$ v. $\frac{12}{\sqrt[6]{2^5} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{6})}$ vi. $\frac{6}{\sqrt[7]{3^4} \cdot (\sqrt{5} - 1)}$

28. Αν $\alpha \geq 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας ρίζας:

i. $A = \sqrt{\alpha^4 \cdot \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^5}}$

ii. $B = \sqrt[3]{\alpha \cdot \sqrt[5]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha^3}}$

iii. $\Gamma = \sqrt[7]{\alpha^4 \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^7}}$

iv. $\Delta = \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^4} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[5]{\alpha}}$

29. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, αν $d(x, 1) < 1$ ii. $\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{-x}} \cdot \frac{\sqrt{-x^2 - 2x}}{\sqrt{x + 2}}$, αν $d(x, -1) < 1$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.4 :

30.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 1})(\sqrt{x - 4} - \sqrt{x + 1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

31.

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

(Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

(Μονάδες 13)

32.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x - 4} + \sqrt{6 - x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$

(Μονάδες 12)

33.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$

(Μονάδες 13)

34.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x - 2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$

(Μονάδες 12)

35.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}, \quad 1, \quad \sqrt[3]{2} \quad (\text{Μονάδες 12})$$

36.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

37.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$. (Μονάδες 10)

38.

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B . (Μονάδες 10)

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

Κάθε εξίσωση που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή : $αχ+β=0$ ή $αχ=-β$ (1) λέγεται εξίσωση 1^{ου} βαθμού (ή πρωτοβάθμια εξίσωση), με άγνωστο το x , ενώ κάθε αριθμός που την επαληθεύει λέγεται ρίζα ή λύση της εξίσωσης. Οι αριθμοί $α,β$ λέγονται συντελεστές της εξίσωσης.

- Αν $α \neq 0$, η (1) έχει μόνο μια λύση (ρίζα), την $x = -\frac{β}{α}$.
- Αν $α=0$ και $β \neq 0$, η (1) είναι αδύνατη (δεν έχει λύση).
- Αν $α=0$ και $β=0$, η (1) είναι ταυτότητα ή αόριστη (αληθεύει για κάθε πραγματικό

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

21. (Άσκηση 1 σελ. 83 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

iii. $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42$

iv. $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$

Λύση :

iii. $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x + 3 = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x - 7x = -42 - 3 \Leftrightarrow -9x = -45 \Leftrightarrow$
 $-\frac{9x}{9} = -\frac{45}{9} \Leftrightarrow x = 5$

iv. Πρώτα από όλα θέλω να απαλλαγώ από τα κλάσματα. Βρίσκω ΕΚΠ(4,5,20) = 20 και στη συνέχεια πολ/ζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να κάνω απαλοιφή

παρανομαστών. $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{ΕΚΠ}(4,5,20)=20}$

$$20 \frac{1-4x}{5} - 20 \frac{x+1}{4} = 20 \frac{x-4}{20} + 20 \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$4(1-4x) - 5(x+1) = x-4+25 \Leftrightarrow 4-16x-5x-5 = x+21 \Leftrightarrow -16x-5x-x = 21-4+5 \Leftrightarrow$$

$$-22x = 22 \Leftrightarrow -\frac{22x}{-22} = \frac{22}{-22} \Leftrightarrow x = -1$$

22. (Άσκηση 2 σελ. 83 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

iii. $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4$

iv. $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3}$

Λύση :

iii. $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4 \Leftrightarrow 6x - 2 - 6x + 3 = 4 \Leftrightarrow 6x - 6x = 4 - 3 + 2 \Leftrightarrow 0x = 3$ Η εξίσωση είναι αδύνατη (δηλ. δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x , καμία λύση)

iv. $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 6x - 3 \frac{5-x}{3} = -3 \frac{5}{3} + 3 \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 6x - (5-x) = -5+7x \Leftrightarrow$

$$6x - 5 + x = -5 + 7x \Leftrightarrow 7x - 7x = -5 + 5 \Leftrightarrow 0x = 0$$
 Η εξίσωση είναι ταυτότητα (δηλ. αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , άπειρες λύσεις)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

23. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $5(-x+2)-4=6-5x$ ii. $\frac{2(x-1)}{3}-\frac{x+1}{2}=\frac{x-5}{6}$ iii. $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+3}{5}=x-2$

iv. $\frac{x^2}{3}-\frac{6x+1}{4}=\frac{x-2}{6}-2$

24. Δίνονται οι εξισώσεις: $3-\frac{x-4}{2}=\frac{3}{4}-2(x-1)$ (1) και $(2\mu-6)x-5=1-\mu(-4x-2)$ (2).

Να βρείτε τον αριθμό μ , ώστε οι εξισώσεις (1) και (2) να έχουν κοινή λύση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Σε μια 1^ο βάρθμια εξίσωση $ax + b = 0$, αν οι συντελεστές a, b είναι παράμετροι, τότε η εξίσωση λέγεται παραμετρική. Στις παραμετρικές εξισώσεις ο άγνωστος συνήθως συμβολίζεται με x ενώ η παράμετρος με λ ή μ ή κάποιο άλλο γράμμα. Έτσι όταν χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, κάθε όρος που περιέχει το x θεωρείται άγνωστος και μεταφέρεται στο 1^ο μέλος, ενώ κάθε όρος που περιέχει το λ (ή μ κτλ) θεωρείται γνωστός και μεταφέρεται στο 2^ο μέλος. Για να λύσουμε μια παραμετρική 1^ο βάρθμια εξίσωση :

Βήμα 1 : φέρνω την εξίσωση στη μορφή $ax = -b$

Βήμα 2 : βρίσκω τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες ισχύει : $a = 0$

Βήμα 3 : όταν $a \neq 0$ η εξίσωση $ax = -b$ έχει ακριβώς μια λύση τη $x = -\frac{b}{a}$

Βήμα 4 : για τις τιμές της παραμέτρου που ισχύει $a = 0$, αντικαθιστώ στην αρχική εξίσωση και προκύπτει είτε αδύνατη είτε ταυτότητα (αόριστη)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

25. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2 x - \lambda = x - 1$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση :

Βήμα 1 : $\lambda^2 x - \lambda = x - 1 \Leftrightarrow \lambda^2 x - x = \lambda - 1 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1$

Βήμα 2 : $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ ή

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Βήμα 3 : Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση :

$$(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 1} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda + 1}$$

Βήμα 4 :

- Αν $\lambda = 1$ τότε : $(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow \overset{\lambda=1}{(1^2 - 1)}x = 1 - 1 \Leftrightarrow 0x = 0$ είναι ταυτότητα
- Αν $\lambda = -1$ τότε : $(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow \overset{\lambda=-1}{((-1)^2 - 1)}x = -1 - 1 \Leftrightarrow 0x = -2$ είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

26. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2 x - \lambda = 4x - 2$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

27. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $(\lambda - 2)x = \lambda - 2$

ii. $(\lambda - 3)x = \lambda$

iii. $\lambda(\lambda - 4)x = \lambda - 4$

iv. $\lambda(\lambda + 3)x = \lambda^2 - \lambda$

28. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2(x - 4) - 4\lambda = 4(x - \lambda^2)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

29. Έστω η εξίσωση : $\lambda(\lambda - 5)x = 6(\lambda - 5)$ (1). Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1)

i. Έχει λύση το -2

ii. Έχει μοναδική λύση το -2

iii. Είναι αδύνατη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Οι εξισώσεις αυτές λύνονται με τη βοήθεια της πρότασης : «Ένα γινόμενο παραγόντων είναι μηδέν, όταν τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι μηδέν». Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής :

Βήμα 1 : μεταφέρω όλους τους όρους στο 1^ο μέλος, οπότε στο 2^ο μένει μηδέν

Βήμα 2 : παραγοντοποιώ το 1^ο μέλος, ώστε να σχηματιστεί γινόμενο παραγόντων ίσο με το μηδέν, οπότε εφαρμόζουμε την παραπάνω πρόταση.

ΘΥΜΗΣΟΥ : ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

➤ **ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ**

1. ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ π.χ.1 $2y^2 - 5y = y(2y - 5)$,

π.χ.2 $x(x - 3) - 2(3 - x) = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2)$

2. ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ π.χ.3 $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$

➤ **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**

1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x - 1)(4x + 1)$

ii) $(3x - 1)^2 - 81 = (3x - 1)^2 - 9^2 = (3x - 1 - 9)(3x - 1 + 9) = (3x - 10)(3x + 8)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

30. (Άσκηση 7 σελ. 84 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$

ii. $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0$

Λύση :

i. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \Leftrightarrow x=4 \\ \text{ή} \\ x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$$

ii. $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-2)^2 + (x-2)(4+x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)[(x-2) + (4+x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-2+4+x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ 2x+2=0 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$$

31. (Άσκηση 10 σελ. 84 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

ii. $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0$

Λύση :

i. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

ii. $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (2x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

32. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $(x+2)(x-3) = (3x+1)(x+2)$

iii. $(x+7)^2 + x^2 - 49 = 0$

v. $3x(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

vii. $x^3 - 4x^2 - 4(x-1)(x-4) = 0$

ix. $(x+2)^3 - 13(x+1) = 1$

xi. $(x^2 + 4)^2 - x[(x+3)^2 - (x+6)] = 16$

ii. $x(x^2 - 25) - x^3 + 5x^2 = 0$

iv. $(x-3)^2 - (3-x)(x+1) = 0$

vi. $(x^2 - 64)(x-2) = (x^2 - 4)(x-8)$

viii. $x(x+1)^2 - (x+5)^2 + 16 = 0$

x. $(x-1)^3 - (10x-7) = -3(x-2)(x+2)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρονομαστή,

Βήμα 1 : παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους,

Βήμα 2 : παίρνω περιορισμούς,

Βήμα 3 : πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρονομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει,

Βήμα 4 : ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

33. (Άσκηση 12 σελ. 84 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i.
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

ii.
$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$$

Λύση :

i.
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad \text{ΕΚΠ} = (x-1)(x+1)$$

Πρέπει : $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$

Έτσι έχω : $(x-1)(x+1) \frac{1}{x-1} + (x-1)(x+1) \frac{1}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{2}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1+x-1=2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$ απορρίπτεται. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii.
$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x} \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x(x+2)} \quad \text{ΕΚΠ} = x(x+2)$$

Πρέπει : $x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \& x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

Έτσι έχω : $x(x+2) \frac{3}{x+2} - x(x+2) \frac{2}{x} = x(x+2) \frac{x-4}{x(x+2)} \Leftrightarrow 3x - 2(x+2) = x-4 \Leftrightarrow$

$3x - 2x - 4 = x - 4 \Leftrightarrow 0x = 0$ ταυτότητα δηλ. η εξίσωση επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

34. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i.
$$\frac{1-2x}{x^2-4} = \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-2}$$
 ii.
$$3 \frac{x+7}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} = \frac{5}{x-3}$$
 iii.
$$\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2-1}$$

iv.
$$1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1+x-x^2}{x-x^2}$$
 v.
$$1 + \frac{2}{x} - 4 \frac{x+1}{4x+5} = \frac{4x^2+8x+10}{4x^2+5x}$$
 vi.
$$\frac{\frac{2x-3}{4} - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{x}{2} - 1}{3 - \frac{1}{3}}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΜΟΡΦΗ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Οι εξισώσεις αυτές έχουν ή μπορούν να πάρουν μια από τις επόμενες μορφές :

➤ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 $|f(x)| = \alpha$

- για $\alpha > 0$ δίνει $f(x) = \alpha$ ή $f(x) = -\alpha$
- για $\alpha = 0$ δίνει $f(x) = 0$ και
- για $\alpha < 0$ είναι αδύνατη

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|2x-1| = 3$

Λύση: $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x-1=3$ ή $2x-1=-3 \Leftrightarrow 2x=4$ ή $2x=-2 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$

➤ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

π.χ. Να λυθεί η εξίσωση : $|x+3| = 3|x-2|$

Λύση: $|x+3| = 3|x-2| \Leftrightarrow x+3 = 3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = 3x-6 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$
 ή $x+3 = -3(x-2) \Leftrightarrow x+3 = -3x+6 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

➤ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 $|f(x)| = g(x)$

- για $g(x) \geq 0$, έχω : $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$
- για $g(x) < 0$, η εξίσωση $|f(x)| = g(x)$ είναι αδύνατη

π.χ. Να λυθεί η εξίσωση : $|2x-1| = x-2$

Λύση: πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Έτσι για $x \geq 2$ έχω :

$$|2x-1| = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = x-2 \Leftrightarrow x = -1, \text{απορ.} \\ \text{ή} \\ 2x-1 = -(x-2) \Leftrightarrow 2x-1 = -x+2 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1, \text{απορ.} \end{cases}$$

➤ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 $|f(x)| = |g(x)| + h(x)$ Σε αυτή την περίπτωση βρίσκω τις ρίζες των $f(x) = 0$ και $g(x) = 0$, φτιάχνω πίνακάκι στο οποίο βάζω τις ρίζες των παραπάνω εξισώσεων και στη συνέχεια διακρίνω περιπτώσεις για τα αντίστοιχα διαστήματα που δημιουργούνται.

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|x+2| = 2|x-1| + 1$

Λύση: $|x+2| = 2|x-1| + 1$ (1) Έχω : $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ και $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \in (-\infty, -2)$ η (1) γίνεται : $-(x+2) = -2(x-1) + 1 \Leftrightarrow -x-2 = -2x+2+1 \Leftrightarrow x = 5$ αδύνατο γιατί $x \in (-\infty, -2)$
- Αν $x \in [-2, 1)$ η (1) γίνεται : $x+2 = -2(x-1) + 1 \Leftrightarrow x+2 = -2x+2+1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (δεκτή)
- Αν $x \in [1, +\infty)$ η (1) γίνεται : $x+2 = 2(x-1) + 1 \Leftrightarrow x+2 = 2x-2+1 \Leftrightarrow x = 3$ (δεκτή)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

35. (Άσκηση 14 σελ. 84 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $|2x - 3| = 5$

ii. $|2x - 4| = |x - 1|$

iii. $|x - 2| = 2x - 1$

Λύση :

i. $|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 5 \\ \text{ή} \\ 2x - 3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ \text{ή} \\ 2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{cases}$

ii. $|2x - 4| = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = x - 1 \\ \text{ή} \\ 2x - 4 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ή} \\ 2x - 4 = -x + 1 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$

iii. $|x - 2| = 2x - 1$, πρέπει $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$. Έτσι για $x \geq \frac{1}{2}$ έχω :

$|x - 2| = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2x - 1 \\ \text{ή} \\ x - 2 = -(2x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ \text{ή} \\ x - 2 = -2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \text{απορ.} \\ \text{ή} \\ 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1, \text{δεκτή} \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

36. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $|x - 3| = 2$

ii. $|2x - 5| = 3$

iii. $|3x - 1| = 2|x + 1|$

iv. $2|x - 2| = 3|x - 1|$

v. $\frac{|x| - 4}{5} = \frac{|x| - 3}{2} + \frac{4|x| - 1}{3}$

vi. $\left| \frac{x - 1}{x - 2} \right| = 2$

37. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\frac{1}{2} + \frac{|x| - 1}{3} = \frac{5|x| + 1}{6}$

ii. $|x - 2| = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

iii. $(x - 4)^2 + |x^2 - 16| = 0$

iv. $|3 - |x - 1|| = 2$

v. $(x - 4)^2 + |x^2 - 16| = 0$

vi. $|3x - 2| = 4 - x$

vii. $\left| 4 - \frac{x}{4} \right| = x - 1$

viii. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 2\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 4$

ix. $||x| + 2| = 2x$

x. $\frac{|2x - 1| - 3}{|x - 2| - 1} = 3$

xi. $\frac{|2x - 6| + 1}{3} - 5 = \frac{|9 - 3x| + 7}{6}$

xii. $5 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3x$

xiii. $|x + 2| + |x - 2| = |3x - 1|$

xiv. $\frac{|x - 1| + |3x|}{|x| - x} = 3$

xv. $\frac{|x - 1| + 1}{2} + \frac{2 - |x - 1|}{3} = 1 - \frac{3 - |x - 1|}{2}$

38. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{|x^2 - 9|}{|x^2 + 3x| + |3x + 9|}$

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A και να την απλοποιήσετε.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $A = 1$.

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^v = \alpha$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : ΔΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή $x^v = \alpha$ ($v \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$). Οι λύσεις της εξίσωσης είναι :

- 1) Αν $\alpha > 0$ και v – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{\alpha}$
- 2) Αν $\alpha > 0$ και v – άρτιος έχει ακριβώς δυο λύσεις $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[v]{\alpha}$
- 3) Αν $\alpha < 0$ και v – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{-\alpha}$
- 4) Αν $\alpha < 0$ και v – άρτιος δεν έχει λύσεις (αδύνατη)

π.χ.1) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = 3$

π.χ.2) Να λύσετε την εξίσωση : $x^4 - 256 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 256 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{256} \Leftrightarrow x = \pm 4$

π.χ.3) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 + 64 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = -4$

π.χ.4) Να λύσετε την εξίσωση : $x^6 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -5$ Αδύνατη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 87 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 125 = 0$

Λύση :

i. $x^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow x = 5$

2. (Άσκηση 2 σελ. 87 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

ii. $x^5 + 243 = 0$

Λύση :

ii. $x^5 + 243 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -243 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{243} \Leftrightarrow x = -3$

3. (Άσκηση 4 σελ. 87 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

iii. $x^5 + 16x = 0$

Λύση :

iii. $x^5 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -16$ αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 8 = 0$ ii. $x^4 - 16 = 0$ iii. $2x^7 - x = 0$ iv. $x^3 + 8 = 0$ v. $x^6 + 2 = 0$ vi. $16x^4 - 1 = 0$

vii. $8x^3 - 27 = 0$ viii. $x^5 - 2x = 0$ ix. $(5x + 2)^3 + 64 = 0$ x. $(x - 2)^{10} - 1024 = 0$

xi. $(x^5 - 32)(x^4 - 81) = 0$ xii. $(|3 - x| - 3)^3 = 8$ xiii. $(|3 - x| - 5)^4 = 16$

xiv. $(x - 1)^5 + 81 = 81x$ xv. $(x + 3)^5 - 16x = 48$ xvi. $x^8 - 27 = 27x^5 - x^3$

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (\alpha \neq 0) \quad \text{Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

- Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες : $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα : $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 3x + 2 = 0$

Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 + 10x + 25 = 0$

Είναι $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, έχει μια πραγματική διπλή ρίζα την

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

π.χ.3 Να λύσετε την εξίσωση : $(x-3)^2 + 4x = -3$

$$(x-3)^2 + 4x = -3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 12 = 0$$

Είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 4 - 48 = -44 < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Προσοχή : Όταν $\beta=0$ ή $\gamma=0$, τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μπορεί να λυθεί πιο εύκολα χωρίς τη χρήση της διακρινουσας. Πιο συγκεκριμένα :

- Αν $\beta=0$ τότε $\alpha x^2 + \gamma = 0$

π.χ.1 $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = \pm 4$

π.χ.2 $x^2 - 169 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 169 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{169} \Leftrightarrow x = \pm 13$

π.χ.3 $x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3 \cdot 4} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$

π.χ.4 $x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5$ Αδύνατη.

- Αν $\gamma=0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x = 0$

π.χ.1 $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x-5=0 \Leftrightarrow x = 5$

π.χ.2 $x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x+6=0 \Leftrightarrow x = -6$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Να λύσετε τις εξισώσεις : i. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ii. $x^2 - 6x + 9 = 0$ iii. $(x-2)^2 + 3x = 2$
 iv. $x^2 - 9x = 0$ v. $x^2 - 9 = 0$ vi. $2x^2 - 72 = 0$ vii. $\frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}x = 0$ viii. $\frac{(x-9)^2}{3} = 27$
 ix. $2x^2 + 8x - 10 = 0$ x. $9x^2 - 6x + 1 = 0$ xi. $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ xii. $-3x^2 + 12 = 0$
2. Να λύσετε τις εξισώσεις : i. $(2x-1)^2 - (3-x)^2 = (x+1)(2x-1)$
 ii. $(x-2)^2 - (x-1)(x+1) = (x+3)^2 - 6x$ iii. $(x+2)^3 - x(x-3)^2 = 15 - (3x+1)(1-3x)$
 iv. $(x-1)^3 - x(x-2)(x+2) = 1$ v. $(3x+2)^2 - (x-2)(3-x) = 6 - 4(x-1)^2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ VΙΕΤΑ

Σε περίπτωση που η εξίσωση : $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε για το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ ισχύει :

$$\triangleright S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = -\frac{b}{a}$$

$$\triangleright P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = \frac{c}{a}$$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta. Με τη βοήθεια των τύπων του Vieta η εξίσωση : $ax^2 + bx + c = 0$ μετασχηματίζεται :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. (Άσκηση 6 σελ. 94 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς :

- i. 2 και 3 ii. 1 και $\frac{1}{2}$ iii. $5 - 2\sqrt{6}$ και $5 + 2\sqrt{6}$

Λύση :

- i. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$
 με $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 2 + 3 \Leftrightarrow S = 5$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow P = 6$,
 άρα $x^2 - 5x + 6 = 0$
- ii. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$
 με $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow S = \frac{3}{2}$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = 1 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{1}{2}$,
 άρα $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$
- iii. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$
 με $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 5 - 2\sqrt{6} + 5 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow S = 10$ και
 $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = (5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6}) \Leftrightarrow P = 25 - (2\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow P = 25 - 24 \Leftrightarrow P = 1$,
 άρα $x^2 - 10x + 1 = 0$

4. (Άσκηση 7 σελ. 94 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

i. Άθροισμα 2 και γινόμενο -15

ii. Άθροισμα 9 και γινόμενο 10.

Λύση :

i. Έχω $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 2$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = -15$, άρα οι αριθμοί που ψάχνω θα είναι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$, έχω $\Delta = 4 + 60 = 64$

$$\text{και } x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

ii. Έχω $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 9$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = 10$, άρα οι αριθμοί που ψάχνω θα είναι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 10 = 0$, έχω

$$\Delta = 81 - 40 = 41 \text{ και } x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{41}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{9 + \sqrt{41}}{2} \\ x_2 = \frac{9 - \sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς :

i. -5 και 2 ii. 4 και $\frac{1}{4}$ iii. $1 - \sqrt{7}$ και $1 + \sqrt{7}$ iv. $-\sqrt{2} - \sqrt{5}$ και $-\sqrt{2} + \sqrt{5}$

6. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

i. Άθροισμα 2 και γινόμενο -1

ii. Άθροισμα $\frac{5}{6}$ και γινόμενο $\frac{1}{6}$

iii. Άθροισμα $-\frac{1}{2}$ και γινόμενο $-\frac{1}{2}$

7. Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων, χωρίς να υπολογίσετε τη διακρίνουσα τους.

i. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ii. $x^2 - 8x + 15 = 0$ iii. $x^2 + x - 12 = 0$ iv. $x^2 + x - 2 = 0$

8. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i. $x_1 + x_2$ ii. $x_1 x_2$ iii. $x_1^2 + x_2^2$ iv. $x_1^3 + x_2^3$ v. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ vi. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

9. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

i. $x_1 + 2$ και $x_2 + 2$ ii. $2x_1 - 3$ και $2x_2 - 3$ iii. x_1^2 και x_2^2 iv. x_1^3 και x_2^3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

➤ ΜΟΡΦΗ 1: $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

Επειδή : $x^2 = |x|^2$ τότε : $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$ και έπειτα θέτω $|x| = \omega \geq 0$, οπότε η αρχική εξίσωση γίνεται $\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 + 2|x| - 35 = 0$

Λύση: Έχω $x^2 + 2|x| - 35 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 35 = 0$. Θέτω $|x| = \omega \geq 0$ άρα η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + 2\omega - 35 = 0, \Delta = 4 + 140 = 144$,

$$\omega_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} \omega = 5, \text{δεκτή} \\ \text{ή} \\ \omega = -7, \text{απορ.} \end{cases}$$

- Για $\omega = 5 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$
- Για $\omega = -7 \Leftrightarrow |x| = -7$ Αδύνατη.

➤ ΜΟΡΦΗ 2: $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΗ)

Έχουν τη μορφή $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ και λύνονται με αντικατάσταση :

$$x^2 = \omega \geq 0$$

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση : $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

Λύση: Θέτω $x^2 = \omega \geq 0$ άρα η εξίσωση γίνεται $2\omega^2 - 7\omega - 4 = 0$. Είναι

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81 > 0, \omega_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} \omega = 4, \text{δεκτή} \\ \text{ή} \\ \omega = -\frac{1}{2}, \text{απορ.} \end{cases}$$

- Για $\omega = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$
- Για $\omega = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$ Αδύνατη.

➤ ΜΟΡΦΗ 3: ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρονομαστή, 1^{ου} παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους, 2^{ου} παίρνω περιορισμούς, 3^{ου} πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρονομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει, 4^{ου} ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1}$

Λύση: $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{(x-1)(x+1)}$ ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$

$$(x-1)(x+1) \frac{x}{x-1} - (x-1)(x+1) \frac{2}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{8}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$x(x+1) - 2(x-1) = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 2x + 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad (\text{δεκτή}) \quad \text{ή} \\ x = -2 \quad (\text{δεκτή}).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $x^2 - 8|x| + 7 = 0$
- ii. $6x^2 + 5|x| - 11 = 0$
- iii. $5x^2 + 3|x| + 1 = 0$
- iv. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
- v. $x^4 + x^2 - 6 = 0$
- vi. $2x^4 + 10x^2 + 7 = 0$

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $3(x+5)^2 + 2|x+5| - 5 = 0$
- ii. $3(4x-1)^2 + |4x-1| + 5 = 0$
- iii. $2\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 - \left|\frac{5x}{2} - 5\right| + 2 = 0$
- iv. $(x-4)^4 - 7(x-4)^2 + 6 = 0$
- v. $\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{4}{x}\right) + 20 = 0$
- vi. $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 0$
- vii. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 35\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 216 = 0$
- viii. $(x^2 - 5x + 1)^2 + 2(x^2 - 5x + 1) - 3 = 0$
- ix. $(x-1)^2 - 6\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 8 = 0$
- x. $(x+2)^2 - 2\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 15 = 0$
- xi. $(2x-1)^2 - 4\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3 = 0$
- xii. $(|x|-3)^2 - 3\sqrt{x^2 - 6|x| + 9} - 4 = 0$
- xiii. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$
- xiv. $x^2 + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 6$
- xv. $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$
- xvi. $x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 8x + 1 = 0$

12. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x-4}{x^2 + 2x} = 0$
- ii. $\frac{x^2 + 5}{x^2 - x} - \frac{x+5}{x-1} = \frac{1}{x}$
- iii. $\frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Σε μια 2^ο βαθμια εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, αν οι συντελεστές a, b, c είναι παράμετροι, τότε η εξίσωση λέγεται παραμετρική. Στις παραμετρικές εξισώσεις ο άγνωστος συνήθως συμβολίζεται με x ενώ η παράμετρος με λ ή μ ή κάποιο άλλο γράμμα.

Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:

- έχει δυο ρίζες άνισες, αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta > 0$
- έχει πραγματικές ρίζες (δηλ. τουλάχιστον μια), αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta \geq 0$
- έχει μια διπλή ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta = 0$
- δεν έχει πραγματικές ρίζες (δηλ. είναι αδύνατη), αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta < 0$

Επιπλέον οι τύποι του Vieta μπορούν να συνδυαστούν με τις ρίζες τις εξίσωσης, δηλαδή αν θέλουμε η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ να έχει :

- δυο ρίζες άνισες θετικές, τότε πρέπει $\Delta > 0, P > 0$ και $S > 0$
- δυο ρίζες άνισες αρνητικές, τότε πρέπει $\Delta > 0, P > 0$ και $S < 0$
- δυο ρίζες άνισες ετερόσημες, τότε πρέπει $\Delta > 0, P < 0$
- δυο ρίζες αντιστροφές, τότε πρέπει $\Delta \geq 0, P = 1$
- δυο ρίζες αντίθετες, τότε πρέπει $\Delta \geq 0, S = 0$
- μια ρίζα θετική (διπλή), τότε πρέπει $\Delta = 0, S > 0$
- μια ρίζα αρνητική (διπλή), τότε πρέπει $\Delta = 0, S < 0$
- μια ρίζα το μηδέν (διπλή), τότε πρέπει $\Delta = 0, S = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13. (Άσκηση 3 σελ. 93 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες :

i. $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0, \lambda \neq 0$ ii. $ax^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0, \alpha \neq 0$

Λύση :

i. Αρκεί να δείξω ότι $\Delta \geq 0$. Έχω : $\alpha = \lambda, \beta = 2, \gamma = -(\lambda - 2)$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot \lambda \cdot [-(\lambda - 2)] = 4 + 4\lambda(\lambda - 2) = 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 4(\lambda - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (άρα και για κάθε } \lambda \neq 0)$$

ii. Αρκεί να δείξω ότι $\Delta \geq 0$. Έχω : $\alpha = \alpha, \beta = \alpha + \beta, \gamma = \beta$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (άρα και για κάθε } \alpha \neq 0)$$

14. (Άσκηση 4 σελ. 93 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\mu x^2 + 2x + \mu = 0, \mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα.

Λύση :

Για να έχει η εξίσωση μια διπλή ρίζα πρέπει $\Delta = 0$, έχω : $\alpha = \mu, \beta = 2, \gamma = \mu$

Οπότε

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot \mu \cdot \mu = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\mu^2 = 0 \Leftrightarrow 4\mu^2 = 4 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες

i. $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ ii. $3x^2 + 2\lambda x - \lambda^2 = 0$

16. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda^2 = 0$, έχει μια διπλή ρίζα.

17. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda = 0$ (1)

i. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίθετες.

iii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίστροφες.

18. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 2)x - 2\lambda = 0$ (1)

i. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίθετες.

iii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίστροφες.

19. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (6\lambda - 1)x - 20\lambda + 5 = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 3.

i. Να βρεθεί ο λ

ii. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση έχει και άλλη μια ρίζα, διαφορετική του 3.

20. Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa \neq \lambda$, να δειχτεί ότι η εξίσωση : $(\lambda - \kappa)x^2 - 2(\kappa + \lambda)x + \kappa - \lambda = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες.

21. Δίνεται η εξίσωση $\kappa^2 x^2 - 2\lambda \kappa^2 x + \lambda^2 (\kappa^2 - 1) = 0$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι :

i. η εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες,

ii. οι αριθμοί $\lambda - \frac{\lambda}{\kappa}$ και $\lambda + \frac{\lambda}{\kappa}$ είναι ρίζες της εξίσωσης.

22. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση $x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0$ να έχει:

i. μια διπλή ρίζα, ii. δύο ρίζες ετερόσημες, iii. δύο ρίζες αρνητικές,

iv. δύο ρίζες θετικές v. δύο ρίζες αντίστροφες.

23. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ (1)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -\frac{2}{3}$$

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1).

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Να βρείτε το λ , ώστε η μια ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης.

iii. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε.

α. Να υπολογίσετε την επόμενη παράσταση: $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1}$

β. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1 - 1}$ και $\frac{1}{x_2 - 1}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

2.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις. (Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 10)

3.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

4.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$ (Μονάδες 13)

5.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

6.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0 \quad (\text{Μονάδες 9})$$

7.

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$ (Μονάδες 10)

8.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 10)

9. ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

10.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$. (Μονάδες 13)

11.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$ (Μονάδες 13)

12. ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

13. ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0. \quad (\text{Μονάδες 15})$$

14. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20\text{cm}$ και εμβαδό $E = 24\text{cm}^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)

15. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - kx - 2$, με $k \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου

$$\rho_1 = 2x_1 \text{ και } \rho_2 = 2x_2.$$

(Μονάδες 12)

16. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

17. ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \theta x^2 + \gamma = 0$ (1)

με παραμέτρους $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\theta < 0$, $\gamma > 0$ και $\theta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

18. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες

ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$ (Μονάδες 10)

19. ΘΕΜΑ 4

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5| = |x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

20. ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β . (Μονάδες 8)

21. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

22. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$. (Μονάδες 6)

23. ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0,$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

(Μονάδες 15)

24. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0. \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$.

(Μονάδες 9)

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

Για να λύσω μια ανίσωση της μορφής : $ax + b > 0$ ή $ax + b < 0$

1^{ος} τρόπος : Λειτουργώ όπως και στις εξισώσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, και στη συνέχεια διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου. Αν σε κάποιο στάδιο πολλαπλασιάσω ή διαιρέσω και τα 2 μέλη με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

2^{ος} τρόπος : Αν θέλω να λύσω την ανίσωση με τη βοήθεια του πίνακα πρόσημου τότε λύνω την αντίστοιχη εξίσωση και στη συνέχεια βάζω τη ρίζα στο πινακάκι. Για τα πρόσημα ισχύει ότι δεξιά από το 0 είναι ομόσημο του α ενώ αριστερά ετερόσημο του α. Δηλ.

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax+b$	ετερόσημο α	0	ομόσημο α

π.χ.1 Ναλυθεί και με τους 2 τρόπους η ανίσωση : $-3x + 18 \geq 0$

Λύση: 1^{ος} $-3x + 18 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -18 \Leftrightarrow x \leq 6$ ή $x \in (-\infty, 6]$

Λύση: 2^{ος} Έχω $-3x + 18 = 0 \Leftrightarrow -3x = -18 \Leftrightarrow x = 6$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-3x+18$	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $-3x + 18 \geq 0$ τότε $x \in (-\infty, 6]$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 : Για να βρούμε τις κοινές δυο (ή περισσότερων) ανισώσεων, τις λύνουμε ξεχωριστά και παριστάνουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα αριθμών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 : Για να λύσουμε μια διπλή ανίσωση $A(x) \leq B(x) \leq \Gamma(x)$, λύνουμε ξεχωριστά τις ανισώσεις $A(x) \leq B(x)$ και $B(x) \leq \Gamma(x)$ και βρίσκουμε τις κοινές τους λύσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

39. (Άσκηση 1 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις ανισώσεις :

v. $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6}$

vi. $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x$

vii. $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$

Λύση :

v. $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6} \xLeftrightarrow{\text{ΕΚΠ}=12} 12 \frac{x-1}{2} + 12 \frac{2x+3}{4} < 12 \frac{x}{6} \Leftrightarrow 6(x-1) + 3(2x+3) < 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 6 + 6x + 9 < 2x \Leftrightarrow 12x - 2x < -3 \Leftrightarrow 10x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{10}$ ή $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$

vi. $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x \xLeftrightarrow{\text{ΕΚΠ}=4} 4 \frac{x-12}{2} + 4 \frac{x}{2} + 4 \frac{3}{4} > 4x \Leftrightarrow 2(x-12) + 2x + 3 > 4x \Leftrightarrow$

$2x - 24 + 2x + 3 > 4x \Leftrightarrow 0x > 21$ αδύνατη

vii. $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5} \xLeftrightarrow{\text{ΕΚΠ}=10} 10 \frac{x-2}{2} + 10 \frac{1-2x}{5} < 10 \frac{x}{10} - 10 \frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$5(x-2) + 2(1-2x) < x - 4 \Leftrightarrow 5x - 10 + 2 - 4x < x - 4 \Leftrightarrow 0x < 4$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

40. (Άσκηση 2 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

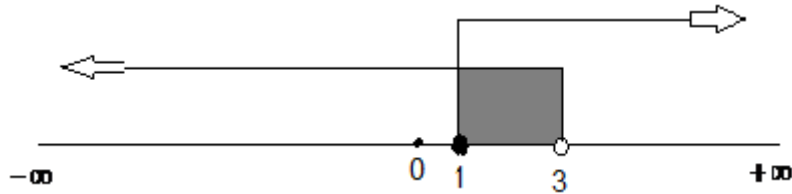
$$3x-1 < x+5 \quad \text{και} \quad 2-\frac{x}{2} \leq x+\frac{1}{2}$$

Λύση :

$$\text{Έχω : } 3x-1 < x+5 \Leftrightarrow 3x-x < 5+1 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης : } 2-\frac{x}{2} \leq x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-2\frac{x}{2} \leq 2x+2\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$4-x \leq 2x+1 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} \geq \frac{-3}{-3} \Leftrightarrow x \geq 1 \quad (2)$$



Άρα $1 \leq x < 3$ ή $x \in [1, 3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

41. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $2x-1 < -x+3-3(x-2)$

ii. $2\frac{x+1}{3} - \frac{2x+1}{2} \leq 2x + \frac{6x+1}{6}$

iii. $\frac{x+3}{3} - \frac{x+1}{2} < \frac{x+19}{6}$

iv. $\frac{x+10}{5} - 2 < \frac{3(x+1)-(x-3)}{10}$

v. $\frac{x+3}{5} - \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{5x}{4} - \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2$

vi. $\frac{x(x-3)^2}{2} - \frac{x(1-9x)}{3} > \frac{x^3}{2}$

42. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

i. $\frac{7x-18}{5} > 4\frac{2x-5}{5} - 1$ και $x + \frac{3}{2} + \frac{2x}{5} > \frac{27}{5} + \frac{6x-1}{20}$

ii. $\frac{x-3}{3} - \frac{x+4}{6} < \frac{x-6}{2} + 2$ και $\frac{x+6}{4} - \frac{-x+8}{4} \geq \frac{6x-8}{5} - x + 2$

iii. $-6(x-6) < 7(3x+1) + 2$ και $-5\left(\frac{x}{3} - 1\right) \geq 2x + \frac{x-9}{3} - 4$

43. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

i. $-6 < -x-1 < 3$

ii. $-x < -5x-4 < -5x$

iii. $2 + \frac{8-3x}{4} < 5 - \frac{x}{4} \leq \frac{4+x}{4} + 3$

iv. $x + \frac{5}{2} \leq 2x + \frac{11}{2} < 2 + \frac{3(x+2)}{2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια παραμετρική ανίσωση, εργάζομαι ως εξής :

Βήμα 1 : Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή : $\alpha \cdot x < \beta$ ή $\alpha \cdot x > \beta$

Βήμα 2 : Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το α , μια $\alpha > 0$, μια $\alpha < 0$ και μια $\alpha = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

44. Να λύσετε την ανίσωση : $\lambda(2x - \lambda) \leq \lambda x - 2\lambda + 2x$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{Έχω : } \lambda(2x - \lambda) &\leq \lambda x - 2\lambda + 2x \Leftrightarrow 2\lambda x - \lambda^2 \leq \lambda x - 2\lambda + 2x \Leftrightarrow \lambda x - 2x \leq \lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \quad (1) \end{aligned}$$

- αν $\lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$ τότε : (1): $(\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \Leftrightarrow \frac{(\lambda - 2)x}{\lambda - 2} \leq \frac{\lambda(\lambda - 2)}{\lambda - 2} \Leftrightarrow x \leq \lambda$
- αν $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$ τότε : (1): $(\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \Leftrightarrow \frac{(\lambda - 2)x}{\lambda - 2} \geq \frac{\lambda(\lambda - 2)}{\lambda - 2} \Leftrightarrow x \geq \lambda$
- αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ τότε : (1): $(2 - 2)x \leq 2(2 - 2) \Leftrightarrow 0x \leq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

45. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ

- $\lambda(x + 5) < \lambda^2 + 2x + 6$
- $\lambda(x - 4) \geq (\lambda - 2)(\lambda + 2) - 4(x - 1)$
- $\frac{(\lambda - 2)x}{3} < 1 - \frac{x - 2}{3}$
- $\frac{\lambda x - \lambda}{3} \geq \frac{x - \lambda}{4} - \frac{x + 4}{6}$

46. Δίνεται η εξίσωση: $-x - \lambda(\lambda - 3x) = \lambda^2 - 2(2x + 1)$

- Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του λ .
- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση που είναι μεγαλύτερη του αριθμού -4.

47. Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 + 2 = 2(\alpha - \beta)$ να λύσετε τις ανισώσεις:

- $\frac{x}{\alpha - \beta} - \frac{3 - x}{4} \leq \frac{6x - \beta}{8}$
- $(\alpha^{2012} - \beta^{2012})x + \frac{\beta^{10} + 3\beta^9 x}{2} > -\frac{x + 2}{\beta - \alpha}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Για τις ανισώσεις με απόλυτη τιμή υπάρχουν οι παρακάτω σημαντικές ιδιότητες :

$$\begin{aligned} 1) & \quad |x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha \quad (\alpha > 0) \\ 2) & \quad |x| > \alpha \Leftrightarrow x > \alpha \quad \text{ή} \quad x < -\alpha \\ & \quad (\alpha > 0) \end{aligned}$$

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $|2x - 5| < 6$

Λύση: $|2x - 5| < 6 \Leftrightarrow -6 < 2x - 5 < 6 \Leftrightarrow -1 < 2x < 11 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}$ ή αλλιώς $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x + 7| > 2$

Λύση: $|3x + 7| > 2 \Leftrightarrow 3x + 7 > 2 \Leftrightarrow 3x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}$ (1)

ή $3x + 7 < -2 \Leftrightarrow 3x < -9 \Leftrightarrow x < -3$ (2)

Αν συναληθευσω της (1) και (2) $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x + 2| \geq 3|x - 1|$

Λύση: $|3x + 2| \geq 3|x - 1| \Leftrightarrow |3x + 2|^2 \geq 9|x - 1|^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 12x + 4 \geq 9x^2 - 18x + 9 \Leftrightarrow$

$30x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{30} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

48. (Άσκηση 5 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x| < 3$

ii. $|x - 1| \leq 4$

iii. $|2x + 1| < 5$

Λύση :

i. $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ ή $x \in (-3, 3)$

ii. $|x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$ ή $x \in [-3, 5]$

iii. $|2x + 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 1 < 5 \Leftrightarrow -6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2$ ή $x \in (-3, 2)$

49. (Άσκηση 5 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \text{ή} \\ x \leq -3 \end{cases}$ ή αλλιώς $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

ii. $|x - 1| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 4 \\ \text{ή} \\ x - 1 < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ \text{ή} \\ x < -3 \end{cases}$ ή αλλιώς $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

$$\text{iii. } |2x+1| \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 5 \\ \text{ή} \\ 2x+1 \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 4 \\ \text{ή} \\ 2x \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{ή} \\ x \leq -3 \end{cases} \text{ ή αλλιώς } x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ)

- **ΜΟΡΦΗ :** $|A(x)| > B(x)$ ή $|A(x)| < B(x)$ εδώ θα πρέπει πρώτα να βγάλουμε το απόλυτο διακρίνοντας δυο περιπτώσεις $A(x) \geq 0$ και $A(x) < 0$. Έπειτα συναληθεύουν τις λύσεις με τον αντίστοιχο περιορισμό.
- **ΜΟΡΦΗ :** $|A(x)| > |B(x)|$ ή $|A(x)| < |B(x)|$ εδώ υψώνω και τα δυο μέλη στο τετράγωνο και σύμφωνα με την ιδιότητα $|a|^2 = a^2$, φεύγουν τα απόλυτα και λύνω κανονικά την ανίσωση.
- **ΜΟΡΦΗ :** $\kappa|A(x)| + \lambda|B(x)| > \Gamma(x)$ ή $\kappa|A(x)| + \lambda|B(x)| < \Gamma(x)$ εδώ πρέπει να κάνουμε απαλοιφή των απολύτων, σχηματίζοντας πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

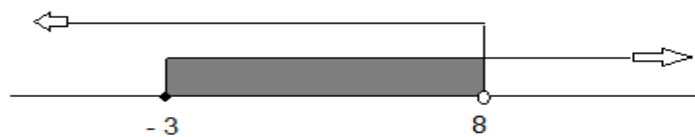
50. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- i. $|x+3| > 2x-5$
- ii. $|2x-1| \geq 2|x-2|$
- iii. $-3|x+2| + |x-1| < x-3$

Λύση:

i. $|x+3| > 2x-5 \quad (1)$

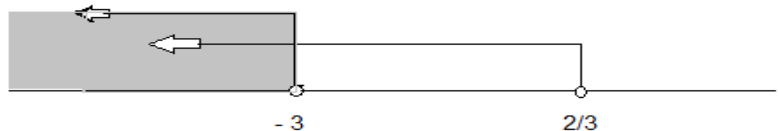
- Αν $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ τότε η (1) γίνεται :
 $|x+3| > 2x-5 \Leftrightarrow x+3 > 2x-5 \Leftrightarrow -x > -8 \Leftrightarrow x < 8$



Άρα $x \geq -3$ και $x < 8$ δηλ.

Άρα τελικά $x \in [-3, 8)$

- Αν $x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ τότε η (1) γίνεται :
 $|x+3| > 2x-5 \Leftrightarrow -x-3 > 2x-5 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$



Άρα $x \leq -3$ και $x < \frac{2}{3}$ δηλ.

Άρα τελικά $x \in (-\infty, -3)$

ii. $|2x-1| \geq 2|x-2| \Leftrightarrow |2x-1|^2 \geq (2|x-2|)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 4(x-2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 4(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 4x^2 - 16x + 16 \Leftrightarrow 12x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4}$$

iii. $-3|x+2|+|x-1| < x-3$ (1)

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
x+2	-	0	+		+
x-1	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \in (-\infty, -2)$ η (1) γίνεται :

$$3(x+2)-(x-1) < x-3 \Leftrightarrow 3x+6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow x < -10, \text{ οπότε αν το συναληθεύσουμε με το } x \in (-\infty, -2) \text{ παίρνουμε } x \in (-\infty, -10)$$

- Αν $x \in [-2, 1)$ η (1) γίνεται :

$$-3(x+2)-(x-1) < x-3 \Leftrightarrow -3x-6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow -5x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}, \text{ οπότε αν το συναληθεύσουμε με το } x \in [-2, 1) \text{ παίρνουμε } x \in \left(-\frac{2}{5}, 1\right)$$

- Αν $x \in [1, +\infty)$ η (1) γίνεται :

$$-3(x+2)+x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x-6+x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x < 4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}, \text{ οπότε αν το συναληθεύσουμε με το } x \in [1, +\infty) \text{ παίρνουμε } x \in [1, +\infty). \text{ Άρα οι λύσεις της ανισώσεως είναι } x \in (-\infty, -10) \text{ ή } x \in \left(-\frac{2}{5}, 1\right) \text{ ή } x \in [1, +\infty) \text{ δηλ. } x \in (-\infty, -10) \text{ ή } x \in \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

$$x \in \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

51. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x-3| < 7$ ii. $|1-x| \leq 3$ iii. $|2x+3| < 1$ iv. $|x-7| > 2$ v. $|x+4| \geq 5$

vi. $|3x-6| > 9$ vii. $|1-2x| \geq 5$ viii. $|x-3| > 2x+1$ ix. $4-|x-2| \geq 3x$ x. $3-\frac{x-3}{2} \leq |x+2|$

52. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x-3| \geq |x+2|$ ii. $|3-2x|-2|x-3| > 0$ iii. $3|x-1|-2|x-3| \geq 5$

iv. $|x+3|-|2-x| > 2x+7$ v. $|x+4| \geq -5$ vi. $|13x-21| \leq -4$

vii. $\frac{|1-2x|-3}{2} \leq 4$ viii. $\frac{7-3|2x+1|}{4} > 1$ ix. $|2x-6| \leq 0$

53. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x-1|+|2x-2| > |5x-5|-6$

ii. $|x-2|+8 < |5x-10|-|4-2x|$

iii. $|2x-1|+2-\frac{|6x-3|}{8} \geq \frac{|4-8x|+3}{5}$

iv. $8-|2x-6| \leq \frac{|3-x|-4}{2}$

54. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $1 < |x+5| < 3$ ii. $4 \leq |6-2x| \leq 10$ iii. $4-|x-2| \geq 3x$
 iv. $2x-|x+4| < 8$ v. $|x-3| > |x+2|$ vi. $|x-1| \leq |x+4|$
 vii. $|x-4| - |x+1| > 0$ viii. $|3-2x| - 2|x-3| > 0$

55. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $|x| > x$ ii. $|x| \geq x$ iii. $|x| > -x$ iv. $|x| \geq -x$ v. $|x| < x$
 vi. $|x| \leq x$ vii. $|x| < -x$ viii. $|x| \leq -x$

56. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $||x|-3| < 2$ ii. $||x-2|-3| \leq 1$ iii. $|7-|2x-1|| \geq 10$ iv. $1 \leq ||x-1|-4| \leq 3$

57. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $\sqrt{4x^2-8x+4} + |x-1| < 12$ ii. $\sqrt{9x^2-36x+36} + |2x-4| > 15$

58. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - |2\lambda - 4|x + (\lambda - 2)^2 = 0$ (1)

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα για κάθε πραγματικό αριθμό λ .
 ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η διπλή ρίζα της εξίσωσης είναι: i) ίση με 8, ii) μικρότερη του 2, iii) ανήκει στο διάστημα $[4,6]$.

59. Έστω $\Omega = \{0,1,2,\dots,9\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- i. $A = \{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση } x^2 - 6x + |3\lambda - 15| = 0 \text{ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες}\}$
 ii. $B = \{\lambda \in \Omega / \text{το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης } x^2 + |2\lambda - 5|x - 3 = 0 \text{ είναι μικρότερο από το γινόμενο των ριζών της}\}$

60. Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύει ότι:

- η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το B είναι $\frac{5}{8}$
- η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A και να μην πραγματοποιηθεί το B είναι $\frac{1}{2}$
- η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B είναι $\frac{1}{4}$.

i. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(A \cup B)$

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $P((A \cup B)') < x - P(B \cap A') < P((A - B) \cup (B - A))$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 4.1

1. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5| < 2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x| > 5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

2. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5| \geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

3. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης

του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

4. ΘΕΜΑ 2

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$ (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

(Μονάδες 13)

5. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

6. ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3| < 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

7. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y

(Μονάδες 13)

8. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4| \geq 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

9. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y-2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

10. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

11. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

12. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1 - 2x| < 5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

13. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)

14. ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

15. ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$|x - 3| \leq 5 \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$||x| - 3| \leq 5$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

16. ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Μονάδες 10)

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ($\alpha \neq 0$) αρχικά βρίσκω τη διακρίνουσα του και έπειτα :

➤ Αν $\Delta > 0$ το τριώνυμο έχει 2 ρίζες x_1, x_2 και παραγοντοποιείται ως εξής :

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)}$$

π.χ.1 Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο : $x^2 - 5x + 6$

Λύση : έχω $x^2 - 5x + 6 = 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

Άρα : $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

➤ Αν $\Delta = 0$ το τριώνυμο έχει 1 διπλή ρίζα x_1 και παραγοντοποιείται ως εξής :

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2}$$

π.χ.2 Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο : $x^2 + 6x + 9$

Λύση : έχω $x^2 + 6x + 9 = 0$, $\Delta = 36 - 36 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-6}{2} = -3$

Άρα : $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

➤ Αν $\Delta < 0$ το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 112 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα :

i. $x^2 - 3x + 2$

ii. $2x^2 - 3x + 2$

Λύση :

i. έχω $x^2 - 3x + 2 = 0$, $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

Άρα : $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

ii. έχω $2x^2 - 3x + 2 = 0$, $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{4}$ (Note: The original image has a typo in the discriminant calculation for this problem, it should be $\Delta = 9 - 16 = -7$, but the text shows $\Delta = 9 + 16 = 25$. I will follow the text in the image.)

ii. έχω $2x^2 - 3x - 2 = 0$, $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Άρα : $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα :

i. $2x^2 + 5x - 3$

ii. $-9x^2 + 6x - 1$

iii. $x^2 - 3x + 4$

iv. $x^3 - 3x^2 - 4x$

v. $-x^3 - x^2 + 6x$

vi. $6x^3 + 7x^2 - 3x$

3. Να παραγοντοποιήσετε και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τα οποίες ορίζονται.

i. $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$

ii. $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$

iii. $\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$

iv. $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$

v. $\frac{-x^2 + 4x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

vi. $\frac{2x^2 + 5x - 12}{2x^3 - x^2 - 3x}$

vii. $\frac{-x^3 - 5x^2 + 6x}{3x^3 - 5x^2 + 2x}$

viii. $\frac{x^3 - 4x}{x^3 - x^2 - 6x}$

ix. $\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

x. $\frac{2x^2 + 5|x| - 3}{x^2 - 2|x| - 15}$

xi. $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 + 2|x| - 3}$

4. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x} \cdot \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

ii. $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - x} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^4 - 4x^3 + 3x^2}$

iii. $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + x - 2} : \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6}$

iv. $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 + 2x + 1} : \left(\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3} : \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right)$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x}{x - 3} = \frac{1 - x}{x - 2}$

ii. $\frac{x + 3}{x - 1} = \frac{x + 4}{x - 2} - \frac{2(x + 1)}{x^2 - 3x + 2}$

iii. $\frac{4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x + 2}{x + 3} + \frac{x + 1}{1 - x}$

iv. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x^2 - 4}$

6. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{(x^2 - 3|x| - 4)(x^2 + |x| - 6)}{x^2 + 4|x| + 3}$

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $A = 3$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ ($\alpha \neq 0$) αρκεί να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και τις τιμές του x που γίνεται θετικό ή αρνητικό. Πιο συγκεκριμένα λύνω την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ βρίσκω τις ρίζες x_1, x_2 και τις τοποθετώ στο πινακάκι από το οποίο και βρίσκω το πρόσημο τις συνάρτησης στο διάστημα που θέλω.

1^η περίπτωση: $\Delta > 0$

Τιμές του x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

2^η περίπτωση: $\Delta = 0$

Τιμές του x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α		ομόσημο του α

3^η περίπτωση: $\Delta < 0$

Τιμές του x	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	ομόσημο του α

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2 - 5x + 6 > 0$

Λύση: Έχω : $x^2 - 5x + 6 = 0$ $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ άρα $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 5x + 6 > 0$ τότε $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 < 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in (2, 3)$

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in [2, 3]$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2 - 6x + 9 > 0$

Λύση: Έχω : $x^2 - 6x + 9 = 0$ $\Delta = 36 - 36 = 0$ άρα $x = 3$ (Διπλή ρίζα)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$	+	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 6x + 9 > 0$ τότε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

(Όταν η Διακρίνουσα είναι 0 το τριώνυμο είναι ανάπτυσμα ταυτότητας δηλ. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ οπότε μπορούμε να καταλάβουμε ακόμα καλύτερα γιατί ισχύουν τα πρόσημα στο πίνακάκι)

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 6x + 9 < 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα ότι είναι αδύνατη

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x = 3$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $25 - x^2 \geq 0$

Λύση: Έχω $25 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$

x	$-\infty$	-5		5	$+\infty$
$25 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $25 - x^2 \geq 0$ τότε $x \in [-5, 5]$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

7. (Άσκηση 3 σελ. 112 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Για τις διαφορές τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων :

i. $x^2 - 2x - 15$ ii. $4x^2 - 4x + 1$ iii. $x^2 - 4x + 13$

Λύση :

i. Για το τριώνυμο $x^2 - 2x - 15$ έχω : $x^2 - 2x - 15 = 0$, $\Delta = 4 + 60 = 64$,

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$	+	0	-	0	+

Άρα $x^2 - 2x - 15 > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$ και

$x^2 - 2x - 15 < 0$ για κάθε $x \in (-3, 5)$.

ii. Για το τριώνυμο $4x^2 - 4x + 1$ έχω : $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $\Delta = 16 - 16 = 0$, $x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (Διπλή ρίζα)

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2 - 4x + 1$	+	0	+

Άρα $4x^2 - 4x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(Άλλωστε θα μπορούσα εξ αρχής να παρατηρήσω ότι : $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$. Γενικά όταν η Διακρινουσα ενός τριωνύμου είναι 0 τότε το τριώνυμο είναι ανάπτυσμα ταυτότητας)

iii. Για το τριώνυμο $x^2 - 4x + 13$ έχω : $x^2 - 4x + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - 4x + 13$	+	

Άρα $x^2 - 4x + 13 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^2 + 2x - 3 > 0$ ii. $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ iii. $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$ iv. $4x^2 - 12x + 9 > 0$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^2 - 5x \geq 0$ ii. $-x^2 + 4x > 0$ iii. $x^2 - 16 \leq 0$ iv. $49 < x^2$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $(x+3)^2 > 4(2x+3)$ ii. $4(x-5) - (x-4)(x+4) \geq 0$ iii. $2x(x-2) - (x-1)^2 < -4$

iv. $x^2 + 1 - \frac{(x+2)^2}{5} > 0$

11. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων :

i. $x^2 - 2x - 3 < 0$ και $-x^2 + x + 2 \geq 0$

ii. $x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$

iii. $x^2 + 4x - 5 > 0$ και $x^2 - 4 \leq 0$

iv. $x^2 + x - 6 \leq 0$ και $x^2 - 2x + 1 > 0$

v. $3 \leq x^2 - 2x \leq 8$

vi. $2x^2 - 8x - 6 < (x-3)^2 < 3x^2 - 8x + 5$

12. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i. $x^2 + 2x - 4 < 3x(x-1)$

ii. $(x-3)(x+3) > 2(2x-7)$

iii. $28 - (x+2)^2 > -2(x-3)(x+3)$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$ ii. $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$ iii. $x^2 - 6|x| + 8 > 0$ iv. $x^2 - 7|x| + 6 > 0$

v. $(2x-3)^2 - 6|2x-3| + 5 \leq 0$ vi. $(x^2 + 2x)^2 - 11|x^2 + 2x| + 24 \geq 0$

14. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x^2 + 3x - 1| < 3$ ii. $|x^2 - 2x - 9| > 6$ iii. $|x-3| \geq 2|x+1|$ iv. $2|x+2| < |x+4|$

v. $|-x^2 + x + 2| \leq 1 - x(x+6)$ vi. $|x^2 + x - 6| \leq x^2 - 3x + 2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

- Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta < 0$
- Για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) ισχύει :
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta < 0$ και $a > 0$
 - $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta < 0$ και $a < 0$
- Για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) ισχύει :
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta \leq 0$ και $a > 0$
 - $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta \leq 0$ και $a < 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15. (Άσκηση 4 σελ. 114 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση :

i. έχει ρίζες ίσες ii. έχει ρίζες άνισες iii. είναι αδύνατη

Λύση :

i. Στην εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$ (1) έχω : $\alpha = \lambda, \beta = 3\lambda, \gamma = \lambda + 5$

Αρχικά για να είναι η εξίσωση 2^ο βαθμια πρέπει $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$. Έστω ότι $\lambda = 0$ τότε η (1) γίνεται $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow 0x^2 + 0x + 5 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0$ αδύνατη. Άρα πρέπει $\lambda \neq 0$

Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες ίσες θα πρέπει να ισχύει :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\lambda(\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \\ \text{ή} \\ \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \end{cases} \quad \text{Όμως πρέπει } \lambda \neq 0, \text{ άρα } \lambda = 4.$$

ii. Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες άνισες θα πρέπει να ισχύει :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda + 5) > 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 20\lambda > 0$$

$$\text{Έχω : } 5\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow 5\lambda(\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \\ \text{ή} \\ \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \end{cases}$$

λ	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$5\lambda^2 - 20\lambda$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $5\lambda^2 - 20\lambda > 0$ τότε $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, που ικανοποιεί και τον περιορισμό $\lambda \neq 0$.

iii. Για να είναι η εξίσωση (1) αδύνατη πρέπει :

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda + 5) < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda < 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 20\lambda < 0, \text{ άρα όπως προκύπτει από το παραπάνω πίνακάκι } \lambda \in (0,4)$$

16. (Άσκηση 5 σελ. 114 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση :

Για να αληθεύει η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ πρέπει να ισχύει : $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$

Εδώ : $\alpha = 1 > 0$, $\beta = 3\lambda$ και $\gamma = \lambda$. Άρα αρκεί $\Delta < 0$.

$$\text{Έχω : } \Delta < 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda < 0$$

$$\text{Έχω : } 9\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ή} \\ 9\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{9} \end{cases}$$

λ	$-\infty$	0		$\frac{4}{9}$	$+\infty$
$9\lambda^2 - 4\lambda$	+	0	-	0	+

$$\text{Άρα επειδή θέλω } 9\lambda^2 - 4\lambda < 0 \text{ τότε } \lambda \in \left(0, \frac{4}{9}\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $\lambda x^2 - 4x + \lambda - 3$, με $\lambda \neq 0$, διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 + (2\lambda - 1)x + (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $(\lambda - 3)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 2\lambda - 5 = 0$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

20. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2 = 0$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

21. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση : $(\lambda - 1)x^2 + 4x + \lambda + 2 > 0$ με $\lambda \neq 1$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

22. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση : $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda < 0$ με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

23. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση : $4x^2 + 4(2\lambda - 1)x + 4 - 3\lambda \geq 0$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 4.2

1. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

(Μονάδες 13)

2. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

(Μονάδες 9)

3. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

(Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

(Μονάδες 10)

4. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

(Μονάδες 8)

5. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ .

(Μονάδες 12)

β) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

6. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

(Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

7. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2)<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

(Μονάδες 10)

β) $x^2+4x+3<0$.

(Μονάδες 15)

8. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$$

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

(Μονάδες 13)

9. ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2 - 2x - 1$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$$A(x) = \frac{x-1}{3x^2 - 2x - 1}$$

και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|A(x)| = 1$

(Μονάδες 8)

10. ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση: $A = |x-3| + |x^2-10x+21|$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11x-24$

(Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$.

(Μονάδες 5)

11. ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2 , να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει:

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$

(Μονάδες 15)

12. ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4| \quad (\text{Μονάδες 15})$$

13. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (Μονάδες 12)

14. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$ (Μονάδες 13)

15. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση (1) να είναι 1^{ου} βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση (1) είναι 2^{ου} βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια ρίζα διπλή, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή, να προσδιορίσετε τις τιμές του λ (αν υπάρχουν) ώστε το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1$ να είναι μη αρνητικό για κάθε x πραγματικό αριθμό.

(Μονάδες 10)

16. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$. (Μονάδες 13)

17. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha + 1)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\alpha - 1)^2 - 16.$$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι το τριώνυμο έχει δυο ρίζες, x_1 και x_2 .

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$, το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών του.

(Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$

(Μονάδες 8)

18. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $|x - 2| < 3$ και $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 4]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων,

να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

19. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

20. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι:

$$\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$$

(Μονάδες 10)

21. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (Μονάδες 5)

22. ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda.$$

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

(Μονάδες 5)

23. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

24. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ (Μονάδες 10)

25. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1x_2$

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

26. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

27. ΘΕΜΑ 4

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 . (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ . (Μονάδες 7)

28. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \neq 0$, ώστε $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

29. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2 .

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2a$ και $\beta = -3a$. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $a < 0$. (Μονάδες 9)

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + a < 0$. (Μονάδες 7)

30. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$$

όπου α, β δύο **θετικοί** αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β . (Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4. \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

31. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

32. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1. (Μονάδες 6)

33. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \theta x + \theta^2$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β) i) Αν $\theta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\theta = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\theta + \theta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, θ που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

34. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x (Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

35. ΘΕΜΑ 4

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$ (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x . (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18 \quad (\text{Μονάδες 7})$$

36. ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0 \quad \text{με } \lambda \in (0, 2)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$ (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

37. ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $a \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

38. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|, \text{ τότε:}$$

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.

(Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ .

(Μονάδες 8)

39. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση: $|x + 1| < 4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \leq 0$. (Μονάδες 15)

40. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha - 2| < 1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α .

(Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

(Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0$$

(Μονάδες 7)

4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ :

$$A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0 \quad \text{Ή} \quad A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) < 0$$

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) < 0$

Βήμα 1 : βρίσκουμε τις ρίζες (αν υπάρχουν) των παραγόντων $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$

Βήμα 2 : διατάσσουμε τις ρίζες σε έναν άξονα (από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη)

Βήμα 3 : κάτω από τον άξονα σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα των παραγόντων, στα διαστήματα που χωρίζεται ο άξονας από τις ρίζες.

Βήμα 4 : στην τελευταία γραμμή του πίνακα βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου εφαρμόζοντας τους κανόνες προσήμου :

- $(+) \cdot (+) = (+)$ $(-) \cdot (-) = (+)$
- $(+) \cdot (-) = (-)$ $(-) \cdot (+) = (-)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 117 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου : $P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)$

Λύση :

Έχω :

- $2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$
- $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$
- $x^2 - x + 1 = 0$, αδύνατη

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	-1		$\frac{2}{3}$		2	$+\infty$
$2 - 3x$	+		+	0	-		-
$x^2 - x - 2$	+	0	-		-	0	+
$x^2 - x + 1$	+		+		+		+
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Άρα $P(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, 2\right)$ και $P(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-1, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

i. $(x-2)(x^2+2x-3) > 0$

ii. $(x-3)(x^2-4x+3) \leq 0$

iii. $(x^2+3x-4)(x^2-3x+2) < 0$

iv. $(x^2-4)(-x^2+3x+10) \geq 0$

v. $(1-x)(x^2-3x+2)(x^2+x+2) > 0$

vi. $(x^2-7x+12)(-x^2+5x-6) \leq 0$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $(x-2)^4(x+1)^6(x^2-4) \geq 0$

ii. $(x-1)^5(x-2)^4(x-3)^3 \leq 0$

iii. $x^3+4x^2-12x \geq 0$

iv. $4x^2+5x > x^3$

v. $x^4-16 \leq 0$

vi. $x^5-5x^3+4x < 0$

4. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$(x-2)(x^2+2x-15) \geq 0 \text{ και } (x^3-1)(5x^2-x+4)(x+3) > 0$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ :

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{Ή} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ γράφεται ισοδύναμα $A(x) \cdot B(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) < 0$ [όπου $B(x) \neq 0$] και αυτό γιατί το γινόμενο και το πηλίκο δυο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο.

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > \Gamma(x)$ γράφεται :

$$\frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow [A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)] \cdot B(x) > 0 \text{ και λύνεται όπως η προηγούμενη.}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0$

Λύση: Πρέπει $x^2-5x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 4$

$$\text{Έχω : } \frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \leq 0$$

$$(x^2+3x)(x^2-5x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ ή } x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{ή } x^2-5x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 4$$

x	$-\infty$	-3		0		1		4	$+\infty$
$x^2 + 3x$	+	0	-	0	+		+		+
$x^2 - 5x + 4$	+		+		+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+		-		+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x + 4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 - 5x + 4) \leq 0$ τότε $x \in [-3, 0] \cup (1, 4)$.
(Στο (1,4) είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

6. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0$

Λύση: Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$

$$\text{Έχω : } \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$$

$$(x^2 + 3)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3, \text{ Αδύνατη}$$

$$\text{ή } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x^2 + 3$	+		+		+
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$ τότε $x \in (2, 3)$.

(Όταν μια παράσταση είναι πάντα θετική τότε δεν επηρεάζει το πρόσημο στην τελευταία σειρά στο πίνακάκι. Οπότε θα μπορούσε να παραληφθεί εντελώς.)

7. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2 - 1}$

Λύση: Έχω : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$. (Σε αυτό το σημείο όμως δεν κάνω απαλοιφή παρανομαστών όπως στις αντίστοιχες κλασματικές εξισώσεις, αλλά **ομώνυμα κλάσματα**. Αυτό γιατί η απαλοιφή παρανομαστών δεν επιτρέπεται στις ανισώσεις καθώς η παράσταση με την οποία θα πολλαπλασιάσω κάθε όρο, δεν γνωρίζω αν είναι θετική ή αρνητική)

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) - 2(x-1) - 8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2x + 2 - 8}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0 \text{ Έχω : } (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -2$$

$$\text{ή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	0	-		-		-	0	+
$x^2 - 1$	+		+	0	-	0	+		+
Γινόμενο – Πηλίκο	+	0	-		+		-	0	+

Αρα επειδή θέλω $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0$ τότε

$x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [3, +\infty)$. (Στο $(-1, 1)$ είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $\frac{x-3}{x^2+4x-5} < 0$ ii. $\frac{25-x^2}{x+2} > 0$ iii. $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0$ iv. $\frac{-x^2+3x+4}{x^2-1} \leq 0$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $\frac{3x-1}{x+2} \geq 2$ ii. $\frac{2(x-3)}{7-x} \geq -1$ iii. $\frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} \geq 1$ iv. $\frac{x+1}{x-1} - 2 < \frac{1-x}{x}$
v. $\frac{2-x}{x^3+x^2} \leq \frac{1-2x}{x^3-2x^2}$ vi. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1}$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $(|x|-2)(x^2-2x-3) \geq 0$ ii. $(|x|-4)(x^2+2x-8) \leq 0$ iii.
iv. $\left| \frac{x^2-5x}{x^2-4} \right| = \frac{x^2-5x}{x^2-4}$ iv. $\left| \frac{3x-x^2}{x-2} \right| = \frac{x^2-3x}{x-2}$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $2\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x-2}{x-1} + 2 \leq 0$ ii. $\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)^2 + \frac{2x-1}{x-2} - 2 \leq 0$

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(\lambda-2)x^2 - 3x + (\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες.

13. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda-1)x + \lambda - 3 = 0$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύουν:

α) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2$ β) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 7$

5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Γενικά **ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε

συνήθως με α_1 , ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_2 κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός n καλείται **n -οστός ή γενικός όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_n .

➤ Σε μια ακολουθία ο πρώτος όρος είναι ο α_1 , εκτός και αν έχει οριστεί διαφορετικά, ενώ ο n -οστός όρος δεν είναι ο τελευταίος όρος, εκτός κι αν έχει έτσι οριστεί.

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :** Προσδιορισμός όρων μιας ακολουθίας, όταν γνωρίζουμε τον γενικό της όρο.

Όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο μιας ακολουθίας, τότε για να βρούμε οποιονδήποτε όρο της α_k , αρκεί να θέσουμε $n = k$ στον τύπο της.

Αναδρομικός τύπος μιας ακολουθίας ονομάζεται μια σχέση που συνδέει δυο ή περισσότερους γενικούς όρους της ακολουθίας. Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε άλλο όρο της ακολουθίας. Για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

- (i) Τον αναδρομικό της τύπο και
- (ii) Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :** Προσδιορισμός αναδρομικού τύπου ακολουθίας, όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο της.

Για να ορίσουμε αναδρομικά μια ακολουθία, συνήθως εργαζόμαστε ως εξής :

1^ο Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1}

2^ο Προσπαθούμε να εκφράσουμε τον όρο α_{n+1} με τη βοήθεια του όρου α_n .

3^ο Βρίσκουμε όσους αρχικούς όρους χρειάζονται.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

61. (Άσκηση 1 σελ. 124 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

- i) $\alpha_n = 2n + 1$ ii) $\alpha_n = 2^n$ iii) $\alpha_n = n^2 + n$

Λύση :

i) $\alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $\alpha_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $\alpha_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $\alpha_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$, $\alpha_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$

ii) $\alpha_1 = 2^1 = 2$, $\alpha_2 = 2^2 = 4$, $\alpha_3 = 2^3 = 8$, $\alpha_4 = 2^4 = 16$, $\alpha_5 = 2^5 = 32$

iii) $\alpha_1 = 1^2 + 1 = 2$, $\alpha_2 = 2^2 + 2 = 6$, $\alpha_3 = 3^2 + 3 = 12$, $\alpha_4 = 4^2 + 4 = 20$, $\alpha_5 = 5^2 + 5 = 30$

62. (Άσκηση 2 σελ. 124 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

i) $\alpha_1 = 2, \alpha_{v+1} = \frac{1}{\alpha_v}$ ii) $\alpha_1 = 0, \alpha_{v+1} = \alpha_v^2 + 1$

Λύση :

i) Από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{v+1} = \frac{1}{\alpha_v}$ για :

$$v=1 \text{ έχω : } \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1} \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$v=2 \text{ έχω : } \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha_3 = 2$$

$$v=3 \text{ έχω : } \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3} \Leftrightarrow \alpha_4 = \frac{1}{2}$$

$$v=4 \text{ έχω : } \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4} \Leftrightarrow \alpha_5 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha_5 = 2$$

ii) Από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{v+1} = \alpha_v^2 + 1$ για :

$$v=1 \text{ έχω : } \alpha_2 = \alpha_1^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 1$$

$$v=2 \text{ έχω : } \alpha_3 = \alpha_2^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_3 = 1^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_3 = 2$$

$$v=3 \text{ έχω : } \alpha_4 = \alpha_3^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_4 = 2^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_4 = 5$$

$$v=4 \text{ έχω : } \alpha_5 = \alpha_4^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_5 = 5^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_5 = 26$$

63. (Άσκηση 3 σελ. 124 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες :

i) $\alpha_v = v + 5$ ii) $\alpha_v = 2^v$ iv) $\alpha_v = 5v + 3$

Λύση :

i) $\alpha_1 = 1 + 5 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$

Για να βρω μια σχέση που να συνδέει τους όρους α_{v+1} και α_v , υπολογίζω τη διαφορά : $\alpha_{v+1} - \alpha_v = (v+1) + 5 - (v+5) = v+1+5-v-5 = 1$. Άρα

$\alpha_{v+1} - \alpha_v = 1 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = \alpha_v + 1$. Άρα η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής :

$$\boxed{\alpha_1 = 6} \text{ και } \boxed{\alpha_{v+1} = \alpha_v + 1}$$

ii) $\alpha_1 = 2^1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$

Για να βρω μια σχέση που να συνδέει τους όρους α_{v+1} και α_v , υπολογίζω το

πηλίκο : $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{2^{v+1}}{2^v} = \frac{2^v \cdot 2}{2^v} = 2$. Άρα $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = 2 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = 2\alpha_v$. Άρα η ακολουθία

ορίζεται αναδρομικά ως εξής : $\boxed{\alpha_1 = 2}$ και $\boxed{\alpha_{v+1} = 2\alpha_v}$

iv) $\alpha_1 = 5 \cdot 1 + 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8$

Για να βρω μια σχέση που να συνδέει τους όρους α_{v+1} και α_v , υπολογίζω τη

διαφορά : $\alpha_{v+1} - \alpha_v = 5(v+1) + 3 - (5v+3) = 5v+5+3-5v-3 = 5$. Άρα

$\alpha_{v+1} - \alpha_v = 5 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = \alpha_v + 5$. Άρα η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής :

$$\boxed{\alpha_1 = 8} \text{ και } \boxed{\alpha_{v+1} = \alpha_v + 5}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

64. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

i. $\alpha_n = 3n + 2$ ii. $\alpha_n = 4n - 2$ iii. $\alpha_n = n^2 - 3n + 2$ iv. $\alpha_n = 2^{n-1}$

65. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες :

(ΑΠΟ ΓΕΝΙΚΟ ΤΥΠΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΣΕ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ)

i. $\alpha_n = 2n + 3$ ii. $\alpha_n = 3 \cdot 2^n$ iii. $\alpha_n = 3n - 1$ iv. $\alpha_n = 3^n - 2$

v. $\alpha_n = 2n - 3$ vi. $\alpha_n = 2n \cdot 3^n$ vii. $\alpha_n = 3^n + 1$

66. Να βρείτε το n -οστό (γενικό) όρο των ακολουθιών :

(ΑΠΟ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ ΤΥΠΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΣΕ ΓΕΝΙΚΟ)

i. $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 3$

ii. $\alpha_1 = 7$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 2$

iii. $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$

iv. $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n$

v. $\alpha_1 = 18$ και $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{3}$

67. Δίνεται η ακολουθία (α_n) με γενικό όρο $\alpha_n = 2n^2 - 4n$. Να βρείτε :

i. τους τέσσερις πρώτους όρους και τον 100^ο όρο της

ii. τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}$.

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της (από τον δεύτερο και μετά) προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε **διαφορά της προόδου**. Έτσι ισχύουν : $\alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega$ ή $\alpha_{v+1} - \alpha_v = \omega$

- Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :** Προσδιορισμός α_1 και ω μιας αριθμητικής προόδου όταν γνωρίζουμε στοιχεία για διάφορους όρους της.

Όταν έχουμε ως δεδομένα σχέσεις μεταξύ διαφόρων όρων μιας αριθμητικής προόδου α_v , τότε αντικαθιστούμε όλους τους όρους σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$. (Ασκήσεις 1 - 5 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 129,130)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :** Αριθμητικός Μέσος

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει : $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των α και γ .

(Ασκήσεις 6 - 7 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 130)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :** Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Έστω α_v μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω . Το άθροισμα S_v των πρώτων ν όρων της δίνεται από τον τύπο : $S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v)$. Αν αντικαταστήσουμε το

$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$, προκύπτει ο τύπος : $S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega]$

(Ασκήσεις 8 - 12 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 130)

Υποπερίπτωση : αν το άθροισμα είναι της μορφής : $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$ τότε αρχικά από τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$, υπολογίζω το ν ή το α_v (ανάλογα με την εκφώνηση) και στη συνέχεια από τον τύπο $S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v)$ υπολογίζω το ζητούμενο άθροισμα. (Άσκηση 10 Α΄ ομάδας σελ. 130, Ασκήσεις 2,3 Β΄ ομάδας σελ. 131)

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 :** Πως αποδεικνύουμε ότι μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον ν-οστό όρο της.

Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία α_n είναι αριθμητική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο της α_n , εργαζόμαστε ως εξής :

1^ο Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου ν το ν+1, στον τύπο του α_n

2^ο Υπολογίζουμε τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n$

3^ο Αν η παραπάνω διαφορά είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του ν), τότε η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, με διαφορά ω ίση με τον σταθερό αυτό αριθμό.
(Άσκηση 1 Β΄ ομάδας σελ. 131)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 129 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ν-οστό όρο των αριθμητικών προόδων :

i. 7,10,13,... iii. 5,2,-1,... v. -6,-9,-12,...

Λύση :

i. Στην αριθμητική πρόοδο 7,10,13,... έχω : $\alpha_1 = 7$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 10 - 7 \Leftrightarrow \omega = 3$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = 7 + (n-1)3 \Leftrightarrow \alpha_n = 7 + 3n - 3 \Leftrightarrow \alpha_n = 3n + 4$$

iii. Στην αριθμητική πρόοδο 5,2,-1,... έχω : $\alpha_1 = 5$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 2 - 5 \Leftrightarrow \omega = -3$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = 5 + (n-1)(-3) \Leftrightarrow \alpha_n = 5 - 3n + 3 \Leftrightarrow \alpha_n = -3n + 8$$

v. Στην αριθμητική πρόοδο -6,-9,-12,... έχω :

$$\alpha_1 = -6 \text{ και } \omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = -9 + 6 \Leftrightarrow \omega = -3$$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = -6 + (n-1)(-3) \Leftrightarrow \alpha_n = -6 - 3n + 3 \Leftrightarrow \alpha_n = -3n - 3$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 129 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμία από τις αριθμητικές προόδους :

i. τον α_{15} της -2,3,8,... vi. τον α_{47} της $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \dots$

Λύση :

i. Στην αριθμητική πρόοδο -2,3,8,... έχω : $\alpha_1 = -2$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 3 + 2 \Leftrightarrow \omega = 5$

$$\text{Άρα : } \alpha_{15} = \alpha_1 + (15-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{15} = -2 + 14 \cdot 5 \Leftrightarrow \alpha_{15} = -2 + 14 \cdot 5 \Leftrightarrow \alpha_{15} = -2 + 70 \Leftrightarrow \alpha_{15} = 68$$

vi. Στην αριθμητική πρόοδο $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{4}$

$$\text{Άρα : } \alpha_{47} = \alpha_1 + (47-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{1}{2} + 46 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{1}{2} + \frac{138}{4} \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{1}{2} + \frac{69}{2} \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{70}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{47} = 35.$$

3. (Άσκηση 6 σελ. 130 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2)**

i. Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και -40

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $5x+1$ και 11 είναι ο $3x-2$.

Λύση :

i. Ο αριθμητικός μέσος των $\alpha = 10$ και $\gamma = -40$ είναι ο $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{10 - 40}{2} \Leftrightarrow \beta = -15$

ii. Οι αριθμοί $\alpha = 5x + 1$, $\beta = 3x - 2$ και $\gamma = 11$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει : $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow 3x - 2 = \frac{5x + 1 + 11}{2} \Leftrightarrow 6x - 4 = 5x + 12 \Leftrightarrow x = 16$.

4. (Άσκηση 8 σελ. 130 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3)**

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων των αριθμητικών προόδων :

i. 7,9,11,...

Λύση :

i. Στην αριθμητική πρόοδο 7,9,11,... έχω : $\alpha_1 = 7$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 9 - 7 \Leftrightarrow \omega = 2$

$$\text{Άρα : } S_n = \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n-1)\omega] \Leftrightarrow S_{40} = \frac{40}{2} [2 \cdot 7 + (40-1)2] \Leftrightarrow S_{40} = 20(14 + 78) \Leftrightarrow S_{40} = 1840$$

5. (Άσκηση 10 σελ. 130 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 Υπο/πτώση)**

Να βρείτε τα αθροίσματα :

i. $1 + 5 + 9 + \dots + 197$

Λύση :

i. Οι αριθμοί 1,5,9,...,197 αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 5 - 1 \Leftrightarrow \omega = 4$. Είναι $\alpha_n = 197$ και ψάχνουμε το n .

Έτσι έχω : $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow 197 = 1 + (n-1)4 \Leftrightarrow 197 = 1 + 4n - 4 \Leftrightarrow 4n = 200 \Leftrightarrow n = 50$

$$\text{Άρα : } S_n = \frac{n}{2} (\alpha_1 + \alpha_n) \Leftrightarrow S_{50} = \frac{50}{2} (1 + 197) \Leftrightarrow S_{50} = 25 \cdot 198 \Leftrightarrow S_{50} = 4950.$$

(Εναλλακτικά θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω και τον άλλο τύπο του αθροίσματος :

$$S_{50} = \frac{50}{2} [2\alpha_1 + (50-1)\omega] \Leftrightarrow S_{50} = 25(2 \cdot 1 + 49 \cdot 4) \Leftrightarrow S_{50} = 25 \cdot 198 \Leftrightarrow S_{50} = 4950)$$

6. (Άσκηση 1 σελ. 131 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4)**

Ο n -ος όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 12 - 4n$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω .

Λύση :

Αρχικά βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου n το $n+1$, στον τύπο του α_n δηλαδή :

$$\alpha_{n+1} = 12 - 4(n+1) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 12 - 4n - 4 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 8 - 4n.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n = 8 - 4n - (12 - 4n) = 8 - 4n - 12 + 4n = -4$

Η διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n = -4$ είναι δηλαδή σταθερός αριθμός άρα η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = -4$ και πρώτο όρο :

$$\alpha_n = 12 - 4n \xrightarrow{n=1} \alpha_1 = 12 - 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7. Να βρείτε το 31^ο όρο των αριθμητικών προόδων :

i. 1,4,7,... ii. -9,-5,-1,... iii. 7,5,3,...

8. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. Να βρείτε :

- τον 10^ο όρο της προόδου,
- ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 62.

9. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = -15$ και $\alpha_7 = 9$. Να βρείτε :
- τη διαφορά ω της προόδου
 - τον 11^ο όρο της προόδου,
 - ποιος ορος της προόδου είναι ισος με 41.
10. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_8 = -3$ και $\omega = -2$. Να βρείτε :
- τον πρώτο όρο της προόδου
 - τον 19^ο όρο της προόδου,
 - ποιος ορος της προόδου είναι ισος με -40.
11. Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών :
- 5 και 37
 - 3 και 23
 - 31 και -3
12. Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $2x+1$ και $7x+2$ είναι ο 15.
13. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$, οι αριθμοί : $x+5$, $3x-5$, $2x+6$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
14. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = -14$ και $\omega = 3$. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 20 όρων της προόδου.
15. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου :
- 3,5,7,...
 - 8,-3,2,...
 - 2,-1,-4,...
16. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :
- $1+4+7+\dots+94$
 - $3+7+11+\dots+119$
 - $-5-1+3+7+\dots+135$
17. i. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) και έστω S_n, S_{2n} και S_{3n} τα αθροίσματα των πρώτων $n, 2n$ και $3n$ όρων της αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$
- ii. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει: $\alpha_{41} + \alpha_{42} + \dots + \alpha_{80} = 2010$. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 120 όρων της.
18. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_6=8$ και $\alpha_{11}=23$. Να βρείτε:
- Τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου
 - Πόσοι πρώτοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 14
 - Το άθροισμα $S = a_{15} + a_{16} + \dots + a_{25}$
 - Το άθροισμα $S_1 = a_1 + a_3 + \dots + a_{39}$
19. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 50 θετικών πολλαπλασίων του 3.
20. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 θετικών πολλαπλασίων του 5.
21. Να βρείτε το άθροισμα :
- των άρτιων αριθμών μεταξύ 21 και 153
 - των περιπλών αριθμών μεταξύ 10 και 170
 - των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 40 και 200
 - των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 31 και 206.

5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της (από τον δεύτερο και μετά) προκύπτει από τον προηγούμενο του με πολλαπλασιασμό επί του ίδιου πάντοτε αριθμού. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγος της**

πρόοδου. Έτσι ισχύουν : $\alpha_{v+1} = \alpha_v \cdot \lambda$ ή $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \lambda$

- Ο ν-οστός όρος μιας γεωμετρικής πρόοδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$$

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :** Προσδιορισμός α_1 και λ μιας γεωμετρικής πρόοδου όταν γνωρίζουμε στοιχεία για διάφορους όρους της.

Όταν έχουμε ως δεδομένα σχέσεις μεταξύ διαφόρων όρων μιας γεωμετρικής πρόοδου α_v , τότε αντικαθιστούμε όλους τους όρους σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$. Στη συνέχεια συνήθως διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν. (Ασκήσεις 1 - 7 σχ. βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 136 - 137)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :** Γεωμετρικός Μέσος

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόοδου, αν και μόνο αν ισχύει : $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$. Ο β λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ (Πρέπει να είναι πάντα θετικούς αριθμούς).

(Άσκηση 8 σχ. βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 137, Άσκηση 2 σχ. βιβλίο Β΄ ομάδας σελ. 138)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :** Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής πρόοδου

Έστω α_v μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda \neq 0$. Το άθροισμα S_v των πρώτων ν

όρων της δίνεται από τον τύπο : $S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$. Αν αντικαταστήσουμε το

$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$, προκύπτει ο τύπος : $S_v = \frac{\alpha_v \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1}$. Με τον τύπο αυτό υπολογίζουμε

το άθροισμα των πρώτων ν - όρων μιας γεωμετρικής πρόοδου, χωρίς να γνωρίζουμε το πλήθος αυτών, αρκεί να γνωρίζουμε τα $\alpha_v, \alpha_1, \lambda$

(Ασκήσεις 9 - 10 σχ. βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 138)

Υποπερίπτωση : αν το άθροισμα είναι της μορφής : $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$ τότε αρχικά από τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$, υπολογίζω το ν ή το α_v (ανάλογα με την εκφώνηση) και στη

συνέχεια από τον τύπο $S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$ υπολογίζω το ζητούμενο άθροισμα. (Άσκηση 11 Α΄ ομάδας σελ. 138)

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 :** Πως αποδεικνύουμε ότι μια ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον ν-οστό όρο της.

Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία α_n είναι γεωμετρική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο της α_n , εργαζόμαστε ως εξής :

1^{ov} Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου ν το ν+1, στον τύπο του α_n

2^{ov} Υπολογίζουμε το πηλίκο $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$

3^{ov} Αν το παραπάνω πηλίκο είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του ν), τότε η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος, με λόγο λ ίσο με τον σταθερό αυτό αριθμό.
(Άσκηση 1 Β΄ ομάδας σελ. 138)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 136 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ν-οστό όρο των γεωμετρικών προόδων :

- i. 3,6,12,... ii. $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$ vi. 18,6,2,...

Λύση :

i. Στην γεωμετρική πρόοδο 3,6,12,... έχω : $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

ii. Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \lambda = 3$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2}{3} \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 2 \cdot 3^{n-2}$$

vi. Στην γεωμετρική πρόοδο 18,6,2,... έχω : $\alpha_1 = 18$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{18} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2}{3^{n-3}}$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμία από τις γεωμετρικές προόδους :

- i. τον α_9 της $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$ iv. τον α_{10} της 1, -2, 4, ...

Λύση :

i. Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot 2^{9-1} \Leftrightarrow \alpha_9 = \frac{1}{2^2} \cdot 2^8 \Leftrightarrow \alpha_9 = 2^6 \Leftrightarrow \alpha_9 = 2^6 \Leftrightarrow \alpha_9 = 64$$

iv. Στην γεωμετρική πρόοδο 1, -2, 4, ... έχω : $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow \lambda = -2$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_{10} = 1 \cdot (-2)^{10-1} \Leftrightarrow \alpha_{10} = (-2)^9 \Leftrightarrow \alpha_{10} = -512$$

3. (Άσκηση 8 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2)**

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20 καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$.

ii. Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Λύση :

i. Ο γεωμετρικός μέσος των $\alpha=5$ και $\gamma=20$ είναι ο $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta^2 = 5 \cdot 20 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 \Leftrightarrow \beta = 10$

Ο γεωμετρικός μέσος των $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\gamma = \sqrt{3}$ είναι ο $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow$

$$\beta^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$$

ii. Οι αριθμοί $\alpha = x-4$, $\beta = x+1$ και $\gamma = x-19$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει : $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-4)(x-19) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 19x - 4x + 76 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 25x = 75 \Leftrightarrow x = 3$.

4. (Άσκηση 8 σελ. 130 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3)**

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων :

i. 1,2,4,...

Λύση :

i. Στην γεωμετρική πρόοδο 1,2,4,... έχω : $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα : } S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow S_{10} = \frac{1024 - 1}{1} \Leftrightarrow S_{10} = 1023$$

5. (Άσκηση 10 σελ. 138 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 Υπο/πτώση)**

Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

i. $2+8+32+\dots+8192$

Λύση :

i. Οι αριθμοί 2,8,32,...,8192 αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{2} \Leftrightarrow \lambda = 4$. Είναι $\alpha_n = 8192$ και ψάχνουμε το n .

$$\text{Έτσι έχω : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow 8192 = 2 \cdot 4^{n-1} \Leftrightarrow 4^{n-1} = 4096 \Leftrightarrow 4^{n-1} = 4^6 \Leftrightarrow n-1 = 6 \Leftrightarrow n = 7$$

$$\text{Άρα : } S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_7 = 2 \cdot \frac{4^7 - 1}{4 - 1} \Leftrightarrow S_7 = 2 \cdot \frac{16384 - 1}{3} \Leftrightarrow S_7 = 10922$$

(Εναλλακτικά θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω και τον άλλο τύπο του αθροίσματος :

$$S_n = \frac{\alpha_n \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_7 = \frac{8192 \cdot 4 - 2}{4 - 1} \Leftrightarrow S_7 = 10922)$$

6. (Άσκηση 1 σελ. 138 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4)**

Ο n -ος όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή

είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ .

Λύση :

Αρχικά βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου n το $n+1$, στον τύπο του α_n δηλαδή :

$$\alpha_{n+1} = 2^{n+1} \cdot \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το λόγο : $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{\frac{2^{v+1}}{3^{v+2}}}{\frac{2^v}{3^{v+1}}} = \frac{2^v \cdot 2 \cdot 3^v \cdot 3}{2^v \cdot 3^v \cdot 3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Ο λόγος $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{2}{3}$ είναι δηλαδή σταθερός αριθμός άρα η ακολουθία (α_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = \frac{2}{3}$ και πρώτο όρο : $\alpha_v = 2^v \cdot \frac{1}{3^{v+1}} \Leftrightarrow \alpha_1 = 2^1 \cdot \frac{1}{3^{1+1}} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2}{9}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7. Να βρείτε το 8^ο όρο των παρακάτω γεωμετρικών προόδων :

- i. 1,2,4,... ii. 32,16,8,... iii. $\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, \dots$ iv. $\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \dots$

8. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_v) είναι $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ και $\lambda = 2$. Να βρείτε :

- i. τον 8^ο όρο της (α_v) ii. ποιος ορος της (α_v) είναι ισος με 12.

9. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_v) είναι $\alpha_1 = \frac{2}{9}$ και $\alpha_4 = 6$. Να βρείτε :

- i. τον λόγο λ της (α_v) ii. τον 6^ο όρο της (α_v)

10. Οι αριθμοί 2, x, 8 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε το x.

11. Ο αριθμός 6 είναι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών $x-3$ και $2x+8$. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x.

12. Οι αριθμοί $x-2$, $2x-2$, $4x+4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε το x.

13. Οι αριθμοί 2, $x-1$, x^2+2x-3 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x.

14. Οι αριθμοί $x-6$, $x-2$, $2x+2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

- i. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x.
ii. Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του x που βρήκατε στο i. να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών x και 50.

15. Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου : 4,12,36,...

16. Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου : 192,96,48,...

17. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα : i. $5+10+20+\dots+640$ ii. $4-8+16-\dots-8192$

18. Δίνεται γεωμ. πρόοδος για την οποία ισχύει $\frac{S_{10}}{S_5} = 33$. Να βρείτε:

- i. τον λόγο λ της (α_v) ii. το πηλίκο $\frac{S_6}{a_6}$.

19. Ο ν-ος ορος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 2^{n+2} \cdot \frac{1}{3^n}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο : $\alpha_n = 2n - 11$.
 - να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = -9$ και διαφορά $\omega = 2$.
 - Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{21}$, όπου $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου α_n .
 - Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης : $|x^2 - 2x - 1| = 2$ είναι διαδοχικοί όροι της προηγούμενης προόδου α_n .
- Δίνεται αριθμητική πρόοδος α_n , της οποίας ο 13^{ος} ορος είναι -32 και το άθροισμα των πρώτων 8 όρων της είναι 84.
 - Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της αριθμητικής προόδου α_n .
 - Να λύσετε την εξίσωση $x^4 + \alpha_7 x^2 = \alpha_5$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^3 + \alpha_{12}}{x^2 - 5x - S_{12}} \geq 0$
- Οι αριθμοί $x - 4$, $x + 4$, $3x - 4$ με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου α_n .
 - Να βρείτε την τιμή του x
Αν ο αριθμός $x - 4$, είναι ο πέμπτος ορος της αριθμητικής προόδου α_n , να βρείτε :
 - τον α_1 και τη διαφορά ω της α_n
 - το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της α_n
 - ποιος ορος της α_n είναι ίσος με 100
 - το πλήθος των πρώτων όρων της α_n που έχουν άθροισμα 80.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + 2\lambda - 12 = 0$ (1)
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ, οι αριθμοί :
 $-x_1 x_2, \quad x_1 + x_2, \quad \frac{1}{2}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.
- Σε μια γεωμετρική πρόοδο α_n ο τρίτος ορος είναι ίσος με 16 και ο έκτος ορος είναι ίσος με 2. Να βρείτε :
 - τον πρώτο όρο και τον λόγο της α_n
 - τον δέκατο όρο της α_n

- iii. το άθροισμα των πρώτων 6 όρων της α_n
- iv. τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών α_8 και $\alpha_1 + \alpha_4$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ

ΘΕΜΑ 1 (3^ο Πανελλήνιες 1999 Επαναληπτικές)

Ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_1=27$ και ο λόγος της είναι $\lambda = -\frac{1}{3}$.

α) Να βρείτε τον τέταρτο όρο της προόδου. (Μονάδες 7)

β) Το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με:

A. $-\frac{61}{3}$, B. 61, Γ. -61, Δ. $\frac{61}{3}$ (Μονάδες 8)

γ) Το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου είναι ίσο με:

A. $-\frac{81}{4}$, B. $\frac{81}{4}$, Γ. $\frac{81}{2}$, Δ. $-\frac{81}{2}$ (εκτός ύλης) (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 (2^ο Πανελλήνιες 1999)

Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο έκτος όρος είναι ίσος με 2.

α) Ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι :

A.	$\alpha_1 = 64$	και	$\lambda = -1/2$
B.	$\alpha_1 = -64$	και	$\lambda = -1/2$
Γ.	$\alpha_1 = 64$	και	$\lambda = 1/2$
Δ.	$\alpha_1 = 32$	και	$\lambda = 1/2$

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της γεωμετρικής προόδου. Μονάδες 9

γ) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου.(εκτός ύλης)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3 (2^ο Πανελλήνιες 2000 Επαναληπτικές)

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες οι αριθμοί $x - 4$, $x + 4$ και $3x - 4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Μονάδες 10

β. Αν ο αριθμός $x + 4$ είναι ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου του α. ερωτήματος, να βρείτε τον πρώτο όρο της. Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου του α. ερωτήματος. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4 (4^ο Πανελλήνιες 2000)

Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα.

A. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες. Μονάδες 9

B. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων κάθε ώρα.

B.1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό. Μονάδες 8

B.2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια; Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 5 (4^ο Πανελλήνιες 2001 Επαναληπτικές)

Σε ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

- α. Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά. Μονάδες 10
- β. Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου. Μονάδες 7
- γ. Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο; Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 6 (4^ο Πανελλήνιες 2002 Επαναληπτικές)

Έστω δύο κοινωνίες βακτηριδίων **A** και **B**. Αν συμβολίσουμε με A_0 τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας **A** και με B_0 τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας **B**, τότε $9A_0 = 10^{11}B_0$.

Ο πληθυσμός της κοινωνίας **A** μειώνεται κάθε ώρα κατά το $\frac{1}{100}$ του αρχικού πληθυσμού

της, ενώ ο πληθυσμός της κοινωνίας **B** αυξάνεται ανά ώρα με γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ. Οι δύο πληθυσμοί γίνονται ίσοι 10 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

- α. Να δείξετε ότι ο λόγος της γεωμετρικής προόδου που αναφέρεται στον πληθυσμό **B** είναι $\lambda = 10$. Μονάδες 10
- β. Πέντε ώρες μετά την αρχική στιγμή ο πληθυσμός της κοινωνίας **B** είναι 10^{10} βακτηρίδια. Να δείξετε ότι ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας **B** ήταν 10^5 βακτηρίδια. Μονάδες 8
- γ. Να βρείτε τον πληθυσμό της κοινωνίας **A**, 99 ώρες μετά την αρχική στιγμή. Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : ΠΡΟΟΔΟΙ

1. ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

2. ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

(Μονάδες 13)

3. ΘΕΜΑ 2

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_n) με θετικό λόγο λ , ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_n = 2^{n-3}.$$

(Μονάδες 12)

4. ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \dots, n$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

(Μονάδες 13)

5. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(Μονάδες 15)

6. ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$

(Μονάδες 12)

7. ΘΕΜΑ 2

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Μονάδες 8)

8. ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

α) Να βρείτε τη τιμή του x . (Μονάδες 10)

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) ,

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω . (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

9. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

10. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=5$. (Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)

11. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1=1$ και $\alpha_3=9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο n , ώστε να ισχύει $\alpha_n > 30$.

(Μονάδες 13)

12. ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x+4, 2-x, 6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

13. ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

14. ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$. (Μονάδες 13)

15. ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$. (Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

16. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$. (Μονάδες 10)

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 . (Μονάδες 15)

17. ΘΕΜΑ 4

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το $n^{\text{ο}}$ όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^η κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^η κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

18. ΘΕΜΑ 4

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^η μέχρι και την 14^η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

19. ΘΕΜΑ 4

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

20. ΘΕΜΑ 4

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1^ο μήνα 1 ευρώ, το 2^ο μήνα 2 ευρώ, τον 3^ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1^ο μήνα 100 ευρώ, το 2^ο μήνα 110 ευρώ, τον 3^ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό a_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n° μήνα σύμφωνα

με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό B_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n° μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

21. ΘΕΜΑ 4

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1^{ης} ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2^{ης} ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3^{ης} ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5^{ης} ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από την στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.; (Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 8^{ης} ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

22. ΘΕΜΑ 4

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , ο 3^{ος} όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον 31^ο όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31) \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

23. ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί : $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x . (Μονάδες 6)

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

24. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_n) , τέτοιοι

ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. (Μονάδες 9)

25. ΘΕΜΑ 4

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 6400, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n . (Μονάδες 12)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

26. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $(\beta_n) = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδος

με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) . (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_n) και (β_n)

αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$ (Μονάδες 8)

27. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^*$ που αποτελείται από ακέραιους

αριθμούς για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$ όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί ο n -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

28. ΘΕΜΑ 4

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ) Αν στην 1^η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2^η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου B . Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης και περιέχει τις δυνατές τιμές που μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x . (το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f το συμβολίζουμε συνήθως D_f ή A_f). Το σύνολο B λέγεται σύνολο τιμών της f και περιέχει όλες τις τιμές της $f(x)$ για τα αντίστοιχα $x \in A$.

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = x^2 - 3x + 12$
- ii. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$
- iii. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$
- iv. $f(x) = 2x + \sqrt{6 - x}$
- v. $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 3} + \sqrt{x - 2}$
- vi. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt{2 - x}$
- vii. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

Λύση :

- i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$
- ii. Πρέπει : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
- iii. Πρέπει : $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$
- iv. Πρέπει : $6 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$. Άρα $D_f = (-\infty, 6]$
- v. Πρέπει : $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Άρα $D_f = [2, 3) \cup (3, +\infty)$
- vi. Πρέπει : $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, 2]$. Άρα $D_f = [1, 2]$
- vii. Πρέπει : $x \neq 0$ (1) και $1 - x^2 \geq 0$ (2)

Έχω $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f = [-1, 0] \cup (0, 1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = 2x^2 - 7x + 15$ ii. $f(x) = \frac{x - x^2}{12 + 3x}$ iii. $f(x) = \frac{x^2 - 7}{2x - 8}$ iv. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}$
 v. $f(x) = 2x^2 + \sqrt{14 - 2x}$ vi. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ vii. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 8}$

3) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+5}$ ii. $f(x) = \frac{4x}{x-3} + \frac{2x-7}{x^2+3x-4}$ iii. $f(x) = \frac{6-4x}{x^2-9} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{5}{2}$
 iv. $f(x) = \frac{2x+6}{|2x-1|-5}$ v. $f(x) = \frac{x+1}{5-|1-3x|}$ vi. $f(x) = \frac{2x+7}{5+|1-3x|}$ vii. $f(x) = \frac{x+3}{|x-2|-|2x-1|}$

4) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x+3}{x^3+8}$ ii. $f(x) = \frac{x-1}{x^3-9x}$ iii. $g(x) = \frac{2x+7}{x^3-4x^2+4x}$
 iv. $g(x) = \frac{5x-12}{x^3+x^2+x}$ v. $h(x) = \frac{x-5}{x^4-27x}$ vi. $h(x) = \frac{x+2}{16x^6-x^2}$

5) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{2x-6} + \sqrt{x+2}$ ii. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$ iii. $g(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{x-1}$
 iv. $g(x) = \frac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x}$ v. $h(x) = \frac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2}$ vi. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{2-|x|}$

6) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{|x|-x}$ ii. $f(x) = \frac{1}{|x|+x}$ iii. $g(x) = \sqrt{|x|-x}$
 iv. $g(x) = \sqrt{x-|x|}$ v. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ vi. $h(x) = \sqrt{|x|+x}$

7) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & \alpha\nu \ x \geq 0 \\ -x^2+7, & \alpha\nu \ x < 0 \end{cases}$

- i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
 ii. Να βρείτε τις τιμές: α) $f(-3)$ β) $f\left(\frac{5}{2}\right)$ γ) $f(-1)$ δ) $f(0)$ ε) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ στ) $f(-\sqrt{3})$
 iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + 2x$.

- i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

- ii. Να βρείτε τις επόμενες τιμές: i) $f(-2)$ ii) $f(-1)$ iii) $f(0)$ iv) $f\left(\frac{2}{3}\right)$
 iii. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A=f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)-2(f(\alpha)+f(\beta))$
 iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1)+f(x)=-1$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

- i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;
 ii. Να βρείτε τις τιμές: i) $f(-2)$ ii) $f(0)$ iii) $f(5)$
 iii. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: i) $f(-3\alpha)$ ii) $f(2\alpha^2)$ iii) $f(\alpha-\beta)$
 iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$
 v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x+2) + f(x) \leq 22$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2 + 8x}$

- i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;
 ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f
 iii. Να βρείτε τις τιμές: i) $f(2)$ ii) $f(4)$ iii) $f(-4)$ iv) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + a$ για την οποία ισχύει $f(4)=6$.

- i. Να βρείτε τον αριθμό a
 ii. Να βρείτε τις τιμές $f(-3), f(-1), f(0)$ και $f(2)$.
 iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=12$.
 iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<6$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+a}{x^2+3x-4}$ για την οποία ισχύει $f(-5)=-2$.

- i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;
 ii. Να βρείτε τον αριθμό a .
 iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$
 iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 5$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(\alpha + \beta) - f(\alpha) = f(\beta) + 5$ ii. $f(\alpha^2) + f(\beta^2) \geq 2f(\alpha\beta)$

14) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+2) = 3f(2) - 2(x-3)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε: α) την τιμή $f(2)$, β) τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

15) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 6|x| + a}{x^2 - 9}$ για την οποία ισχύει $f(5) = \frac{1}{4}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 ii. Να βρείτε τον αριθμό a .
 iii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
 iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.
 v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \frac{1}{3}$.

16) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x+a, & \alpha\nu \ x \geq -2 \\ x^2+\beta x+a, & \alpha\nu \ x \leq -2 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(-1)=-7$.

i. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-8$.

iii. Να μετατρέψετε το κλάσμα: $\frac{2}{f(-\sqrt{6})+f(\sqrt{6})}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $x(x+1) \leq f(f(-6))$.

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$ και η εξίσωση $x^2-3x+1=0$. (1)

Ισχύει: $f(\Delta) = \frac{1}{6}$ όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης (1).

i. Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f .

ii. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού, που να έχει ρίζες τους αριθμούς $f(x_1)$ και $f(x_2)$.

18) Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20m και πλάτος x m.

i. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 21 m^2 .

19) Σε μια κοινότητα όλοι οι καταναλωτές νερού πληρώνουν 6€ πάγιο κάθε μήνα, ανεξαρτήτως κατανάλωσης. Για τα πρώτα 12 m^3 νερού πληρώνουν $0,60 \text{ €/m}^3$. Για κάθε επιπλέον m^3 από τα 12 m^3 πληρώνουν $0,80 \text{ €/m}^3$. Να βρεθεί συνάρτηση $y = f(x)$ που να δίνει το κόστος y του νερού, αν σε ένα μήνα καταναλωθούν $x \text{ m}^3$ νερό.

20) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 4x-2, & \alpha\nu \ x \leq 1 \\ \frac{x+a}{8}, & \alpha\nu \ x > 1 \end{cases}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση

$x^2 + f(-1) \cdot x + f(75) = 0$ (1), έχει μοναδική ρίζα.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και να βρείτε την ρίζα της εξίσωσης (1).

ii. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν: $P(A \cap B) = f(4)$, $f(P(A)) = 0$ και $f(P(A \cup B)) = 1$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

Έστω δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Ο τύπος που δίνει την απόσταση των σημείων A και B είναι : $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Αν $A(-4, -2)$ και $B(2, -2)$, να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B.

Λύση : $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 + 4)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{36} = 6$

2. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, 6)$.

- Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από το B.
- Να βρείτε σημείο Γ που ανήκει στον άξονα x'x, τέτοιο ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με $(GA) = (GB)$

Λύση :

- $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
- Το $\Gamma \in x'x \Leftrightarrow \Gamma(x, 0)$. Επίσης $(GA) = (GB) \Leftrightarrow \sqrt{(1 - x)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(-1 - x)^2 + (6 - 0)^2} \Leftrightarrow$
 $(1 - x)^2 + 4 = [-(1 + x)]^2 + 36 \Leftrightarrow (1 - x)^2 + 4 = (1 + x)^2 + 36 \Leftrightarrow$
 $1 - 2x + x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2 + 36 \Leftrightarrow -4x = 32 \Leftrightarrow x = -8$ άρα $\Gamma(-8, 0)$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f (συμβ. C_f) ισχύουν τα παρακάτω :

- Για όλα τα σημεία $M(x, y)$ που ανήκουν στη C_f ισχύει $y = f(x)$. Δηλ. $M(x, f(x))$. Πιο συγκεκριμένα το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη C_f , αν και μόνο αν $f(x_0) = y_0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $x'x$ σε σημεία της της μορφής $M(x_0, 0)$, οπότε για να τα βρούμε λύνουμε την εξίσωση $y = f(x) = 0$
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $y'y$ σε σημεία της της μορφής $M(0, y_0)$, οπότε για να τα βρούμε, βάζουμε όπου x το 0 δηλ. υπολογίζουμε το $f(0)$
- Για να βρούμε κοινά σημεία C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν :

i. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ii. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

Λύση :

i. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$

Έχω $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \eta, x = 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 > 0$ τότε $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

ii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0$

Έχω $(1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $(1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

4. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , όταν :
- i. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ και $g(x) = x + 1$ ii. $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

Λύση :

i. Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x > 0$

Έχω $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + 1 = 0$ αδύνατη

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$x^2 + 1$	+		+
Γινόμενο	-	0	+

Αρα επειδή θέλω $x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

ii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 > 0$

Έχω $x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ή, $x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2	+	0	+		+
$x - 1$	-		-	0	+
Γινόμενο	-	0	-	0	+

Αρα επειδή θέλω $x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$. Να εξετάσετε αν τα σημεία A(1,5) και B(3,7) ανήκουν στην καμπύλη της f .

6. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ να διέρχεται από τα σημεία A(-1,3) και B(1,7).

7. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία A(0,3), B(-1,0) και Γ(-2,-1).

8. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

i. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

ii. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+9}$

iii. $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$

9. Δίνεται η επόμενη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \alpha \nu \ x \geq 2 \\ |x-3| - 2, & \alpha \nu \ x < 2 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην γραφική παράσταση της f :

i. A(5,10) ii. B(-1,2) iii. Γ(2,-1) iv. Δ(3,0) v. E(1,0) vi. Z(4,-1)

10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} |x| - 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 - 4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε: α) το πεδίο ορισμού της f , β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} \cdot (|2x - 1| - 3)$. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f ,
- ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

12. Το σημείο $M(-3, -5)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + \lambda x - 8$. Να βρείτε:
α) τον αριθμό λ , β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

13. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 + \beta x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από τα σημεία $A(-3, 5)$ και $B(5, 10)$.

- i. Να βρείτε τις τιμές των a και β .
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iv. Αν είναι $M(2, f(2))$ και $N(-1, f(-1))$, να βρείτε την απόσταση (MN) .

14. Οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων: $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$ και

$g(x) = x^2 + \lambda x - 5$ τέμνουν τον άξονα $x'x$ στο ίδιο σημείο. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f
- ii. τον αριθμό λ
- iii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| - 5$. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f
- ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iii. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται: i) πάνω από τον άξονα $x'x$
ii) κάτω από τον άξονα $x'x$

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = -x^2 - 2x + 15$. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία:

- i. η C_f δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$
- ii. η C_g δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$
- iii. η C_f δεν βρίσκεται κάτω από τη C_g

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2x - 7| + a$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 4.

- i. Να βρείτε τον αριθμό a .
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται:
α) πάνω από τον άξονα $x'x$ β) κάτω από τον άξονα $x'x$.

18. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + a, & \text{αν } x < -1 \\ |x + 1| - a, & \text{αν } x \geq -1 \end{cases}$ της οποίας η γραφική

παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -3. Να βρείτε:

- i. την τιμή του a
- ii. τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- iii. τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 6.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a - x^2}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-4,3)$.

- i. Να βρείτε τον αριθμό a και το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

20. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^2 + \lambda x + \mu}{|2x - 1| - 5}$ η οποία τέμνει τον

άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $\frac{5}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $M(2,6)$. Να βρείτε:

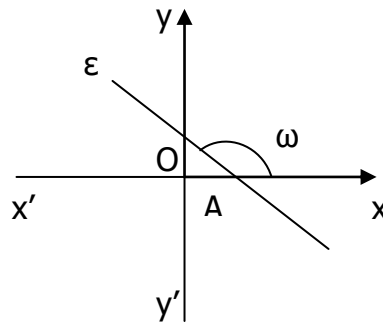
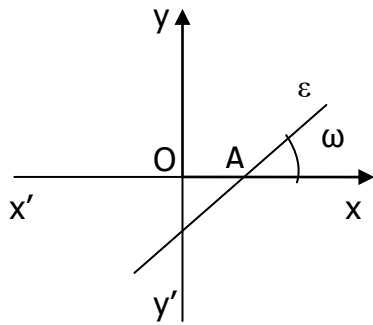
- i. το πεδίο ορισμού της f
- ii. τους αριθμούς λ και μ
- iii. τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$
- iv. το συμμετρικό του σημείου $N(4, f(4))$ ως προς: i) τον άξονα $x'x$, ii) τον άξονα $y'y$, iii) την αρχή των αξόνων, iv) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x + \beta$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

➤ Γωνία ευθείας (ε) με τον άξονα $x'x$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .



Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$** .

- Αν $(\varepsilon) // x'x$, είναι $\omega=0$
- Αν $(\varepsilon) // y'y$, είναι $\omega=90^\circ$ ή $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$
- Σε κάθε περίπτωση είναι $0 \leq \omega \leq 180^\circ$ ή $0 \leq \omega \leq \pi$

➤ Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Συντελεστής διεύθυνσης λ ευθείας, ονομάζεται η εφαπτομένη της γωνίας την οποία σχηματίζει η ευθεία, με τον άξονα $x'x$.

Δηλ.: $\lambda = \varepsilon \omega$ με: $0 \leq \omega \leq \pi$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία με εξίσωση : $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$
- Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\alpha=0$. $((\varepsilon) // x'x \Leftrightarrow \alpha_\varepsilon = 0)$
- Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για ευθεία παράλληλη του άξονα $y'y$. $((\varepsilon) // y'y \Leftrightarrow \alpha_\varepsilon = \text{--} \text{ δεν ορίζεται})$
- Αν $\alpha_\varepsilon > 0$ τότε η (ε) σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$
- Αν $\alpha_\varepsilon < 0$ τότε η (ε) σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :

Αν μια ευθεία (ε) περνάει από τα σημεία: $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\alpha_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$, διότι αν $x_1 = x_2$ η AB είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, άρα δεν έχουμε συντελεστή διεύθυνσης).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (AB) η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-3, -5)$ και $B(-9, 1)$. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζει η (AB) με τον άξονα $x'x$;

Λύση : $\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-5)}{-9 - (-3)} = \frac{6}{-9 + 3} = \frac{6}{-6} = -1$, δηλ. $\lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\omega = -1$, άρα $\omega = 135^\circ$ ή $\omega = \frac{3\pi}{4}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :

Μια ευθεία γενικά έχει τη μορφή (ε) : $y = \alpha x + \beta$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. είναι ο συντελεστής διεύθυνσης.

- Για να βρούμε τα κοινά σημεία δυο ευθειών **λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους**. Αν το σύστημα έχει μια λύση οι ευθείες τέμνονται, αν έχει άπειρες λύσεις τότε ταυτίζονται ενώ αν είναι αδύνατο τότε οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $x'x$, **θέτουμε $y=0$ στην εξίσωση της**.

- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $y'y$, **θέτουμε $x=0$ στην εξίσωση της**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Δίνονται οι ευθείες (ε) : $y = 2x + 4$ και (ζ) : $y = \frac{7}{2}x + 1$. Να βρείτε :

- α_ε , α_ζ
- το σημείο τομής των (ε) και (ζ)
- τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες

Λύση :

i. (ε) : $y = 2x + 4$ άρα $\alpha_\varepsilon = 2$, (ζ) : $y = \frac{7}{2}x + 1$ άρα $\alpha_\zeta = \frac{7}{2}$

- ii. Για να βρω το σημείο τομής των (ε) και (ζ) θα λύσω το σύστημα των εξισώσεων

τους :
$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = \frac{7}{2}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ 2y = 7x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 4 \\ -7x + 2y = 2 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -8 \\ -7x + 2y = 2 \end{cases} \text{ προσθέτω}$$

κατά μέλη και έχω $-3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$ άρα πάω στην πρώτη και έχω :

$4 \cdot 2 - 2y = -8 \Leftrightarrow 8 - 2y = -8 \Leftrightarrow 2y = 16 \Leftrightarrow y = 8$. Άρα το σημείο τομής των (ε) και (ζ) είναι το σημείο Α(2,8)

iii. Για να βρούμε σημείο τομής της (ε) με τον χ'χ θέτω $y = 0$ στην εξίσωση της :

(ε): $y = 2x + 4 \Leftrightarrow 0 = 2x + 4 \Leftrightarrow x = -2$, άρα το σημείο τομής της (ε) με τον χ'χ είναι το Β(-2,0)

Για να βρούμε σημείο τομής της (ε) με τον γ'γ θέτω $x = 0$ στην εξίσωση της :

(ε): $y = 2x + 4 \Leftrightarrow y = 2 \cdot 0 + 4 \Leftrightarrow y = 4$, άρα το σημείο τομής της (ε) με τον γ'γ είναι το Γ(0,4)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : (ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ & ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΕΥΘΕΙΩΝ)

- Δύο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, δηλ. $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.
- Δύο ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντιθετοαντίστροφους, δηλ. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίο :

- Οι ευθείες $y = (3\lambda - 5)x + 4$ και $y = -x + 12$ είναι παράλληλες.
- Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = (\lambda - 1)x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x - 3$ είναι κάθετες.

Λύση :

- Έστω $(\varepsilon): y = (3\lambda - 5)x + 4$ και $(\zeta): y = -x + 12$. $(\varepsilon) // (\zeta) \Leftrightarrow \alpha_\varepsilon = \alpha_\zeta \Leftrightarrow 3\lambda - 5 = -1 \Leftrightarrow 3\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$
- Έστω $(\varepsilon_1): y = (\lambda - 1)x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x - 3$. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda - \frac{\lambda^2}{2} - 1 + \frac{\lambda}{2} = -1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 - 2 + \lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon: y = -2x + 4$ και $\zeta: y = 3x + 9$.

- Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών.
- Να σχεδιάσετε τις ευθείες ε και ζ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

5. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x + \lambda}{3}$ διέρχεται από το σημείο Α(-1,-2).

- Να βρείτε τον αριθμό λ .
- Να βρείτε το $f(2)$.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

6. Η ευθεία $\varepsilon: y=(2\lambda-6)x+\lambda-1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

- i. Να βρείτε τον αριθμό λ .
- ii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

7. Η ευθεία $\varepsilon: y=(3-\lambda)x+\lambda+1$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

- i. Να βρείτε τον αριθμό λ .
- ii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

8. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=|x+4|-2|x-2|-2x$

- i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$
- iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+x+3$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x-1|+\lambda x+\mu$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 5 και τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 3.

- i. Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .
- ii. Να κάνετε τη γραφική παράστασης της f .

11. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y=(\alpha+2)x+7\alpha+4$ και $\zeta: y=(\beta-\alpha)x-\beta-2\alpha$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $M(-3,2)$ και ισχύει ότι $\varepsilon \parallel \zeta$. Να βρείτε:

- i. τις τιμές των α και β
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες.

12. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=-2x+2$, $\varepsilon_2: y=4x-1$ και $\varepsilon_3: y=-3x+6$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας:

- i. που είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από το σημείο τομής των ε_2 και ε_3
- ii. που διέρχεται από το σημείο τομής των ε_1 και ε_3 και το σημείο της ε_2 με τετμημένη -3.

13. Η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x-4$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$, ενώ το τρίγωνο που σχηματίζει με τους άξονες έχει εμβαδόν 4 τ.μ. Να βρείτε τον αριθμό λ .

14. Η ευθεία $\varepsilon: y=\frac{\lambda+1}{2} \cdot x+1-\lambda$ διέρχεται από το σημείο $A(-4,5)$. Να βρείτε:

- i. τον αριθμό λ ,
- ii. την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $B(4,6)$
- iii. το σημείο στο οποίο η ευθεία ε τέμνει την ευθεία ζ που βρήκατε στο (β).

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|$ και έστω A και B τα σημεία της γραφικής της παράστασης με τετμημένες -3 και 5 αντίστοιχα.

- i. Να βρείτε τις τεταγμένες των σημείων A και B , καθώς και την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B .
- ii. Να σχεδιάσετε την C_f και την παραπάνω ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- iii. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x| \leq \frac{x+15}{4}$.

16. Δύο πόλεις Α και Β απέχουν 40km. Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Α και πηγαίνει στην πόλη Β έχοντας σταθερή ταχύτητα 8 km/h.
- Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση του ποδηλάτη από την πόλη Β, x ώρες αφού ξεκίνησε.
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
17. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3 \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 2}}{x - 3} + 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη -1.
- Να βρείτε τον αριθμό λ.
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.
 - Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
18. Οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι τα σημεία Α(0,-3), Β(4,0) και Γ(3,-2). Να βρείτε:
- το μήκος της πλευράς ΒΓ
 - την εξίσωση της ευθείας ΒΓ
 - την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ
 - το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)
- Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)
- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 9)

2. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A . (Μονάδες 5)
- Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$. (Μονάδες 10)
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$ (Μονάδες 10)

3. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$. (Μονάδες 10)
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

4. ΘΕΜΑ 2

Οι διαστάσεις (σε m) του πατώματος του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι $(x+1)$ και x , με $x>0$.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90m^2 , να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

5. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$.

(Μονάδες 9)

6. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax+b$, όπου a, b πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των a, b .

(Μονάδες 13)

β) Αν $a=1$ και $b=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 12)

7. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε το σημείο

$M(a, \frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

8. ΘΕΜΑ 2

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y=35+0,8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

9. ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

(Μονάδες 8)

10. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8 - x & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

(Μονάδες 12)

11. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax+b$, με $a, b \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0)=5 \text{ και } f(1)=3.$$

α) Να δείξετε ότι $a=-2$ και $b=5$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x' και y' .

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

12. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

(Μονάδες 10)

13. ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3. \quad (\text{Μονάδες } 13)$$

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και

$g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 3)$. (Μονάδες 12)

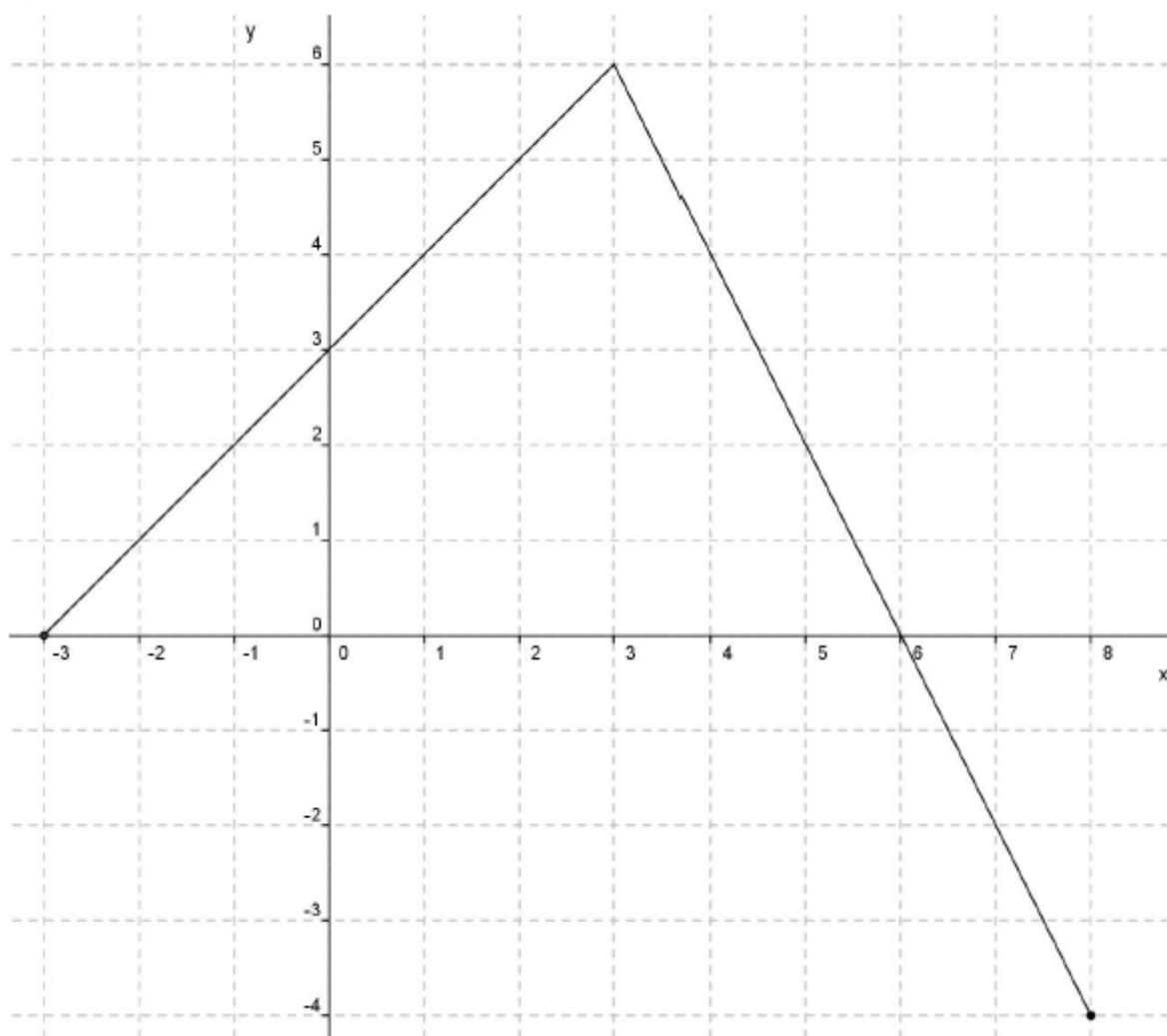
14. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)

β) Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι A, B είναι συμμετρικά ως προς το O . (Μονάδες 12)

15. ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

16. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g

διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu = -6$. (Μονάδες 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

17. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B . (Μονάδες 8)

18. ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x +120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.

α) Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης; (Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)

γ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

19. ΘΕΜΑ 4

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128

τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

20. ΘΕΜΑ 4

Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση: $h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$

α) Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$ και $h(2)$, και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος. (Μονάδες 8)

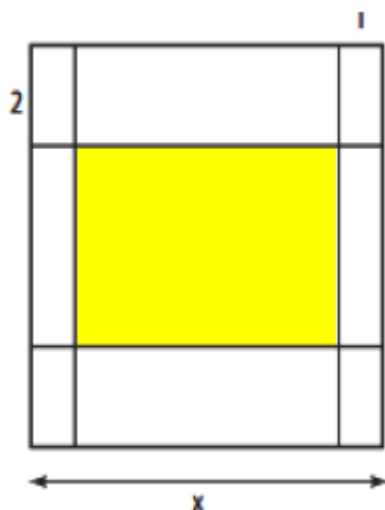
γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t) = 5[1,21 - (t-1)^2] \quad (\text{Μονάδες 5})$$

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από $6,05m$. (Μονάδες 6)

21. ΘΕΜΑ 4

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(x-2)(x-4) \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 . (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

(Μονάδες 10)

22. ΘΕΜΑ 4

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η:

$$K = \frac{F - 32}{1,8} + 273 \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

(Μονάδες 10)

23. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του άξονα $x'x$ που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h που η γραφική της παράσταση να είναι ευθεία και να τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)

24. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$. (Μονάδες 9)

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$ (Μονάδες 10)

25. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x - 5, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε

την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ (Μονάδες 5+5=10)

26. ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$. (Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

27. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g . (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 10)

28. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

29. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ . (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$:

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g . (Μονάδες 9)

ii) Να δείξετε ότι: $g(\alpha + 3) > g(\alpha)$, όταν $-1 < \alpha < 2$ (Μονάδες 7)

30. ΘΕΜΑ 4

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6 & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

ii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0,6x, \text{ για } x \geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

31. ΘΕΜΑ 4

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y = 60 + 0,20x$ όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ; (Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

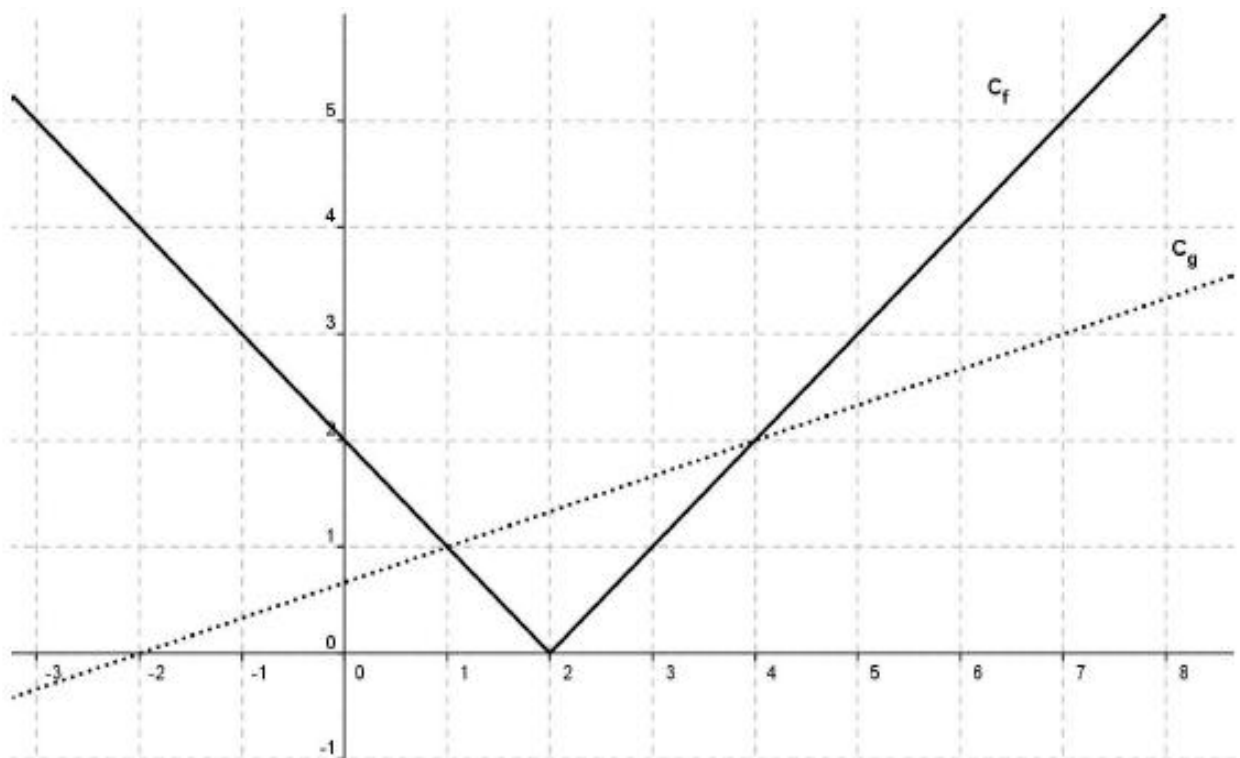
(Μονάδες 10)

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10 \cdot x$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος γ). (Μονάδες 5)

32. ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g . (Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g . (Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)} \quad (\text{Μονάδες 5})$$

33. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)

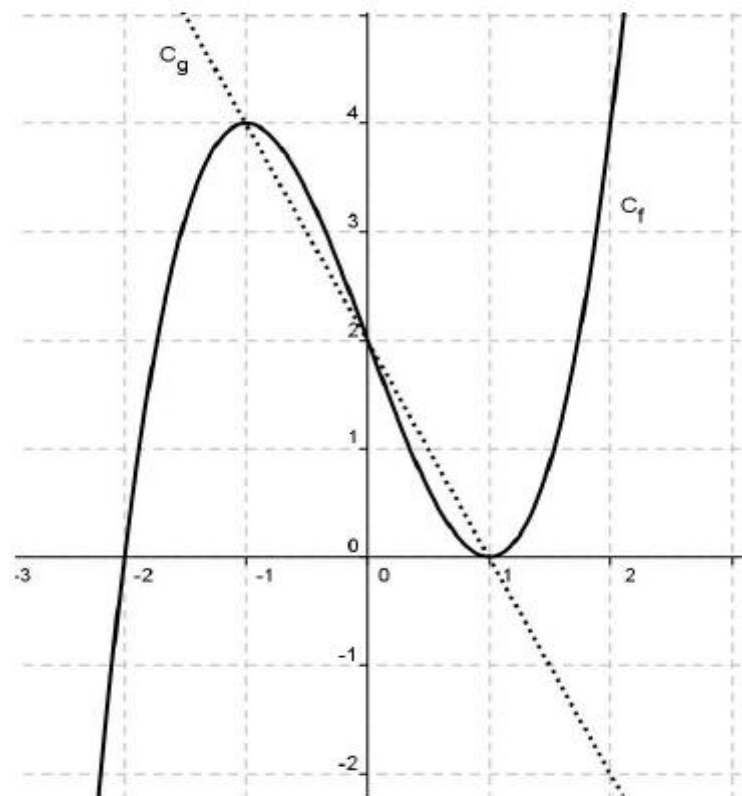
β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 12)

34. ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$. (Μονάδες 6)

β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. (Μονάδες 6)

γ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 6)

δ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)

35. ΘΕΜΑ 4

Ο Στέφανος ζεσταίνει νερό, αρχικής θερμοκρασίας 25°C , και με χρήση ενός θερμομέτρου παρατηρεί ότι η θερμοκρασία του νερού αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 5°C ανά λεπτό.

α) Είναι η αντιστοιχία χρόνος $\rightarrow$ θερμοκρασία συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

Χρόνος (t) σε min		1	2	3		
Θερμοκρασία (θ) σε $^{\circ}\text{C}$	25				50	60

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την αντιστοιχία χρόνος $\rightarrow$ θερμοκρασία, τοποθετώντας το χρόνο (t) στον οριζόντιο άξονα. (Μονάδες 5)

δ) Με χρήση της γραφικής παράστασης, να εκτιμήσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό (το νερό βράζει στους 100°C). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ε) Να εκφράσετε αλγεβρικά τη σχέση που περιγράφει την αντιστοιχία χρόνος $\rightarrow$ θερμοκρασία και να υπολογίσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό. (Μονάδες 5)

36. ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^{\circ}$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0, 10). \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

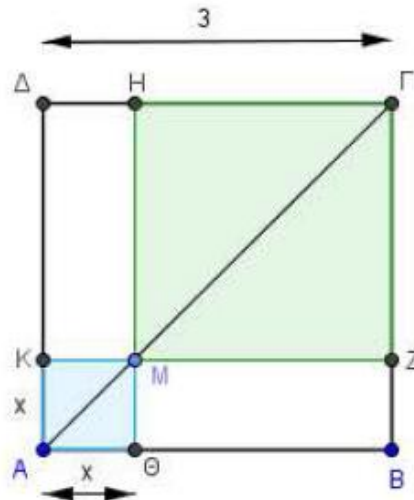
β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι

παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; (Μονάδες 8)

37. ΘΕΜΑ 4

Στο επόμενο σχήμα το $ABΓΔ$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB=3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



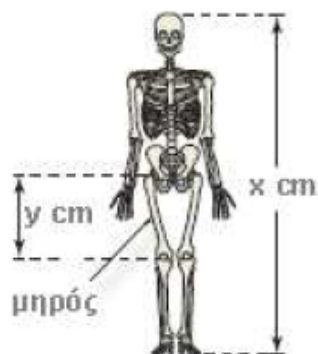
- α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$. (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$. (Μονάδες 8)
- γ) Για ποια θέση του M πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

38. ΘΕΜΑ 4

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

- α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164cm . Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42,8\text{cm}$ που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

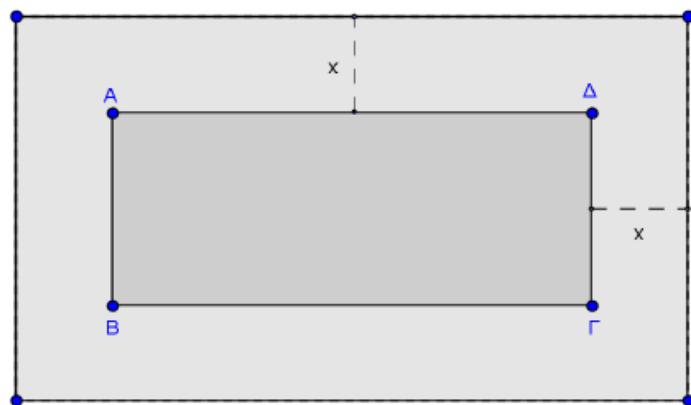
(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

39. ΘΕΜΑ 4

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις 15m και 25m . Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος $x\text{ m}$ ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x, \quad x > 0$$

(Μονάδες 9)

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\text{ m}^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

40. ΘΕΜΑ 4

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40\text{cm}$. Αν $x\text{ cm}$ είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

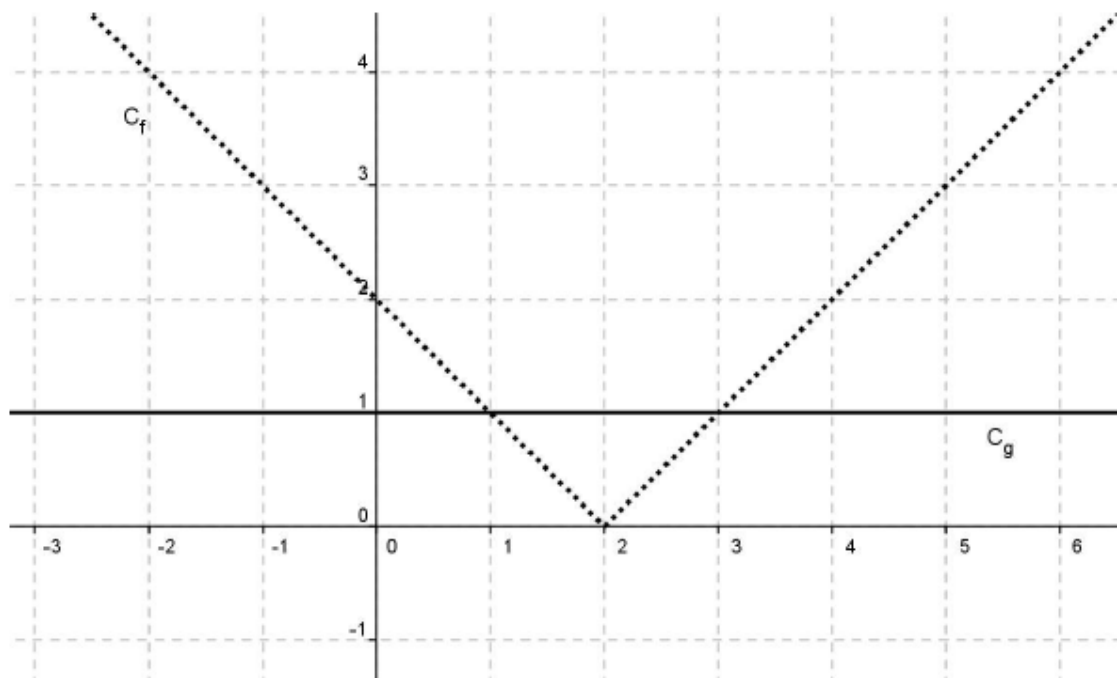
$$E(x)=20x-x^2. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (Μονάδες 6)

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm . (Μονάδες 7)

41. ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1$, $x \in \mathbb{R}$



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g .

(Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)} \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

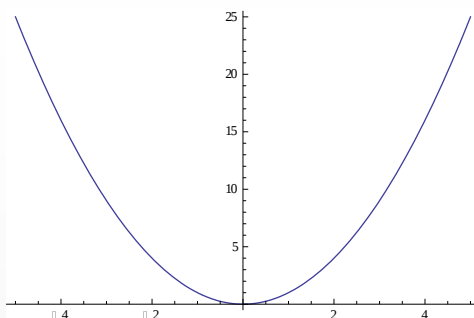
7.1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = ax^2$$

1. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = x^2$

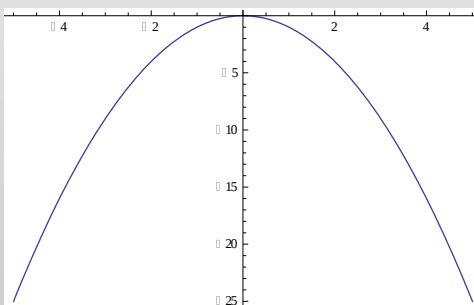
Ιδιότητες

- Έχει πεδίο ορισμού ολο το $\mathbb{R}$
- Είναι άρτια, άρα συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 0 = f(0)$, άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $f(x) \rightarrow +\infty$ και όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $f(x) \rightarrow +\infty$

2. Μορφή της συνάρτησης $g(x) = -x^2$

Ιδιότητες

- Έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$
- Είναι άρτια, άρα συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq 0 = g(0)$, άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $g(0) = 0$
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $g(x) \rightarrow -\infty$ και όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $g(x) \rightarrow -\infty$

3. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ (με $a \neq 0$ είναι παραβολή με κορυφή $O(0,0)$)

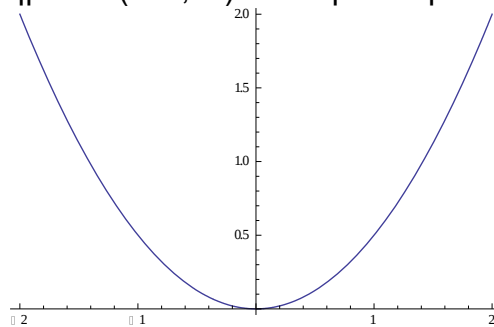
- Όταν $a > 0$: Είναι σαν τη x^2 , αλλά αλλάζει η καμπυλότητα. Όσο μεγαλώνει το a , τόσο η καμπύλη "κλίνει".
- Όταν $a < 0$: Είναι σαν τη $-x^2$, αλλά αλλάζει η καμπυλότητα. Όσο το a μικραίνει, τόσο η καμπύλη "κλίνει".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 + ax^2}{x^2 - 4}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1,1)$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του a .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

2. Δίνεται η παραβολή του παρακάτω σχήματος, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2,2)$.
Να βρείτε:

- της εξίσωση της παραβολής
- το σημείο της παραβολής με τετμημένη -4
- τα σημεία της παραβολής με τεταγμένη 18
- τον αριθμό λ , ώστε το σημείο $M(\lambda+2,4\lambda)$ να ανήκει στην παρακάτω παραβολή.



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x-6, & \text{αν } -6 \leq x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x^3, & \text{αν } -2 < x < 2 \\ -x+6, & \text{αν } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} (x+a)^3, & \text{αν } x \leq 0 \\ -x^2 + 8, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(f(3)) = 1$.

- Να βρείτε την τιμή του a .
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να βρείτε το σύνολο της f .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ και έστω A, B τα σημεία της C_f με τετμημένες -2 και 4 αντίστοιχα.

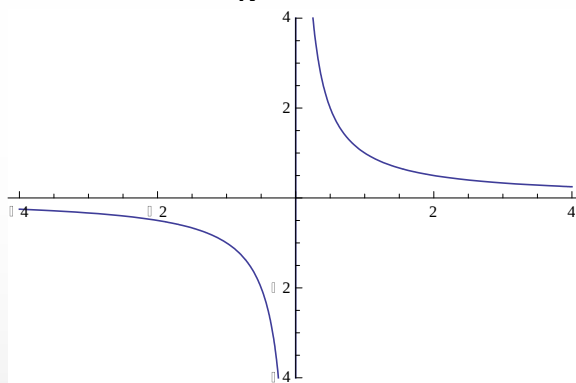
- Να βρείτε τις τεταγμένες των A και B .
- Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B .
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
β) Να σχεδιάσετε τη C_f και την ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων
- Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{1}{2}x^2 < x + 4$$

- Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το παραπάνω συμπέρασμα.

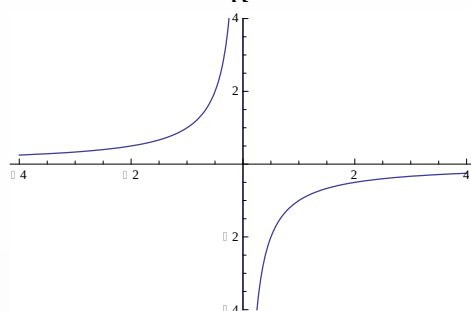
7.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = \frac{\alpha}{x}$$

1. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ **Ιδιότητες**

- Έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Είναι περιττή, άρα συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων
- Είναι γν.φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και στο διάστημα $(0, +\infty)$
- Όταν $x \rightarrow 0$ από δεξιά, τότε $f(x) \rightarrow +\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα πάνω
- Όταν $x \rightarrow 0$ από αριστερά, τότε $f(x) \rightarrow -\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα κάτω
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $f(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα αριστερά
- Όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $f(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα δεξιά
- Έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες (διχοτόμους) $y = x$ και $y = -x$

2. Μορφή της συνάρτησης $g(x) = -\frac{1}{x}$



Ιδιότητες

- Έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Είναι περιττή, άρα συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων
- Είναι γν.αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και στο διάστημα $(0, +\infty)$
- Όταν $x \rightarrow 0$ από δεξιά, τότε $g(x) \rightarrow -\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα κάτω
- Όταν $x \rightarrow 0$ από αριστερά, τότε $g(x) \rightarrow +\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα πάνω
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $g(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα αριστερά
- Όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $g(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα δεξιά
- Έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες (διχοτόμους) $y = x$ και $y = -x$

3. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$ (με $a \neq 0$ είναι ισοσκελής υπερβολή)

- Όταν $a > 0$: Είναι σαν την $\frac{1}{x}$, αλλά αλλάζει η καμπυλότητα . Όσο μεγαλώνει το a , τόσο η καμπύλη "ανοίγει" .
- Όταν $a < 0$: Είναι σαν την $-\frac{1}{x}$, αλλά αλλάζει η καμπυλότητα . Όσο το a μικραίνει, τόσο η καμπύλη "ανοίγει".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{a^2 + 3a + 4}{x}$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, a)$.

- Να βρείτε τον αριθμό a
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x, & \alpha \nu -2 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \alpha \nu x \geq 1 \end{cases}$

- Να βρείτε το πεδίο της f .
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

iii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

3. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{αν } x \leq -1 \\ 2, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

i. Να βρείτε το πεδίο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης:

- α) να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή
- β) να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

4. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|}, & \text{αν } |x| \geq 1 \\ -x^2, & \text{αν } |x| < 1 \end{cases}$$

i. Να βρείτε το πεδίο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης:

- α) να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- β) να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+a-3}{x-1}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από

το σημείο $M(2,3)$.

i. Να βρείτε την τιμή του a .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

iii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

7.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

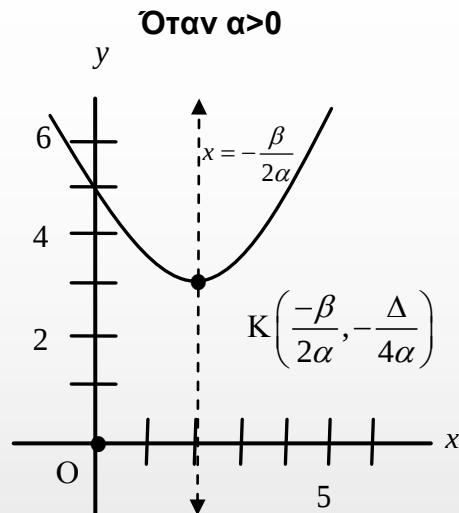
ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ)

1. Γενική μορφή του τριωνύμου : $f(x) = a \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$.

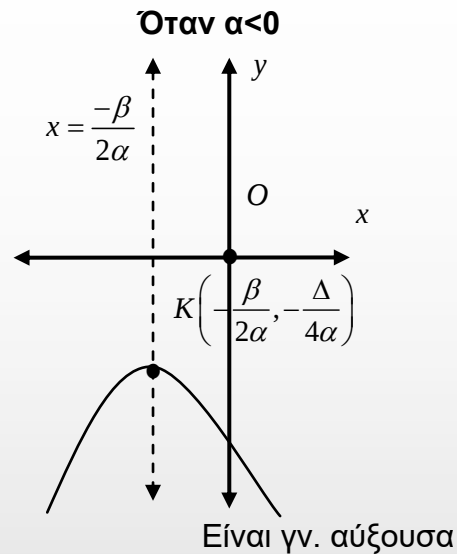
2. Κορυφή : Η C_f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο $K \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha} \right)$.

3. Συμμετρία : Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

4. Μονοτονία και ακρότατο : (Από τη γραφική παράσταση)



Είναι γν. φθίνουσα
στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right]$
και γν. αύξουσα
στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$
Ελάχιστο το $f \left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$



Είναι γν. αύξουσα
στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right]$
και γν. φθίνουσα
στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$
Μέγιστο, το $f \left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

5. Κοινά σημεία με τους άξονες :

- Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, \gamma)$.
- Α) Όταν $\Delta > 0$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$ όπου x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου.
Β) Όταν $\Delta = 0$, εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $A(\rho, 0)$, όπου $\rho = -\frac{\beta}{2\alpha}$ η διπλή ρίζα του τριωνύμου.
Γ) Όταν $\Delta < 0$, δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**1. Το πρόσημο του α**

- Όταν $\alpha > 0$, η παραβολή έχει ελάχιστο.
- Όταν $\alpha < 0$, η παραβολή έχει μέγιστο.
- Όταν $\alpha = 0$, δεν έχουμε παραβολή, αλλά ευθεία.

2. Ο αριθμός $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Εκφράζει την τετμημένη της κορυφής, δηλαδή το πόσο δεξιά ή αριστερά συμβαίνει το ακρότατο.

3. Ο αριθμός $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

Εκφράζει την τεταγμένη της κορυφής, δηλαδή το πόσο πάνω ή κάτω συμβαίνει το ακρότατο.

4. Μέθοδος

Για να βρούμε το κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$, θέτουμε όπου x το 0.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

5. Μέθοδος

Για να βρούμε παραβολή από δοσμένα στοιχεία της, θεωρούμε την παραβολή $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ και δημιουργούμε σύστημα με αγνώστους α, β, γ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f .
- Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

- Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f .
- Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

3. Η παραβολή $f(x) = \lambda x^2 + (\lambda + 2)x - 2(2\lambda - 1)$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.

- Να βρείτε τον αριθμό λ .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 10$.

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + (\lambda + 2)x - 2\lambda$ εφάπτεται στον άξονα

$x'x$. Να βρείτε:

- τον αριθμό λ
- τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2(\mu + 1)x + \nu$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη 1 και έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.
- Να βρείτε τους αριθμούς μ και ν .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 21$
6. Η παραβολή $f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (\lambda^2 - 4\lambda - 9)x + 4\lambda$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 3$. Να βρείτε:
- τον αριθμό λ
 - την κορυφή της παραβολής.
7. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 40cm.
- Αν το μήκος του είναι x cm, να εκφράσετε συναρτήσει του x , το πλάτος και το εμβαδόν του ορθογωνίου.
 - Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο εμβαδόν.
8. Δίνεται η παραβολή: $f(x) = \mu x^2 + 2(\mu - 1)x + \mu - 1$, $\mu \neq 0$. Η κορυφή της παραβολής ανήκει στην ευθεία $y = 2x + 6$.
- Να βρείτε τον αριθμό μ .
 - Δίνεται και η συνάρτηση: $g(x) = -x^2 + 4\lambda^2 + 16\lambda - 10$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ , το σημείο τομής των C_f και C_g έχει τη μεγαλύτερη τετμημένη.
9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = |x^2 + ax + 2a - 13|$ για την οποία ισχύει $f(-1) = f(-3)$.
- Να βρείτε την τιμή του a .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του a .