

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ**

**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

**Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι Τ Ε Χ Ν Ο Λ Ο Γ Ι Κ Η Σ
Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ**

ΑΘΗΝΑ 2001

Ομάδα Σύνταξης

Εποπτεία: Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Καραγεώργος Δημήτρης, Λέκτορας Παν/μίου Αθηνών

Συντονιστές: Σίδερης Πολυχρόνης, Σχολικός Σύμβουλος

Συγγραφική ομάδα: Γεωργακάκος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κεϊσόγλου Στέφανος, Μαθηματικός Δ.Ε., Μ.Εδ.
Κουτσανδρέας Γεράσιμος, Μαθηματικός Δ.Ε.
Κωνσταντόπουλος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε.

Copyright (C) 2000: Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας
Αδριανού 91, 105 56 Αθήνα

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή ανατύπωση ή φωτοτύπηση μέρους ή όλου του παρόντος βιβλίου, καθώς και η χρησιμοποίηση των ερωτήσεων, ασκήσεων και προβλημάτων που περιέχονται σ' αυτό σε σχολικά βοηθήματα ή για οποιοδήποτε άλλο σκοπό, χωρίς τη γραπτή άδεια του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• ΠΡΟΛΟΓΟΣ	7
• ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ	9

Κεφάλαιο 1ο: Διανύσματα

• Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”	11
• Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής	14
• Ερωτήσεις αντιστοίχισης.....	21
• Ερωτήσεις διάταξης	33
• Ερωτήσεις συμπλήρωσης.....	34
• Ερωτήσεις ανάπτυξης.....	36
<i>Απαντήσεις - Υποδείξεις στις ερωτήσεις</i>	<i>45</i>
<i>Σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης του μαθητή.....</i>	<i>59</i>

Κεφάλαιο 2ο: Ευθεία

• Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”	64
• Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής	69
• Ερωτήσεις αντιστοίχισης.....	79
• Ερωτήσεις διάταξης	93
• Ερωτήσεις συμπλήρωσης.....	95
• Ερωτήσεις ανάπτυξης.....	98
<i>Απαντήσεις - Υποδείξεις στις ερωτήσεις</i>	<i>111</i>
<i>Σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης του μαθητή.....</i>	<i>123</i>

Κεφάλαιο 3ο: Κωνικές τομές

• Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”	130
• Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής	136
• Ερωτήσεις αντιστοίχισης.....	148
• Ερωτήσεις διάταξης	160
• Ερωτήσεις συμπλήρωσης.....	161
• Ερωτήσεις ανάπτυξης.....	163
Απαντήσεις - Υποδείξεις στις ερωτήσεις	175
Σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης του μαθητή.....	193

Κεφάλαιο 4ο: Θεωρία Αριθμών

Εκθετική Συνάρτηση

• Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”	199
• Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής	203
• Ερωτήσεις αντιστοίχισης.....	210
• Ερωτήσεις διάταξης	221
• Ερωτήσεις συμπλήρωσης.....	221
• Ερωτήσεις ανάπτυξης.....	222
Απαντήσεις - Υποδείξεις στις ερωτήσεις	233
Σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης του μαθητή.....	251

Δακτυλογράφηση - Σελιδοποίηση: Δήμητρα Κομνηνού
Σχήματα: Αθηνά Ιακωβίδου / Κλειώ Βερβέρη - Βιτζηλαίου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με τα τελευταία βιβλία αξιολόγησης των μαθητών ολοκληρώνεται μια σημαντική προσπάθεια του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας, στόχος της οποίας ήταν η εκπόνηση και διάδοση νέων μεθόδων αξιολόγησης των μαθητών του Ενιαίου Λυκείου. Στο πλαίσιο της εκπονήθηκαν τα τρία τελευταία χρόνια δεκάδες βιβλίων που καλύπτουν το σύνολο σχεδόν των μαθημάτων, τα οποία διδασκονται στο Λύκειο. Τα βιβλία αυτά περιέχουν οδηγίες μεθοδολογίας σχετικές με την αξιολόγηση των μαθητών, παραδείγματα ερωτήσεων διαφόρων τύπων, υποδείγματα εξεταστικών δοκιμασιών, θέματα συνθετικών - δημιουργικών εργασιών και άλλα χρήσιμα στοιχεία για τους εκπαιδευτικούς.

Το έντυπο αυτό υλικό συνοδεύτηκε από την παραγωγή ανάλογου ηλεκτρονικού υλικού, από τη δημιουργία Τράπεζας Θεμάτων και από πολυάριθμες επιμορφωτικές δραστηριότητες σχετικές με την αξιολόγηση των μαθητών.

Η παραπάνω προσπάθεια δεν είχε σκοπό να επιβάλει ένα συγκεκριμένο τρόπο αξιολόγησης ούτε να αυξήσει το φόρτο εργασίας διδασκόντων και διδασκόμενων, όπως ισχυρίστηκαν ορισμένοι. Επιδίωξε να ενημερώσει τους καθηγητές για τις σύγχρονες εξεταστικές μεθόδους, να τους δώσει πρακτικά παραδείγματα εφαρμογής τους, να τους προβληματίσει γύρω από τα θέματα αυτά και να τους παράσχει ερεθίσματα για αυτομόρφωση. Πιστεύουμε ότι με το έργο μας συμβάλαμε στη διεύρυνση της δυνατότητας των διδασκόντων να επιλέγουν οι ίδιοι τη μέθοδο που θεωρούν πιο κατάλληλη για την αξιολόγηση των μαθητών τους και βοηθήσαμε στην αύξηση της παιδαγωγικής τους αυτονομίας.

Πεποίθησή μας είναι πως όλα αυτά άλλαξαν το τοπίο στον τομέα της αξιολόγησης των μαθητών του Ενιαίου Λυκείου, έφεραν νέο πνεύμα και άρχισαν να τροποποιούν σταδιακά ξεπερασμένες αντιλήψεις και τακτικές που κυριάρχησαν επί πολλά χρόνια στο Ελληνικό σχολείο. Τα θετικά σχόλια που εκφράστηκαν από το σύνολο σχεδόν των επιστημονικών και εκπαιδευτικών φορέων για τα θέματα των εξετάσεων του περασμένου Ιουνίου, τα οποία διαμορφώθηκαν με βάση το πνεύμα και τη μεθοδολογία της αντίστοιχης εργασίας του Κ.Ε.Ε., επιβεβαιώνουν όσα προαναφέρθηκαν.

Η κριτική που είχε αρχικά ασκηθεί για το έργο μας περιορίζεται συνεχώς, ενώ αυξάνει καθημερινά η αποδοχή του από την εκπαιδευτική κοινότητα και η αναγνώρισή του. Σ' αυτό συνέβαλε ασφαλώς και η βελτίωση του υποστηρικτικού υλικού που παράγεται από το Κ.Ε.Ε., η οποία οφείλεται, μεταξύ άλλων, και στις παρατηρήσεις και υποδείξεις των διδασκόντων στα Ενιαία Λύκεια. Η συνειδητοποίηση, τέλος, του τρόπου με τον οποίο πρέπει να χρησιμοποιείται το υλικό αυτό στη διδακτική πράξη και ο περιορισμός των σφαλμάτων που διαπράχθηκαν στην αρχή (μηχανική αναπαραγωγή πλήθους ερωτήσεων, υπέρμετρη αύξηση της εργασίας των μαθητών, απουσία εναλλακτικών τρόπων αξιολόγησης κτλ.) οδήγησαν σε πολύ θετικά αποτελέσματα, τα οποία όσο περνά ο καιρός θα γίνονται εμφανέστερα.

Η διαπίστωση αυτή μας ενισχύει να συνεχίσουμε την προσπάθειά μας και να την επεκτείνουμε, εκπονώντας ανάλογο υλικό και για άλλες εκπαιδευτικές βαθμίδες, εφόσον εξασφαλιστούν οι απαραίτητες οικονομικές και λοιπές προϋποθέσεις.

Τελειώνοντας, επιθυμώ να ευχαριστήσω όλους τους συνεργάτες μου στο Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, οι οποίοι εργάστηκαν αφιλοκερδώς, με αφοσίωση και σπάνιο ζήλο και επιτέλεσαν κάτω από δύσκολες συνθήκες σημαντικό έργο. Ευχαριστώ ακόμη όλους τους εκπαιδευτικούς που με ποικίλους τρόπους στήριξαν την προσπάθειά μας και βοήθησαν στην επιτυχία της. Ξέχωρες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στις δακτυλογράφους του Κ.Ε.Ε, στο τεχνικό προσωπικό του, στον Προϊστάμενο της Γραμματείας του κ. Γεώργιο Κορκόντζηλα και στους εκδότες που συνεργάστηκαν μαζί μας από το 1997 μέχρι σήμερα.

Αθήνα, Ιούνιος 2000

Καθηγητής Μιχάλης Κασσωτάκης
Πρόεδρος του Δ.Σ. του Κ.Ε.Ε.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Κ.Ε.Ε.), με την έκδοση του τεύχους αυτού, συνεχίζει την προσπάθεια στήριξης των Εκπαιδευτικών σε ζητήματα σχετικά με την αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά της Β΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, σύμφωνα με το πνεύμα της Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης.

Παράλληλα, τα θέματα του τεύχους αυτού (καθώς και τα αντίστοιχα των προηγούμενων εκδόσεων του Κ.Ε.Ε.) εισάγονται στην Τράπεζα Θεμάτων των προαγωγικών εξετάσεων. Για τον λόγο αυτό οι ερωτήσεις έχουν χωριστεί σε δύο κατηγορίες.

- ♦ Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθεί ένας αστερίσκος (*) και είναι οι ερωτήσεις διαφόρων τύπων που αποτελούν απλή εφαρμογή της θεωρίας.
- ♦ Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις στις οποίες μετά τον αριθμό ακολουθούν δύο αστερίσκοι (**) και είναι προβλήματα ή ασκήσεις για τη λύση των οποίων απαιτείται ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.

Οι ερωτήσεις που περιέχονται στο τεύχος αυτό καθώς και τα σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης, *έχουν ενδεικτικό και συμβουλευτικό χαρακτήρα* για τον καθηγητή, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να τα τροποποιήσει ή να διατυπώσει δικά του, αν το κρίνει αναγκαίο.

Αθήνα, Ιούνιος 2000

Σταύρος Παπασταυρίδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κεφάλαιο 1ο:

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

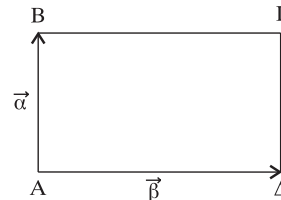
1. * Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$, τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά. Σ Λ
2. * Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$. Σ Λ
3. * Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Σ Λ
4. * Αν $|\vec{a}| = \lambda |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{a} // \vec{\beta}$. Σ Λ
5. * Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, τότε $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Σ Λ
6. * Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ είναι ίσα. Σ Λ
7. * Αν $\vec{u} = (x_1, -y_1)$ και $\vec{v} = (-x_1, y_1)$, τότε $\vec{u} = -\vec{v}$. Σ Λ
8. * Το διάνυσμα $\vec{a} = (-2, 2)$ είναι παράλληλο με το $\vec{\beta} = (3, -3)$. Σ Λ
9. * Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. Σ Λ
10. * Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευσθύνσεως. Σ Λ
11. * Αν $\vec{a} = -\vec{\beta}$, τότε $(\vec{a}, \vec{\beta}) + (\vec{\beta}, \vec{a}) = 2\pi$. Σ Λ
12. * Αν το $\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{a}$, τότε το $\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\beta}$. Σ Λ
13. * Αν $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι πάντα συγγραμμικά. Σ Λ
14. * Αν $\vec{a} = \kappa \vec{\beta} + \lambda \vec{\gamma}$ και $\kappa, \lambda > 0$, τότε τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά. Σ Λ
15. * Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας xOy. Σ Λ

- | | | |
|---|---|---|
| 16. * Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} > 0$, τότε $(\vec{a}, \vec{\beta})$ είναι οξεία. | Σ | Λ |
| 17. * Το $(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα. | Σ | Λ |
| 18. * Το $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. | Σ | Λ |
| 19. * Το $(\vec{a} \lambda) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. | Σ | Λ |
| 20. * Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει: $ \vec{a} + \vec{\beta} \leq \vec{a} + \vec{\beta} $. | Σ | Λ |
| 21. * Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει: $ \vec{a} - \vec{\beta} \leq \vec{a} + \vec{\beta} $. | Σ | Λ |
| 22. * Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει: $ \vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + \vec{\beta} $. | Σ | Λ |
| 23. * Το διάνυσμα $\lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda < 0$ είναι συγγραμμικό του $\vec{a}$. | Σ | Λ |
| 24. * Αν $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = \vec{0}$. | Σ | Λ |
| 25. * Η ισότητα $ \lambda \vec{a} = \lambda \vec{a} $ ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. | Σ | Λ |
| 26. * Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{a}$, τότε $\kappa = \lambda$ για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$. | Σ | Λ |
| 27. * Ισχύει η ισοδυναμία: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow M$ μέσο του $\overline{AB}$. | Σ | Λ |
| 28. * Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \kappa = 0$. | Σ | Λ |
| 29. * Αν $\lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \mu = 0$. | Σ | Λ |
| 30. * Με πλευρές οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ ορίζεται τρίγωνο. | Σ | Λ |
| 31. * Αν AM διάμεσος τριγώνου ABΓ τότε $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}}{2}$. | Σ | Λ |
| 32. * Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους του συν τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του. | Σ | Λ |
| 33. * Αν $ \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} $ όπου A, B σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η μεσοκάθετη ευθεία του AB. | Σ | Λ |

34. * Ισχύει η ισοδυναμία: G βαρύκεντρο του τριγώνου ABΓ $\Leftrightarrow$
 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$. Σ Λ
35. * Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$. Σ Λ
36. * Αν $\vec{a} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$. Σ Λ
37. * Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ τότε είναι πάντα $(\vec{a}, \vec{\beta}) \neq \frac{\pi}{2}$. Σ Λ
38. * Τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j}$ είναι κάθετα. Σ Λ
39. * Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διευσθύνσεως είναι ομόρροπα. Σ Λ
40. * Αν $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (2, -6)$ είναι $\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Σ Λ
41. * Τα ζεύγη $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $-\vec{a}$, $-\vec{\beta}$ των διανυσμάτων έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα. Σ Λ
42. * Αν είναι $(\vec{a}, \vec{\beta}) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$. Σ Λ
43. * Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα. Σ Λ
44. * Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Σ Λ
45. * Υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (x + 1, 3)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα. Σ Λ
46. * Υπάρχουν $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (\frac{1}{\sin\theta}, \frac{1}{\eta\mu\theta})$ και $\vec{\beta} = (\eta\mu\theta, \sin\theta)$ να είναι κάθετα. Σ Λ
47. * Ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\delta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{\delta}} \vec{a}$. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$,
 $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$.



α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{AG}$ ισούται με

A. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

B. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$

Γ. $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

Δ. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

Ε. $\frac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{BD}$ ισούται με

A. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

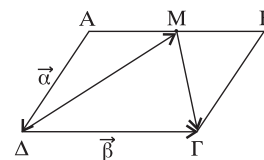
B. $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

Γ. $\frac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

Δ. $\frac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$

Ε. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$

2. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν $\overrightarrow{AD} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{\beta}$, τότε:



α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{DM}$ ισούται με

A. $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

B. $\frac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$

Γ. $-\vec{\alpha} + \frac{1}{2} \vec{\beta}$

Δ. $\vec{\alpha} + \frac{1}{2} \vec{\beta}$

Ε. $\frac{1}{2} \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{MG}$ ισούται με

A. $\vec{\alpha} - \frac{1}{2} \vec{\beta}$

B. $\frac{1}{2} \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

Γ. $\frac{1}{2} \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Δ. $\vec{\alpha} + \frac{1}{2} \vec{\beta}$

Ε. $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

γ) Με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

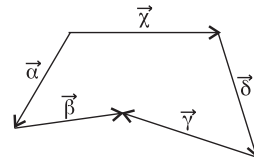
- A. $\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{B\Delta}$ Γ. $\overrightarrow{\Delta B}$ Δ. $\overrightarrow{\Gamma A}$ Ε. $\overrightarrow{A\Gamma}$

δ) Με $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

- A. $\overrightarrow{A\Gamma}$ B. $\overrightarrow{\Gamma A}$ Γ. $\overrightarrow{BA}$ Δ. $\overrightarrow{\Delta B}$ Ε. $\overrightarrow{B\Delta}$

3. * Στο διπλανό σχήμα το διάνυσμα $\vec{x}$ ισούται με

- A. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$ B. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$
 Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$ Δ. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$
 Ε. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta}$

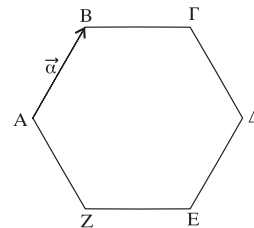


4. * Για κάθε τετράδα σημείων A, B, Γ, Δ ισχύει

- A. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$ B. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$
 Γ. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma}$ Δ. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$
 Ε. $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

5. * Στο κανονικό εξάγωνο ABΓΔEZ είναι

- A. $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AE}$ B. $\overrightarrow{A\Gamma} = -\overrightarrow{EA}$
 Γ. $\overrightarrow{A\Gamma} = -2\vec{\alpha}$ Δ. $\overrightarrow{A\Gamma} = -4\vec{\alpha}$
 Ε. $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{Z\Delta}$



6. * Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ διάφοροι του ± 1 και $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε

- A. κ, λ θετικοί B. κ, λ αρνητικοί Γ. κ, λ αντίστροφοι
 Δ. κ, λ ετερόσημοι Ε. κανένα από τα προηγούμενα

7. * Αν ισχύει: $\kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} = \vec{0}$, κ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σε κάθε περίπτωση σωστή;

- A. Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν την ίδια φορά
- B. Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα
- Γ. Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα
- Δ. Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν το ίδιο μέτρο
- E. Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση

8. * Το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda^2 - 3\lambda - 4, \lambda - 2)$ είναι μηδενικό με

- A. $\lambda = 2$ B. $\lambda = 1$ Γ. $\lambda = -4$ Δ. $\lambda = 0$
- E. για κανένα πραγματικό αριθμό λ

9. * Το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το μηδενικό με

- A. $\theta = 2\kappa\pi$ B. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ Γ. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
- Δ. $\theta = 2\kappa\pi + \pi$ E. καμία τιμή του θ

10. * Είναι $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$. Το $\vec{a}$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ με

- A. $\theta = \kappa\pi$ B. $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ Γ. $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
- Δ. $\theta = \kappa\pi + \pi$ E. $\theta = \kappa\pi - \pi$

11. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, είναι παράλληλο στο $\vec{\beta} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ με

- A. $\theta = 0$ B. $\theta = \frac{\pi}{4}$ Γ. $\theta = \frac{\pi}{2}$
Δ. $\theta = \pi$ Ε. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

12. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \lambda)$, και $\vec{\beta} = (4, -\lambda)$ είναι παράλληλα με

- A. $\lambda = -1$ B. $\lambda = 0$ Γ. $\lambda = 1$
Δ. $\lambda = 4$ Ε. $\lambda = -4$

13. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \frac{1}{\lambda})$ και $\vec{\beta} = (-1, \frac{8}{\lambda})$ είναι κάθετα με

- A. $\lambda = -1$ B. $\lambda = 0$ Γ. $\lambda = 1$
Δ. $\lambda = 2$ Ε. $\lambda = 8$

14. * Με $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (0, -6)$ ισχύει

- A. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ B. $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ Γ. $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$
Δ. $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ Ε. $\vec{\alpha} - \vec{\gamma} = \vec{\beta}$

15. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -2)$, $\vec{\beta} = (1, -1)$ και $\vec{\gamma} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

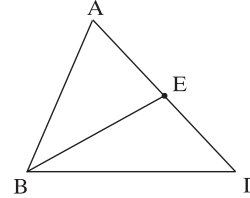
Σωστή είναι η σχέση

- A. $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ B. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta}$ Γ. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} // \vec{\gamma}$
Δ. $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ Ε. $\vec{\alpha} = \vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$

16. * Στο τρίγωνο ABΓ η BE είναι διάμεσος.

Το άθροισμα $\vec{BA} + \vec{BG}$ ισούται με

- A. $\vec{BE}$ B. $\vec{GA}$ Γ. $2\vec{EB}$
 Δ. $2\vec{BE}$ E. $2\vec{AG}$



17. * Τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, 4)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 4, 1)$ είναι κάθετα. Ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με

- A. 0 B. - 2 Γ. 2 Δ. 4 E. $\frac{1}{4}$

18. * Τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda^2, 2\lambda)$ και $\vec{\beta} = (1, - 2)$ είναι παράλληλα ($\lambda \neq 0$). Ο λ ισούται με

- A. - 2 B. - 1 Γ. $\sqrt{2}$ Δ. 1 E. 2

19. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (- 2, 4)$ και $\vec{\beta} = (3, - 2)$. Η σχέση $\vec{a} + \kappa\vec{\beta} = \vec{0}$ ισχύει με

- A. $\kappa = \frac{2}{3}$ B. $\kappa = - \frac{2}{3}$ Γ. $\kappa = - 2$ Δ. $\kappa = 2$
 E. κανένα $\kappa \in \mathbb{R}$

20. * Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (2, - \sqrt{2})$. Παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι το

- A. $\vec{x} = (- 2, \sqrt{2})$ B. $\vec{y} = (\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ Γ. $\vec{z} = (- \sqrt{2}, 2)$
 Δ. $\vec{\omega} = (1, - \sqrt{2})$ E. $\vec{v} = (\sqrt{2}, - 2)$

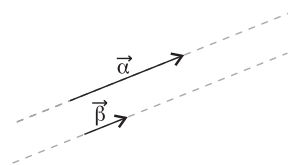
21. * Αν $|\vec{k}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\vec{k} \cdot \vec{v} = -3$ και $0 \leq \bar{\theta} = (\vec{k}, \vec{v}) < \pi$, τότε η γωνία θ ισούται με

A. 0° B. 30° Γ. 60° Δ. 120° E. 150°

22. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με

A. $|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ B. $-|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ Γ. 0

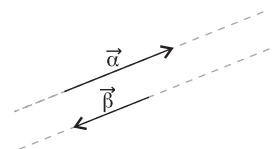
Δ. $\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ E. $-\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$



23. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με

A. 0 B. $|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ Γ. $-|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

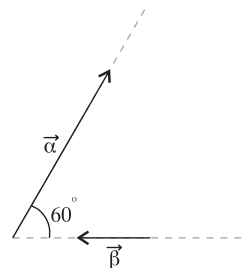
Δ. $\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ E. $-\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$



24. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με

A. $|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ B. $\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

Δ. $-\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ E. $-\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$



25. * Στο σχήμα το ABΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm. Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;

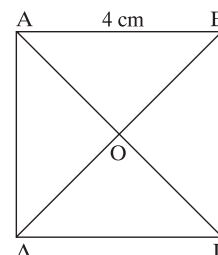
A. $\vec{AB} \cdot \vec{GB} = 0$

B. $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = 8$

Γ. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 16$

Δ. $\vec{AB} \cdot \vec{GD} = -16$

E. $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = 8$



26. * Αν $\vec{a}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα και $\vec{\beta}$ ένα οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα, τότε το γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με

A. $\vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a}$

B. $\vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$

Γ. $\vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$

Δ. $|\vec{a}| \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$

E. $|\vec{\beta}| \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a}$

27. * Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά. Το συν $(\vec{a}, \vec{\beta})$ ισούται με

A. $\frac{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}$

B. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}$

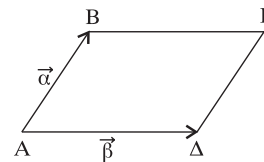
Γ. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}$

Δ. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| + |\vec{\beta}|}$

E. $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{a}| + |\vec{\beta}|}$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



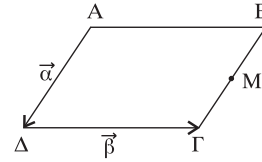
Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{AG}$	Α. $-\vec{\alpha}$
2. $\overrightarrow{GB}$	Β. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
3. $\overrightarrow{GD}$	Γ. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
4. $\overrightarrow{BD}$	Δ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
	Ε. $-\vec{\beta}$
	Ζ. $\frac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

2. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{ΔΓ} = \vec{\beta}$ και Μ μέσο της ΒΓ. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



Πίνακας (Ι)

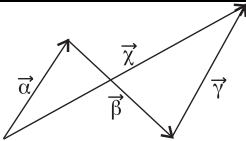
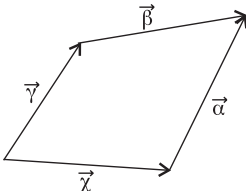
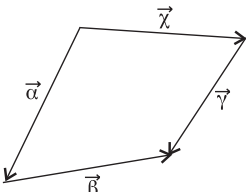
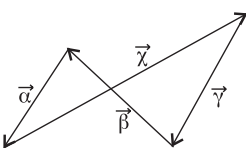
στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{ΑΓ}$	Α. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
2. $\overrightarrow{ΒΔ}$	Β. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
3. $\overrightarrow{ΔΜ}$	Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
4. $\overrightarrow{ΑΜ}$	Δ. $\vec{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\alpha}$
	Ε. $\vec{\beta} + \frac{1}{2} \vec{\alpha}$
	Ζ. $\frac{1}{2} \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

3. * Σε κάθε σχήμα που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε μια τιμή του διανύσματος $\vec{x}$ που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α		στήλη Β
1.		A. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$
2.		B. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
3.		Γ. $-(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})$
4.		Δ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}$
		Ε. $\vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$
		Ζ. $\vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

4. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) έχει μέτρο έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β μέτρο
1. $-\sqrt{8} \vec{i} + \vec{j}$	A. $\sqrt{2}$
2. $x \vec{i} + \psi \vec{j}$	B. $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$
3. $(2\eta\mu\theta) \vec{i} - (2\sigma\upsilon\nu\theta) \vec{j}$	Γ. 3
4. $(x - \psi) \vec{i} + 2\sqrt{x\psi} \vec{j}$	Δ. $\sqrt{x^2 + \psi^2}$
	E. $\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$
	Z. 2
	H. $ x + \psi $

Πίνακας (II)

1	2	3	4

5. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β συντελεστής διεύθυνσης
1. $2\vec{i} + 2\vec{j}$	A. $\sqrt{2}$
2. $2\vec{i}$	B. 2
3. $\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{j}$	Γ. 0
4. $2\vec{i} - 2\vec{j}$	Δ. 4
	E. δεν ορίζεται
	Z. 1
	H. -1

Πίνακας (II)

1	2	3	4

6. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία θ , η οποία γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα $\vec{u}$	στήλη Β (Οx, θ)
1. $-3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$	A. $\frac{3\pi}{4}$
2. (1, 1)	B. $\frac{\pi}{3}$
3. $(1, \sqrt{3})$	Γ. $\frac{2\pi}{3}$
4. (-1, 1)	Δ. $\frac{\pi}{4}$
	E. $\frac{5\pi}{6}$
	Z. $\frac{\pi}{6}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

7. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) είναι κάθετο με ένα διάνυσμα της στήλης Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β κάθετο διάνυσμα
1. $\vec{\alpha} = (2\kappa, 1)$	A. $\vec{\epsilon} = (0, \kappa)$
2. $\vec{\beta} = (\kappa, -1)$	B. $\vec{u} = (\frac{1}{\kappa}, 1)$
3. $\vec{\gamma} = (\kappa + 1, \kappa)$	Γ. $\vec{v} = (1, \frac{1}{\kappa})$
4. $\vec{\delta} = (0, \frac{1}{\kappa})$	Δ. $\vec{w} = (1, -2\kappa)$
	E. $\vec{\Gamma} = (\kappa, -\kappa - 1)$
	Z. $\vec{m} = (\kappa^2, 0)$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

8. * Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα που βρίσκεται στην αριστερή στήλη Α του πίνακα (I) με το μέτρο του, που βρίσκεται στη δεξιά στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

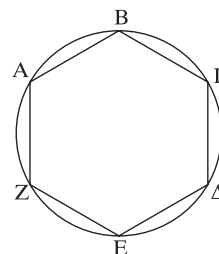
Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β μέτρο
1. $(1, -1)$	A. 2
2. $(2\eta\mu\theta, 2\sigma\upsilon\nu\theta)$	B. 0
3. $(\sqrt{2}, 1)$	Γ. 1
4. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	Δ. 3
	E. $\sqrt{3}$
	Z. $\sqrt{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

9. * Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{AB}$	Α. $\overrightarrow{Z\Delta}$
2. $\overrightarrow{A\Gamma}$	Β. $\overrightarrow{A\Gamma}$
3. $\overrightarrow{\Gamma B}$	Γ. $\overrightarrow{B\Delta}$
4. $\overrightarrow{AE}$	Δ. $\overrightarrow{E\Delta}$
	Ε. $\overrightarrow{EZ}$
	Ζ. $\overrightarrow{\Gamma Z}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

10. * Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{2}$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (I) με την τιμή του που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

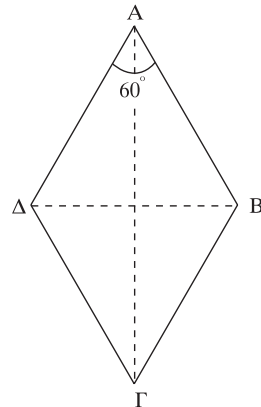
Πίνακας (I)

στήλη Α εσωτερικό γινόμενο	στήλη Β τιμή
1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$	A. - 1
2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$	B. 0
3. $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$	Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Δ. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Ε. $\frac{1}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3

11. * Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος με γωνία $A = 60^\circ$ και πλευρά 6 cm. Αν O το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α του πίνακα (I) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



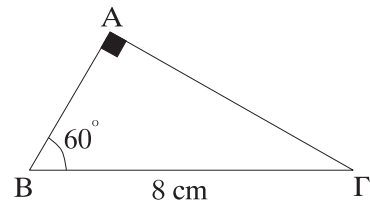
Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$	A. 18
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$	B. 36
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	Γ. 0
4. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	Δ. - 36
	Ε. - 18
	Ζ. $18\sqrt{3}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

12. * Στο σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A και έχει γωνία B = 60°. Αν η υποτείνουσά του BΓ είναι 8 cm. Να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης A του πίνακα (I) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης B, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GA}$	A. - 16
2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$	B. $16\sqrt{3}$
3. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{GB}$	Γ. 16
	Δ. 0
	E. $-16\sqrt{3}$

Πίνακας (II)

1	2	3

Ερωτήσεις διάταξης

1. * Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ σε μια σειρά, ώστε καθένα να έχει μικρότερο μέτρο από το επόμενο του, αν $\vec{\alpha} = (3, 0)$, $\vec{\beta} = (1, -3)$, $\vec{\gamma} = (\frac{3}{2}, 1)$, $\vec{\delta} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$.

2. * Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = |\vec{\delta}|$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\delta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα εσωτερικά γινόμενα: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$

3. * Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{2})$, $\vec{\beta} = (-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{\gamma} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\vec{\delta} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$. Να τα γράψετε σε μια σειρά, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσεως καθενός να είναι μικρότερος από τον συντελεστή διεύθυνσεως του επόμενου του.

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Διάνυσμα	μέτρο διανύσματος	γωνία ($\vec{Ox}$, $\vec{a}$)
$\vec{\alpha} = (-1, 1)$		
$\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$		
$\vec{\gamma} = (-3, 3\sqrt{3})$		
$\vec{\delta} = (\sqrt{3}, 1)$		
$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2})$		

2. * Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα σε καθεμιά από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

	Διανύσματα	τιμή του x
1.	$\vec{u} = (3, -5)$ και $\vec{v} = (10, x)$	
2.	$\vec{u} = (x, 4)$ και $\vec{v} = (2, -1)$	
3.	$\vec{u} = (3x, -3)$ και $\vec{v} = (x, 4)$	

3. Να συμπληρωθούν οι στήλες στους παρακάτω πίνακες:

Διανύσματα		Σχετική θέση του $\vec{a}$ ως προς τους άξονες $x'x, \psi\psi'$, (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση του $\vec{\beta}$ ως προς τους άξονες $x'x, \psi\psi'$, (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ μεταξύ τους (κάθετα ή παράλληλα)
$\vec{a}$	$\vec{\beta}$			
(2, 0)	(0, - 3)			
(2, 2)	(- 3, 3)			
(2, 2)	(3, 3)			
(0, 2)	(-2, 0)			

Διανύσματα		μέτρο: $ \vec{a} $	μέτρο: $ \vec{\beta} $	εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
$\vec{a}$	$\vec{\beta}$			
(- 1, 4)	(2, - 3)			
(3, 2)	(- 1, $\sqrt{2}$)			
(1, $\sqrt{3}$)	(1, 1)			
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG})$

β) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$

2. ** Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$. Αν Μ και Μ' είναι μέσα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2 \overrightarrow{MM'}$$

3. ** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BG}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD})$

β) $4 \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB}$

4. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ και Ν είναι συνευθειακά.

5. ** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως: αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

6. ** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του

β) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

7. ** Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2 \text{ και αντιστρόφως:}$$

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

8. ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) να αποδείξετε

ότι ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BD}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BD}$ να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.

9. ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) να αποδείξετε

ότι ισχύει $\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{DB}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{DB}$ τότε να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.

10. ** Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι:

α) $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2 |\overrightarrow{AM}|^2 + \frac{|\overrightarrow{BC}|^2}{2}$

β) $|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 = 2 \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CB}$, όπου Δ η προβολή του Α στη ΒΓ.

11. ** Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{5}{2} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \frac{1}{2} [\vec{\alpha} - 3(2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 6\vec{\gamma}) + 4(3\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma})] - \frac{1}{2} \vec{\beta} - 10\vec{\gamma}$$

12. ** Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, K το κέντρο του, M το μέσον του $K\Gamma$.
Δείξτε ότι:
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = 4 \overrightarrow{AM} - 2 \overrightarrow{A\Gamma}$$
13. ** Αν $AB\Gamma\Delta EZ$ κανονικό εξάγωνο, με $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$
α) Υπολογίστε τα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{A\epsilon}$ συναρτήσει των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$
β) Δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{A\epsilon} + \overrightarrow{AZ} = 6 \overrightarrow{B\Gamma}$
14. ** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ, Δ ισχύει:
$$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$$
15. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο P τέτοιο ώστε $\overrightarrow{P\Gamma} = -2 \overrightarrow{PB}$.
Να αποδειχτεί ότι:
$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} + 2 \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
16. ** Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα K, Λ των $AB, \Gamma\Delta$ αντιστοίχως.
Να αποδείξετε ότι:
$$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2 \overrightarrow{K\Lambda}$$
17. ** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να προσδιοριστεί σημείο P τέτοιο ώστε να ισχύει:
$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$$
18. ** Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα σημεία E και Z της διαγωνίου AG έτσι ώστε: $AE = Z\Gamma = \frac{1}{4} AG$
α) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.
β) Να δείξετε ότι το $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

19. ** Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{PG} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
20. ** Αν $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, -7)$, $\vec{\gamma} = (-2, 5)$ να βρεθούν τα διανύσματα:
 $\vec{a} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{a} + 3\vec{\beta} - 8\vec{\gamma}$
21. ** Να εξετασθεί αν τα σημεία $M_1(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, $M_2(\alpha, -\beta)$ και $M_3(\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta)$ είναι συνευθειακά.
22. ** Δίνονται τέσσερα σημεία O, A, B, Γ τέτοια ώστε τα O, A, B δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι, αν και $\overrightarrow{OG} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
23. ** Θεωρούμε τα τρίγωνα ABΓ και $A_1B_1\Gamma_1$. Αν G και G_1 είναι αντιστοίχως τα βαρύκεντρα των τριγώνων αυτών να αποδειχθεί ότι:
 α) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$
 β) Τα τρίγωνα ABΓ και $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο, αν και μόνο αν $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \vec{0}$
24. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Αν K, Λ, Μ είναι μέσα αντιστοίχως των πλευρών AB, ΑΓ, ΒΓ και Σ σημείο του επιπέδου του τριγώνου να αποδειχθεί ότι:
 $\overrightarrow{\Sigma K} + \overrightarrow{\Sigma \Lambda} + \overrightarrow{\Sigma M} = \overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma B} + \overrightarrow{\Sigma \Gamma}$
25. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε να ισχύει
 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{BG}$.
 α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.
 β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

26. ** Να αποδείξετε ότι αν:

$$(\kappa + 2) \overrightarrow{PA} + 3 \overrightarrow{PB} = (\kappa + 5) \overrightarrow{PG} \text{ τότε τα σημεία } A, B, \Gamma \text{ είναι συνευθειακά.}$$

27. ** Εάν $2 \overrightarrow{AL} + 3 \overrightarrow{BL} + 2 \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{KL}$ και $\overrightarrow{ML}$ είναι αντίρροπα.

28. ** Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Ox\psi$ θεωρούμε τα σημεία A, B του $x'x$, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 1998 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το μέσο του AB να έχει τετμημένη 7.

29. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-1, 3)$ και $\vec{v} = (2, -1)$. Να βρεθούν οι συνεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = (x, y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$

γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$

δ) $\vec{w} = \kappa \vec{u} + \lambda \vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

30. ** Δίνονται τα σημεία $A(5, -1)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(2, 3)$. Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$.

31. ** Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$, $B(7, -4)$. Να βρεθεί σημείο M του $x'x$, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι:

α) ισοσκελές με κορυφή το M

β) ορθογώνιο στο M

32. ** Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(-10, -1)$ είναι συνευθειακά.

33. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-2, 4)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$. Να βρεθεί διάνυσμα

$\vec{u} = (x, y)$ έτσι ώστε να είναι:

α) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{\beta}$

β) $\vec{a} + \vec{u} = \vec{\beta}$

γ) $\vec{u} = \kappa \vec{a}$, $\kappa \in \mathbb{R}$

δ) $\vec{u} = \kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

ε) $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{u} = \vec{0}$

34. ** Αν $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 3)$ να υπολογιστούν τα:

α) $|\vec{a} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$

β) $|\vec{a} + \vec{\beta}| + |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{a}|$

35. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A (3, 0) και B (1, 2) και G (3, 2), όπου G το βαρύκεντρό του. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.

36. ** Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 75^\circ$

γ) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 135^\circ$

37. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και

$|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2$

γ) $(\vec{a} + \vec{\beta})^2$

δ) $|\vec{a} + \vec{\beta}|$

ε) $(2\vec{a} + 3\vec{\beta})(4\vec{a} - 5\vec{\beta})$

38. ** Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ ($\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά).
39. ** Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων:
 $\vec{\alpha} = (-1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$.
40. ** Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45^\circ$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}, \vec{\alpha})$.
41. ** Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$.
42. ** Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.
43. ** Αν $\vec{u}(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $\vec{v}(-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $0 < (\vec{u}, \vec{v}) < \pi$ να αποδείξετε ότι: $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{12}$.
44. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.
45. ** Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$.

46. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$.

47. ** Αν $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι $\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta}}$.

48. ** α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$$

β) Χρησιμοποιώντας το (α) ερώτημα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8\psi$ αν $x^2 + \psi^2 = 36$.

γ) Με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος αποδείξτε ότι: $|6\eta\mu x - 8\sigma\upsilon\nu x| \leq 10$

49. ** Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου του για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

50. ** Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{a} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

51. ** Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.

α) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{a}}{\vec{\beta}^2}$ και $\vec{\beta}$

β) $(\vec{\beta} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\gamma} - (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$ και $\vec{a}$

γ) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{a}}{\vec{a}^2}$ και $\vec{a}$

52. ** Αν $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$

β) $\vec{p} // \vec{a}$

γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

53. ** Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ με $\vec{p} // \vec{\beta}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\vec{p} = \frac{\vec{a}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

β) $\vec{q} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

54. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε να είναι:

$(\lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta}) \perp (\kappa \vec{a} - 2\lambda \vec{\beta})$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{a}| = 2$.

55. ** Αν ισχύει $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot \sqrt{3}$

56. ** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Αν $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$

και $|\vec{\gamma}| = 5$ υπολογίστε το: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο:

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

1.	Λ
2.	Λ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Λ
7.	Σ
8.	Σ
9.	Σ
10.	Λ
11.	Σ
12.	Σ

13.	Σ
14.	Λ
15.	Σ
16.	Σ
17.	Σ
18.	Λ
19.	Λ
20.	Σ
21.	Σ
22.	Λ
23.	Σ
24.	Λ

25.	Σ
26.	Λ
27.	Σ
28.	Σ
29.	Σ
30.	Σ
31.	Σ
32.	Λ
33.	Σ
34.	Σ
35.	Λ
36.	Σ

37.	Σ
38.	Σ
39.	Λ
40.	Λ
41.	Σ
42.	Σ
43.	Λ
44.	Λ
45.	Λ
46.	Λ
47.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. α)	Δ
β)	Ε
2. α)	Γ
β)	Δ
γ)	Ε
δ)	Ε
3.	Δ

4.	Δ
5.	Ε
6.	Δ
7.	Ε
8.	Ε
9.	Ε
10.	Γ
11.	Β

12.	Β
13.	Δ
14.	Α
15.	Γ
16.	Δ
17.	Γ
18.	Β
19.	Ε

20.	Α
21.	Δ
22.	Α
23.	Γ
24.	Δ
25.	Ε
26.	Β
27.	Γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	B
2	E
3	A
4	Γ

2.

1	B
2	Γ
3	Δ
4	E

3.

1	B
2	E
3	A
4	Γ

4.

1	Γ
2	Δ
3	Z
4	H

5.

1	Z
2	Γ
3	E
4	H

6.

1	Γ
2	Δ
3	B
4	A

7.

1	Δ
2	B
3	E
4	Z

8.

1	Z
2	A
3	E
4	Γ

9.

1	Δ
2	A
3	E
4	Γ

10.

1	E
2	A
3	Δ

11.

1	Γ
2	A
3	Δ
4	E

12.

1	Δ
2	Γ
3	A

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

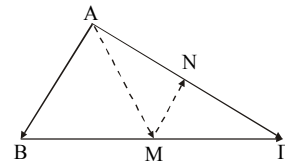
1. $\vec{\delta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$

2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}, \vec{\beta} \cdot \vec{\delta}, \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

3. $\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\delta}$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $\vec{AB} + \vec{AG} = \vec{AD}$ όπου $\vec{AD}$ η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές $AB, AG, GD, \Delta B$ και $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AD}$.



β) $\vec{MN} = \vec{GN} - \vec{GM} = \frac{1}{2} (\vec{GA} - \vec{GB}) = \frac{1}{2} \vec{BA}$

2. $\vec{AA'} + \vec{BB'} = \vec{AM} + \vec{MM'} + \vec{M'A'} + \vec{BM} + \vec{MM'} + \vec{M'B'} = 2 \vec{MM'}$

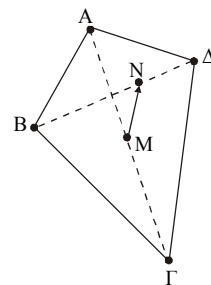
3. α) $\vec{\Delta A} + \vec{BA} = 2 \vec{NA}$ (1)

$\vec{B\Gamma} + \vec{\Delta\Gamma} = 2 \vec{N\Gamma}$ (2)

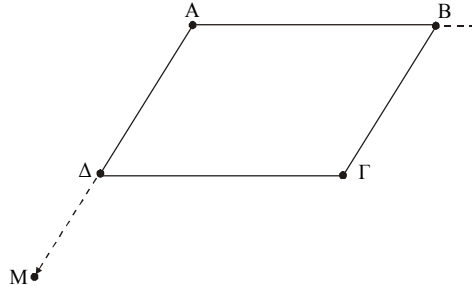
Ακόμη: $\vec{BA} + \vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Gamma B} = 0$ (3)

Από (1), (2) με πρόσθεση και λόγω της (3) προκύπτει η (α).

β) Πρόσθεση των (1), (2).



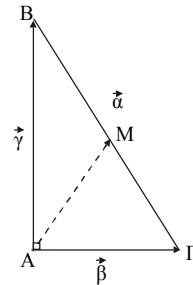
4. $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$
 $\overrightarrow{\Gamma N} = \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta\Gamma},$
 άρα $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma N}.$



5. Αν $\hat{A} = 1^\perp$ τότε $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0$

Ακόμη $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\vec{\beta} + \vec{\gamma}),$ άρα $4\overrightarrow{AM} = \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 = \vec{\alpha}^2,$

άρα $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2} |\vec{\alpha}|.$



6. Έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \kappa \vec{\alpha}.$

Τότε $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MA} + \vec{\alpha} + \overrightarrow{M\Delta} + \kappa \vec{\alpha} = (\kappa + 1) \vec{\alpha},$

άρα $\overrightarrow{MN} = \frac{\kappa + 1}{2} \vec{\alpha},$ δηλαδή $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}.$

7. Αφού $\hat{A} = 1^\perp$ άρα $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0.$ Ακόμη $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB},$

άρα $|\overrightarrow{B\Gamma}|^2 = |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2.$

8. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} \quad (1) \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} \quad (2)$

Πολλαπλασιασμός των (1), (2) και χρήση των ισοτήτων

$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$

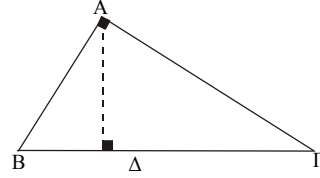
9. Ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ (1)

και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$ (2)

και $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DG} = 0$

και πολλαπλασιάζουμε τις (1), (2) κατά μέλη.



10. α) Ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AM}$ (1)

Ακόμη $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB}$ (2)

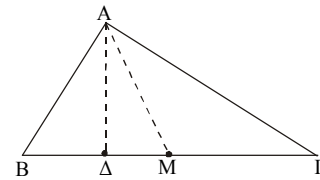
Υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη των (1), (2) και προσθέτουμε κατά μέλη.

β) Ισχύουν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ (1)

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}$ (2)

ενώ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MG}$ (3)

και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{\overrightarrow{BG}}{2} \cdot \overrightarrow{MD}$ (4)



Αν υψωθούν στο τετράγωνο οι (1), (2) και μετά αφαιρεθούν κατά μέλη, τότε βάσει των (3), (4) προκύπτει η ζητούμενη.

12. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG}$

13. α) Ισχύει $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BG} = 2\vec{\beta}$, άρα

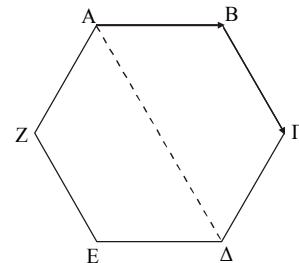
$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$

β) Ισχύει $\overrightarrow{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD} =$

$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = \vec{\beta} + (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$ και πρόσθεση όλων

κατά μέλη.



$$14. \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$$

$$15. \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta} + 2\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{PB} + (\overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) + 2\overrightarrow{AB} = \\ 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0} \text{ αφού } \overrightarrow{P\Gamma} = -2\overrightarrow{PB} \text{ και } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0} \text{ λόγω} \\ \text{παραλληλογράμμου.}$$

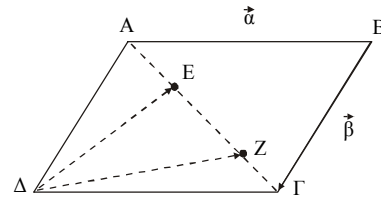
$$16. 2\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{K\Gamma} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$$

$$17. \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}, \text{ άρα } \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{AP}. \text{ Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε} \\ 2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP} \quad (1)$$

Άρα το Ρ βρίσκεται πάνω στη διάμεσο ΑΜ και λόγω της (1) είναι το κέντρο βάρους.

$$18. \alpha) \overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{4} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{A\Delta} = \frac{3}{4} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$$



$$\beta) \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma Z} = -\vec{\beta} - [-\frac{1}{4} (\vec{\alpha} + \vec{\beta})] = \overrightarrow{\Delta E}$$

$$19. \text{ Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: } 2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{P\Gamma} - 3\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0} \text{ άρα} \\ 2(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{P\Gamma}) = 3(\overrightarrow{P\Gamma} - \overrightarrow{PB}), \text{ δηλαδή } \overrightarrow{\Gamma A} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}.$$

$$21. \overrightarrow{M_1 M_2} = (-\beta, -\alpha), \overrightarrow{M_2 M_3} = (2\beta, 2\alpha), \text{ άρα } \overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \overrightarrow{M_2 M_3}$$

22. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ άρα
 $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB}$, δηλαδή $\overrightarrow{AG} \parallel \overrightarrow{AB}$.

23. α) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} =$
 $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{\Gamma G} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1\Gamma_1} = \vec{0}$
αφού $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1\Gamma_1} = \vec{0}$
β) Με βάση την (α), αν $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{GG_1} = \vec{0}$, δηλαδή
συμπίπτουν τα G, G₁.

24. $\overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma B} = 2 \overrightarrow{\Sigma K}$, $\overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma \Gamma} = 2 \overrightarrow{\Sigma \Lambda}$, $\overrightarrow{\Sigma B} + \overrightarrow{\Sigma \Gamma} = 2 \overrightarrow{\Sigma M}$
και πρόσθεση κατά μέλη.

25. α) $\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{A\Delta} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AG} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{B\Delta} = 2 (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AG} - \frac{5}{3} \overrightarrow{AB}$
β) Ισχύει $\overrightarrow{\Delta E} = \frac{5}{2} \overrightarrow{\Delta Z}$, άρα $\overrightarrow{\Delta E} \parallel \overrightarrow{\Delta Z}$.

26. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(\kappa + 2) \overrightarrow{PA} + 3 \overrightarrow{PB} = (\kappa + 2) \overrightarrow{PG} + 3 \overrightarrow{PG}$, άρα
 $(\kappa + 2) \overrightarrow{GA} = 3 \overrightarrow{BG}$, άρα $\overrightarrow{GA} \parallel \overrightarrow{BG}$.

27. $3 \overrightarrow{BL} = 3 \overrightarrow{BA} + 3 \overrightarrow{AL}$, $2 \overrightarrow{MB} = 2 \overrightarrow{MA} + 2 \overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, οπότε
η δοσμένη γίνεται:
 $5 \overrightarrow{AL} + 3 \overrightarrow{MA} - 2 \overrightarrow{AK} = \vec{0}$ ή $3 \overrightarrow{AL} + 2 \overrightarrow{AL} + 3 \overrightarrow{MA} - 2 \overrightarrow{AK} = \vec{0}$,
άρα $3 \overrightarrow{ML} = 2 \overrightarrow{LK}$, άρα $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{ML}$ αντίρροπα.

28. Έστω A (x₁, y₁) και B (x₂, y₂) , τότε το μέσο M του AB έχει τετμημένη

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 7, \text{ άρα } x_1 + x_2 = 14, \text{ όμως } x_1, x_2 \text{ οι ρίζες της εξίσωσης, άρα}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 20 = 14, \text{ δηλαδή } \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = 2.$$

30. $\overrightarrow{AB} = (-4, 2) \quad \overrightarrow{B\Gamma} = (-1, -2) \quad \overrightarrow{A\Gamma} = (-3, 4)$

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο B.

31. Έστω M (x, 0) το ζητούμενο σημείο. Τότε:

α) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, άρα $(x - 3)^2 + 4 = (x - 7)^2 + 16$

β) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

35. Αν (x, y) το ζητούμενο σημείο, τότε ισχύει: $\frac{3+1+x}{3} = 3$ και $\frac{0+2+y}{3} = 2$.

37. α) $2\sqrt{3}$ β) 12 γ) $12 + 4\sqrt{3}$

δ) $\sqrt{12 + 4\sqrt{3}}$ ε) $8\vec{\alpha}^2 - 15\vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

38. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$

40. Αν ω η ζητούμενη γωνία τότε:

$$\cos \omega = \frac{(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{\beta} - \vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}|}, \text{ αλλά } (\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha}^2 = 4 - 4 = 0,$$

άρα $\cos \omega = 0$, δηλαδή $\omega = \frac{\pi}{2}$.

$$41. \left| \vec{\alpha} + \vec{\beta} \right|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2 \vec{\alpha} \vec{\beta} = 2 + 2 \sin \theta = 2 (1 + \sin \theta) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \text{ άρα}$$

$$\left| \vec{\alpha} + \vec{\beta} \right| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|.$$

$$42. \text{ Ισχύουν } \vec{\alpha} \vec{\beta} = 0, \vec{\alpha}^2 - 3 \vec{\beta}^2 - 2 \vec{\alpha} \vec{\beta} = 0 \text{ και } \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2 \vec{\alpha} \vec{\beta} = 4$$

$$44. 3 \vec{v} - 5 \vec{u} = (22, -24), \text{ αν } \vec{w} = (x, y), \text{ τότε πρέπει } 22x - 24y = 0 \quad (1)$$

δηλαδή υπάρχουν άπειρα διανύσματα $\vec{w}$ των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την (1).

$$45. \vec{\alpha} \vec{\beta} = \frac{1}{2} \text{ και ισχύει: } \vec{x} = \kappa (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \text{ και } \vec{\beta} (\vec{\alpha} + \vec{x}) = 0, \text{ άρα } \vec{\beta} \vec{\alpha} + \vec{\beta} \vec{x} = 0,$$

$$\text{δηλαδή } \frac{1}{2} + \vec{\beta} [\kappa (\vec{\alpha} + \vec{\beta})] = 0, \text{ άρα } \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2} + \kappa = 0, \text{ οπότε } \kappa = -\frac{1}{3}.$$

$$46. \text{ Έστω } \vec{\beta}_1 = (x_1, y_1) \text{ και } \frac{1}{2} \text{ και } \vec{\beta} = (x_2, y_2) \text{ οι συνιστώσες. Τότε ισχύει:}$$

$$\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 = \vec{\beta} \quad (1), \quad \vec{\beta}_1 \vec{\beta}_2 = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}_2 // \vec{\alpha} \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$y_1 + y_2 = 10$$

οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$x_2 + y_2 = 0$$

$$\text{Το σύστημα δίνει για λύση } x_2 = y_2 = \frac{15}{2} \text{ και } x_1 = -\frac{5}{2}, y_1 = \frac{5}{2}.$$

47. Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με $\vec{a}$.

48. α) $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\cos \omega| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\sin \omega| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ όπου ω η γωνία των $\vec{a}, \vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$. Τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 6x - 8y$,
 άρα από το (α) ισχύει $|6x - 8y| \leq 6 \cdot 10$, άρα $-60 \leq A \leq 60$.

γ) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (|\vec{\beta}| \cos \omega, |\vec{\beta}| \sin \omega)$. Τότε $|\vec{\beta}| = 1$,
 άρα $|6 \cos \omega - 8 \sin \omega| \leq 6 < 10$.

49. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(\vec{AB} + \vec{AG}) \cdot \vec{AM} = 0$, όμως $\vec{AB} + \vec{AG} = 2\vec{AD}$
 (AD διάμεσος), άρα ισχύει $\vec{AD} \cdot \vec{AM} = 0$, δηλαδή $\vec{AM} \perp \vec{AD}$, άρα το M κινείται σε ευθεία κάθετη στην AD στο σημείο A .

50. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{|\vec{\beta}|^2} \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \vec{x} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{\beta} = 0$

54. α) $(\lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta}) \cdot (\kappa \vec{a} - 2\lambda \vec{\beta}) = 0$, οπότε για $\lambda = 0$ και $\kappa = 1$ προκύπτει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$.

β) Για $\kappa = \lambda = 1$ προκύπτει $(\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{\beta}) = 0$ ή $\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\beta}^2 = 0$ και
 με βάση την (α) $\vec{\beta}^2 = 2$ ή $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$.

55. Από τις δοσμένες σχέσεις έχουμε:

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}^2$$

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}^2 \quad \text{δηλαδή}$$

$$2\vec{\alpha}\vec{\beta} = -\vec{\alpha}^2 = -\vec{\beta}^2, \quad \text{άρα}$$

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}^2 = 3\vec{\alpha}^2$$

56. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = 0$, άρα $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\vec{\gamma}) = 0$, άρα

$$\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} = -19.$$

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ
(Κεφάλαιο 1ο: Διανύσματα)

*Τα κριτήρια αξιολόγησης που ακολουθούν είναι ενδεικτικά.
Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα διαμόρφωσής τους σε
ενιαία θέματα, επιλογής ή τροποποίησης των θεμάτων,
ανάλογα με τις διδακτικές ανάγκες του συγκεκριμένου
τμήματος στο οποίο απευθύνεται.*

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή

Διδακτική ενότητα: Διανύσματα

ΘΕΜΑ 1ο

A. α) Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και θ η γωνία τους, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\beta) \cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

B. α) Αν $\vec{\alpha} = (3, x)$ και $\vec{\beta} = (10, 6)$ να προσδιοριστεί ο x ώστε τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

$\beta)$ Να βρεθεί η γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (3\sqrt{3}, 3)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (4, -6)$, $\vec{w} = (-3, -2)$

A. Σε κάθε διάνυσμα της στήλης A του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε το μέτρο του που βρίσκεται στη στήλη B, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη A διάνυσμα	στήλη B μέτρο διανύσματος
1. $\vec{u}$	A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{20}$
2. $\vec{v}$	Γ. $2\sqrt{13}$ Δ. $\sqrt{11}$
3. $3\vec{w}$	E. $\sqrt{117}$

Πίνακας (II)

1	2	3

B. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v}$

β) $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v}$

γ) $(\vec{u} - \vec{w}) \cdot (2\vec{u} + \vec{w})$

δ) $(\vec{u} + \vec{v})^2$

Γ. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{u} + \lambda \vec{w}$ να είναι κάθετο στο $\vec{v}$.

ΘΕΜΑ 3ο

A. Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ το Μ είναι μέσο της

AB. Αν $\vec{AD} = \vec{\alpha}$ και $\vec{DG} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Το διάνυσμα $\vec{DM}$ ισούται με

A. $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

B. $\frac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$

Γ. $-\vec{\alpha} + \frac{1}{2} \vec{\beta}$

Δ. $\vec{\alpha} + \frac{1}{2} \vec{\beta}$

Ε. $\frac{1}{2} \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) Το διάνυσμα $\vec{MG}$ ισούται με

A. $\vec{\alpha} - \frac{1}{2} \vec{\beta}$

B. $\frac{1}{2} \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

Γ. $\frac{1}{2} \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Δ. $\vec{\alpha} + \frac{1}{2} \vec{\beta}$

Ε. $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

γ) Με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

A. $\vec{AB}$

B. $\vec{BD}$

Γ. $\vec{DB}$

Δ. $\vec{GA}$

Ε. $\vec{AG}$

δ) Με $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

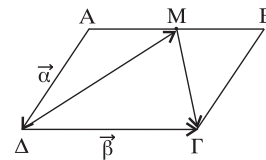
A. $\vec{AG}$

B. $\vec{GA}$

Γ. $\vec{BA}$

Δ. $\vec{DB}$

Ε. $\vec{BD}$



B. Να υπολογίσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ το $\vec{DB}$.

ΘΕΜΑ 4ο

A. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν Δ είναι μέσο της AB και E μέσο της $A\Gamma$, αποδείξτε ότι:

α) $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{A E}$

β) $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma E}$

γ) $\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{2} \overrightarrow{B\Gamma}$

B. Να αποδείξετε ότι αν: $(\kappa + 2) \overrightarrow{PA} + 3 \overrightarrow{PB} = (\kappa + 5) \overrightarrow{P\Gamma}$ τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Κεφάλαιο 2ο:**ΕΥΘΕΙΑ****Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»**

1. * Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$. Σ Λ
2. * Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A (x_1, y_1) και B (x_2, y_2) ορίζεται πάντα ως
$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$
 Σ Λ
3. * Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία A (x_1, y_1) και B (x_1, y_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν. Σ Λ
4. * Υπάρχουν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Σ Λ
5. ** Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{1}{|\lambda|}x$ και $y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \neq 0$. Σ Λ
6. * Οι ευθείες $2x + y = 1$ και $x - 2y = 1$ τέμνονται. Σ Λ
7. * Οι ευθείες $y = 3x + 1$ και $3x - y = 4$ τέμνονται. Σ Λ
8. * Οι ευθείες $y = -\frac{\kappa}{3}x + 1$ και $y = -\lambda x + 2$ είναι παράλληλες. Τότε ισχύει $\kappa = 3\lambda$. Σ Λ
9. * Οι ευθείες $y = 2x + 1$ και $4x - 2y + 5 = 0$ είναι παράλληλες. Σ Λ
10. * Οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων $x'x, y'y$ έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ και τέμνονται κάθετα. Σ Λ
11. * Οι ευθείες $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες. Σ Λ
12. * Οι ευθείες $5x + y = 1$ και $x - 5y - 1 = 0$ είναι κάθετες. Σ Λ
13. * Τα σημεία A (-2, -1), B (1, 4) και Γ (-4, 2) είναι συνευθειακά. Σ Λ

- | | | |
|---|---|---|
| 14. * Τα σημεία A (κ, α), B (λ, α), Γ (μ, α) είναι συνευθειακά. | Σ | Λ |
| 15. ** Τα σημεία A (α + β, γ), B (β + γ, α), Γ (γ + α, β) είναι συνευθειακά αν α ≠ β ≠ γ ≠ α. | Σ | Λ |
| 16. * Η ευθεία που περνά από τα σημεία A (x ₁ , y ₁) και B (x ₂ , y ₂) έχει εξίσωση: $y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_2)$ με (x ₁ ≠ x ₂). | Σ | Λ |
| 17. * Από το σημείο A (x ₀ , y ₀) περνά μία μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης λ. | Σ | Λ |
| 18. * Η ευθεία που περνά από το σημείο (1, 2) και είναι παράλληλη προς την ευθεία y = - 3x + 4, έχει εξίσωση y - 2 = - 3 (x - 1). | Σ | Λ |
| 19. * Η ευθεία AB με A (1, - 4) και B (- 1, - 5) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = \frac{1}{2} x + 3$. | Σ | Λ |
| 20. ** Δίνονται τα σημεία A (- 3, - 1), B (2, 2), Γ (- 3, 4) και Δ (3, - 6). Η ευθεία AB είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ. | Σ | Λ |
| 21. ** Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο (1, 1) και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ίση με 135° είναι x + y = 0. | Σ | Λ |
| 22. * Η ευθεία $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$ με α, β ≠ 0 τέμνει τους άξονες στα σημεία A (α, 0) και B (0, β). | Σ | Λ |
| 23. * Η ευθεία 2y - 3x + 4 = 0 τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο ($\frac{4}{3}$, 0). | Σ | Λ |
| 24. * Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής x = x ₀ . | Σ | Λ |
| 25. * Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία x + y = 0 με τον άξονα x'x είναι 45°. | Σ | Λ |
| 26. ** Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία 3x + √3 y + 1 = 0 με τον άξονα x'x είναι 120°. | Σ | Λ |

27. * Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ είναι πάντα εξίσωση ευθείας. Σ Λ
28. ** Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία. Σ Λ
29. ** Στην ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Τότε ισχύει $B = 0$. Σ Λ
30. * Κάθε εξίσωση ευθείας μπορεί να γραφεί στη μορφή $Ax + By = 0$. Σ Λ
31. * Το διάνυσμα $\vec{n} = (-2, 1)$ είναι κάθετο στην ευθεία $x + y + 2 = 0$. Σ Λ
32. * Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$. Σ Λ
33. * Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, -B)$. Σ Λ
34. Δύο ευθείες παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (A, B)$ και $\vec{\delta}_2 = (-B, A)$ αντίστοιχα είναι μεταξύ τους κάθετες. Σ Λ
35. ** Μια ευθεία κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ με $B \neq 0$ έχει εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$. Σ Λ
36. * Η απόσταση του σημείου $M_0 (x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε) : $Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο $d(M_0, \varepsilon) = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Σ Λ
37. * Η απόσταση $d(M_0, \varepsilon)$ του σημείου $M_0 (x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε) : $Ax + By + \Gamma = 0$ επαληθεύει την ισότητα $|Ax_0 + By_0 + \Gamma| = d(M_0, \varepsilon) \sqrt{A^2 + B^2}$. Σ Λ
38. * Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με την ορίζουσα $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$. Σ Λ
39. * Όλα τα διανύσματα με κοινό φορέα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Σ Λ
40. * Η ευθεία $y = \kappa^2 x + 1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\kappa \neq 0$. Σ Λ

41. * Η ευθεία $x + \lambda (x - y) - \lambda = 0$ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας xOy για κάθε τιμή του αριθμού λ . Σ Λ
42. ** Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x + 1$, $\varepsilon_2: y = 2x - 1$, $\varepsilon_3: x + 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_4: x + 2y + 2 = 0$ τεμνόμενες ορίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σ Λ
43. ** Η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$ δίνεται από τον τύπο: $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$. Σ Λ
44. * Η εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon': x + 3 = 0$ και περνά από το σημείο $(3, 2)$, είναι $y = 3$. Σ Λ
45. * Οι ευθείες $2x - 3y = 11$ και $4y + 3x + 9 = 0$ έχουν κοινό σημείο το $(-1, 3)$. Σ Λ
46. Η ευθεία $y = \lambda x + 3$ έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Σ Λ
47. * Αν οι ευθείες $(\mu + 1)x - y = 0$ και $3x + y - 7 = 0$ είναι παράλληλες, τότε $\mu = 2$. Σ Λ
48. ** Οι ευθείες $\varepsilon_1: 7x + 3y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + 5y - 3 = 0$ είναι κάθετες. Σ Λ
49. * Η εξίσωση $xy = x$ παριστάνει μια μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου. Σ Λ
50. * Το σημείο $A(\eta\mu\theta, 0)$ με $\theta = \frac{\pi}{7}$ ανήκει στην ευθεία $2x + ky = 3$. Σ Λ
51. * Η απόσταση των παράλληλων ευθειών $y = x$ και $y = x + 1$ είναι 1. Σ Λ
52. ** Η εξίσωση $y = x + \beta$ με $\beta \in \mathbb{R}$ παριστάνει οικογένεια ευθειών παράλληλων προς την ευθεία $y = x$. Σ Λ
53. * Ορίζεται τρίγωνο με πλευρές που έχουν εξισώσεις $3x - y = 4$, $y = -5x - 4$, $y = 3x + 5$. Σ Λ
54. ** Η συμμετρική της ευθείας $y = 3x$ ως προς τον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = 3x + 3$. Σ Λ

55. ** Η εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(5, 1)$, $B(6, 3)$ και $\Gamma(2, 2)$ είναι $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$. Σ Λ
56. ** Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από την ευθεία $2x + 5y = 10$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι 5 τ.μ. Σ Λ
57. ** Όλες οι ευθείες της οικογένειας ευθειών: $(x + y + 1) + \lambda(3x - 2y - 4) = 0$ περνούν από το σημείο $(2, 1)$. Σ Λ
58. * Το σύστημα των εξισώσεων δύο παράλληλων ευθειών είναι αδύνατο. Σ Λ
59. ** Η εξίσωση της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $\vec{\delta} \cdot \vec{v} + \Gamma = 0$, όπου $\vec{\delta} = (A, B)$ και $\vec{v} = (x, y)$. Σ Λ
60. * Οι ευθείες $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ είναι κάθετες. Τότε ισχύει $A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2$. Σ Λ
61. * Αν A, B, Γ τρία σημεία του επιπέδου και $(AB\Gamma)$ το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε: $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 2(AB\Gamma)$ ή $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = -2(AB\Gamma)$. Σ Λ
62. ** Τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(1, -1)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου. Σ Λ
63. * Για την απόσταση $d(A, \varepsilon)$ του σημείου A από την ευθεία ε ισχύει $d(A, \varepsilon) = 0$. Το σημείο A ανήκει στην ευθεία ε . Σ Λ
64. * Η εξίσωση $x = y$ για $x \geq 0$ παριστάνει μια ημιευθεία. Σ Λ
65. * Η εξίσωση $y = |x|$ παριστάνει μία μόνο ημιευθεία. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ** Αν η εξίσωση με δύο αγνώστους $f(x, y) = 0$ (1) είναι εξίσωση μιας γραμμής C, τότε
 - A. οι συντεταγμένες μόνο μερικών σημείων της C επαληθεύουν την (1)
 - B. οι συντεταγμένες των σημείων της C δεν επαληθεύουν την (1)
 - Γ. το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την (1) δεν ανήκει στην C
 - Δ. όλα τα σημεία που επαληθεύουν την (1) ανήκουν στην C
 - E. υπάρχουν σημεία της C των οποίων οι συντεταγμένες δεν επαληθεύουν την (1)

2. ** Δίνεται ένα σημείο M μιας ευθείας, η οποία είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (3, -4)$. Ξεκινώντας από το σημείο M θα ξαναβρεθούμε σε σημείο της ευθείας, όταν
 - A. κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες κάτω
 - B. κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες πάνω
 - Γ. κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες δεξιά
 - Δ. κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες αριστερά
 - E. κινηθούμε 3 μονάδες δεξιά και 4 μονάδες πάνω

3. * Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) που δεν είναι κάθετη στον $x'x$ ισούται
 - A. με το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει η (ε) με τον $x'x$
 - B. με την εφαπτομένη της συμπληρωματικής γωνίας που σχηματίζει η (ε) με τον $x'x$
 - Γ. με το συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος κάθετου στην (ε)
 - Δ. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η (ε) με τον $x'x$
 - E. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η (ε) με το θετικό ημιάξονα Oy

4. * Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $7 + 3y = -4x$ είναι

- A. - 4 B. 7 Γ. $-\frac{4}{3}$ Δ. $-\frac{7}{3}$ Ε. $-\frac{3}{4}$

5. * Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{3}{2}$. Μια άλλη ευθεία (ε'), που είναι κάθετη στην (ε), έχει συντελεστή διεύθυνσης

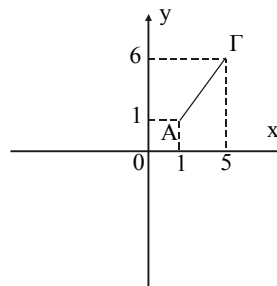
- A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ Γ. $\frac{2}{3}$ Δ. $\frac{3}{2}$ Ε. - 1

6. * Μια ευθεία (ε) έχει συντελεστή $\frac{1}{2}$ και διέρχεται από τη σημείο (- 1, 3). Η εξίσωσή της είναι

- A. $y + 1 = \frac{1}{2} (x - 3)$ B. $y - 3 = \frac{1}{2} (x + 1)$ Γ. $x + 1 = \frac{1}{2} (y - 3)$
Δ. $x - 3 = \frac{1}{2} (y + 2)$ Ε. καμία από τις παραπάνω

7. * Στο διπλανό σχήμα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι

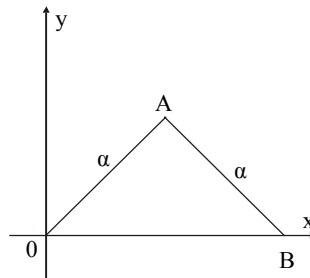
- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{5}{4}$ Γ. $\frac{4}{5}$
Δ. $\frac{2}{3}$ Ε. $\frac{5}{6}$



8. * Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας OA

είναι $y = \sqrt{3}x$. Η γωνία OAB ισούται με

- A. 30° B. 60° Γ. 45°
 Δ. 90° Ε. 135°



9. * Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που είναι παράλληλη με τον $y'y$ ισούται με

- A. 1 B. -1 Γ. 0 Δ. $\varepsilon\phi \frac{\pi}{4}$ Ε. δεν ορίζεται

10. * Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), που διέρχεται από τα σημεία A (x_1, y_1) και B (x_2, y_2) ορίζεται πάντα όταν

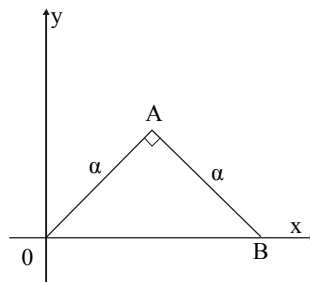
- A. $y_1 \neq y_2$ B. $x_1 = x_2$ και $y_1 \neq y_2$
 Γ. $x_1 \neq -x_2$ και $y_1 \neq y_2$ Δ. $y_1 = y_2$ και $x_1 = x_2$ Ε. $x_1 \neq x_2$

11. ** Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία με

- A. $A = 0$ και $B = 0$ B. $A = 0$ ή $\Gamma \neq 0$
 Γ. $A^2 + B^2 \geq 0$ Δ. $|A| + |B| > 0$ Ε. $|A| + |B| < 0$

12. * Στο διπλανό σχήμα η γωνία OAB είναι ορθή, $\alpha \neq 1$ και B ($\beta, 0$). Η εξίσωση της ευθείας OA είναι

- A. $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ B. $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ Γ. $y = \sqrt{\alpha}x$
 Δ. $y = \alpha\beta x$ Ε. $y = x$



13. * Το κοινό σημείο του άξονα $x'x$ και της ευθείας AB με A (0, 4) και B (1, 5) είναι

- A. (4, 0) B. (0, 0) Γ. (5, 0) Δ. (-4, 0) E. (0, -3)

14. * Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (1, -1) και είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + 6y = 1$ είναι

A. $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1)$ B. $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ Γ. $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$

Δ. $y + 1 = -\frac{1}{3}(x + 1)$ E. $y + 1 = \frac{1}{3}(x + 1)$

15. * Αν A (1, 3) και B (-2, 4), τότε η ευθεία AB έχει εξίσωση

A. $y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ B. $y - 4 = -\frac{1}{3}(x + 2)$ Γ. $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$

Δ. $y = -\frac{1}{3}x + 4$ E. $3y + x + 10 = 0$

16. ** Η ευθεία $y = \lambda x + 3$

A. είναι κάθετη στον $x'x$ για κάποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

B. είναι κάθετη στον $y'y$ για κάποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

Γ. για $\lambda \neq 0$ περνάει από το σημείο $(\frac{1}{\lambda}, 5)$

Δ. περνάει από την αρχή των αξόνων

E. για $\lambda = 1$ είναι κάθετη στην $y = x$

17. ** Οι ευθείες $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + \lambda y - 2 = 0$

A. τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

B. είναι και οι δύο κάθετες στην $y = -x$

Γ. είναι κάθετες μεταξύ τους για $\lambda = -1$

Δ. είναι παράλληλες για $\lambda = 2$

E. τέμνονται στο σημείο (-1, 0) για $\lambda = 2$

18. ** Το διάνυσμα $\vec{\delta} (-2, 3)$ είναι κάθετο στην ευθεία

A. $2x - 3y + 1 = 0$

B. $2x + 3y + 1 = 0$

Γ. $3x + 2y + 1 = 0$

Δ. $3x - 2y + 1 = 0$

E. $3x - 2y - 1 = 0$

19. ** Έστω (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ (με $A \neq 0$ και $B \neq 0$), τότε:

A. το διάνυσμα $\vec{v} = (B, A)$ είναι κάθετο στην (ε)

B. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, -B)$ είναι παράλληλο στην (ε)

Γ. το διάνυσμα $\vec{v} = (-B, A)$ είναι παράλληλο στην (ε)

Δ. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, B)$ είναι παράλληλο στην (ε)

E. το διάνυσμα $\vec{v} = (-A, B)$ είναι κάθετο στην (ε)

20. * Η ευθεία που περνά από το σημείο $(-1, 5)$ και είναι κάθετη στην ευθεία

$$y = \frac{1}{3}x - 7 \text{ έχει εξίσωση}$$

A. $y = -3x + 7$

B. $y + 1 = -3(x - 5)$

Γ. $y - 5 = -3(x + 1)$

Δ. $y - 5 = 3(x + 1)$

E. $y + 1 = 3(x + 5)$

21. * Η εξίσωση της ευθείας AB με $A(1998, 0)$, $B(0, 1998)$ είναι

A. $1998x - 1998y = 0$

B. $1998y + 1998x = 1$

Γ. $\frac{x}{1998} + \frac{y}{1998} = 1$

Δ. $1998x - 1998y = 1$

E. $y = 1998x + 1998$

22. * Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία A $(3, 5)$ και B $(-1, 8)$. Η προβολή του AB στον άξονα x'x έχει μήκος

A. 3

B. 5

Γ. -1

Δ. 8

E. 4

23. ** Έστω ευθεία (ε) που διέρχεται από το A (x₀, y₀) και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ με $\alpha\beta \neq 0$. Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι

A. $\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{x - x_0}{\alpha}$ B. $y - y_0 = \beta (x - x_0)$ Γ. $\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$

Δ. $y = \frac{\beta}{\alpha} (x - x_0)$ E. $y - y_0 = -\frac{\beta}{\alpha} (x - x_0)$

24. ** Η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα x'x αμβλεία γωνία είναι

A. $y = |\lambda| x - 2$ B. $y = 2$ Γ. $y = 3x + 2$

Δ. $y = |\lambda| x + \beta$ με $\lambda < 0$ E. η κάθετη στην $2x - 3y + 2 = 0$

25. ** Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x'x, y'y στα A (α, 0), B (0, β) αντίστοιχα με $\alpha = 2\beta$. Τότε

A. η (ε) σχηματίζει γωνία 60° με τον x'x

B. η (ε) σχηματίζει γωνία 90° με τον x'x

Γ. η (ε) σχηματίζει γωνία οξεία με τον x'x

Δ. η (ε) σχηματίζει γωνία αμβλεία με τον x'x

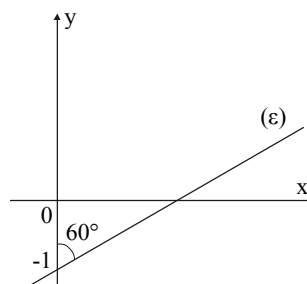
E. ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\frac{1}{2}$

26. ** Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

A. $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x + 1$ B. $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x - 1$

Γ. $y = \frac{1}{2} x + 1$ Δ. $y = \frac{1}{2} x - 1$

E. $y = \sqrt{3} x + 1$



27. * Αν το σημείο $(3, \kappa)$ ανήκει στην ευθεία (ε) $\frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{3} = 1$, τότε
 Α. $\kappa = 0$ Β. $\kappa = 2$ Γ. $\kappa = 3$ Δ. $\kappa = 5$ Ε. $\kappa = 1$

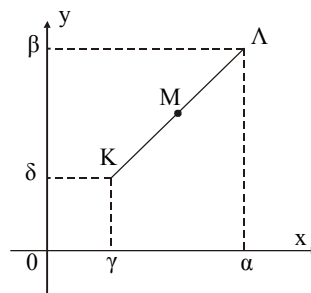
28. * Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $y^2 = x^2$ παριστάνει
 Α. μια ευθεία κάθετη στον $x'x$
 Β. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας xOy
 Γ. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας yOx'
 Δ. τις διχοτόμους των γωνιών xOy και yOx'
 Ε. μια ευθεία κάθετη στον $y'y$

29. ** Δίνονται τα σημεία Α (8, 1), Β (7, 3), Γ (4, 5). Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ είναι
 Α. $y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 4)$ Β. $y - 5 = 2(x + 4)$ Γ. $y - 5 = -2(x - 4)$
 Δ. $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 4)$ Ε. καμία από τις προηγούμενες

30. * Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α (-8, 4) και Β (-6, -2) είναι
 Α. (1, -7) Β. (3, -1) Γ. (-5, -1) Δ. (-7, 1) Ε. (-1, -3)

31. * Στο διπλανό σχήμα το μέσο Μ του ΚΛ έχει συντεταγμένες στον άξονα $x'x$ το σημείο

- Α. $(0, \frac{\beta - \delta}{2})$ Β. $(\frac{\alpha - \gamma}{2}, \frac{\beta - \delta}{2})$
 Γ. $(\frac{\alpha + \gamma}{2}, 0)$ Δ. $(\frac{\alpha - \gamma}{2}, 0)$
 Ε. $(\frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\beta + \delta}{2})$



32. * Αν $A(1, 3)$ και $B(5, 3)$, το συμμετρικό του μέσου του AB ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το
A. $(2, 3)$ **B.** $(2, -3)$ **Γ.** $(3, -3)$ **Δ.** $(-3, 3)$ **Ε.** $(-3, -3)$
33. * Δίνονται τα σημεία $A(0, 4)$ και $B(4, 0)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου AM του τριγώνου OAB είναι (O το σημείο τομής των $x'x, y'y$)
A. 4 **B.** 2 **Γ.** 0 **Δ.** - 2 **Ε.** - 4
34. ** Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(0, 0)$, $B(3, 1)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(\kappa, \kappa)$. Η τιμή του κ είναι
A. 3 **B.** 2 **Γ.** 1 **Δ.** - 2 **Ε.** - 3
35. * Τα σημεία $A(1, 1)$, $B(3, 3)$ και $\Gamma(5, \kappa)$ είναι συνευθειακά. Η τιμή του κ είναι
A. - 4 **B.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 5 **Ε.** - 1
36. * Το σημείο $M(0, -\frac{9}{2})$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB με $A(-1, -5)$. Το σημείο B είναι το
A. $(0, -5)$ **B.** $(-1, -\frac{19}{2})$ **Γ.** $(-1, 4)$ **Δ.** $(1, -4)$ **Ε.** $(-\frac{1}{2}, -\frac{19}{2})$
37. * Δίνεται ευθεία (ε) : $-3x + 2y + 1 = 0$ και το σημείο $M(1, -2)$. Τότε η απόσταση του M από την (ε) είναι
A. $-\frac{6}{\sqrt{13}}$ **B.** $\frac{6}{13}$ **Γ.** $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$ **Δ.** $\frac{6}{\sqrt{13}}$ **Ε.** $\frac{\sqrt{6}}{13}$

38. ** Η απόσταση του σημείου Α (- 1, 1) από την ευθεία $ax + by = 0$ με $a > b$ είναι

$$\begin{array}{lll} \text{A. } \frac{(\alpha + \beta) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha^2 + \beta^2} & \text{B. } \frac{(\alpha - \beta) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha^2 + \beta^2} & \text{Γ. } - \frac{|\beta - \alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \text{Δ. } \frac{|\alpha + \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \text{Ε. } \frac{(\alpha - \beta) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha + \beta} & \end{array}$$

39. * Τα σημεία Α ($\alpha, \alpha + 1$), Β ($\alpha + 1, \alpha + 2$) και Γ ($\alpha + 2, \alpha + 3$) είναι

- Α. συνευθειακά
- Β. κορυφές ορθογωνίου τριγώνου
- Γ. κορυφές ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου
- Δ. κορυφές ορθογωνίου τριγώνου
- Ε. κορυφές ισοσκελούς οξυγωνίου τριγώνου

40. * Τα σημεία Ο (0, 0), Α ($\kappa, 0$), Β (0, λ) με $\kappa, \lambda > 0$ ορίζουν τρίγωνο με εμβαδόν

$$\begin{array}{lll} \text{Α. } 2\kappa\lambda & \text{Β. } \frac{1}{2} (\kappa + \lambda) \kappa & \text{Γ. } \kappa\lambda \\ \text{Δ. } \frac{1}{2} (\kappa - \lambda) (\kappa + \lambda) & \text{Ε. } \frac{1}{2} \kappa\lambda & \end{array}$$

41. * Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές Α (0, 0), Β ($\alpha, 0$) και Γ (α, β) είναι

$$\begin{array}{lllll} \text{Α. } \frac{\alpha\beta}{2} & \text{Β. } \frac{\alpha|\beta|}{2} & \text{Γ. } \alpha\beta & \text{Δ. } \frac{|\alpha\beta|}{2} & \text{Ε. } \frac{|\alpha|\beta}{2} \end{array}$$

42. * Η απόσταση του σημείου (5, - 1) από την ευθεία $3x - 2y - 2 = 0$ είναι

$$\begin{array}{lllll} \text{Α. } \frac{13\sqrt{15}}{13} & \text{Β. } \frac{13\sqrt{13}}{15} & \text{Γ. } \frac{15\sqrt{13}}{13} & \text{Δ. } \frac{15\sqrt{15}}{13} & \text{Ε. } \frac{15\sqrt{13}}{15} \end{array}$$

43. ** Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $3x + 3y = 6$ είναι σε τετραγωνικές μονάδες
 Α. $\frac{9}{2}$ Β. 9 Γ. 4 Δ. 2 Ε. 1
44. * Το συμμετρικό του σημείου (4, 1) ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων είναι
 Α. (- 4, 1) Β. (4, - 1) Γ. (- 4, - 1) Δ. $(2, \frac{1}{2})$ Ε. (1, 4)
45. * Οι ευθείες $y = 2$ και $y = \sqrt{3}x - 1$ σχηματίζουν μεταξύ τους οξεία γωνία ίση με
 Α. 30° Β. 60° Γ. 45° Δ. 75° Ε. 15°
46. * Δυο ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται. Τότε το σύστημα των εξισώσεων τους
 Α. έχει άπειρες λύσεις Β. έχει μοναδική λύση
 Γ. δεν έχει λύση Δ. έχει δύο λύσεις
 Ε. έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x, x)
47. * Μια ευθεία δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης όταν
 Α. η εξίσωσή της είναι της μορφής $y = c$
 Β. έχει συντελεστή διεύθυνσης 0
 Γ. είναι παράλληλη με τον x'
 Δ. δεν ορίζεται ο συντελεστής της
 Ε. έχει εξίσωση $y = \lambda x$
48. * Η ευθεία $\lambda x + y + \mu = 0$ είναι κάθετη στην $y = x$. Τότε ο λ είναι ίσος με
 Α. - 2 Β. - 1 Γ. 0 Δ. 1 Ε. 2

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία που η εξίσωσή της βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (I) με τον συντελεστή της που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II) ($\alpha, \beta \neq 0$).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\epsilon_1: y = \alpha x + \beta$	A. 0
2. $\epsilon_2: y = y_0$	B. δεν ορίζεται
3. $\epsilon_3: x = x_0$	Γ. 1
4. $\epsilon_4: \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$	Δ. β
5. $\epsilon_5: \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$	E. α
	Z. $-\frac{\beta}{\alpha}$
	H. $-\frac{\alpha}{\beta}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4	5

2. ** Η πρώτη στήλη του πίνακα (I) περιέχει τους συντελεστές διεύθυνσης κάποιων ευθειών και η δεύτερη τις γωνίες που σχηματίζουν οι ίδιες ευθείες με τον άξονα $x'x$. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$	A. 0
2. $-\sqrt{3}$	B. $\frac{\pi}{4}$
3. δεν ορίζεται	Γ. $\frac{2\pi}{3}$
4. - 1	Δ. $\frac{\pi}{6}$
5. 0	E. $\frac{\pi}{3}$
	Z. $\frac{\pi}{2}$
	H. $\frac{5\pi}{6}$
	Θ. $\frac{3\pi}{4}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4	5

3. ** Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις των ευθειών της στήλης Α του πίνακα (I) με τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1). $y = x - 1$	A. 50°
2). $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$	B. 45°
3). $y = -x + \alpha$	Γ. 135°
	Δ. 30°
	Ε. 120°

Πίνακας (II)

1	2	3

4. ** Να αντιστοιχίσετε τις ευθείες της στήλης Α του πίνακα (I) με τα κάθετα σ' αυτές διανύσματα της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $y = 2x - 1$	Α. $\vec{\delta}_1 = (0, 2)$
2. $2x + y + 2 = 0$	Β. $\vec{\delta}_2 = (2, -1)$
3. $y = 3$	Γ. $\vec{\delta}_3 = (2, 0)$
4. $x = -1$	Δ. $\vec{\delta}_4 = (2, 1)$
	Ε. $\vec{\delta}_5 = (1, -2)$
	Ζ. $\vec{\delta}_6 = (-1, -2)$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

5. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α του πίνακα (I) με το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\epsilon_1: y = x$, $\epsilon_2: x = 5$	A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
	B. 0
2. $\epsilon_1: y = 3$, $\epsilon_2: y = \sqrt{3}x + 5$	Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Δ. 1
3. $\epsilon_1: x = -2$, $\epsilon_2: \sqrt{3}x - y = 0$	E. $\frac{1}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3

6. ** Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος γωνίας - σημείου στη στήλη Α του πίνακα (I) με την αντίστοιχη ευθεία που ορίζεται από αυτό το ζεύγος και βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $45^\circ, (0, 0)$	A. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$
2. $60^\circ, (0, 1)$	B. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) + 1$
3. $150^\circ, (-1, 0)$	Γ. $y = x - 1$
	Δ. $y = x$
4. $30^\circ, (1, 1)$	E. $y = \sqrt{3}x + 1$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

7. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε ευθεία της στήλης Α του πίνακα (I) την απόσταση της αρχής των αξόνων από αυτή, που εμφανίζεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $y = 2$	A. 0
2. $x = -3$	B. -2
3. $2x - y = 0$	Γ. 1
4. $3x + 4y - 5 = 0$	Δ. 2
	E. -1
	Z. 3

Πίνακας (II)

1	2	3	4

8. ** Κάθε σημείο της στήλης Α του πίνακα (I) βρίσκεται σε μια ευθεία της στήλης Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α σημεία	στήλη Β ευθείες
1. (- 1, 2)	A. $x - 3y = 9$
2. (0, - 3)	B. $3x + y = 15$
3. (5, 0)	Γ. $x + y = 1$
4. (- 2, - 1)	Δ. $2x - y = 0$
	E. $x + 2y + 4 = 0$
	Z. $y = 5x$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

9. ** Κάθε ευθεία της στήλης Α του πίνακα (I) περιέχει ένα σημείο που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

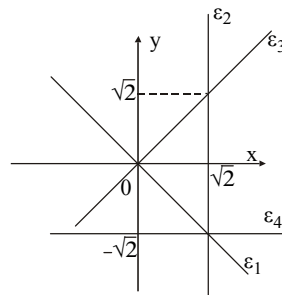
Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $y = -3x + 1$	Α. (12, 0)
	Β. (0, 12)
2. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 6$	Γ. $(\frac{1}{3}, 0)$
	Δ. $(0, \frac{1}{3})$
3. $x = 2$	Ε. (2, 7)
	Ζ. (7, 2)

Πίνακας (II)

1	2	3

10. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία της στήλης Α του πίνακα (I) με την εξίσωσή της που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
	A. $y = x$
1. ε_1	B. $x + y = \sqrt{2}$
2. ε_2	Γ. $x + y = 0$
3. ε_3	Δ. $x = \sqrt{2}$
4. ε_4	E. $y = \sqrt{2} x$
5. $x'x$	Z. $y = 0$
6. $y'y$	H. $y = -\sqrt{2}$
	Θ. $x = 0$
	I. $y = x + \sqrt{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4	5	6

11. ** Κάθε ευθεία της στήλης Α του πίνακα (I) είναι κάθετη σε μια ευθεία της στήλης Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

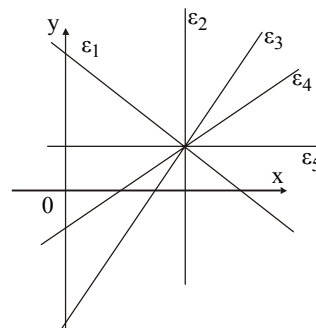
Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $y - x = 0$	Α. $3x = 2y$
2. $y = 2$	Β. $x + 2y = 2$
3. $2x + y = 2$	Γ. $x - 2y = 2$
4. $x - \frac{y}{2} = 1$	Δ. $x = 2$
	Ε. $y - x = 1$
	Ζ. $x + y = 0$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

12. ** Στη στήλη Α του πίνακα (I) δίνεται ο χαρακτηρισμός του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. αρνητικός	A. ϵ_1
	B. ϵ_2
2. μηδέν	Γ. ϵ_3
	Δ. ϵ_4
3. δεν ορίζεται	E. ϵ_5

Πίνακας (II)

1	2	3

13. ** Κάθε σημείο της στήλης Α του πίνακα (I) είναι κέντρο μιας οικογένειας ευθειών από τη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α κέντρο	στήλη Β εξίσωση οικογένειας ευθειών
1. (2, 1)	Α. $(x + 6y - 7) + \lambda (2x - 15y + 1) = 0$ Β. $(x + y + 1) + \lambda (2x - 5y + 7) = 0$
2. (7, 1)	Γ. $(x + y - 3) + \lambda (2x - y - 3) = 0$ Δ. $(x + y - 1) + \lambda (x + 2y - 3) = 0$
3. (- 1, 2)	Ε. $(x + y - 8) + \lambda (- x + 2y + 5) = 0$

Πίνακας (II)

1	2	3

14. ** Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y = \lambda x + 7$ και $\delta: y = 3x - 1$. Για κάθε τιμή του λ που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (I), η ευθεία ε παίρνει μια θέση στο καρτεσιανό επίπεδο που περιγράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α	στήλη Β
1. $\lambda = -\frac{1}{3}$	A. $\varepsilon \parallel \delta$
2. $\lambda = 3$	B. $\varepsilon \parallel x'x$
3. $\lambda = 0$	Γ. $\varepsilon \parallel y'y$
	Δ. $\varepsilon \perp \delta$
	E. $\varepsilon \parallel$ διχοτόμος της xOy

Πίνακας (II)

1	2	3

Ερωτήσεις διάταξης

1. ** Να γράψετε σε μια σειρά τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών:

$$\varepsilon_1: y = -2x + 5$$

$$\varepsilon_2: 5x - 3y + 7 = 0$$

$$\varepsilon_3: y = \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} x + 4$$

$$\varepsilon_4: \text{παράλληλη με το διάνυσμα } \vec{\delta}_1 = (2, 7)$$

$$\varepsilon_5: \text{κάθετη στο διάνυσμα } \vec{\delta}_2 = (\sqrt{3}, 1)$$

$$\varepsilon_6: y + (\eta\mu\alpha) x + 5 = 0$$

ώστε καθένας να είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.

2. ** Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: y = -x + 7$$

$$\varepsilon_2: y = \sqrt{3}x + 4$$

$$\varepsilon_3: x = 3$$

$$\varepsilon_4: x - y + 3 = 0$$

$$\varepsilon_5: x - \sqrt{3}y + 5 = 0$$

$$\varepsilon_6: y = 1$$

Να τις γράψετε σε μια σειρά, ώστε κάθε επόμενη να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία μεγαλύτερη από την προηγούμενή της.

3. ** Δίνονται τα σημεία A (1, 1), B (2, 3), Γ (-1, 2) και Δ (-2, 3). Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα AB, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ και ΓΔ σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα από το προηγούμενό του να έχει μεγαλύτερο μήκος.

4. ** Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: x - 2y - 4 = 0$$

$$\varepsilon_2: 3x - y + 2 = 0$$

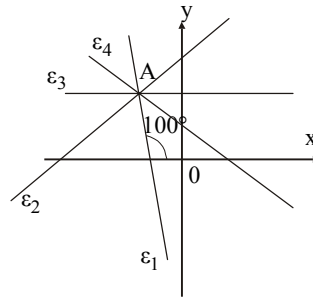
$$\varepsilon_3: 2x + 3y - 1 = 0$$

$$\varepsilon_4: 4x - 5y + 5 = 0$$

Να τις γράψετε σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει συντελεστή διεύθυνσης μεγαλύτερο από την προηγούμενή της.

5. ** Να γραφούν τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-3, 1)$ και $\Gamma(2, 2)$ σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα να απέχει από την ευθεία $y = x$ απόσταση μεγαλύτερη από την απόσταση του προηγούμενού του.

6. ** Στο διπλανό σχήμα να γράψετε σε μια σειρά τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A , έτσι ώστε καθεμιά να έχει συντελεστή μικρότερο της προηγούμενής της.



Ερωτήσεις συμπλήρωσης

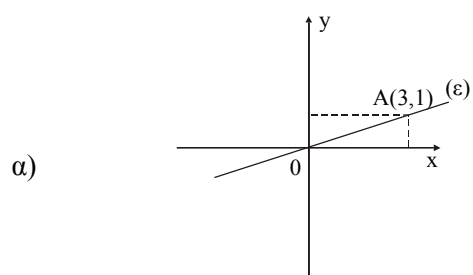
1. ** Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

ευθεία	κλίση ευθείας	σχετική θέση ευθείας ως προς $x'x$	σχετική θέση ευθείας ως προς $y'y$
$y = 3$			
$x = 2$			
$y = 2x - 1$			

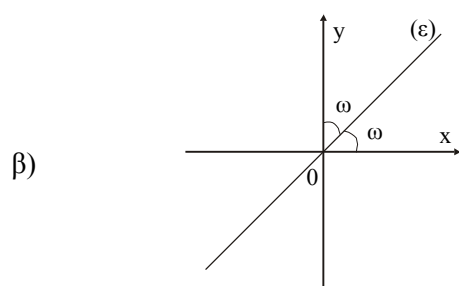
2. ** Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

κορυφές τριγώνου ΑΒΓ	Είδος τριγώνου		εμβαδόν τριγώνου
	ορθογώνιο	ισοσκελές	
A (- 3, 2) B (5, 0) Γ (- 2 , 6)			
A (1, 1) B (- 3, 1) Γ (-1 ,2)			
A (0, 2) B (3, 0) Γ (0 ,0)			
A (3, 0) B (0, 4) Γ (- 3 , 0)			

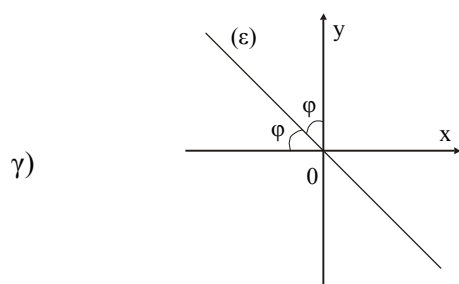
3. * Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε) που υπάρχει σε καθένα από τα επόμενα σχήματα:



ε:

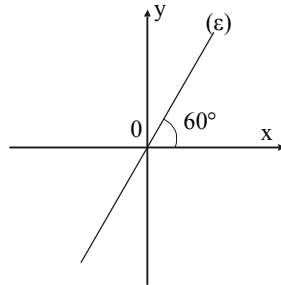


ε:



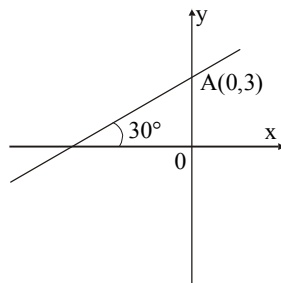
ε:

δ)



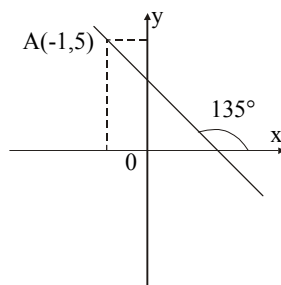
ε:

ε)



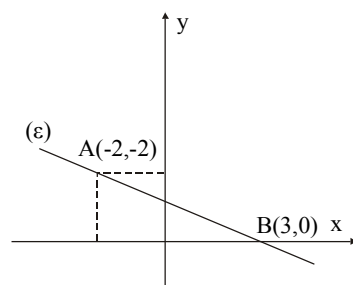
ε:

στ)



ε:

ζ)



ε:

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε , που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία:

$$\alpha) \omega = \frac{\pi}{3} \qquad \beta) \omega = \frac{2\pi}{3} \qquad \gamma) \omega = \pi$$

2. * Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ μια ευθεία ε , η οποία διέρχεται από τα σημεία:

$$\alpha) A(-6, -2) \qquad B(3, 7)$$

$$\beta) A(1, 3) \qquad B(2, 4)$$

$$\gamma) A(\sqrt{3}, 3) \qquad B(0, 4)$$

$$\delta) A(1, -1) \qquad B(1, 2)$$

$$\varepsilon) A(0, \sqrt{3}) \qquad B(1, 0)$$

3. ** Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(-6, 1)$ και $\Gamma(-10, -1)$ είναι συνευθειακά.

4. ** Δίνονται τα σημεία $A(7, 5)$, $B(6, -7)$ και $\Gamma(2, 3)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

5. * Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$ και:

$$\alpha) \text{ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα } \vec{\delta}(2, -5)$$

$$\beta) \text{ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα } \vec{\delta}(0, 3)$$

$$\gamma) \text{ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα } \vec{\delta}(-2, 0)$$

$$\delta) \text{ είναι κάθετη στο διάνυσμα } \vec{\delta}(2, 1)$$

$$\varepsilon) \text{ είναι κάθετη στο διάνυσμα } \vec{\delta}(0, -2)$$

$$\sigma\tau) \text{ σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ γωνία } \omega = 135^\circ.$$

6. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A (- 1, 2), B (3, - 2) και Γ (1, 4). Να βρεθούν:
- α) οι εξισώσεις των πλευρών του
 - β) οι εξισώσεις δύο υψών του
 - γ) οι εξισώσεις δύο διαμέσων του
 - δ) οι εξισώσεις δύο διχοτόμων του
 - ε) οι συντεταγμένες του ορθοκέντρου του
 - στ) οι συντεταγμένες του βαρυκέντρου του
 - ζ) οι συντεταγμένες του εκκέντρου του
 - η) οι συντεταγμένες του περικέντρου του.
7. ** Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία A (κσυνφ, λημφ), B (κημφ, - λσυνφ) και Γ (κ, λ), όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $0 < \varphi < \pi$. Για ποιες τιμές του φ τα A, B, Γ είναι συνευθειακά;
8. * Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:
- α) παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$
 - β) κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$
 - γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - δ) παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - ε) παράλληλη στον άξονα $y'y$
 - στ) παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων
 - ζ) παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων
 - η) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 32 τ.μ.
9. ** Τα σημεία $M_1 (1, 1)$, $M_2 (2, 2)$ και $M_3 (3, - 1)$ είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν:
- α) οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του
 - β) οι συντεταγμένες του κέντρου του
 - γ) το εμβαδόν του

10. ** Μια κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών $2x - 3y + 20 = 0$ και $3x + 5y - 27 = 0$ και η μια διαγώνιός του βρίσκεται επί της ευθείας $x + 7y - 16 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.
11. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: 2x - 3y - 12 = 0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12 τ.μ.
12. ** Σε τρίγωνο ABΓ έχουμε: A (- 8, 2), B (7, 4) και H (5, 2) το ορθόκεντρό του. Να βρείτε:
α) την εξίσωση της πλευράς BΓ
β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
γ) τις εξισώσεις των πλευρών του
13. ** Τριγώνου ABΓ δίνονται η κορυφή A (1, 2) και οι εξισώσεις $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ABΓ.
14. ** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:
α) $\varepsilon_1: 3x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: - 6x + 2y - 3 = 0$
β) $\varepsilon_1: x = 4$ και $\varepsilon_2: x = - 6$
γ) $\varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = x - 3$
15. ** Το σημείο A (3, - 1) είναι κορυφή του τετραγώνου ABΓΔ, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση $3x - 2y - 5 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.
16. * Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda + 2)x + \lambda y + 3\lambda - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x + \lambda y + 5 = 0$. Να βρείτε τον λ , ώστε να είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

17. ** Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$ και $\varepsilon_2: \mu x - (3\mu + 2)y + 7 = 0$.
Να βρείτε τον μ , ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι 90° .
18. ** Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι: $3x + 4y - 7 = 0$, $x + y + 2 = 0$
και $2x + 3y - 5 = 0$. Ζητούνται:
α) οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου
β) το εμβαδόν του.
19. ** Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(6, 4)$ και $\Gamma(\frac{9}{2}, 6)$.
α) Ναδειχθεί ότι η γωνία $AB\Gamma$ είναι ορθή.
β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$.
20. ** Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 3 = 0$ είναι οι φορείς των
δύο πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου και $A(2, -1)$ μια κορυφή του,
να βρεθούν οι άλλες κορυφές και το εμβαδόν του.
21. *** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία
 $A(\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega)$ και $B(\eta\mu\varphi, \sigma\upsilon\nu\varphi)$. Να βρεθεί η απόσταση του $O(0, 0)$ από
αυτήν ($0 \leq \omega \neq \varphi < \frac{\pi}{2}$).
22. ** Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 0)$, $B(2\lambda, 3\lambda)$, $\lambda \neq 0$. Αν η κάθετη στην AB στο
σημείο A τέμνει την ευθεία $x = -2\lambda$ στο Γ , να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο
 $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

23. ** Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - 3y + 1 = 0$, $\varepsilon_2: -x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο $A(1, -2)$. Να βρεθεί σημείο M της ε_2 , ώστε το μέσο του AM να ανήκει στην ε_1 .
24. ** Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία $A(1, -2)$, $B(-2, 3)$, $\Gamma(-1, -4)$ και $\Delta(5, 0)$.
25. ** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;
26. ** Τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(3, 6)$ ισαπέχουν από το σημείο $\Gamma(-4, \lambda)$. Να υπολογιστεί η τιμή του λ .
27. ** Δίνονται τα σημεία $A(4, 2)$, $B(3, -1)$ και η ευθεία $\varepsilon: y = -3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε , ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με κορυφή το B .
28. ** Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-1, -5)$.
- Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .
 - Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB .
 - Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος AB .
 - Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία AB .
 - Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία AB .

29. ** Για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu + 1)x - 2\mu y = \lambda$ και $\varepsilon_2: (\mu - 1)x - 3y = 2\lambda - 1$:
- α) τέμνονται,
 - β) είναι παράλληλες,
 - γ) συμπίπτουν.
30. ** Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon: ax + by + \gamma = 0$, $\varepsilon_1: ax - by + \gamma = 0$, $\varepsilon_2: ax - by - \gamma = 0$ και $\varepsilon_3: ax + by - \gamma = 0$ ($a, b, \gamma \neq 0$). Να αποδείξετε ότι:
- α) η ε_1 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $x'x$
 - β) η ε_2 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $y'y$
 - γ) η ε_3 είναι συμμετρική της ε ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.
31. ** Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $x + y = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $P(2, 3)$ ως προς άξονα συμμετρίας την (ε) .
32. ** Να εξετάσετε αν η ευθεία $2\lambda x + 2\lambda y + 5\lambda = 3y - x + 7$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
33. ** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x \cos^2 \frac{\theta}{2} + y \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta - 1 = 0$, $\theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.
34. ** Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1)
Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία;
35. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\lambda - 1, 2\lambda + 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
36. ** Τριγώνου $AB\Gamma$ οι κορυφές είναι $A(-2, 2\kappa)$, $B(2\kappa, \kappa)$ και $\Gamma(\kappa - 2, -\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του κέντρου βάρους του τριγώνου.

37. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x - 2y + 4 = 0$ και $3x - 2y + 6 = 0$.
38. ** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.
39. ** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεων από τα σημεία A (3, 2) και B (-1, 2) έχουν σταθερή διαφορά c είναι ευθεία κάθετη στην AB.
40. ** Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση $(x + y - 4) + \lambda (x - 3y - 4) = 0$.
41. ** Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο Σ (2, 3) και προσπίπτουσα στην ευθεία $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο Μ (1, 1). Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.
42. ** Ένα σημείο P του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο P' του P ως προς την ευθεία $x + 2y - 1 = 0$ κινείται πάνω στην ευθεία $7x - y - 2 = 0$.
43. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A (5, 3), B (0, 0) και Γ (6, 0). Φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ευθείες AB και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ αντιστοίχως. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ.

44. ** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε ευθεία (ε').

Εφαρμογή:

α) A (1, - 1) και (ε'): $2x + y - 1 = 0$

β) A (2, - 3) και (ε'): $x = - 3$

γ) A (- 2, 1) και (ε'): $y = - 1$

- Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε ευθεία (ε').

Εφαρμογή:

α) A (- 1, 1) και (ε'): $2x + y + 1 = 0$

β) A (4, - 3) και (ε'): $2x + 1 = 0$

γ) A (2, - 1) και (ε'): $y = 4$

- Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x'x.

Εφαρμογή:

α) A (- 2, 3) και $\varphi = 30^\circ$

β) A (4, - 5) και $\varphi = 90^\circ$

γ) A (3, - 3) και $\varphi = 135^\circ$

- Τέμνει τους άξονες στα σημεία A ($x_1, 0$) και B (0, y_2).

Εφαρμογή:

α) A (4, 0) και B (0, 4)

β) A (- 3, 0) και B (0, 1)

- Είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών (ε₁) και (ε₂).

Εφαρμογή:

α) (ε₁): $3x - y + 1 = 0$ και (ε₂): $- 6x + 2y - 3 = 0$

β) (ε₁): $x = 4$ και (ε₂): $x = - 6$

γ) (ε₁): $y = x$ και (ε₂): $y = x - 3$

- Απόχει απόσταση d από γνωστή ευθεία (ϵ').

Εφαρμογή:

- α) $d = \sqrt{2}$ από (ϵ'): $2x + y - 1 = 0$
 β) $d = 4$ από (ϵ'): $y = 3$

- Διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και απέχει απόσταση d από το $B(x_1, y_1)$.

Εφαρμογή:

- α) $A(3, -1)$ και απέχει $d = \sqrt{2}$ από το $B(2, 2)$
 β) $A(2, 1)$ και απέχει $d = 1$ από το $B(0, 0)$

- Είναι μεσοκάθετη σε γνωστό τμήμα AB .

Εφαρμογή:

- α) $A(-2, 1)$ και $B(2, 3)$
 β) $A(3, 0)$ και $B(0, -5)$

- Είναι άξονας συμμετρίας του AB με A, B γνωστά σημεία.

Εφαρμογή:

- α) $A(1, -1)$ και $B(-1, 3)$
 β) $A(-3, 4)$ και $B(4, -3)$

- Διέρχεται από σημείο $A(x_0, y_0)$ και σχηματίζει γωνία φ με γνωστή ευθεία (ϵ').

Εφαρμογή:

- α) $A(2, 1)$ και $\varphi = 45^\circ$ με την $x - y + 1 = 0$
 β) $A(-2, 1)$ και $\varphi = 30^\circ$ με την $y + 2 = 0$

- Διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

- α) $A(3, -2)$ και $\vec{v} = (0, 1)$
 β) $A(-2, -3)$ και $\vec{v} = (2, 3)$
 γ) $A(-1, 0)$ και $\vec{v} = (-4, 0)$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

α) A (5, - 2) και $\vec{v} = (- 1, 3)$

β) A (- 2, 2) και $\vec{v} = (0, 4)$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

α) A (1, - 2) και $\varphi = 60^\circ$ με το $\vec{v} = (1, 1)$

β) A (0, 3) και $\varphi = 45^\circ$ με το $\vec{v} = (2, 1)$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

Εφαρμογή:

α) A (- 1, 2) και εμβαδόν 3 τ.μ.

β) A (- 1, 0) και εμβαδόν $\sqrt{2}$ τ.μ.

45. ** Τον Δεκέμβριο το καλοριφέρ μιας κατοικίας λειτούργησε 4 ώρες την ημέρα και το κόστος έφτασε τις 45.000 δρχ. ενώ τον Ιανουάριο που λειτούργησε 5 ώρες την ημέρα το κόστος ήταν 49.960 δρχ. Αν η συνάρτηση που εκφράζει το κόστος είναι $y = ax + \beta$, όπου x οι ώρες λειτουργίας, να βρεθούν:

α) οι τιμές των α, β

β) το προβλεπόμενο κόστος για τον Φεβρουάριο, αν λειτουργήσει 4,5 ώρες την ημέρα (28 ημέρες).

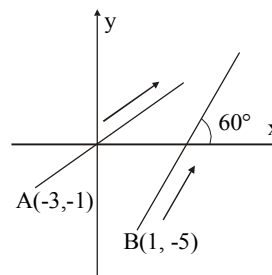
46. ** Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1 (t - 1, t + 2)$ και $\Pi_2 (3t, 3t - 1)$ για κάθε χρονική στιγμή t ($t > 0$).

α) Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.

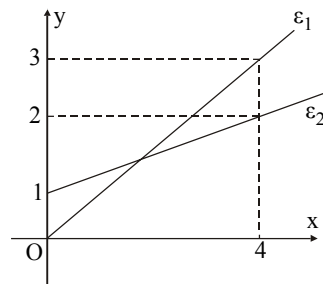
γ) Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.

47. ** Η πορεία δύο κινητών που κινούνται ευθύγραμμα ξεκινώντας από τα σημεία A και B αντίστοιχως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- α) Να βρεθεί η απόσταση των δύο σημείων A και B.
 β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ.
 γ) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου B από την ευθεία στην οποία κινείται το άλλο κινητό.
 δ) Να εξετασθεί αν τέμνονται οι διευθύνσεις των δύο κινητών.
48. ** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο A (2, 6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π ($\lambda - 1$, $2 + \lambda$), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του A;
 β) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι A, όταν κινείται ευθύγραμμα.
 γ) Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι;
49. ** Μια τριγωνική κατασκήνωση διαθέτει τρεις εισόδους, μία σε κάθε κορυφή. Ο αρχηγός της κατασκήνωσης (του οποίου η σκηνή βρίσκεται κάπου μέσα στην κατασκήνωση) θέλοντας να βρει το εμβαδόν της κατασκήνωσης, αποστέλλει τρεις κατασκηνωτές (εφοδιασμένους με πυξίδες και χιλιομετρητές) να μετρήσουν τις αποστάσεις των εισόδων από τη σκηνή του. Ο πρώτος προχωρά 2 km βόρεια και αμέσως μετά 1 km ανατολικά και εκεί συναντά την πρώτη είσοδο. Ο δεύτερος προχωρά 3 km ανατολικά και 1 km νότια και εκεί συναντά τη δεύτερη είσοδο. Ο τρίτος προχωρά 2 km δυτικά και συναντά την τρίτη είσοδο.
- α) Να τοποθετήσετε, σε ένα πρόχειρο σχέδιο, τη σκηνή του αρχηγού και τις εισόδους, αφού πρώτα χαράξετε τις πορείες.
 β) Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα αξόνων και να βρείτε τις συντεταγμένες των τριών εισόδων σ' αυτό το σύστημα.
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν της κατασκήνωσης.

50. ** Σε ένα εργοστάσιο ο νέος διευθυντής ζήτησε να ενημερωθεί για την οικονομική πορεία της επιχείρησης από το έτος που ιδρύθηκε. Οι υπεύθυνοι των οικονομικών του παρέδωσαν το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



ε_1 η ευθεία των εσόδων
 ε_2 η ευθεία των εξόδων
Ox ο άξονας των ετών λειτουργίας
Oy ο άξονας των εκατοντάδων
 εκατομμυρίων δραχμών

- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 , ε_2 .
 - Να βρείτε πόσα χρόνια μετά την έναρξη της λειτουργίας της, η επιχείρηση αρχίζει να έχει κέρδη.
 - Να βρείτε το κέρδος (έσοδα μείον έξοδα) της επιχείρησης τον τέταρτο χρόνο της λειτουργίας της.
 - Πότε η επιχείρηση θα παρουσιάσει κέρδος 300 εκατομμύρια (3 εκατοντάδες εκατομμύρια);
51. ** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy ένα πλοiάριο ξεκινά από ένα λιμάνι A και κατευθύνεται στο λιμάνι O. Το ραντάρ θέσης για κάθε χρονική στιγμή t δίνει συντεταγμένες για το πλοiάριο $(2t - 40, t - 30)$, $t \geq 0$.
- Πού βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι A;
 - Πόσο απέχει το λιμάνι A από το O;
 - Είναι σωστή η πορεία του πλοiάριου; Ποια είναι η εξίσωσή της;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο:

ΕΥΘΕΙΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

1.	Σ
2.	Λ
3.	Λ
4.	Λ
5.	Λ
6.	Σ
7.	Λ
8.	Σ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Λ
12.	Σ
13.	Λ
14.	Σ
15.	Σ
16.	Σ
17.	Σ

18.	Σ
19.	Σ
20.	Σ
21.	Λ
22.	Σ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Λ
26.	Σ
27.	Σ
28.	Σ
29.	Σ
30.	Λ
31.	Λ
32.	Σ
33.	Λ
34.	Σ

35.	Σ
36.	Λ
37.	Σ
38.	Λ
39.	Σ
40.	Λ
41.	Σ
42.	Σ
43.	Σ
44.	Λ
45.	Λ
46.	Λ
47.	Λ
48.	Λ
49.	Λ
50.	Λ
51.	Λ

52.	Σ
53.	Λ
54.	Λ
55.	Σ
56.	Σ
57.	Λ
58.	Σ
59.	Σ
60.	Λ
61.	Σ
62.	Σ
63.	Σ
64.	Σ
65.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής
--

1.	Δ
2.	Β
3.	Δ
4.	Γ
5.	Γ
6.	Β
7.	Β
8.	Β
9.	Ε
10.	Ε
11.	Δ
12.	Ε
13.	Δ
14.	Β
15.	Β
16.	Β

17.	Γ
18.	Α
19.	Γ
20.	Γ
21.	Γ
22.	Ε
23.	Α
24.	Ε
25.	Δ
26.	Β
27.	Β
28.	Δ
29.	Δ
30.	Δ
31.	Ε
32.	Γ

33.	Δ
34.	Β
35.	Δ
36.	Δ
37.	Δ
38.	Β
39.	Α
40.	Ε
41.	Δ
42.	Γ
43.	Δ
44.	Ε
45.	Β
46.	Β
47.	Δ
48.	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	E
2	A
3	B
4	H
5	Z

3.

1	B
2	Δ
3	Γ

5.

1	A
2	E
3	Γ

7.

1	Δ
2	Z
3	A
4	Γ

9.

1	Γ
2	B
3	E

11.

1	Z
2	Δ
3	Γ
4	B

13.

1	Γ
2	E
3	Δ

2.

1	Δ
2	Γ
3	Z
4	Θ
5	A

4.

1	B
2	Δ
3	A
4	Γ

6.

1	Δ
2	E
3	A
4	B

8.

1	Γ
2	A
3	B
4	E

10.

1	Γ
2	Δ
3	A
4	H
5	Z
6	Θ

12.

1	A
2	E
3	B

14.

1	Δ
2	A
3	B

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $-2, -\sqrt{3}, -\eta\mu\alpha, \frac{5}{3}, \sqrt{3}, \frac{7}{2}$

2. $\varepsilon_6, \varepsilon_5, \varepsilon_4, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1$

3. $\Gamma\Delta, AB, B\Gamma, A\Delta, B\Delta$

4. $\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_2$

5. Γ, A, B

6. $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_1$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $\sqrt{3}$ β) $-\sqrt{3}$ γ) 0

2. α) 45° β) 45° γ) 150° δ) 90° ε) 120°

3. $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{2}$

4. $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$

5. α) $y + 2 = -\frac{5}{2}(x - 3)$ β) $x = 3$ γ) $y = -2$
 δ) $y + 2 = -2(x - 3)$ ε) $y = -2$ στ) $y + 2 = -(x - 3)$

6. Παρατηρήστε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο Α

7. Είναι $\overrightarrow{AB} = (\kappa(\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi), \lambda(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi))$, $\overrightarrow{B\Gamma} = (\kappa(\eta\mu\varphi - 1), \lambda(\sigma\upsilon\nu\varphi + 1))$.

Θα πρέπει: $\begin{vmatrix} \kappa(\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi) & \kappa(\eta\mu\varphi - 1) \\ \lambda(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi) & \lambda(\sigma\upsilon\nu\varphi + 1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi = \frac{5\pi}{6}$

Αν $\kappa = 0$ ή $\lambda = 0$ τότε βρίσκονται στην ίδια ευθεία για κάθε γωνία φ .

8. Το κοινό σημείο είναι το $(-3, 5)$

α) $y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 3)$ β) $y - 5 = -\frac{1}{3}(x + 3)$

γ) $y = -\frac{5}{3}x$ δ) $y = 5$ ε) $x = -3$

στ) $y - 5 = (x + 3)$ ζ) $y - 5 = -(x + 3)$

η) Αν $y - 5 = \lambda(x + 3)$ η ευθεία τότε τα σημεία τομής με τους άξονες είναι

$(-\frac{5}{\lambda} - 3, 0)$ και $(0, 3\lambda + 5)$ και πρέπει $(-\frac{5}{\lambda} - 3)(3\lambda + 5) = 32$

9. α) Αν $M_4(x, y)$ τότε $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$, οπότε $x = 4, y = 0$

β) Το μέσον του M_1M_3 είναι το $(2, 0)$

γ) Είναι ίσο με το διπλάσιο εμβαδόν του $M_1M_2M_3$

10. Το σημείο τομής είναι $A(-1, 6)$. Η απέναντι κορυφή είναι το συμμετρικό του A ως προς την $x + 7y - 16 = 0$.
11. Οι ευθείες έχουν τη μορφή $y = \frac{2}{3}x + \kappa$ και κόβουν τους άξονες στα σημεία $A(0, \kappa)$ και $B(-\frac{3}{2}\kappa, 0)$. Το εμβαδόν του OAB είναι $\frac{1}{2} \left| \kappa \cdot (-\frac{3}{2}\kappa) \right|$
12. α) $AH \perp B\Gamma$, άρα βρίσκουμε το συντελεστή της $B\Gamma$
 β) $BH \perp A\Gamma$
13. Έστω $(\epsilon_1): y - 1 = 0$, $(\epsilon_2): x - 3y + 1 = 0$. Το A δεν ανήκει στις (ϵ_1) , (ϵ_2) . Άρα οι διάμεσοι θα είναι από τα B και Γ . Έστω $B(x_1, y_1)$, $\Gamma(x_2, y_2)$ και M, N μέσα των AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε $M(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1+2}{2})$, $N(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y_2+2}{2})$ με τα B και N να ανήκουν στην (ϵ_1) και τα Γ και N να ανήκουν στην (ϵ_2)
14. Η μεσοπαράλληλη διχοτομεί κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα πάνω στις παράλληλες
15. Το A δεν ανήκει στη δοσμένη ευθεία. Μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της κάθετης από το A πάνω στη δοσμένη

16. Για $\lambda = 0$ είναι παράλληλες με τον yy'

17. Παίρνουμε παράλληλα προς τις ευθείες διανύσματα

21. Είναι $\lambda = \frac{\text{συν}\varphi - \text{συν}\omega}{\eta\mu\varphi - \eta\mu\omega}$ και ορίζεται πάντα λόγω του περιορισμού

22. Οι συντεταγμένες του Γ θα είναι $(-2\lambda, \lambda)$ και $(AB) = (A\Gamma) = \sqrt{10} \cdot |\lambda|$

24. Άθροισμα των δύο εμβαδών τριγώνου

25. Θεωρούμε την εξίσωση τριώνυμο ως προς y ή x

30. α) Αν το $(x_0, y_0) \in (\varepsilon)$ τότε $(x_0, -y_0) \in (\varepsilon_1)$

β) Το $(-x_0, y_0) \in (\varepsilon_2)$

γ) Το $(-x_0, -y_0) \in (\varepsilon_3)$

33. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\text{συν}\theta = 2\text{συν}^2 \frac{\theta}{2} - 1$ και η ευθεία γράφεται

$$(y - 2) + \text{συν}^2 \frac{\theta}{2} (x - y + 2) = 0$$

37. Οι ευθείες είναι παράλληλες
38. Η εξίσωση γράφεται: $(x - \lambda)^2 - (y + 2\lambda)^2 = 0$ και εφαρμόζουμε διαφορά τετραγώνων
40. Το κέντρο της οικογένειας είναι το $(4, 0)$ και ανήκει στην ευθεία
41. Βρίσκουμε το συμμετρικό του Σ ως προς την ευθεία. Αυτό το σημείο λόγω συμμετρίας θα ανήκει και στην ανακλόμενη
42. Το συμμετρικό του $A(k, k)$ ανήκει στην (ε) : $7x - y - 2 = 0$ αφού η κάθετη από το (A) στην $x + 2y - 1 = 0$ τέμνει την (ε) στο B και τα A, B ισαπέχουν από την $x + 2y - 1 = 0$
43. Θεωρήστε την $y = k$ και βρείτε τα σημεία τομής της με τις $AB, A\Gamma$
45. Θεωρήστε τα σημεία $(4, 45.000)$ και $(5, 49.960)$ πάνω στην $y = \alpha \cdot x + \beta$ για να υπολογίσετε τα α, β
46. α) Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που αντιστοιχούν στα Π_1, Π_2
β) Οι ευθείες είναι παράλληλες

48. α) $\lambda - 1 < 2$

β) Το σύστημα $\lambda - 1 = 2$ και $2 + \lambda = 6$ είναι αδύνατο

γ) Απόσπαση σημείου από ευθεία

49. Τα σημεία είναι τα $(1, 2)$, $(3, -1)$, $(-2, 0)$

50. β) Να βρεθεί το σημείο τομής των (ε_1) , (ε_2)

γ) είναι η διαφορά $3 - 2$

δ) $\frac{3}{4}x - (\frac{1}{4}x + 1) = 3$

51. α) Θέτουμε $t = 0$

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ
(Κεφάλαιο 2ο: Ευθεία)

*Τα κριτήρια αξιολόγησης που ακολουθούν είναι ενδεικτικά.
Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα διαμόρφωσής τους σε
ενιαία θέματα, επιλογής ή τροποποίησης των θεμάτων,
ανάλογα με τις διδακτικές ανάγκες του συγκεκριμένου
τμήματος στο οποίο απευθύνεται.*

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή

Διδακτική ενότητα: Ευθεία

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** α) i) Τι ονομάζεται γωνία μιας ευθείας ε με τον άξονα $x'x$;
ii) Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$;
iii) Ποιες είναι οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$;
iv) Πότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία;
v) Σε ποιο διάνυσμα είναι παράλληλη η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ και σε ποιο κάθετη;
- β) Αποδείξτε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.
- B.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και
- α) είναι παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$
β) είναι κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$
γ) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$
δ) σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 135°
ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $(0, 2)$

ΘΕΜΑ 2ο

Οι συντεταγμένες δύο κινητών P_1 και P_2 για κάθε χρονική στιγμή t ($t > 0$) είναι:

$P_1(t, t + 3)$, $P_2(2t - 5, t + 1)$

α) Όταν το P_1 έχει συντεταγμένες $(1, 4)$ ποιες είναι οι συντεταγμένες του P_2 ;

β) Να βρεθεί η απόσταση των κινητών τη χρονική στιγμή $t = 2$.

γ) Να βρεθούν οι γραμμές στις οποίες κινούνται τα δύο κινητά.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση:

i) να συναντηθούν οι πορείες (όχι υποχρεωτικά τα κινητά)

ii) να συναντηθούν τα κινητά.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή

Διδακτική ενότητα: *Ευθεία*

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

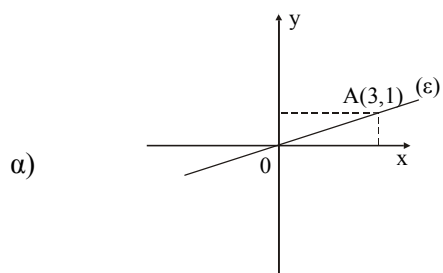
$$Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } B \neq 0 \text{ ή } A \neq 0.$$

B. α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(\alpha - 1)x + (2\alpha + 1)y + \alpha^2 - 1 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό α . Για ποια τιμή του α η ευθεία είναι παράλληλη με τον x' ;

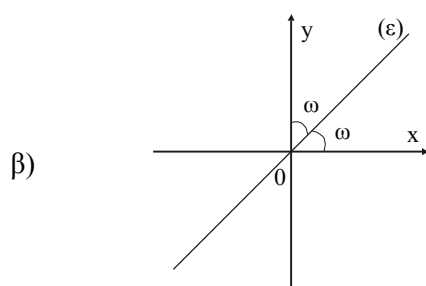
β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $x + y = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

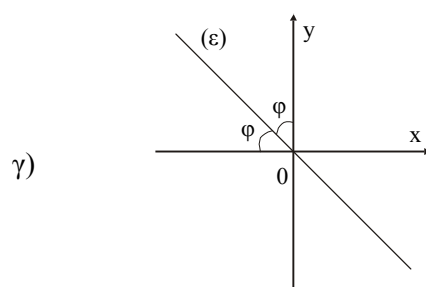
A. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε) που υπάρχει σε καθένα από τα επόμενα σχήματα:



ε:

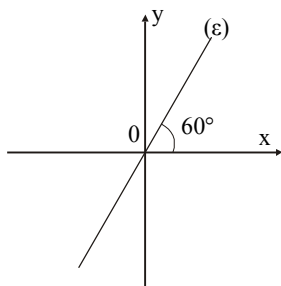


ε:



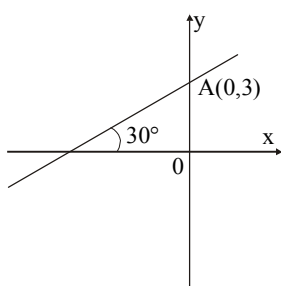
ε:

δ)



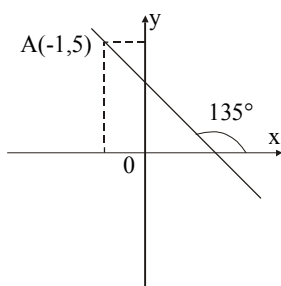
ε:

ε)



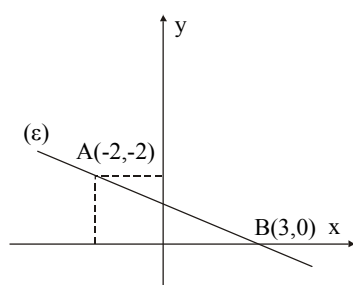
ε:

στ)



ε:

ζ)



ε:

B. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία του σχήματος (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

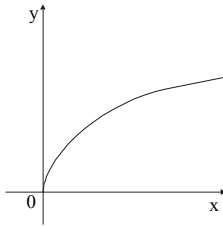
Κεφάλαιο 3ο:

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

- | | | |
|---|---|---|
| 1. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 = a$ ($a > 0$) παριστάνει κύκλο. | Σ | Λ |
| 2. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + κx + λy = 0$ με $κ, λ \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο. | Σ | Λ |
| 3. * Ο κύκλος με κέντρο $K(1, -1)$ που περνά από το σημείο $(-1, 1)$ έχει πάντα εξίσωση: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$. | Σ | Λ |
| 4. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + a(x + y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό a . | Σ | Λ |
| 5. * Το σημείο $(\frac{\eta\mu\theta}{2}, \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{2})$ ανήκει στον κύκλο $4(x - \eta\mu\theta)^2 + 4(y - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό θ . | Σ | Λ |
| 6. * Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι. | Σ | Λ |
| 7. * Το σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με τετμημένη 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. | Σ | Λ |
| 8. ** Οι κύκλοι $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ και $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ εφάπτονται εξωτερικά | Σ | Λ |
| 9. * Ο κύκλος $(x + 1)^2 + y^2 = 18$ τέμνει την ευθεία $y = x + 1$. | Σ | Λ |
| 10. ** Τα σημεία $(-2, 2)$ και $(4, 2)$ του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά. | Σ | Λ |
| 11. * Οι κύκλοι $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ και $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{10}{3}$ έχουν δύο κοινά σημεία. | Σ | Λ |
| 12. * Η εξίσωση $(x + y)^2 - 4 = 2xy$ παριστάνει κύκλο. | Σ | Λ |
| 13. * Οι εξισώσεις $x = \rho\eta\mu\varphi$ και $y = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ λέγονται παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$. | Σ | Λ |

- | | | |
|--|---|---|
| 14. * Η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ στο σημείο με τετμημένη 1 έχει εξίσωση $x + y = 1$. | Σ | Λ |
| 15. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $(1, 0)$. | Σ | Λ |
| 16. * Η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 = \alpha^2$ είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. | Σ | Λ |
| 17. * Η σχέση $y = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ είναι τύπος συνάρτησης που παριστάνει ημικύκλιο $(-\alpha \leq x \leq \alpha)$. | Σ | Λ |
| 18. ** Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$. Έχει πάντα εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$. | Σ | Λ |
| 19. * Ένα σημείο (x_1, y_1) είναι εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ . Ισχύει: $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < \rho^2$. | Σ | Λ |
| 20. ** Η παραβολή με εστία το σημείο $(1, 0)$ έχει παράμετρο $p = 2$. | Σ | Λ |
| 21. * Η ευθεία που έχει εξίσωση $y = 3$ είναι παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 16x$. | Σ | Λ |
| 22. * Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy η παραβολή $y^2 = 2px$ βρίσκεται πάντα στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E . | Σ | Λ |
| 23. * Ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $x^2 = 8y$. | Σ | Λ |
| 24. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p(x + x_1)$. | Σ | Λ |
| 25. ** Μια ευθεία και μια παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο. Η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής. | Σ | Λ |
| 26. * Μια παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ έχει πάντα εξίσωση της μορφής $x^2 = 2py$. | Σ | Λ |
| 27. * Μια παραβολή με κορυφή το $O(0, 0)$ και διευθετούσα την $y = -\frac{p}{2}$, έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$. | Σ | Λ |
| 28. * Κάθε σημείο της παραβολής $y^2 = 8x$ ισαπέχει από την ευθεία $x = -2$ και το σημείο $(4, 0)$. | Σ | Λ |

29. ** Όλα τα σημεία της $y^2 = 2px$ με $p > 0$, εκτός του $(0, 0)$, έχουν θετική τετμημένη. Σ Λ
30. * Η διευθετούσα της $y^2 = 3x$ είναι η ευθεία $x = -\frac{3}{4}$. Σ Λ
31. * Η διευθετούσα της $x^2 = 4y$ είναι η ευθεία $y = -1$. Σ Λ
32. ** Ο κύκλος $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y^2 = -2x$ εφάπτονται. Σ Λ
33. * Η εστία της παραβολής $x^2 = y$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. Σ Λ
34. * Στο σημείο (x_0, y_0) της παραβολής $y^2 = 2px$ η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{p}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$). Σ Λ
35. * Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2 = 4x$. Σ Λ
36. * Η εξίσωση $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, παριστάνει καμπύλη της μορφής του διπλανού σχήματος. Σ Λ
- 
37. * Δύο από τις κορυφές και οι εστίες οποιασδήποτε έλλειψης, βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Σ Λ
38. * Όσο η εκκεντρότητα μιας έλλειψης πλησιάζει προς το 0, τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Σ Λ
39. * Η εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο αν $\alpha > \beta$. Σ Λ
40. ** Η εστιακή απόσταση μιας έλλειψης είναι το μισό του μεγάλου άξονα. Η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης είναι $\frac{1}{2}$. Σ Λ
41. * Μια ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με μια έλλειψη, είναι πάντοτε εφαπτομένη της. Σ Λ

42. * Η εξίσωση $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = \frac{3}{2}$ παριστάνει έλλειψη. Σ Λ
43. * Το σημείο (κ, λ) ανήκει σε κάθε έλλειψη με κέντρο Ο, η οποία περιέχει το σημείο (-κ, -λ). Σ Λ
44. * Δύο ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες, είναι όμοιες. Σ Λ
45. * Δύο όμοιες ελλείψεις έχουν πάντα τις ίδιες εστίες. Σ Λ
46. * Το σημείο Α (2, -2) βρίσκεται έξω από την έλλειψη
C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Σ Λ
47. * Η εξίσωση $x^2 + ky^2 = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο όταν $k > 0$. Σ Λ
48. * Η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ δεν έχουν κοινό σημείο. Σ Λ
49. ** Τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ είναι εσωτερικά της
έλλειψης $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$. Σ Λ
50. * Η ευθεία $y = -3$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$. Σ Λ
51. * Η ευθεία $x = 2$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. Σ Λ
52. * Εστιακή απόσταση μιας έλλειψης ονομάζεται η απόσταση δύο σημείων της που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της. Σ Λ
53. * Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της
M (α συνθ, β ημθ) είναι (συνθ) x + (ημθ) y = 1. Σ Λ
54. * Η εκκεντρότητα της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 4$ είναι $\epsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Σ Λ
55. ** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ είναι όμοιες. Σ Λ

56. * Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ισχύει πάντα $a > b$. Σ Λ
57. * Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ σε δύο σημεία. Σ Λ
58. * Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα, τόσο πιο ανοικτή είναι η υπερβολή. Σ Λ
59. * Η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = a^2$ έχει εκκεντρότητα $e = \sqrt{2}$. Σ Λ
60. * Η υπερβολή $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{a}{b} x$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{a}{b} x$. Σ Λ
61. * Η εξίσωση $x^2 - 9y = 0$ παριστάνει υπερβολή. Σ Λ
62. * Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής έχει κοινά σημεία με την υπερβολή. Σ Λ
63. ** Το σημείο (5, 4) ανήκει σε μια ασύμπτωτη ευθεία της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 40$. Σ Λ
64. * Υπάρχουν υπερβολές που οι ασύμπτωτές τους είναι κάθετες μεταξύ τους. Σ Λ
65. * Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. Σ Λ
66. * Η εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda y^2 = 0$ παριστάνει υπερβολή για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Σ Λ
67. * Η υπερβολή $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία (0, 2) και (0, -2). Σ Λ

68. ** Η υπερβολή $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$. Σ Λ
69. * Η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ εφάπτεται της υπερβολής $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Σ Λ
70. * Η διχοτόμος της γωνίας xOy τέμνει την υπερβολή $x^2 - y^2 = 4$ σε δύο σημεία. Σ Λ
71. ** Κάθε ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ είναι κάθετη σε μία από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Σ Λ
72. * Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $(\eta\mu\theta, 1)$ ανήκει στην υπερβολή $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$. Σ Λ
73. ** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ και $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Το σημείο $M(-2, 3)$ ανήκει στη γραμμή με εξίσωση
Α. $x = 3$ Β. $x = -2$ Γ. $x^2 + y^2 = 1$
Δ. $(x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 1$ Ε. $y^2 = -2x$
2. * Το κέντρο του κύκλου που έχει διάμετρο AB με $A(1, -3)$ και $B(7, 5)$, έχει συντεταγμένες
Α. $(4, 4)$ Β. $(3, 4)$ Γ. $(4, -4)$ Δ. $(4, 1)$ Ε. $(4, -1)$
3. * Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 = 8$ είναι
Α. 2 Β. $2\sqrt{2}$ Γ. $4\sqrt{2}$ Δ. 4 Ε. 8
4. * Το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$ είναι
Α. $(3, -2)$ Β. $(2, -3)$ Γ. $(2, 3)$ Δ. $(-2, 3)$ Ε. $(-3, 2)$
5. * Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $(-1, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $(4, -3)$, είναι
Α. $x^2 + y^2 = 29$ Β. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{29}$
Γ. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{29}$ Δ. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 29$
Ε. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 29$
6. * Ένας κύκλος που διέρχεται από το σημείο $(3, 9)$ και έχει ακτίνα 9, έχει εξίσωση
Α. $x^2 + y^2 = 81$ Β. $x^2 + y^2 = 3$ Γ. $x^2 + y^2 = 9$
Δ. $(x - 3)^2 + y^2 = 81$ Ε. $(x - 3)^2 + y^2 = 49$

7. ** Ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $(1, 2)$ και εφάπτεται στον άξονα των $x'x$, έχει εξίσωση
- A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ B. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$
 Γ. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ Δ. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
 E. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
8. ** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο $(2, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία
- A. $x - 2y + 1 = 0$ B. $2x + 3y + 7 = 0$ Γ. $x + 2y = 4$
 Δ. $4x + 2y + 1 = 0$ E. $y = x$
9. ** Ο κύκλος $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \rho^2$ εφάπτεται του άξονα $x'x$. Η τιμή του ρ είναι
- A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. 5
 E. καμία από τις προηγούμενες
10. * Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x - 8y + \kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η τιμή του κ είναι
- A. 4 B. 3 Γ. 2 Δ. 1 E. 0
11. ** Ο κύκλος που έχει κέντρο το $(x_0, 0)$, εφάπτεται στον άξονα $y'y$ ($x_0 \neq \rho$). Η εξίσωσή του είναι
- A. $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2$ B. $x^2 + y^2 = x_0^2$ Γ. $(x - x_0)^2 + y^2 = \rho^2$
 Δ. $(x - \rho)^2 + y^2 = \rho$ E. $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0$
12. ** Ο κύκλος $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$ (α, β, ρ θετικοί) εφάπτεται στους δύο θετικούς ημιάξονες Ox, Oy , όταν
- A. $\alpha = \beta \neq \rho$ B. $\alpha \neq \beta = \rho$ Γ. $\alpha > \beta$
 Δ. $\alpha = \rho = \beta$ E. κανένα από τα προηγούμενα

13. ** Ο κύκλος που έχει εξίσωση την $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$
- A. διέρχεται από το σημείο A (α, α)
 - B. διέρχεται από το σημείο A ($\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}$)
 - Γ. έχει το κέντρο του στην $y = x + 1$
 - Δ. έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = -x$
 - E. εφάπτεται στους άξονες $x'x$ και $y'y$
14. ** Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις $C_1: (x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$ και $C_2: x^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$ ($\alpha \neq 0$).
- A. Η απόσταση των κέντρων τους είναι 2α
 - B. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $|\alpha|\sqrt{2}$
 - Γ. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $2\alpha^2$
 - Δ. Το κέντρο του C_1 είναι εσωτερικό του C_2
 - E. Το κέντρο του C_2 βρίσκεται πάνω στον C_1
15. ** Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα κύκλο, όταν
- A. $A^2 + B^2 - 4\Gamma$ είναι τέλειο τετράγωνο
 - B. $|A| + |B| \neq 0$
 - Γ. $A^2 + B^2 > 4\Gamma$
 - Δ. $4A^2 + 4B^2 - \Gamma < 0$
 - E. $A^2 + B^2 < 4\Gamma$
16. ** Ο κύκλος $x^2 + y^2 + x = 0$
- A. εφάπτεται στον $x'x$
 - B. εφάπτεται στον $y'y$
 - Γ. τέμνει τον $y'y$ σε δύο σημεία
 - Δ. δεν τέμνει κανένα άξονα
 - E. εφάπτεται και στους δύο άξονες
17. ** Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2\alpha(x + y) = -\alpha^2$, $\alpha > 0$ έχει κέντρο
- A. (α, α)
 - B. ($2\alpha, \alpha$)
 - Γ. ($\frac{\alpha}{2}, 2\alpha$)
 - Δ. ($\alpha, -2\alpha$)
 - E. (α^2, α)

18. ** Δίνεται το σημείο $A \left(\frac{1}{2} \eta\mu\theta, \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu\theta \right)$, $\theta \in \mathbb{R}$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.

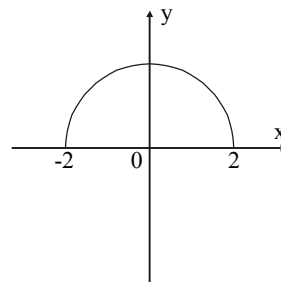
- A. Το σημείο A ανήκει στον κύκλο, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$
- B. Το σημείο A ανήκει στον κύκλο, αν $\theta \in (0, \pi)$
- Γ. Το σημείο A βρίσκεται έξω από τον κύκλο
- Δ. Το σημείο A βρίσκεται μέσα στον κύκλο
- Ε. Το σημείο A βρίσκεται άλλοτε μέσα και άλλοτε έξω από τον κύκλο

19. ** Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο K (- 1, - 2) και περνά από το σημείο (2, 2), είναι

- A. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
- B. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = - 3$
- Γ. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$
- Δ. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 3$
- Ε. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

20. ** Η εξίσωση του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος είναι

- A. $x^2 + y^2 = 2$
- B. $x^2 + y^2 = 4$
- Γ. $y = \sqrt{4 - x^2}$
- Δ. $x = \sqrt{4 - y^2}$
- Ε. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$



21. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο του M (- 1, 2). Η εφαπτομένη του στο M έχει εξίσωση

- A. $2x - y = 5$
- B. $- x - 2y = 5$
- Γ. $x + 2y - 5 = 0$
- Δ. $x - 2y + 5 = 0$
- Ε. $2x + y = 5$

22. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 3$ και το σημείο του M ($+\sqrt{2}$, - 1). Η εφαπτομένη στο M είναι

- A. $-\sqrt{2}x + y - 3 = 0$
- B. $\sqrt{2}x - y - 3 = 0$
- Γ. $x - y = 3$
- Δ. $\sqrt{2}x + y = 3$
- Ε. $-x + \sqrt{2}y = 3$

23. ** Η παραβολή που έχει εστία $E(0, 4)$ και κορυφή το $O(0, 0)$, έχει εξίσωση
 Α. $y^2 = 8x$ Β. $y^2 = -8x$ Γ. $y^2 = 16x$
 Δ. $x^2 = 16y$ Ε. $x^2 = 8y$
24. ** Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 16x$ στο σημείο $(1, 4)$ είναι παράλληλη στην ευθεία
 Α. $y = x$ Β. $y = -x$ Γ. $y = 2x + 1$ Δ. $y = x + 2$ Ε. $4y = x$
25. * Τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = 8x$ και της ευθείας $x - y = 0$ είναι
 Α. $(0, 0)$ και $(1, 1)$ Β. $(8, 8)$ και $(2, 1)$ Γ. $(0, 0)$ και $(8, 8)$
 Δ. $(1, \sqrt{8})$ και $(-1, \sqrt{8})$ Ε. $(2, 4)$ και $(4, 2)$
26. ** Το σημείο $A(\kappa, 4)$ ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$. Το συμμετρικό σημείο A' του A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι
 Α. $(4, 4)$ Β. $(-4, 4)$ Γ. $(2, 4)$ Δ. $(2, -4)$ Ε. $(2, -2)$
27. ** Μια παραβολή με κορυφή το $O(0, 0)$ έχει διευθετούσα την $x = \frac{3}{2}$.
 Η παραβολή αυτή έχει εξίσωση
 Α. $y^2 = 6x$ Β. $y^2 = -6x$ Γ. $y^2 = 3x$ Δ. $x^2 = -6y$ Ε. $x^2 = -3y$
28. ** Η εξίσωση $y = ax^2$, $a \neq 0$ παριστάνει παραβολή
 Α. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = \frac{a}{2}$
 Β. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = 2a$
 Γ. η οποία βρίσκεται στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο
 Δ. της μορφής $x^2 = 2py$ με $p = \frac{a}{2}$
 Ε. με άξονα συμμετρίας τον $y'y$

29. ** Η εξίσωση $y^2 = 4ax$
- A. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $a > 0$
 - B. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $a = \frac{1}{2} p$ ($p > 0$)
 - Γ. παριστάνει παραβολή για κάθε $a \neq 0$
 - Δ. παριστάνει παραβολή για κάθε a πραγματικό αριθμό
 - Ε. παριστάνει παραβολή μόνο όταν a ρητός
30. ** Οι παραβολές $y^2 = ax$ και $x^2 = ay$ ($a \neq 0$)
- A. έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
 - B. εφάπτονται στο $O(0, 0)$
 - Γ. έχουν ένα ή δύο κοινά σημεία ανάλογα με το a
 - Δ. έχουν πάντα δύο κοινά σημεία
 - Ε. υπάρχει τιμή του a για την οποία δεν τέμνονται
31. * Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης
- A. $\lambda = \frac{p}{y_1}$ B. $\lambda = \frac{2p}{y_1}$ Γ. $\lambda = \frac{y_1}{p}$ Δ. $\lambda = \frac{y_1}{2p}$ Ε. $\lambda = 2p$
32. ** Οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 2px$ στα σημεία (x_1, y_1) και $(x_1, -y_1)$
- A. είναι παράλληλες
 - B. είναι πάντα κάθετες
 - Γ. τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$
 - Δ. τέμνονται σε σημείο του άξονα $x'x$
 - Ε. σχηματίζουν πάντα οξεία γωνία

33. ** Η εξίσωση $y^2 = 16|x|$

- A. παριστάνει μια παραβολή
- B. παριστάνει δύο παραβολές
- Γ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x > 0$
- Δ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x < 0$
- E. παριστάνει δύο ευθείες

34. ** Το σημείο A (2, 4) της παραβολής $y^2 = 8x$ απέχει από τη διευθετούσα απόσταση

- A. 2 B. 4 Γ. 8 Δ. 16 E. $\sqrt{8}$

35. * Αν E', E οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους 2α και A τυχόν σημείο της έλλειψης, τότε

- A. $(AE') - (AE) = \alpha$ B. $(AE') + (AE) = \alpha$ Γ. $(AE') = (AE)$
Δ. $(AE') + (AE) = 2\alpha$ E. $(AE') - (AE) = 2\alpha$

36. ** Η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $\frac{25x^2}{9} + 4y^2 = 1$ από τη μια εστία της είναι

- A. $\frac{7}{6}$ B. $\frac{\sqrt{11}}{10}$ Γ. $\frac{\sqrt{11}}{5}$ Δ. $\frac{5}{2}$ E. $\frac{4}{3}$

37. ** Η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες E' (0, - 2) και E (0, 2) και μικρό άξονα 10, είναι

- A. $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ Γ. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$
Δ. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{29} = 1$ E. $2x^2 - 2y^2 = 10$

38. ** Από τις παρακάτω ελλείψεις με εστίες στον άξονα $y'y$ και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, έχει εστιακή απόσταση 6 η

Α. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ Β. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ Γ. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ Ε. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

39. * Έστω η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστιακή απόσταση 2γ και μεγάλο

άξονα 2α . Τότε θα είναι πάντα

Α. $\alpha > \beta > \gamma$ Β. $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ Γ. $0 < \alpha < \beta$

Δ. $\gamma > \alpha$ Ε. $\gamma < \alpha$

40. ** Η έλλειψη που έχει την ίδια εκκεντρότητα με την C: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, είναι

Α. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ Β. $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ Γ. $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$

Δ. $\frac{y^2}{4^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$ Ε. $\frac{4x^2}{3^2} + \frac{4y^2}{5^2} = 1$

41. * Η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ έχει μια εστία στο σημείο

Α. (2, 3) Β. (0, $\sqrt{2}$) Γ. ($\sqrt{3}$, 0) Δ. (-1, 0) Ε. (0, -1)

42. ** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ έχουν

Α. δύο μόνο κοινά σημεία

Β. τέσσερα κοινά σημεία

Γ. ένα μόνο κοινό σημείο

Δ. κανένα κοινό σημείο

Ε. άπειρα κοινά σημεία

43. ** Η εξίσωση $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ $\alpha, \beta \neq 0$

A. παριστάνει πάντα μία έλλειψη

B. παριστάνει πάντα έναν κύκλο

Γ. παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες

Δ. παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha \neq \beta$

Ε. παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha = \beta$

44. ** Η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ είναι όμοια με την

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

B. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$

Γ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Ε. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

45. ** Μια από τις ελλείψεις με εστίες τα σημεία $E' (-2, 0)$ και $E (2, 0)$ είναι και η

A. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$

B. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

Γ. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Ε. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$

46. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ και το σημείο της M $(-\sqrt{5}, 0)$.

Η εφαπτομένη της στο M θα είναι

A. $\sqrt{5} y - 5 = 0$

B. $+\sqrt{5} x + 5 = 0$

Γ. $\sqrt{5} x - 15 = 0$

Δ. $-\sqrt{5} x + y - 15 = 0$

Ε. $3\sqrt{5} x - 15 = 0$

47. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 2$ και το σημείο της M ($\sqrt{2}$, - 1).

Η εφαπτομένη της στο M θα έχει εξίσωση

A. $x - \sqrt{2}y = 4$ B. $\sqrt{2}x - 2y - 4 = 0$ Γ. $\sqrt{2}x + 2y = 4$

Δ. $x - 2y - 4 = 0$ Ε. $-\sqrt{2}x - 2y = 4$

48. * Μια ασύμπτωτη της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 400$ είναι

A. $y = \frac{5}{4}x$ B. $y = \frac{4}{5}x$ Γ. $y = \frac{16}{25}x$

Δ. $y = \frac{25}{16}x$ Ε. καμία από τις προηγούμενες

49. ** Η εξίσωση της υπερβολής που έχει εστιακή απόσταση $2\gamma = 8$ και εκκεντρότητα $\frac{4}{3}$ είναι

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ Γ. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ Ε. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

50. ** Μια υπερβολή έχει εξίσωση C: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. Τότε

A. η C έχει τις εστίες της στον άξονα y'y

B. έχει ασύμπτωτες τις $y = \pm \frac{4}{3}x$

Γ. έχει εστίες E' (- 5, 0), E (5, 0)

Δ. είναι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$

Ε. έχει κορυφές A' (- 3, 0), A (3, 0)

51. ** Οι υπερβολές $C_1: \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ και $C_2: \alpha^2 y^2 - \beta^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2$ ($\alpha \neq \beta$) έχουν

- Α. την ίδια εκκεντρότητα
 Β. τις ίδιες εστίες
 Γ. την ίδια εστιακή απόσταση
 Δ. διαφορετικές ασύμπτωτες
 Ε. τις ίδιες κορυφές

52. ** Η υπερβολή $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν

- Α. την ίδια εστιακή απόσταση
 Β. τις ίδιες εστίες
 Γ. την ίδια εκκεντρότητα
 Δ. δύο από τις κορυφές της C_2 ταυτίζονται με τις κορυφές της C_1
 Ε. τέσσερα κοινά σημεία

53. ** Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της $M_1 (x_1, y_1)$.

Η εφαπτομένη της στο M_1 θα έχει εξίσωση

- Α. $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$
 Β. $\frac{xx_1}{\beta^2} - \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$
 Γ. $\beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2$
 Δ. $\alpha^2 x_1 x - \beta^2 y_1 y = 1$
 Ε. $xx_1 - yy_1 = 1$

54. ** Η εξίσωση $kx^2 + \lambda y^2 = \mu$ με $k, \lambda, \mu \neq 0$ παριστάνει πάντα υπερβολή με

- Α. $\mu = 1$
 Β. $k\lambda < 0$
 Γ. $\mu < 0$
 Δ. $k \neq \lambda$
 Ε. $k = \mu$ ή $\lambda = \mu$

55. ** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ ($\alpha \neq \beta$) έχουν

- Α. την ίδια εκκεντρότητα
 Β. τις ίδιες ασύμπτωτες
 Γ. τις ίδιες εστίες
 Δ. τις ίδιες κορυφές
 Ε. μία μόνο κοινή εστία

56. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{3} \sqrt{16x^2 - 144}$

($x \geq 3$ ή $x \leq -3$) είναι

A. κύκλος με ακτίνα $\rho = 12$

B. έλλειψη με $a = 3$ και $b = 4$

Γ. υπερβολή με εστίες $(-5, 0)$, $(5, 0)$

Δ. τα δύο άνω τμήματα υπερβολής με εστίες $(-5, 0)$, $(5, 0)$

E. παραβολή με διευθετούσα $x = -\frac{5}{4}$

57. ** Τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $|(AM) - (BM)| = 6$ με $A(-5, 0)$ και $B(5, 0)$

A. ανήκουν στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

B. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

Γ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Δ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$

E. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

58. * Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 3$ και το σημείο της $M(-2, 1)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο M είναι

A. $x - 2y = 3$

B. $2x + y = 3$

Γ. $-2x + y = 3$

Δ. $2x + y + 3 = 0$

E. $2x - y + 3 = 0$

59. * Ένα σημείο της υπερβολής $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ είναι το $M(1, 2)$. Η εφαπτομένη της

στο M έχει εξίσωση

A. $x + y + 1 = 0$

B. $2x - y = 2$

Γ. $x - 2y + 2 = 0$

Δ. $2x - y = -2$

E. $x - y + 1 = 0$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη του στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II). Το σημείο επαφής είναι το (x_0, y_0) .

Πίνακας (I)

στήλη Α		στήλη Β
κύκλος	σημείο (x_0, y_0)	εφαπτόμενη ευθεία
1. $x^2 + y^2 = 1$	$(0, 1)$	Α. $y = 0$
2. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$	$(2, 0)$	Β. $x + 4(y + 2) = 5$
3. $x^2 + y^2 = 25$	$(3, 4)$	Γ. $y = 1$
4. $x^2 + (y + 2)^2 = 5$	$(1, 2)$	Δ. $y = x$
		Ε. $3x + 4y = 25$
		Ζ. $x - 2y = 1$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

2. ** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα του ρ που βρίσκονται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α κύκλος	στήλη Β κέντρο - ακτίνα
1. $x^2 + y^2 - \sqrt{\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$	A. Κ (α, 1) $\rho = \frac{\alpha}{2}$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 2\alpha y = -\alpha^2$	B. Κ (-1, $\frac{3}{2}$) $\rho = \frac{3}{2}$
3. $(x + \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 2\alpha x + 2\alpha^2,$ $\alpha \neq 0$	Γ. Κ (0, 0) $\rho = \sqrt[4]{\alpha}$ Δ. Κ (α, α) $\rho = \alpha $
4. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y = -2$	E. Κ (1, -α) $\rho = 1$ Ζ. Κ (0, α) $\rho = \alpha $

Πίνακας (II)

1	2	3	4

3. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε παραβολή της στήλης Α του πίνακα (Ι) με την εστία της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α παραβολή	στήλη Β εστία
1. $y^2 = px$	Α. $(-\frac{p}{2}, 0)$
2. $x^2 = py$	Β. $(\frac{p}{8}, 0)$
3. $y^2 = -2px$	Γ. $(\frac{p}{4}, 0)$
4. $y^2 = \frac{p}{2} x$	Δ. $(0, \frac{p}{2})$
	Ε. $(0, \frac{p}{4})$
	Ζ. $(0, -\frac{p}{2})$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

4. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2x$. Σε κάθε σημείο της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της παραβολής σ' αυτό το σημείο που γράφεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α σημείο	στήλη Β εφαπτομένη παραβολής
1. (0, 0)	Α. $y = x + \frac{1}{2}$
2. $(\frac{1}{2}, 1)$	Β. ο άξονας $y'y$
3. $(\frac{1}{2}, -1)$	Γ. $-2y = x + 2$
4. (2, 2)	Δ. $y = x - 2$
	Ε. $-y = x + \frac{1}{2}$
	Ζ. $2y = x + 2$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

5. ** Στη στήλη Α του πίνακα (I) δίνεται σε κάθε γραμμή η εστία Ε και η διευθετούσα δ μιας παραβολής, της οποίας η εξίσωση γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α εστία - διευθετούσα	στήλη Β εξίσωση παραβολής
1. Ε (- 2, 0) και δ: $x - 2 = 0$	Α. $x^2 = 16y$
2. Ε (0, 4) και δ: $y + 4 = 0$	Β. $y^2 = - 8x$
3. Ε (3, 0) και δ: $x + 3 = 0$	Γ. $y^2 = 8x$
	Δ. $y^2 = 12x$
	Ε. $x^2 = - 16y$

Πίνακας (II)

1	2	3

6. ** Στη στήλη Α δίνεται σε κάθε γραμμή η εξίσωση μιας παραβολής που έχει εστία Ε και διευθετούσα δ, που γράφονται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

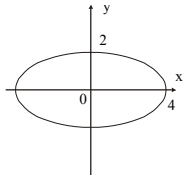
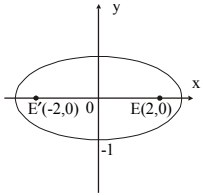
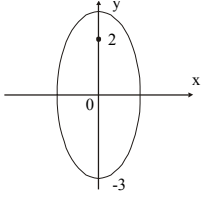
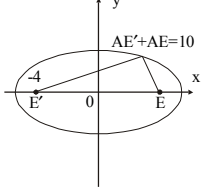
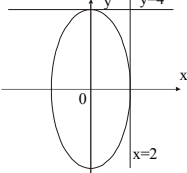
στήλη Α	στήλη Β
1. $y^2 = x$	Α. Ε (- 1, 0) και δ: $x + 1 = 0$ Β. Ε ($\frac{1}{4}$, 0) και δ: $x + \frac{1}{4} = 0$
2. $y^2 = - 4x$	Γ. Ε (- 5, 1) και δ: $x + 1 = 0$ Δ. Ε (- 1, 0) και δ: $x - 1 = 0$
3. $x^2 = 20y$	Ε. Ε (0, 5) και δ: $y + 5 = 0$

Πίνακας (II)

1	2	3

7. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε έλλειψη της στήλης Α του πίνακα (I) την εξίσωσή της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α - έλλειψη	στήλη Β - εξίσωση έλλειψης
1. 	A) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$
2. 	B) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
3. 	Γ) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
4. 	Δ) $x^2 + 5y^2 = 5$ E) $x^2 + 2y^2 = 1$
5. 	ΣΤ) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Πίνακας (II)

1	2	3	4	5

8. ** Κάθε κωνική της στήλης Α του πίνακα (I) έχει εξίσωση που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α είδος κωνικής	στήλη Β εξίσωση γραμμής
1. κύκλος	A. $x + y = 1$
2. παραβολή	B. $x^2 + y^2 = 0$
3. έλλειψη	Γ. $x^2 = 9 - (y - 1)^2$
4. υπερβολή	Δ. $9x^2 = 63 + 7y^2$
	E. $y^2 - 16x = 0$
	Z. $4x^2 = 100 - 25y^2$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

9. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση υπερβολής της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τις ασύμπτωτές της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α εξίσωση υπερβολής	στήλη Β εξισώσεις ασυμπτώτων
1. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$	Α. $y = \pm x$
2. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$	Β. $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} x$
3. $6x^2 - 5y^2 = 30$	Γ. $y = \pm 2x$
4. $x^2 - y^2 = 4$	Δ. $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} x$
	Ε. $y = \pm \frac{\sqrt{5}\sqrt{6}}{5} x$
	Ζ. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

10. ** Σε κάθε γραμμή της στήλης Α γράφεται η εξίσωση μιας κωνικής, η οποία έχει εκκεντρότητα που γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

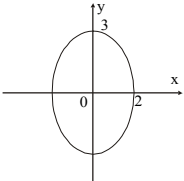
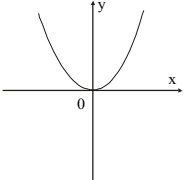
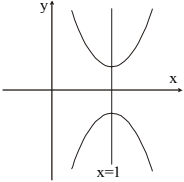
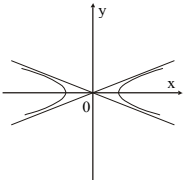
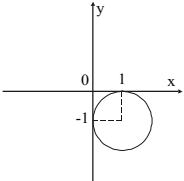
στήλη Α εξίσωση κωνικής	στήλη Β εκκεντρότητα
1. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$	Α. $\sqrt{3}$
	Β. $\frac{\sqrt{13}}{3}$
2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	Γ. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
	Δ. $-\sqrt{13}$
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$	Ε. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3

11. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α του πίνακα (I) με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1) $x^2 = 4y$	A)  B)  Γ)  Δ)  E) 
2) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$	
3) $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$	

Πίνακας (II)

1	2	3

12. ** Σε κάθε υπερβολή της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εξίσωση μιας ασύμπτωτής της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (Ι).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α υπερβολή	στήλη Β ασύμπτωτη υπερβολής
1. $x^2 - y^2 = a^2$	Α. $\sqrt{2}x - y = 0$
2. $2x^2 - y^2 = 4$	Β. $3x - 4y = 0$
3. $(x - 2y)(x + 2y) = 4$	Γ. $y = x$
4. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	Δ. $4x - 3y = 0$
	Ε. $2x - y = 0$
	Ζ. $x + 2y = 0$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

Ερωτήσεις διάταξης

1. Να γράψετε τους παρακάτω κύκλους C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένας να έχει από τον προηγούμενό του μεγαλύτερη ακτίνα:

$$C_1: x^2 + y^2 = 4 \quad C_2: x^2 + 2x + y^2 = 9 \quad C_3: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

$$C_4: 4x^2 + 4y^2 = 7 \quad C_5: x^2 + (y - 2)^2 = 6$$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραβολές C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμία να έχει από την προηγούμενη της μεγαλύτερη παράμετρο:

$$C_1: y^2 = 4x \quad C_2: y^2 = \frac{1}{4}x \quad C_3: y^2 = -6x$$

$$C_4: y^2 = \sqrt{2}x \quad C_5: x = 2y^2$$

3. Να γράψετε τα σημεία $A(0, 3), B(2, 0), \Gamma(2, 2), \Delta(0, 0)$ και $E(2, -2)$ σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα από το προηγούμενό του να έχει μεγαλύτερη απόσταση από την ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, που βρίσκεται στην πρώτη και τρίτη γωνία των αξόνων.

4. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και τα σημεία $A(2, 0), B(-1, 0), \Gamma(0, 4), \Delta(-5, 1), E(-2, 2)$, τα οποία απέχουν από τη διευθετούσα της παραβολής αποστάσεις $d_A, d_B, d_\Gamma, d_\Delta, d_E$ αντιστοίχως.

Να γράψετε σε μια σειρά τις αποστάσεις $d_A, d_B, d_\Gamma, d_\Delta, d_E$, έτσι ώστε καθεμία να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη της.

5. Να γραφούν οι παρακάτω κωνικές σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμία να έχει μεγαλύτερη εκκεντρότητα από την προηγούμενη της.

$$C_1: x^2 + 4y^2 = 4 \quad C_2: 4x^2 + 9y^2 = 36 \quad C_3: x^2 - 4y^2 = 4$$

$$C_4: 4x^2 - 9y^2 = 36 \quad C_5: x^2 - y^2 = 1$$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κύκλου	κέντρο κύκλου	ακτίνα κύκλου	σημεία τομής κύκλου με άξονα x'x	σημεία τομής κύκλου με άξονα y'y
$x^2 + (y - 4)^2 = 1$				
$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$				
$x^2 + y^2 = 9$				
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$				

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κωνικής	γραφή της κωνικής σε μια απ' τις μορφές:	χαρακτηρισμός κωνικής (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)
	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2, \quad y^2 = 2px$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$	
$4x^2 = 36 + 9y^2$		
$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$		
$9x^2 = 1 - 25y^2$		
$y^2 - 12x = 0$		

3. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση παραβολής	συντεταγμένες εστίας	εξίσωση διευθετούσας	άξονας συμμετρίας
$y^2 = 6x$			
$y^2 = -6x$			

4. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση έλλειψης	συντεταγμένες εστιών	συντεταγμένες κορυφών	εκκεντρότητα
$4x^2 + 9y^2 = 36$			
$x^2 + 4y^2 = 16$			

5. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση υπερβολής	συντεταγμένες εστιών	εκκεντρότητα	εξισώσεις ασυμπτώτων
$x^2 - 9y^2 = 9$			
$x^2 - y^2 - 4 = 0$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$
 - β) έχει κέντρο το σημείο $(3, -1)$ και ακτίνα 5
 - γ) έχει κέντρο το σημείο $(-2, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $(-2, 3)$
 - δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με A $(1, 3)$ και B $(-3, 5)$
 - ε) διέρχεται από τα σημεία $(2, 1)$, $(1, 2)$ και $(-2, -1)$
 - στ) διέρχεται από τα σημεία $(3, 1)$, $(-1, 3)$ και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x - 2$
 - ζ) έχει κέντρο το σημείο $(8, -6)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$
 - θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $(5, 4)$
 - ι) έχει κέντρο το σημείο $(-3, 2)$, εφάπτεται στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(-6, 2)$
 - ια) έχει κέντρο το σημείο $(3, 3)$ και εφάπτεται των αξόνων $x'x$ και $y'y$
 - ιβ) έχει κέντρο το σημείο $(-3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$
2. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$ και εφάπτεται στις ευθείες $3x + y + 6 = 0$ και $3x + y - 12 = 0$.
3. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $x + y - 6 = 0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
4. ** Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία:
 - α) να τέμνει τον κύκλο
 - β) να εφάπτεται του κύκλου
 - γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

5. ** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου $x^2 - 2x + y^2 - 6x = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 7 = 0$.
6. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.
7. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που γράφονται από το σημείο $(0, 6)$.
8. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.
9. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.
10. ** Δίνονται τα σημεία A $(1, 2)$, B $(2, 4)$ και Γ $(3, 1)$.
 α) Να αποδειχθεί ότι: $\angle B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$
 β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.
11. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A $(3\alpha, 0)$, B $(0, 3\alpha)$ και Γ $(0, -3\alpha)$, $\alpha > 0$.
12. ** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων M (x, y) του επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις $x \sin \theta - y \cos \theta = \sin 2\theta$ και $x \cos \theta + y \sin \theta = \sin 2\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, βρίσκονται σε κύκλο.
13. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία (ϵ) : $2x + y + 1 = 0$ και διέρχεται από τα σημεία A $(-1, 2)$ και B $(3, -1)$.

14. ** Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι $C_1: (x - 2)^2 + y^2 = 4$ και $C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0$ εφάπτονται εσωτερικά.
15. ** Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.
16. ** Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα A, B, Γ με $A(1, -1), B(-1, 2), \Gamma(0, 2)$ είναι σταθερό c , είναι κύκλος με κέντρο το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ (για κατάλληλο c).
17. ** Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.
18. ** Θεωρούμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο $A(-1, -1)$. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο A .
19. ** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0, 0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Ox και έχει παράμετρο $p = 5$
 - β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox και διέρχεται από το σημείο $(-1, 4)$
 - γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy και διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$
 - δ) έχει άξονα συμμετρίας τον Oy και εστία $E(0, -4)$
 - ε) έχει εστία $E(-2, 0)$ και διευθετούσα $\delta: x - 2 = 0$
 - στ) έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και εφάπτεται της ευθείας $y = 4x + 1$
20. ** Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x + y + 1 = 0$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$.

21. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 3x$ στα σημεία $(0, 0)$ και $(12, 6)$.
22. ** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 1999 = 0$.
23. ** Από το σημείο $(-2, 3)$ προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.
 α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών.
 β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.
24. ** Έστω η παραβολή $y^2 = 4px$, $p > 0$. Μια χορδή της AB είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος $8p$. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.
25. ** Ισόπλευρο τρίγωνο OAB είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$ με κορυφή το O. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
26. ** Έστω η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και μια χορδή της AB παράλληλη με τον άξονα $y'y$, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:
 α) $(AB) = 2(EK)$, όπου K το σημείο που τέμνει ο άξονας $x'x$ τη διευθετούσα
 β) οι εφαπτόμενες στα A και B διέρχονται από το K
27. ** Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και δύο χορδές OB, OΓ, ώστε γωνία $BOΓ = 90^\circ$. Να αποδειχθεί ότι η BΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.
28. ** Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.
 α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.
 β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της A $(2, 1)$ από την εστία E και να συγκριθεί με την απόσταση (OE).
 γ) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της O.
 δ) Να βρεθεί σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$ που να απέχει από την εστία E απόσταση διπλάσια της OE.

29. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $y = x - 1$.
- α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.
 - β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της (ε) και της παραβολής.
 - γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.
 - δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (γ).
30. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Θέτουμε $x' = ax$ και $y' = ay$, $a \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x', y') κινείται πάλι σε παραβολή.
31. ** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = (2pk^2, 2pk)$ με $k \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή
 - β) Αν $A(2pk_1^2, 2pk_1)$, $B(2pk_2^2, 2pk_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η AB διέρχεται από την εστία, είναι $4k_1k_2 = -1$.
32. ** Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της έλλειψης C: $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι η κάθετη στην (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{x_1}{y_1}$.
33. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ και η παραβολή $y^2 = 8x$.
- α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.
 - β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.
34. ** Δίνεται σταθερό σημείο A και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το A. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το A και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

35. ** Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντιστοίχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα $x'x$ συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.
36. ** Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις παρακάτω ελλείψεις:
- α) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
- β) $4x^2 + 9y^2 = 36$
- γ) $9x^2 + 25y^2 = 225$
37. ** Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της M να σχηματίζει με τις εστίες E' και E ισόπλευρο τρίγωνο.
38. ** Ο κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.
39. ** Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση $\frac{\kappa^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2} = 1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C .
40. ** Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1$, με $\alpha > \beta$.
41. ** Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

42. ** Θεωρούμε την υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$ και την ευθεία $(\varepsilon): x + 2y = \alpha$.
Να βρεθούν οι τιμές του α , για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στη C .

43. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$.

- α) Να δείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.
- β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
- γ) Να βρεθούν τα σημεία $M(x_0, y_0)$ ώστε $x_0^2 + y_0^2 = 4$ και $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$ (E' , E οι εστίες της έλλειψης).

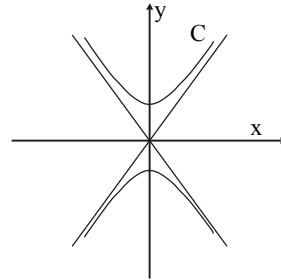
44. ** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι:
α) παράλληλες προς την ευθεία $(\varepsilon): x + y = 0$
β) κάθετες στην ευθεία (ε) .

45. ** Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $E'BEB'$ είναι ρόμβος (E' , E οι εστίες, B, B' τα άκρα του μικρού άξονα)
- β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

46. ** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x$. Να βρεθούν:

- α) οι εστίες της υπερβολής
- β) η εστιακή της απόσταση
- γ) η εξίσωσή της
- δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής
- ε) η εκκεντρότητά της.



47. ** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$ συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

- α) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 6$ και εκκεντρότητα $e = \frac{3}{2}$
- β) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 20$ και εξισώσεις ασυμπτώτων $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$.
- γ) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 4$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

48. ** Έστω η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ναδειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μια ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.

49. ** Έστω M τυχαίο σημείο της υπερβολής $y^2 - x^2 = a^2$, (ε) η εφαπτομένη στο M και A, B τα σημεία που η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό.

50. ** Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$. Αν θέσουμε $x = x'$ και $y = cy'$, να αποδείξετε ότι το σημείο (x', y') ανήκει σε έλλειψη.

51. ** Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ και $M(x_1, y_1)$ ένα σημείο της διαφο-

ρετικό από τις κορυφές της. Αν η κάθετη (ϵ') της (ϵ) στο M τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα Γ και Δ αντίστοιχα (ϵ η εφαπτόμενη στο M)

α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της (ϵ')

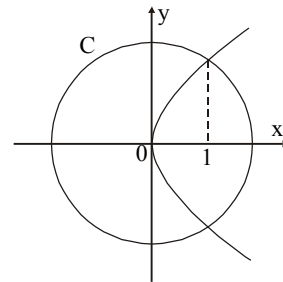
β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ

γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου N του $\Gamma\Delta$

δ) να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του N είναι μια υπερβολή C_1

ε) να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

52. ** Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.



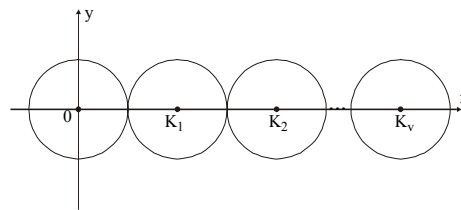
53. ** Στο διπλανό σχήμα ο πρώτος κύκλος C_0 έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:

α) οι εξισώσεις των κύκλων

$C_1, C_2, \dots, C_v$ (συναρτήσει του ρ)

β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων $K_1, K_2, \dots, K_v$ από το κέντρο O

γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.



54. ** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμ-

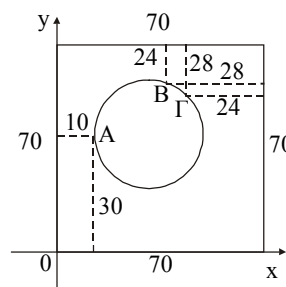
πτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και την ευθεία $y = 2$.

55. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $25x^2 - 4y^2 = 100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x - y = 0$.

56. ** Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες

με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

57. ** Σε μια τετράγωνη πλατεία πλευράς 70 m, υπάρχει μια μικρή τεχνητή λίμνη κυκλικού σχήματος. Προκειμένου να βρεθεί η ακτίνα της λίμνης, τρεις μαθητές επέλεξαν τρία τυχαία σημεία της περιφέρειάς της Α, Β, Γ και μέτρησαν τις αποστάσεις τους από τις πλευρές της πλατείας, όπως δείχνει το σχήμα.



α) Στο σύστημα αξόνων Oxy να τοποθετήσετε τα σημεία Α, Β, Γ.

Να θεωρήσετε ότι η απόσταση 1 στους άξονες αντιστοιχεί σε 10 m.

β) Να υποθέσετε ότι η λίμνη έχει αντίστοιχο σχήμα στους άξονες τον κύκλο $x^2 + y^2 + kx + ly + \mu = 0$ πάνω στον οποίο βρίσκονται τα Α, Β, Γ. Να υπολογίσετε τα k , λ , μ .

γ) Να βρείτε την ακτίνα της λίμνης.

58. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 1$ και $C_2: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.
 - γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (A, B) , όπου το A ανήκει στον C_1 και το B στον C_2 , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα A, B απέχουν τη μικρότερη απόσταση.
 - δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1 , το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.
59. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ και $M_1(1, \sqrt{3})$.
- α) Να δείξετε ότι $M_1A \perp M_1B$.
 - β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία A, B, M_1 .
 - γ) Να δείξετε ότι το σημείο $M_2(-1, \sqrt{3})$ ανήκει στον κύκλο και $M_2A \perp M_2B$.
 - δ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο $M(x_0, y_0)$ για το οποίο ισχύει $MA \perp MB$, ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).
60. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της $M(x_1, y_1)$ στον κλάδο C_1 ($y_1 \neq 0$).
- α) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ϵ) στο σημείο M και να βρείτε τα σημεία τομής της (ϵ) με τους άξονες.
 - β) Να δείξετε ότι η (ϵ) τέμνει τον $x'x$ σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.
 - γ) Με δεδομένο ότι η (ϵ) τέμνει τον κλάδο C_2 στο $M'(x_2, y_2)$, να δείξετε ότι $y_1 \cdot y_2 < 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 3ο:

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

1.	Σ
2.	Σ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Λ
8.	Λ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Λ
12.	Σ
13.	Λ
14.	Λ
15.	Σ
16.	Λ
17.	Σ
18.	Λ
19.	Σ

20.	Σ
21.	Λ
22.	Σ
23.	Λ
24.	Λ
25.	Λ
26.	Σ
27.	Λ
28.	Λ
29.	Σ
30.	Σ
31.	Σ
32.	Σ
33.	Λ
34.	Σ
35.	Σ
36.	Σ
37.	Σ
38.	Σ

39.	Λ
40.	Σ
41.	Σ
42.	Σ
43.	Σ
44.	Λ
45.	Λ
46.	Λ
47.	Σ
48.	Λ
49.	Σ
50.	Σ
51.	Λ
52.	Λ
53.	Λ
54.	Λ
55.	Σ
56.	Λ
57.	Λ

58.	Σ
59.	Σ
60.	Λ
61.	Λ
62.	Σ
63.	Σ
64.	Σ
65.	Σ
66.	Λ
67.	Λ
68.	Σ
69.	Λ
70.	Λ
71.	Σ
72.	Λ
73.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής
--

1.	B
2.	Δ
3.	B
4.	A
5.	E
6.	Δ
7.	Γ
8.	Δ
9.	B
10.	Δ
11.	A
12.	Δ
13.	E
14.	B
15.	Γ

16.	B
17.	A
18.	Δ
19.	E
20.	Γ
21.	Δ
22.	B
23.	Δ
24.	Γ
25.	Γ
26.	Δ
27.	B
28.	E
29.	Γ
30.	Δ

31.	A
32.	Δ
33.	B
34.	B
35.	Δ
36.	B
37.	A
38.	E
39.	E
40.	E
41.	E
42.	B
43.	Δ
44.	Δ
45.	A

46.	B
47.	B
48.	B
49.	B
50.	Γ
51.	Γ
52.	Δ
53.	Γ
54.	B
55.	B
56.	Δ
57.	E
58.	Δ
59.	E

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Γ
2	A
3	E
4	B

2.

1	Γ
2	E
3	ΣΤ
4	B

3.

1	Γ
2	E
3	A
4	B

4.

1	B
2	A
3	E
4	ΣΤ

5.

1	B
2	A
3	Δ

6.

1	B
2	Δ
3	E

7.

1	Γ
2	Δ
3	A
4	ΣΤ
5	B

8.

1	Γ
2	E
3	ΣΤ
4	Δ

9.

1	Δ
2	B
3	E
4	A

10.

1	E
2	B
3	Γ

11.

1	B
2	E
3	A

12.

1	Γ
2	A
3	ΣΤ
4	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. C_4, C_1, C_5, C_3, C_2
2. C_3, C_2, C_5, C_4, C_1
3. Δ, Γ, B, A, E
4. $d_E, d_B, d_\Gamma, d_\Delta, d_A$
5. C_2, C_1, C_3, C_4, C_5

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $x^2 + y^2 = 8$
β) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$
γ) $(x + 2)^2 + (x - 1)^2 = 4$
δ) Έχει κέντρο το μέσο $M(-1, 4)$ του AB και ακτίνα $\frac{1}{2}(AB)$,
άρα $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$
ε) Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$
στ) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$
ζ) $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 100$
η) Πρέπει να ισχύει $\rho = d(O, \varepsilon) = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$, άρα ο κύκλος έχει εξίσωση
 $x^2 + y^2 = 10$
θ) Ο κύκλος έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - 4)^2 = 16$, το $(5, 4)$ ανήκει στον κύκλο και προκύπτει $x_0 = 9$ ή $x_0 = 1$
ι) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
ια) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
ιβ) $\rho = d(A, \varepsilon) = \frac{10}{5} = 2$

2. Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες, η μεσοπαράλληλη θα έχει εξίσωση (ε): $y = -3x + 3$ (αφού $\varepsilon_1: y = -3x - 6$ και $\varepsilon_2: y = -3x + 12$), το κέντρο $K(x_0, y_0)$ ανήκει στην (ε), άρα $y_0 = -3x_0 + 3$. Η απόσταση μεταξύ των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι $\frac{18}{\sqrt{10}}$, άρα $\rho = \frac{9}{\sqrt{10}}$ και αφού το $(1, 0)$ ανήκει στον κύκλο θα ισχύει: $(1 - x_0)^2 + y_0^2 = \frac{81}{10}$, οπότε υπολογίζονται τα x_0, y_0 ($x_0 = 1,8, y_0 = -2,4$)
3. Το κέντρο K έχει συντεταγμένες x_0, y_0 με $x_0 = y_0$ και $d(K, \varepsilon) = \rho = x_0$ (λόγω επαφής με τους άξονες), άρα $\frac{|2x_0 - 6|}{\sqrt{2}} = x_0$, άρα $x_0 = 6\sqrt{2}$
4. Από το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας και του κύκλου προκύπτει η εξίσωση $(\lambda^2 + 1)x^2 - 4x + 1 = 0$ με $\Delta = -4(\lambda^2 - 3)$
- α) Θα πρέπει $\Delta > 0$, άρα $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$
- β) Πρέπει $\Delta = 0$, άρα $\lambda = \sqrt{3}$ ή $\lambda = -\sqrt{3}$
- γ) Πρέπει $\Delta < 0$, άρα $\lambda < -\sqrt{3}$ ή $\lambda > \sqrt{3}$
5. Το κέντρο είναι το $K(1, 3)$. Το $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}$, άρα η ζητούμενη έχει εξίσωση $y - 3 = 2(x - 1)$
6. Κάθε ευθεία έχει $\lambda = -1$ και η (ε_1) τέμνει τον $x'x$ στο $(0, 4\sqrt{2})$, η ε_2 τον $x'x$ στο $(0, -4\sqrt{2})$, άρα $\varepsilon_1: y - 4\sqrt{2} = -x$ και $\varepsilon_2: y + 4\sqrt{2} = -x$

7. Αν (x_0, y_0) σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε) : $x_0x + y_0y = 9$,
το $(0, 6)$ ανήκει στην (ε) , άρα $y_0 = \frac{3}{2}$, οπότε $x_0 = \pm \frac{5}{2}$, άρα οι εφαπτόμενες
είναι (ε_1) : $\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 9$ και (ε_2) : $-\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 9$
8. Το κέντρο του δοσμένου κύκλου είναι $K(1, -2)$ και $\rho = d(K, \varepsilon)$ όπου
 $\varepsilon: y - x = 0$, άρα $\rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$
9. Το σύστημα των δύο εξισώσεων δίνει την $x^2 - 4x + 4 = 0$, $\Delta = 0$, άρα η ευ-
θεία εφάπτεται στον κύκλο στο $(2, -1)$
10. α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$
β) Το $AB\Gamma$ τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A , άρα το κέντρο του περιγεγραμ-
μένου κύκλου βρίσκεται στο μέσον $M(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ του $B\Gamma$ και $\rho = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
11. Προφανώς το κέντρο είναι το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 3a$
12. Το κοινό σημείο των ευθειών είναι το M (συνθ, ημθ) για το οποίο ισχύει
 $x^2 + y^2 = 1$, άρα το M ανήκει σε μοναδιαίο κύκλο

13. Αν $K(x_0, y_0)$ το κέντρο, τότε $2x_0 + y_0 + 1 = 0$ (1)

Ακόμη το K ανήκει στη μεσοκάθετη του AB , δηλαδή

στην (ε') : $y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}(x - 1)$, άρα $y_0 = \frac{4}{3}x_0 - \frac{5}{6}$ (2)

Το σύστημα των (1), (2) δίνει τα x_0, y_0 . Η απόσταση KA είναι η ακτίνα

14. Τα κέντρα των κύκλων $K_1(2, 0)$ και $K_2(1, 0)$ και οι ακτίνες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 1$.
Παρατηρούμε $K_1K_2 = 1$ και $\rho_2 - \rho_1 = 1$

15. $A_1 = A_2$ και $B_1 = B_2$

16. $(MA)^2 + (MB)^2 + (MG)^2 = c$, άρα $3x^2 + 3y^2 - 6y + 11 - c = 0$ ή

$$x^2 + y^2 - 2y + \frac{11-c}{3} = 0.$$

Για κατάλληλο c είναι κύκλος με κέντρο $K(0, 1)$ που είναι το κέντρο βάρους του $AB\Gamma$

17. Η εξίσωση γράφεται $(x + \frac{\lambda}{2})^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4}$, άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο

$K(-\frac{\lambda}{2}, 0)$ που ανήκει πάνω στον άξονα $x'x$

18. Αν $K(0, -2)$ το κέντρο του κύκλου τότε η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι κάθετη στην KA . $\lambda_{AK} = -1$, άρα $\lambda_{\varepsilon} = 1$ οπότε (ε) : $y + 1 = 1(x + 1)$ ή $y = x$

19. α) $y^2 = 10x$

β) $y^2 = 2\rho x$ με $-2\rho = 16$, άρα $\rho = -8$

γ) $x^2 = 2\rho y$ με $4 = 4\rho$, άρα $\rho = 1$

δ) $x^2 = 2\rho y$ με $\rho = -8$

ε) $y^2 = 2\rho x$ με $\rho = -4$

στ) Το σύστημα των $y^2 = 2\rho x$ και $y = 4x + 1$ δίνει την $16x^2 + (8 - 2\rho)x + 1 = 0$.
Πρέπει $\Delta = 0$, άρα $(8 - 2\rho)^2 = 64$, άρα $\rho = 8$

20. Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι αδύνατο.

21. Η εξίσωση της εφαπτομένης: $y_0 y = \frac{3}{2} (x + x_0)$

Για $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ προκύπτει $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$

Για $x_0 = 12$, $y_0 = 6$ προκύπτει η άλλη εφαπτομένη

22. Αν (x_0, y_0) το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε), τότε $\lambda_\varepsilon = \frac{\rho}{y_0} = \frac{3}{2y_0}$,

όμως $\lambda_\varepsilon = 2$, άρα $y_0 = \frac{3}{4}$ και $x_0 = \frac{9}{12}$

23. α) Αν $M(x_0, y_0)$ σημείο επαφής, τότε το $K(-2, 3)$ ανήκει στην $y_0 y = 4(x + x_0)$,
δηλαδή $4x_0 - 3y_0 = 8$, όμως $y_0^2 = 8x_0$. Το σύστημα δίνει τα σημεία επαφής

$A(8, 8)$ και $B(\frac{1}{2}, -2)$

β) $\lambda_{AK} = \frac{1}{2}$ και $\lambda_{BK} = -2$

24. Η τεταγμένη του Α είναι $y_A = 4\rho$, άρα $x_A = 4\rho$. Όμοια $x_B = 4\rho$ και $y_B = -4\rho$, άρα $OA \perp OB$

25. Αν $A(x_0, 2\sqrt{\rho x_0})$, τότε $B(x_0, -2\sqrt{\rho x_0})$, και $OA = OB = 4\sqrt{\rho x_0}$, άρα $4\sqrt{\rho x_0} = \sqrt{\rho x_0^2 + 4\rho x_0}$ ή $x_0 = 12\rho$, άρα $y_0 = 4\rho\sqrt{3}$ ή $-4\rho\sqrt{3}$

26. α) $EA = d(A, \delta) = KE$ εξ ορισμού (δ η διευθετούσα), άρα $AB = 2KE$

β) Το Α έχει συντεταγμένες $(\frac{\rho}{2}, \rho)$ και η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση

(ε): $\rho y = \rho(x + \frac{\rho}{2})$. Προφανώς το σημείο $(-\frac{\rho}{2}, 0)$ ανήκει στην (ε). Για την εφαπτομένη στο Β όμοια

27. Αν η OB έχει εξίσωση $y = \lambda x$, $\lambda > 0$, τότε η ΟΓ έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{\lambda}x$. Τα

σημεία Β, Γ έχουν συντεταγμένες $(\frac{2\rho}{\lambda^2}, \frac{2\rho}{\lambda})$ και $(2\rho\lambda^2, 2\rho\lambda)$ η εξίσωση της

ΒΓ: $(\frac{1}{\lambda} + \lambda)x + (\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2})y - (\frac{2\rho}{\lambda} + 2\rho\lambda) = 0$ ή $x - (\lambda + \frac{1}{\lambda})y - 2\rho = 0$ που

περνά από το σημείο $(2\rho, 0)$ για κάθε λ

28. α) $E(\frac{1}{8}, 0)$

β) $(AE) > (OE)$

γ) Αν $y^2 = 2\rho x$ η παραβολή με $\rho > 0$ και $A(x_0, \sqrt{2\rho x_0})$ τυχόν σημείο της,

τότε $(AE) > \frac{\rho}{2} = OE$

δ) Πρέπει $AE = \rho$, άρα $A(\frac{\rho}{2}, \rho)$

29. α) Ε (1, 0) που ανήκει στην (ε)

β) Η λύση του συστήματος δίνει Α (3 + 2√2, 2 + 2√2), Β (3 - 2√2, 2 - 2√2)

γ) Αν ε_Α, ε_Β οι εφαπτομένες, τότε $\lambda_{\varepsilon_A} = \frac{2}{2+2\sqrt{2}}, \lambda_{\varepsilon_B} = \frac{2}{2-2\sqrt{2}}$, που έχουν

γινόμενο - 1

δ) Έστω Α ($\frac{y_1^2}{2\rho}$, y₁), Β ($\frac{y_2^2}{2\rho}$, y₂), τα δύο σημεία, τότε τα Α, Β, Ε είναι συ-

νευθιακά και προκύπτει $\frac{\rho}{y_1} \cdot \frac{\rho}{y_2} = -1$

30. $x = \frac{x'}{\alpha}, y = \frac{y'}{\alpha}$ και $y^2 = 2\rho x$, άρα $(y')^2 = 2\alpha\rho \cdot x'$

31. α) Αν $x = 2\rho\kappa^2$ και $y = 2\rho\kappa$, τότε $y^2 = 2\rho x$

β) Τα σημεία Α, Β, Ε είναι συνευθειακά με Ε ($\frac{\rho}{2}$, 0)

32. Η εφαπτομένη (ε) στο Μ₁ είναι η $\alpha^2 x_1 x + \beta^2 y_1 y = \alpha_2 \beta_2$ και έχει $\lambda_\varepsilon = \frac{-\alpha^2 x_1}{\beta^2 y_1}$

33. α) Έστω Α (x₁y₁) το σημείο επαφής της παραβολής. Τότε η εφαπτομένη ε₁ έχει εξίσωση $4x - y_1 y + 4x_1 = 0$. Πρέπει $d(0, \varepsilon_1) = \sqrt{2}$, άρα $x_1 = 2$ και $y_1 = 4$. Η εφαπτομένη ε₂ έχει σημείο επαφής (2, -4) λόγω συμμετρίας

β) Οι συντελεστές διεύθυνσης είναι 1 και -1 αντίστοιχα

34. Η απόσταση του κέντρου ενός τυχόντος κύκλου από το Α είναι ίση με την απόσταση από την (ε), άρα ισχύει ο ορισμός της παραβολής

$$35. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$$

$$36. \alpha) \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } E(\sqrt{3}, 0)$$

$$\beta) \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ και } E(\sqrt{5}, 0)$$

$$\gamma) \varepsilon = \frac{4}{5} \text{ και } E(4, 0)$$

$$37. \text{ Θα πρέπει } ME = ME' = EE' \quad (1)$$

Όμως εξ ορισμού $ME + ME' = 2a$ και $2\gamma = EE'$, άρα θα έπρεπε $2a = 2\gamma$, άτοπο

$$38. \text{ Ισχύει } \gamma = \beta \text{ και } a^2 = \beta^2 + \gamma^2, \text{ άρα } a = \sqrt{2} \gamma \text{ και } \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$39. \text{ Η δεύτερη έλλειψη γράφεται } \frac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{\kappa^2}{\kappa^2}} + \frac{\frac{y^2}{\beta^2}}{\frac{\kappa^2}{\kappa^2}} = 1 \text{ και έχει } \varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{\kappa^2} - \frac{\beta^2}{\kappa^2}}}{\frac{\alpha}{\kappa}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$40. \varepsilon_1^2 = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \text{ και } \varepsilon_2^2 = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 = \varepsilon_1^2 = \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right], \text{ άρα } \varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

41. $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $\gamma^2 = \frac{\alpha^2}{2}$ ή $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{\alpha^2}{2}$, άρα $\beta^2 = \frac{\alpha^2}{2}$. Επομένως η έλλειψη έχει μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{2y^2}{\alpha^2} = 1$

43. α) Η συμμετρία οδηγεί στον υπολογισμό των άλλων σημείων $(-1, -\sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$

γ) Τα σημεία Μ ανήκουν σε κύκλο με εξίσωση: $x^2 + y^2 = 4$ και στην έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$, άρα είναι τα σημεία του ερωτήματος (α)

44. Αν Μ (x_1, y_1) σημείο επαφής, τότε η ευθεία $9x_1x + 16y_1y = 144$ έχει $\lambda = -1$, άρα $\frac{9x_1}{16y_1} = 1$ και $9x_1^2 + 16y_1^2 = 144$. Άρα $x_1 = \pm \frac{16}{5}$, άρα $y_1 = \pm \frac{9}{5}$

45. α) Η μια διαγώνιος του τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης
β) $E = \frac{2\gamma \cdot 2\beta}{2}$

46. Η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτες τις $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$ και $y = \frac{\alpha}{\beta}x$. Αφού $\alpha = 4$, άρα $\beta = 3$, οπότε $\gamma = 5$, άρα:

α) $E_1(0, 5)$ $E_2(0, -5)$

β) $E_1E_2 = 10$

γ) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

ε) $\varepsilon = \frac{5}{4}$

47. α) $E'(-3, 0) \quad E(3, 0)$, άρα $\gamma = 3$ και $\alpha = 2$ και η εξίσωσή της $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

β) $\gamma = 10$, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{3}$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 100$, άρα $\alpha = 6$ και $\beta = 8$

γ) $\gamma = 2$, $\alpha = \beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4$, άρα $\alpha = \beta = \sqrt{2}$

48. Η παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ έχει εξίσωση $y = -\frac{\beta}{\alpha}x + c$, η οποία αν θεωρηθεί σαν σύστημα με την εξίσωση της υπερβολής δίνει πρωτοβάθμια εξίσωση ως προς x

49. Αν (x_0, y_0) σημείο επαφής τότε

το σύστημα $\begin{cases} x_0x - y_0y = \alpha^2 \\ y = x \end{cases}$ έχει λύση $A\left(\frac{\alpha^2}{x_0 - y_0}, \frac{\alpha^2}{x_0 - y_0}\right)$ ενώ

το σύστημα $\begin{cases} x_0x - y_0y = \alpha^2 \\ y = -x \end{cases}$ έχει λύση $B\left(\frac{\alpha^2}{x_0 + y_0}, \frac{-\alpha^2}{x_0 - y_0}\right)$

και το εμβαδόν του OAB είναι α^2

50. $(x')^2 + c^2(y')^2 = \alpha^2$, που είναι εξίσωση έλλειψης

51. α) Η ε έχει $\lambda_\varepsilon = \frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$, άρα η ε' έχει εξίσωση: $y - y_1 = - \frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1} (x - x_1)$

β) Για $y = 0$, $x = x_1 \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1 \right) = x_1 \varepsilon^2$

Για $x = 0$, $y = y_1 \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 \right) = y_1 \frac{\gamma^2}{\beta^2}$

γ) Το μέσο M (x, y) έχει $x = \frac{x_1}{2} \varepsilon^2$ και $y = \frac{y_1}{2} \frac{\gamma^2}{\beta^2}$

δ) $x_1 = \frac{2x}{\varepsilon^2}$, $y_1 = \frac{2y\beta^2}{\gamma^2}$ ενώ $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$, άρα $\frac{x^2}{\frac{\gamma^4}{4\alpha^2}} - \frac{y^2}{\frac{\gamma^4}{4\beta^2}} = 1$, που εί-

ναι εξίσωση της υπερβολής c_1 : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$

ε) $\varepsilon_1^2 = 1 + \frac{B^2}{A^2} = 1 + \frac{4\beta^2}{4\alpha^2} = \varepsilon^2$

52. Αρκεί να βρεθεί το ρ. Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \frac{\rho^2}{4}$ και η παραβολή

$y^2 = 2\rho x$, $\rho > 0$. Το σύστημα δίνει την εξίσωση $x^2 + 2\rho x - \frac{\rho^2}{4} = 0$, που έχει

ρίζα $x = 1$ (λόγω του σχήματος), άρα $-\frac{\rho^2}{4} + 2\rho + 1 = 0$, άρα $\rho = 4 + 2\sqrt{5}$

53. α) c_1 : $(x - 2\rho)^2 + y^2 = \rho^2$ c_2 : $(x - 4\rho)^2 + y^2 = \rho^2$ c_k : $(x - 2v\rho)^2 + y^2 = \rho^2$

β) $2\rho + 4\rho + \dots + 2v\rho = v(v + 1)\rho$

γ) $y = \rho$, $y = -\rho$

54. Οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις (ϵ_1): $y = \frac{3}{4}x$ και (ϵ_2): $y = -\frac{3}{4}x$. Τα σημεία τομής των ϵ_1, ϵ_2 με την $y = 2$: $A(\frac{8}{3}, 2)$, $B(-\frac{8}{3}, 2)$. Στο τρίγωνο AOB:

$$(AB) = \frac{16}{3} \text{ και το ύψος } v = 2, \text{ άρα } (AOB) = \frac{16}{3}$$

55. Αν (x_1, y_1) σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη $25x_1x - 4y_1y = 100$ έχει $\lambda = \frac{25x_1}{4y_1} = 3$ (1) ενώ $25x_1^2 - 4y_1^2 = 100$ (2). Το σύστημα των (1), (2) δίνει τα σημεία επαφής

56. Οι εστίες της έλλειψης $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$, άρα για την υπερβολή ισχύει $a = b$ και $\gamma = 3$, ενώ $a^2 + b^2 = \gamma^2$, άρα $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ και η υπερβολή έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = \frac{9}{2}$

57. $A(1, 3)$, $B(4, 2, 4, 6)$, $\Gamma(4, 6, 4, 2)$ και το σύστημα:

$$\kappa + 3\lambda + \mu = -10$$

$$4,6\kappa + 4,2\lambda + \mu = -38,8$$

$$4,2\kappa + 4,6\lambda + \mu = -38,8$$

$$\text{έχει λύσεις } \kappa = -6, \lambda = -6, \mu = 14, \text{ άρα } \rho = 2$$

58. α) αδύνατο σύστημα

β) η OK με $O(0, 0)$, $K(3, 2)$

γ), δ) A, B, Γ, Δ τα σημεία τομής της OK με τους κύκλους

59. α) $\overrightarrow{M_1A} \cdot \overrightarrow{M_1B} = 0$

β) $x^2 + y^2 = 4$

γ) απλό

δ) ναδειχθεί ότι $x_0^2 + y_0^2 = 4$ (δεκτή και η γεωμετρική απόδειξη)

60. α) Τα σημεία τομής με τους άξονες A $(\frac{\alpha^2}{x_1}, 0)$, B $(0, -\frac{\beta^2}{y_1})$

β) $\frac{x_1^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{y_1^2}{\beta^2}$ άρα $\frac{x_1^2}{\alpha^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{x_1^2} < 1$ άρα $-1 < \frac{\alpha}{x_1} < 1$,

άρα $-\alpha < \frac{\alpha^2}{x_1} < \alpha$, άρα το A βρίσκεται μεταξύ των κορυφών

γ) Λόγω του (β), αν $y_1 > 0$, τότε $y_2 < 0$ και αντίστροφα

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ
(Κεφάλαιο 3ο: Κωνικές τομές)

*Τα κριτήρια αξιολόγησης που ακολουθούν είναι ενδεικτικά.
Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα διαμόρφωσής τους σε
ενιαία θέματα, επιλογής ή τροποποίησης των θεμάτων,
ανάλογα με τις διδακτικές ανάγκες του συγκεκριμένου
τμήματος στο οποίο απευθύνεται.*

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή

Διδακτική ενότητα:

Κύκλος

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** α) Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = \rho^2$.
- i) Πότε ένα σημείο M (x_1, y_1) ανήκει στο κύκλο C;
 - ii) Πότε ο C λέγεται μοναδιαίος κύκλος;
 - iii) Ποιες είναι οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου C;
- β) i) Ο κύκλος με κέντρο k (x_0, y_0) και ακτίνα $\rho > 0$ ποια εξίσωση έχει;
- ii) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ πότε παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα αυτού του κύκλου;
- γ) Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του A (x_1, y_1) έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.
- B.** α) Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση κύκλου της στήλης A του πίνακα (I) με το αντίστοιχο κέντρο του στη στήλη B, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
1. $x^2 + y^2 = 4$	A. K (- 3, 0)
2. $(x + 3)^2 + y^2 = 9$	B. Λ (0, 3)
3. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$	Γ. Ο (0, 0)
4. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0$	Δ. Μ (1, - 3)
	E. Ν (- 1, 3)
	Z. Α (- 1, 5)

Πίνακας (II)

1	2	3	4

β) i) Ο κύκλος $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$.	Σ	Λ
ii) Οι κύκλοι $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ και $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$ είναι ομόκεντροι.	Σ	Λ
iii) Ο κύκλος $(x - \alpha)^2 + y^2 = \rho^2$ έχει το κέντρο του στον άξονα $y'y$.	Σ	Λ
iv) Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 5y + 7 = 0$ έχει το κέντρο του στον θετικό ημιάξονα $y'y$.	Σ	Λ
v) Τα σημεία $(1, 0)$ και $(3, 0)$ είναι αντιδιαμετρικά του κύκλου $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.	Σ	Λ
vi) Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ είναι $\sqrt{5}$.	Σ	Λ
v) Ο κύκλος $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ είναι μοναδιαίος.	Σ	Λ
vi) Ο κύκλος $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 4$ εφάπτεται του άξονα $x'x$.	Σ	Λ
vii) Ο κύκλος $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 16$ εφάπτεται και στους δύο άξονες αν $\alpha = \beta = \pm 4$	Σ	Λ
viii) Η εφαπτομένη του κύκλου $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 2$ σε σημείο του με τετμημένη 3 είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.	Σ	Λ
ix) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο του $M(2, 1)$ έχει εξίσωση $y = 5 - 2x$.	Σ	Λ
x) Οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 13$ στα σημεία του $A(2, 3)$ και $B(-2, -3)$ είναι κάθετες μεταξύ τους.	Σ	Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 25$.

- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του ϵ_1 στο σημείο του $M(4, -3)$.
- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του ϵ_2 που είναι παράλληλη στην ϵ_1 .
- Να βρεθούν οι εξισώσεις των κύκλων που εφάπτονται στην ϵ_1 και στους ημιάξονες Ox και Oy' .
- Αν K και Λ τα κέντρα των κύκλων του ερωτήματος (γ), να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο την $K\Lambda$.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή

Διδακτική ενότητα:

Κύκλος

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του A έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

B. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ευθειών του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$, στα σημεία του, που έχουν τετμημένη 3.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ και κέντρο K .

A. Κάθε ερώτηση από τις επόμενες πέντε συνοδεύεται από πέντε πιθανές απαντήσεις. Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης.

α) Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο

A. (3, - 2) **B.** (- 3, - 2) **Γ.** (- 3, 2) **Δ.** (3, 2) **Ε.** (5, 0)

β) Η ακτίνα του κύκλου C είναι:

A. 9 **B.** 3 **Γ.** $\sqrt{3}$ **Δ.** 81 **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

γ) Ο κύκλος C εφάπτεται:

A. μόνο του άξονα $x'x$
B. μόνο του άξονα $y'y$
Γ. και των δύο αξόνων $x'x, y'y$
Δ. της ευθείας $y = x$
Ε. σε κανένα από τα προηγούμενα

δ) Από το κέντρο του κύκλου C διέρχεται η ευθεία με εξίσωση

A. $3x - y = 4$ **B.** $y = 3x + 5$ **Γ.** $2x + 3y = 0$

Δ. $3x - 2y = 5$ **E.** $y = 3x + 2$

ε) Η απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την αρχή των αξόνων O είναι:

A. 1 **B.** $\sqrt{5}$ **Γ.** $\sqrt{6}$ **Δ.** $\sqrt{13}$ **E.** 5

B. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $3x + 4y - 2 = 0$ εφάπτεται του κύκλου C.

Γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x\eta\mu\phi + y\sigma\upsilon\nu\phi - 3\eta\mu\phi - 2\sigma\upsilon\nu\phi + 3 = 0$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Ο αριθμός $\frac{2v}{3}$, $v \in \mathbb{N}$, είναι ανάγωγο κλάσμα για κάθε $v \in \mathbb{N}$. Σ Λ
2. * Οι αριθμοί $2v$ και $2v + 2$ είναι διαδοχικοί άρτιοι για κάθε $v \in \mathbb{N}$. Σ Λ
3. * Αν ένας ισχυρισμός $P(v)$ δεχθούμε ότι είναι αληθής για το φυσικό αριθμό v και αποδείξουμε ότι ισχύει για τον $v + 1$, μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι ισχύει για κάθε $v \in \mathbb{N}$. Σ Λ
4. * Αν η πρόταση «Ο αριθμός $v^2 + v + 17$, $v \in \mathbb{N}^*$, είναι πρώτος» ισχύει για $v = 1, 2, 3, \dots, 16$, τότε θα ισχύει και για κάθε v φυσικό αριθμό. Σ Λ
5. * Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο φυσικό αριθμό που είναι μοναδικός. Σ Λ
6. * Για κάθε ακέραιο a υπάρχουν ακέραιοι k, v ώστε η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης του a δια k να είναι $a = 3 \cdot k + v$ με $0 \leq v < 3$. Σ Λ
7. * Για κάθε ακέραιο a υπάρχουν ακέραιοι k, v ώστε η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης του a δια k να είναι $a = (-3) \cdot k + v$ με $v < -3$. Σ Λ
8. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του 2 δια του 15 είναι 2. Σ Λ
9. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -19 δια του 3 είναι -1. Σ Λ
10. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -17 δια του 3 είναι 1. Σ Λ
11. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -25 δια του -3 είναι -1. Σ Λ

- | | | |
|---|---|---|
| 12. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του 25 δια του - 4 είναι 1. | Σ | Λ |
| 13. * Έστω α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Η Ευκλείδεια διαίρεση του α δια β εκφράζεται από τη σχέση $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, όπου υ οποιοσδήποτε ακέραιος. | Σ | Λ |
| 14. * Τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του α δια του β , όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ είναι $0, 1, 2, 3, \dots, \beta - 1$. | Σ | Λ |
| 15. * Κάθε φυσικός αριθμός n μπορεί να πάρει την μορφή $n = 4\kappa + 1$ ή $n = 4\kappa + 2$ ή $n = 4\kappa + 3, \kappa \in \mathbb{N}$. | Σ | Λ |
| 16. * Κάθε ακέραιος αριθμός κ μπορεί να πάρει την μορφή $\kappa = 3\rho$ ή $\kappa = 3\rho + 1$ ή $\kappa = 3\rho + 2, \rho \in \mathbb{Z}$. | Σ | Λ |
| 17. ** Οι φυσικοί αριθμοί μέχρι το 1.000.000 που διαιρούνται με το 3, είναι περισσότεροι από αυτούς που διαιρούνται με το 5. | Σ | Λ |
| 18. ** Έστω υ το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με το $\beta \neq 0, \delta \in \mathbb{Z}^*$. Αν δ/α και δ/β , τότε δ/υ . | Σ | Λ |
| 19. ** Έστω υ το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με το $\beta \neq 0, \delta \in \mathbb{Z}^*$. Αν δ/α και δ/υ , τότε ισχύει πάντα δ/β . | Σ | Λ |
| 20. * Αν α/β τότε $(-\alpha)/\beta$. | Σ | Λ |
| 21. * Αν $\alpha/15$ και $15/\alpha$, τότε $\alpha = 15$ ή $\alpha = -15$. | Σ | Λ |
| 22. * Αν $\alpha/\beta + \gamma$, τότε α/β και α/γ . | Σ | Λ |
| 23. * Αν $-3/x, x > 0$, τότε ισχύει $3 \leq x$. | Σ | Λ |
| 24. * Αν α ακέραιος με $3/\alpha$ και $5/\alpha$, τότε ισχύει $15/\alpha$. | Σ | Λ |
| 25. * Κάθε πρώτος αριθμός διάφορος του 2 είναι περιττός. | Σ | Λ |
| 26. * Κάθε ακέραιος αριθμός $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ είναι διαιρέτης του αριθμού 0. | Σ | Λ |
| 27. * Υπάρχει ακέραιος αριθμός διάφορος του μηδενός, ο οποίος διαιρείται με τον 0. | Σ | Λ |
| 28. * Οι μόνοι ακέραιοι διαιρέτες του 1 είναι οι 1 και -1. | Σ | Λ |
| 29. * Ο αριθμός 1 είναι διαιρέτης κάθε ακεραίου. | Σ | Λ |
| 30. * Αν α/β και β/γ , τότε α/γ . | Σ | Λ |

31. * Αν α/β και β/α , τότε ισχύει οπωσδήποτε $\alpha = \beta$.	Σ	Λ
32. * Αν $\alpha - \beta = \text{πολκ}$ τότε θα είναι και $\alpha^v - \beta^v = \text{πολκ}$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.	Σ	Λ
33. * Αν α, β ακέραιοι και v άρτιος φυσικός αριθμός τότε $(\alpha + \beta) / (\alpha^v + \beta^v)$.	Σ	Λ
34. * Αν α και β είναι δύο θετικοί πρώτοι αριθμοί και α/β , τότε θα είναι $\alpha = \beta$.	Σ	Λ
35. * Το γινόμενο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός.	Σ	Λ
36. * Ο α είναι θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ρ ακέραιος πρώτος ώστε ρ/α^2 και $\rho \leq \alpha$.	Σ	Λ
37. * Ο 11 διαιρεί τον ακέραιο $\alpha \cdot \beta$ (α, β ακέραιοι). Τότε ισχύει πάντα $11/\alpha$ και $11/\beta$.	Σ	Λ
38. ** Δύο αντίθετοι ακέραιοι έχουν τους ίδιους διαιρέτες.	Σ	Λ
39. * Η διαφορά δύο πολλαπλασίων του α είναι πολλαπλάσιο του α .	Σ	Λ
40. * Άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός.	Σ	Λ
41. * Άθροισμα περιττού πλήθους άρτιων είναι περιττός.	Σ	Λ
42. ** Αν το γινόμενο ακεραίων είναι περιττός, τότε όλοι οι παράγοντες είναι περιττοί.	Σ	Λ
43. * Ο ακέραιος $\alpha - \beta$, ($\alpha \neq \beta$) διαιρεί τον ακέραιο $\alpha^v + \beta^v$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.	Σ	Λ
44. * Ο μοναδικός πρώτος άρτιος είναι ο αριθμός 2.	Σ	Λ
45. * Ο Μ.Κ.Δ. των -12 και -8 είναι ο -4.	Σ	Λ
46. * Ισχύει $(140, 280) = 70$.	Σ	Λ
47. * Ισχύει $(\alpha, \beta) = (\alpha, -\beta)$	Σ	Λ
48. * Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει $2 \cdot \alpha - \beta = 1$, τότε θα ισχύει $(\alpha, \beta) = 2$.	Σ	Λ
49. ** Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει $3/\alpha, 6/\beta$ και $(\alpha, \beta) = \gamma$, τότε θα ισχύει $3/\gamma$.	Σ	Λ

50. ** Αν για τους μη μηδενικούς ακεραίους α, β ισχύει $\alpha/17 \cdot \beta$, τότε ισχύει πάντα α/β .	Σ	Λ
51. ** Αν για τους μη μηδενικούς ακεραίους α, β ισχύει $\alpha/18 \cdot \beta$, τότε ισχύει πάντα α/β .	Σ	Λ
52. * Ισχύει η ισότητα $[18, 72] \cdot (18, 72) = 18 \cdot 72$.	Σ	Λ
53. * Για κάθε ακέραιο α ισχύει $[17, \alpha] = 17\alpha$.	Σ	Λ
54. * Ο αριθμός $\alpha (\alpha + 1)$ είναι σύνθετος (α ακέραιος).	Σ	Λ
55. * Αν $(\alpha, \beta) = \gamma$, τότε $(5\alpha, 5\beta) = 5\gamma$.	Σ	Λ
56. ** Ισχύει $(1, \alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{N}^*$.	Σ	Λ
57. ** Αν $(\alpha, \beta) = 1$, τότε $\alpha = \beta = 1$.	Σ	Λ
58. * Αν $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, τότε $(\alpha, 0) = \alpha $.	Σ	Λ
59. * Αν β/α , με $\alpha \neq 0$, τότε $(\alpha, \beta) = \alpha $.	Σ	Λ
60. * Είναι $(\alpha, \beta) = 1$, τότε θα υπάρχουν ακέραιοι κ, λ ώστε $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$.	Σ	Λ
61. * Για κάθε κ ακέραιο ισχύει $[\kappa\alpha, \kappa\beta] = \kappa [\alpha, \beta]$.	Σ	Λ
62. * Αν $\alpha, \beta, \kappa, \lambda$ ακέραιοι και ισχύει $\alpha\kappa + \beta\lambda = 1$ τότε $(\alpha, \beta) = (\alpha, \lambda) = (\beta, \kappa) = (\kappa, \lambda) = 1$.	Σ	Λ
63. * Δύο θετικοί αριθμοί που είναι διάφοροι μεταξύ τους και ο καθένας είναι πρώτος είναι και πρώτοι μεταξύ τους.	Σ	Λ
64. * Δύο αριθμοί που είναι πρώτοι μεταξύ τους είναι οπωσδήποτε πρώτοι αριθμοί.	Σ	Λ
65. * Το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών α, β ($\alpha > 2$ και $\beta > 2$) είναι πάντα πρώτος αριθμός.	Σ	Λ
66. ** Ένας ακέραιος αριθμός α που είναι πρώτος έχει διαιρέτες μόνο τον 1 και τον α .	Σ	Λ
67. ** Αν ο ακέραιος αριθμός α είναι πρώτος, τότε και ο ακέραιος $-\alpha$ είναι πρώτος.	Σ	Λ
68. ** Κάθε πρώτος ακέραιος p είναι πρώτος με τον εαυτό του.	Σ	Λ
69. * Υπάρχει δεκάδα διαδοχικών φυσικών αριθμών ώστε οι 4 από αυτούς να είναι πρώτοι.	Σ	Λ

70. ** Ισχύει $(\alpha, \beta, \gamma) = ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma))$.	Σ	Λ
71. * Η γραμμική διοφαντική εξίσωση: $3x + y = 1$ έχει άπειρες λύσεις.	Σ	Λ
72. * Η ευθεία $y = x + 3$ διέρχεται από άπειρα το πλήθος σημεία με ακέραιες συντεταγμένες.	Σ	Λ
73. ** Η γραμμική διοφαντική εξίσωση: $ax + a^2y = \beta$ με $\beta \neq 0$ και $a > 1$ με $(a, \beta) = 1$ έχει (μία τουλάχιστον) λύση.	Σ	Λ
74. ** Αν μια ευθεία με εξίσωση $ax + by = \gamma$, με a, β, γ , ακέραιους, διέρχεται από σημείο με ακέραιες συντεταγμένες, τότε θα διέρχεται από άπειρα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες.	Σ	Λ
75. * Υπάρχει ευθεία που να διέρχεται μόνο από δύο σημεία με ακέραιες συντεταγμένες.	Σ	Λ
76. ** Η εξίσωση $ax + by + \kappa = 0$ με a, β άρτιους και κ περιττό, έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\mathbb{Z}$.	Σ	Λ
77. * Η διοφαντική εξίσωση $3x + 6y = 5$ έχει άπειρες λύσεις.	Σ	Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

- * Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιείται για την απόδειξη προτάσεων $P(v)$, όταν

A. $v \in \mathbb{R}$	B. $v \in \mathbb{Q}$	Γ. $v \in \mathbb{R}^*$
Δ. $v \in \mathbb{N}$	Ε. κανένα από τα προηγούμενα	
- * Για τους ακεραίους α και $\beta \neq 0$ η σχέση της Ευκλείδειας διαίρεσης του α δια του β είναι η

A. $\alpha = \kappa\beta + v,$	$v \geq 0$	B. $\alpha = \kappa\beta + v,$	$0 \leq v < \beta$
Γ. $\alpha = \kappa\beta + v,$	$0 \leq v < \beta $	Δ. $\beta = \kappa\alpha + v,$	$v < \beta$
E. $\alpha = \kappa\beta + v,$	$v \leq \beta \leq v $		

3. ** Αν η διαίρεση του a με τον $\beta \neq 0$ είναι τέλεια, τότε
- A. ο β είναι πολλαπλάσιο του a
 - B. ο β είναι παράγοντας του a
 - Γ. ο a είναι διαιρέτης του β
 - Δ. ο β διαιρούμενος με τον a αφήνει υπόλοιπο 0
 - E. ισχύει $a = \kappa\beta + \upsilon, \upsilon \neq 0$.
4. ** Η Ευκλείδεια διαίρεση του -75 με το 24 περιγράφεται από την ισότητα $-75 = \beta \cdot 24 + \upsilon$, τότε το ζεύγος (β, υ) ισούται με
- A. (-3, -3)
 - B. (-4, 21)
 - Γ. (-5, 45)
 - Δ. (3, -147)
 - E. κανένα από τα προηγούμενα
5. * Από τις παρακάτω σχέσεις, για κάθε $a \neq 0$, δεν ισχύει η
- A. $1/a$
 - B. a/a
 - Γ. $a/0$
 - Δ. a^2/a
 - E. $a/\kappa a, \kappa \in \mathbb{Z}^*$
6. * Αν a/β με $\beta \neq 0$, τότε από τις προτάσεις
- $a/(-\beta)$ (1) $(-a)/\beta$ (2) και $(-a)/(-\beta)$ (3) ισχύει
- A. μόνο η (1)
 - B. μόνο η (2)
 - Γ. μόνο η (3)
 - Δ. και οι τρεις
 - E. καμία απ' τις προηγούμενες
7. ** Αν a/β και β/a , τότε ισχύει
- A. $a < \beta$
 - B. $a \neq \pm\beta$
 - Γ. $a > \beta$
 - Δ. $a = \beta$ είτε $a = -\beta$
 - E. τίποτε από τα προηγούμενα
8. ** Αν a/β είναι πάντα
- A. $a < \beta$
 - B. $a > \beta$
 - Γ. $a = \beta$
 - Δ. $a \leq \beta$
 - E. $|a| \leq |\beta|$

9. ** Αν α, β μη μηδενικοί ακέραιοι α/β και β/α , τότε ισχύει πάντα
- A. $\alpha = \beta$ B. $|\alpha| \neq |\beta|$ Γ. $\alpha = -\beta$
Δ. $|\alpha| = |\beta|$ Ε. $\alpha = \beta = 1$
10. * Αν $\alpha \neq \beta$ και α/β , τότε ισχύει πάντα
- A. $\alpha = \kappa\beta$ B. $\beta > \alpha$ Γ. $|\beta| \leq |\alpha|$
Δ. $|\beta| > |\alpha|$ Ε. κανένα από τα προηγούμενα
11. ** Αν ο ρ δεν διαιρεί τον α και ο ρ δεν διαιρεί τον β , όπου α, β φυσικοί και ρ πρώτος, τότε
- A. ο ρ διαιρεί τον $\alpha\beta$ B. ο ρ δεν διαιρεί τον $\alpha\beta$
Γ. υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες ο ρ διαιρεί τον $\alpha\beta$
Δ. $\rho = \alpha$ ή $\rho = \beta$ Ε. $\rho = \alpha\beta$
12. ** Διαθέτουμε 1.000 δραχμές για την αγορά 6 κιλών ενός προϊόντος. Τα ρέστα που θα πάρουμε για οποιαδήποτε τιμή του προϊόντος δεν μπορεί να είναι λιγότερα από
- A. 10 δρχ. B. 6 δρχ. Γ. 4 δρχ. Δ. 18 δρχ. Ε. 12 δρχ.
(υποδιαιρέσεις της δραχμής δεν είναι πλέον σε χρήση)
13. ** Αν δ, κ, λ μη μηδενικοί ακέραιοι και $\delta/\kappa \cdot \lambda$, τότε ισχύει πάντα
- A. δ/κ B. δ/λ Γ. δ/κ ή δ/λ Δ. $\delta/5 \cdot \kappa\lambda$ Ε. δ/κ και δ/λ
14. ** Αν α/γ και β/γ , τότε ο $\alpha \cdot \beta/\gamma$ όταν
- A. οι α, β είναι οποιοδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί
B. οι α, β είναι οποιοδήποτε ακέραιοι αριθμοί
Γ. ο α διαιρεί τον β
Δ. ο β διαιρεί τον α
Ε. οι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι αριθμοί

15. * Για τους ακεραίους $a \neq 0$, β , γ ισχύει ότι a/β και a/γ . Αν θεωρήσουμε τους τρεις αριθμούς $\beta + \gamma$, $\beta - \gamma$ και κ ($\kappa \in \mathbb{Z}$), τότε ισχύει
A. ο a διαιρεί μόνο τον $\beta + \gamma$ **B.** ο a διαιρεί μόνο τον $\beta - \gamma$
Γ. ο a διαιρεί μόνο τον κ **Δ.** ο a διαιρεί και τους τρεις
Ε. ο a δεν διαιρεί κανέναν από τους τρεις αριθμούς.
16. * Για να είναι τετράγωνο ακεραίου ο αριθμός $3^2 \cdot 5^3 \cdot \kappa \cdot 7^2$ πρέπει ο πρώτος αριθμός κ , να ισούται με
A. 2 **B.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 11
17. ** Το γινόμενο $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ διαιρείται με το γινόμενο $2 \cdot 3^{\kappa} \cdot 5$, $\kappa \neq 0$, τότε ο κ παίρνει την τιμή
A. μόνο 1 **B.** μόνο 2 **Γ.** 1 ή 2 **Δ.** 3 **Ε.** 5
18. ** Ο ακέραιος $a + \beta$, ($a \neq -\beta$) διαιρεί τον ακέραιο $a^{\nu} + \beta^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
A. μόνο αν $a = \beta$ **B.** μόνο αν $a \neq \beta$
Γ. για κάθε ν άρτιο **Δ.** για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ **Ε.** για κάθε ν περιττό.
19. ** Αν οι ακέραιοι a και β δεν είναι πολλαπλάσια του 3, τότε πάντα
A. το άθροισμα τους διαιρείται με το 3
B. η διαφορά τους διαιρείται με το 3
Γ. το άθροισμα ή η διαφορά τους διαιρείται με το 3
Δ. το άθροισμα και η διαφορά τους διαιρείται με το 3
Ε. ούτε το άθροισμα ούτε η διαφορά τους διαιρείται με το 3
20. * Για τους αριθμούς 6^8 και 15^8 ο Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π. είναι αντίστοιχα
A. 3^8 και 90^8 **B.** 6^8 και 15^8 **Γ.** 3^8 και 30^8
Δ. 3^8 και 90^8 **Ε.** 6^8 και 30^8 .

21. * Για τους θετικούς ακέραιους α, β, κ ισχύει $\alpha = 11\kappa$ και $\beta = 20\kappa$. Τότε ισχύει
A. $(\alpha, \beta) = 11\kappa$ **B.** $(\alpha, \beta) = 20\kappa$ **Γ.** $(\alpha, \beta) = \kappa$
Δ. $(\alpha, \beta) = \kappa^2$ **Ε.** $(\alpha, \beta) = 2\kappa$
22. * Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο διαδοχικών ακεραίων είναι
A. 1 **B.** 2 **Γ.** 3
Δ. το γινόμενο τους **Ε.** κάποιος άλλος ακέραιος
23. * Αν ο κ είναι άρτιος, τότε ο Μ.Κ.Δ του 2κ και του 4 είναι
A. 1 **B.** 2 **Γ.** 4 **Δ.** 8 **Ε.** -4
24. * Ένας ακέραιος αριθμός $\alpha \neq 0, \pm 1$ λέγεται πρώτος τότε και μόνο τότε αν οι διαιρέτες του είναι
A. μόνο ο 1 **B.** μόνο ο -1 **Γ.** μόνο ο α
Δ. μόνο ο $-\alpha$ **Ε.** οι -1, 1, $-\alpha, \alpha$
25. * Έστω $0 < \alpha < \beta < \gamma$ και $0 < \kappa < \lambda < \mu$ όπου $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu$ πρώτοι αριθμοί. Αν ισχύει $x = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ και $x = \kappa \cdot \lambda \cdot \mu$ τότε
A. $\alpha \neq \kappa$
B. $\kappa \cdot \lambda = \beta \cdot \gamma$
Γ. $\alpha = \kappa$ και $\beta = \mu$
Δ. $\alpha = \kappa$ και $\beta = \lambda$ και $\gamma = \mu$
Ε. $\alpha \neq \kappa$ και $\beta \neq \lambda$ και $\gamma \neq \mu$
26. * Για τους ακεραίους α, β ισχύει $2\alpha + 3\beta = 1$. Τότε
A. $\alpha \cdot \beta > 0$ **B.** $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ **Γ.** $(\alpha, \beta) = 1$
Δ. $(\alpha, \beta) = 2$ **Ε.** $(\alpha, \beta) = 3$

27. ** Το τόξο θ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, \pi]$ και ισχύει $(4\eta\mu\theta, 8) = 4$.
Τότε το τόξο θ θα ισούται με
 Α. 0 Β. $\frac{\pi}{6}$ Γ. $\frac{5\pi}{6}$ Δ. π Ε. $\frac{\pi}{2}$
28. * Αν α, β είναι δύο θετικοί ακέραιοι με $[\alpha, \beta] = (\alpha, \beta)$ τότε
 Α. $\alpha = 1$ και β οποιοσδήποτε ακέραιος
 Β. $\beta = 1$ και α οποιοσδήποτε ακέραιος Γ. $\alpha \neq \beta$
 Δ. $\alpha = \beta$ Ε. τίποτα από τα προηγούμενα
29. ** Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ ώστε $(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta]$, τότε
 Α. $\alpha \neq \beta$ Β. $\alpha > \beta$ Γ. $\alpha = \beta$ Δ. $(\alpha, \beta) = 1$ Ε. $\alpha < \beta$
30. ** Αν οι αριθμοί ρ και $\rho^2 + 2$ με $\rho < 10$ είναι και οι δύο πρώτοι, τότε ο ρ είναι
 Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 5 Ε. 7
31. ** Έστω α θετικός ακέραιος και $\alpha = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3$ η κανονική μορφή του.
Το πλήθος των θετικών διαιρετών του είναι
 Α. 3 Β. 6 Γ. 2 Δ. 4 Ε. 8
32. * Αν α, β θετικοί ακέραιοι με $\alpha \neq \beta$ και β/α τότε ισχύει πάντα
 Α. $(\alpha, \beta) = \alpha$ Β. $(\alpha, \beta) = 1$ Γ. $(\alpha, \beta) = \beta$
 Δ. $[\alpha, \beta] = \beta$ Ε. κανένα από τα προηγούμενα
33. ** Αν ρ πρώτος και $\rho/\alpha\beta$ (α, β φυσικοί) τότε
 Α. $\rho = 1$ Β. ρ/α και ρ/β Γ. $\rho > \alpha$
 Δ. ρ/α ή ρ/β Ε. $(\alpha, \beta) = 1$

34. ** Αν $(\alpha, \beta) = 1$ και (x_0, y_0) είναι ακέραιη λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ (1) με $\alpha, \beta, \gamma, \kappa \in \mathbb{Z}$ τότε η εξίσωση (1) έχει και άλλες άπειρες ακέραιες λύσεις (x, y) που δίνονται από τους τύπους
- A. $x = x_0 + \beta\kappa, y = y_0 + \alpha\kappa$ B. $x = x_0 + \alpha\kappa, y = y_0 + \beta\kappa$
 Γ. $x = x_0 + \beta\kappa, y = y_0 - \alpha\kappa$ Δ. $x = x_0 - \alpha\kappa, y = y_0 + \beta\kappa$
 E. $x = x_0 - \beta\kappa, y = y_0 - \alpha\kappa$
35. * Η γραμμική διοφαντική εξίσωση: $2x + y = 1$ έχει λύση το ζεύγος
- A. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ Γ. $(-1, 2)$ Δ. $(1, -3)$ E. $(-1, 3)$
36. ** Η διοφαντική εξίσωση: $12x + 18y = \kappa$ έχει για λύση το ζεύγος $(-2, 1)$. Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις που δίνονται όλες από τους τύπους
- A. $x = -2 + 3t$ B. $x = 1 + 3t$
 $y = 1 - 2t, t > 0$ $y = -2 - 2t, t$ ακέραιος
 Γ. $x = -2 + 3t$ Δ. $x = 2 + 3t$
 $y = 1 - 2t, t$ ακέραιος $y = 1 - 2t, t$ ακέραιος
 E. $x = 1 - 3t$
 $y = 2 + 2t, t$ ακέραιος
37. ** Έστω η διοφαντική εξίσωση $(v + 1)x - (v + 2)y = 3$ με $v \in \mathbb{N}^*$. Μία λύση της είναι
- A. $(-3, -1)$ B. $(1, -3)$ Γ. $(3, 2)$ Δ. $(-3, -3)$ E. $(-4, 1)$
38. ** Δίνεται η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^*$ και $\alpha\beta > 0$ η οποία έχει μία ακέραια λύση. Τότε
- A. η εξίσωση έχει άπειρες θετικές λύσεις
 B. η εξίσωση δεν έχει αρνητικές λύσεις
 Γ. η εξίσωση δεν έχει θετικές λύσεις
 Δ. το πλήθος των θετικών λύσεων είναι πεπερασμένο
 E. έχει μόνο ακέραιες λύσεις

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Στη στήλη Α του πίνακα (I) φαίνονται ζεύγη αριθμών (α , β). Στη στήλη Β υπάρχουν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του α με το β . Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος με το αντίστοιχο υπόλοιπό της, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. (23, 3)	A. -1
	B. 2
2. (-35, 6)	Γ. 1
	Δ. 0
3. (-27, -5)	E. 3
	ΣΤ. 5
4. (5, 7)	

Πίνακας (II)

1	2	3	4

2. * Η στήλη Α του πίνακα (I) περιέχει κατά σειρά τον διαιρετέο (Δ) και τον διαιρέτη (δ) μιας ευκλείδειας διαίρεσης και η στήλη Β το πηλίκο (π) και το υπόλοιπο (υ). Να γίνει αντιστοίχιση, ώστε τα δεδομένα να ανήκουν στην ίδια διαίρεση, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α		Στήλη Β	
Δ	δ	π	υ
1. 34	5	A. -18	1
		B. 6	4
2. -62	23	Γ. 3	4
		Δ. 18	-4
3. 73	-4	Ε. -3	7

Πίνακας (II)

1	2	3

3. * Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της στήλης Α του πίνακα (I) με τον αριθμό ο οποίος είναι διαιρέτης του για κάθε τιμή του λ ($\lambda \neq 0$) στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Αριθμός	Διαιρέτης
1. 27λ	Α. 2 Β. 3 Γ. 5 Δ. λ^2 Ε. λ^2+1
2. λ^3	
3. $\lambda(\lambda+1)$	

Πίνακας (II)

1	2	3

4. ** Σε κάθε σχέση της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε αυτήν η οποία συνεπάγεται (για κάθε μη μηδενικό ακέραιο β) στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α	Στήλη Β Σχέση η οποία συνεπάγεται
1. $5/7 \cdot \beta$	Α. $35/\beta$ Β. $3/\beta$
2. $14/\beta$	Γ. $5/\beta$ Δ. $7/\beta$
3. $9/27+\beta$	Ε. $\beta/9$

Πίνακας (II)

1	2	3

5. ** Εάν $\beta = 3 + \text{πολ}5$, να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α του πίνακα (I) με την αντίστοιχη μορφή του που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
1. β^2	A. $\text{πολ}5$
2. β^3	B. $1 + \text{πολ}5$
3. β^4	Γ. $2 + \text{πολ}5$
	Δ. $3 + \text{πολ}5$
	Ε. $4 + \text{πολ}5$

Πίνακας (II)

1	2	3

6. * Να αντιστοιχίσετε τα ζεύγη ή τις τριάδες της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το Μ.Κ.Δ. τους της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 6, -28	Α. 1
2. 4, -3, 0	Β. 5
3. -6, 12, 72	Γ. 2
4. -40, -30	Δ. 7
5. 21, -14, 35	Ε. 4
	ΣΤ. 6
	Ζ. 10

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4	5

7. * Από τη σχέση της στήλης Α του πίνακα (I) να προσδιορίσετε το ζεύγος των αριθμών που έχουν Μ.Κ.Δ. το δεύτερο μέλος της ισότητας. Το ζεύγος αυτό εμφανίζεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $(-1) \cdot 85 + 2 \cdot 51 = 17$	Α. 57, 38
2. $57 + (-1) \cdot 38 = 19$	Β. 85, 51
	Γ. 38, 19
	Δ. 26, 65
3. $(-2) \cdot 26 + 65 = 13$	Ε. 65, 13

Πίνακας (II)

1	2	3

8. * Να αντιστοιχίσετε τους αριθμούς της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το Ε.Κ.Π. τους της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. -2, -3, -5	Α. 63
2. 7, -9, 1	Β. 1262
3. 631, -2	Γ. 48
4. 24, -12, 6	Δ. 30
5. 23, 7, 2	Ε. 322
	ΣΤ. -30
	Ζ. 24

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4	5

9. * Η στήλη Α του πίνακα (I) περιέχει τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. δύο αριθμών που περιέχονται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α		Στήλη Β
Μ.Κ.Δ.	Ε.Κ.Π.	
1. 1	12	Α. 3, 4
2. 1	21	Β. 6, -12
3. 6	12	Γ. -6, 3
4. 16	48	Δ. 7, 3
		Ε. 48, -16
		ΣΤ. 48, 4

Πίνακας (II)

1	2	3	4

10. * Σε κάθε γραμμική διοφαντική εξίσωση της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε τις λύσεις της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α	Στήλη Β
Εξίσωση	Λύσεις
1. $2x + 3y = 5$	Α. $x = \kappa, y = -\kappa, \kappa$ ακέραιος
2. $3x - 6y = 2$	Β. $x = 2 + \kappa, y = 3 - \kappa, \kappa$ ακέραιος
3. $x + y = 0$	Γ. $x = 1 + 3\kappa, y = 1 - 2\kappa, \kappa$ ακέραιος
	Δ. καμία λύση
	Ε. $x = 3 + \kappa, y = 6 - \kappa, \kappa$ ακέραιος

Πίνακας (II)

1	2	3

11. * Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α του πίνακα (Ι) με μια (ακέραια) λύση της στη στήλη Β (αν έχει ακέραιες λύσεις), συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

A στήλη	B στήλη
1. $2x - 3y = 7$	A. $(x, y) = (-2, -3)$
2. $13x + 12y = 23$	B. δεν έχει ακέραιες λύσεις
3. $-2x + 4y = 3$	Γ. $(x, y) = (3, 4)$
4. $4x - 5y = 7$	Δ. $(x, y) = (2, -1)$
	E. $(x, y) = (-1, 3)$
	ΣΤ. $(x, y) = (1, 0)$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

Ερωτήσεις διάταξης

1. * Να βάλετε σε μια σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους παρακάτω αριθμούς:
- α)** (-34, -26) **β)** (39, -57) **γ)** (35, 55)
δ) (3, -4) **ε)** (-28, 52)
2. * Να βάλετε σε μια σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους παρακάτω αριθμούς:
- α)** [9, -4] **β)** [-2, 1] **γ)** [1, -1]
δ) [14, 21] **ε)** [-5, -15] **στ)** [17, 19]
3. * Να βάλετε σε μία σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:
- α)** $48 : 3$ **β)** $-49 : 3$ **γ)** $49 : -3$
δ) $88 : 5$ **ε)** $-87 : -7$

Ερώτηση συμπλήρωσης

1. * Αν α πρώτος αριθμός να συμπληρωθούν τα κενά:

x	y	(x, y)	$[x, y]$
12	18		
$3\alpha^2$	2α		
12		6	60
		α	α

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Παρατηρούμε ότι: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$$1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$$

$$1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$$

Ποιο νομίζετε ότι θα είναι το άθροισμα $1 + 2 + 3 + \dots + n$; Αποδείξτε την ισότητα που συμπεράνατε με επαγωγή.

2. * Μετράμε τον αριθμό των διαγωνίων μερικών πολυγώνων:

Αριθμός πλευρών	Αριθμός διαγωνίων
τετράπλευρο ($n = 4$)	$2 = \frac{4(4-3)}{2}$
πεντάγωνο ($n = 5$)	$5 = \frac{5(5-3)}{2}$
εξάγωνο ($n = 6$)	$9 = \frac{6(6-3)}{2}$
επτάγωνο ($n = 7$)	$14 = \frac{7(7-3)}{2}$

Ποιος νομίζετε ότι θα είναι ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολυγώνου με n πλευρές; Να αποδειχθεί η σχέση που συμπεράνατε με μαθηματική επαγωγή.

3. * Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $n \in \mathbb{N}^*$ για την οποία ισχύει η σχέση $2^n > n^2$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η σχέση για κάθε n μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή που βρέθηκε.

4. * Να διαπιστώσετε ότι ο αριθμός $2^{4v} - 1$ για $v = 1, 2, 3, 4$ είναι πολλαπλάσιο του 15. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $2^{4v} - 1 = \text{πολ}15, v \in \mathbb{N}^*$. Υπάρχει άλλος τρόπος απόδειξης;
5. ** Αν α, β ακέραιοι δείξτε ότι $(\alpha + \beta)^v = \alpha^v + \lambda\beta, \lambda \in \mathbb{Z}$ και $v \in \mathbb{N}^*$.
6. ** i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $2 + 4 + 6 + \dots + 2v = v(v+1)$
 ii) Να δείξετε ότι η ισότητα $2 + 4 + \dots + 2v = v(v+1) - 1$ αν αληθεύει για v , τότε αληθεύει και για $v+1$. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$; Να τη συγκρίνετε με την ισότητα (i) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
7. *** i) Αποδείξτε ότι $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$.
 ii) Έστω ότι ισχύει $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}} < 2$ για κ το πλήθος ριζικών, αποδείξτε ότι ισχύει και για $\kappa+1$ πλήθος ριζικών. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος ριζικών; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
8. ** Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Στην ε_1 παίρνουμε τα σημεία A_1, A_2, A_3 και στην ε_2 τα σημεία B_1, B_2, B_3 .
 i) Ενώνουμε το A_1 με το B_1 . Το A_2 με το B_1 και B_2 , το A_3 με το B_1, B_2 και B_3 . Πόσα ευθύγραμμα τμήματα θα σχηματιστούν;
 ii) Αν στην ε_1 θεωρήσουμε n σημεία $A_1, A_2, \dots, A_n$. Αν και στη ε_2 αντιστοίχως n σημεία $B_1, B_2, \dots, B_n$ και ενώσουμε το A_1 με 1, το A_2 με 2, το A_3 με 3 και το A_n με n σημεία από την ευθεία ε_2 , αποδείξτε ότι το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων που σχηματίζονται είναι $\frac{n(n+1)}{2}$.

9. *** Να αποδειχθεί ότι: $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + v \cdot 2^{v-1} = (v-1) \cdot 2^v$
για κάθε $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 2$.
10. *** Να αποδείξετε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:
- α) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + v(v+1)(v+2) = \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{4}$
- β) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2v)^3 = 2v^2(v+1)^2$
11. ** Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι όταν διαιρούνται με 3 δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου.
12. ** Ο αριθμός 60 διαιρούμενος με τον θετικό ακέραιο δ δίνει πηλίκο π και υπόλοιπο 12. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές των δ και π .
13. ** Αν π και υ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του α δια του $\beta > 0$, τότε να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $-\alpha$ δια $-\beta$.
14. ** Να αποδείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός ακεραίου α διαιρεθεί με τον 4, τότε το υπόλοιπο είναι 0 ή 1.
15. * Να βρεθούν οι ακέραιοι οι οποίοι όταν διαιρούνται με τον 13 δίνουν πηλίκο ίσο με το υπόλοιπο.
16. ** Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος δ , ο οποίος όταν διαιρεί τον 2285 αφήνει υπόλοιπο 8 και όταν διαιρεί τον 977 αφήνει υπόλοιπο 5.
17. ** Ο αριθμός των δένδρων ενός άλσους είναι τριψήφιος και μικρότερος του 150. Αν τα δένδρα μετρηθούν ανά 3 ή 4 ή 5 ή 6 μένουν πάντοτε 2. Πόσα είναι τα δένδρα αυτά;

18. ** Οι αριθμοί 100 και 80 όταν διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό, δίνουν αντιστοίχως υπόλοιπα 1 και 8. Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αυτού αριθμού.
19. ** Στο σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών να λυθούν τα συστήματα
- α) $x + y = 200$
 $(x, y) = 5$
- β) $x + y = 200$
 $(x, y) = 3$
20. ** Στο σύνολο των θετικών ακεραίων να λυθεί το σύστημα $(x, y) = 10$
 $[x, y] = 100$.
21. * Να αποδειχθεί ότι:
- i) Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος
 - ii) Η διαφορά δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος
 - iii) Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος
 - iv) Η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος
 - v) Το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι αριθμός περιττός
 - vi) Η διαφορά άρτιου αριθμού από περιττό είναι περιττός
 - vii) Το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός
 - viii) Το γινόμενο ενός άρτιου αριθμού επί ένα περιττό είναι αριθμός άρτιος
22. * Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.
23. ** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών αρτίων αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 8.
24. ** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο πέντε διαδοχικών ακεραίων είναι πάντοτε διαιρετό δια 120.
25. ** Να αποδειχθεί ότι μεταξύ τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 3.

26. ** Να αποδειχθεί ότι μεταξύ πέντε διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πολλαπλάσιο του 5.
27. ** Εάν δύο ακέραιοι αριθμοί έχουν διαφορά άρτιο και γινόμενο άρτιο αριθμό να αποδείξετε ότι είναι και οι δύο άρτιοι.
28. * i) Αποδείξτε ότι $(p + 1)^2 - (p - 1)^2 = 4p$ για κάθε φυσικό p .
 ii) Αποδείξτε ότι ένας φυσικός είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε γράφεται σαν διαφορά δύο τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.
 iii) Να γραφεί ο αριθμός 80 σαν διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.
29. ** Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός φυσικός αριθμός διάφορος του 1 μπορεί να τεθεί με τη μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών.
30. * α) Να δείξετε ότι κάθε ακέραιος είναι της μορφής $2k$ ή $2k + 1$ (k ακέραιος).
 β) Για κάθε ακέραιο a ισχύει: $a^2 = 4k$ ή $a^2 = 4k + 1$.
 γ) Για κάθε ακέραιο a δείξτε ότι ο αριθμός $a^2 + a + 1$ είναι περιττός.
31. ** Διαθέτουμε 1.500 δρχ., με αυτό το ποσό ο μέγιστος αριθμός κιλών που μπορούμε να αγοράσουμε από ένα προϊόν είναι k και παίρνουμε ρέστα 220 δρχ.
 α) Αν διαθέτουμε 2.000 δρχ. θα μπορούσαμε να αγοράσουμε 2 κιλά επιπλέον και θα παίρναμε ρέστα 80 δρχ. Πόσο κοστίζει το κιλό του προϊόντος;
 β) Ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος αριθμός χαρτονομισμάτων των 5.000 που θα πρέπει να διαθέσουμε για την αγορά του προϊόντος ώστε να μην πάρουμε ρέστα.
32. ** Οι ακέραιοι a και b διαιρούμενοι με το $v \in \mathbb{N}^*$ αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.
 Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\frac{a-b}{v}$ είναι ακέραιος.

33. ** Έστω $\alpha = \beta \cdot \kappa + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < |\beta|$, $\beta \neq 0$. Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(\alpha + \lambda\beta)$ με το β είναι πάλι υ .
34. ** Να αποδειχθεί ότι:
- α) ο αριθμός $v^3 - v$ είναι πολλαπλάσιο του 24, αν v περιττός φυσικός διάφορος του 1.
 - β) ο αριθμός $(v^2 - 1)v^2(v^2 + 1)$ είναι διαιρετός δια 60, αν v φυσικός.
 - γ) ο αριθμός $(v^3 - v)(v^2 - 4)$ είναι πολλαπλάσιο του 120, αν v φυσικός μεγαλύτερος του 2.
35. * Εάν $\beta = 1 + \text{πολ}3$ να αποδείξετε ότι:
- α) $\beta^2 = 1 + \text{πολ}3$ β) $\beta^3 = 1 + \text{πολ}3$
36. * Εάν $v = 1 + \text{πολ}5$ να αποδείξετε ότι: $3v^2 + 3v - 1 = \text{πολ}5$
37. * Εάν $v = 2 + \text{πολ}5$ να αποδείξετε ότι:
- α) $2v + 1 = \text{πολ}5$ β) $v + 3 = \text{πολ}5$
38. * Αν $v = 3 + \text{πολ}5$ ή $v = 1 + \text{πολ}5$, να αποδείξετε ότι ο 5 διαιρεί τον $3v^2 + 3v - 1$.
39. ** Έστω α, β δύο ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 3. Να δείξετε ότι το άθροισμα $\alpha + \beta$ ή η διαφορά $\alpha - \beta$ διαιρείται με τον 3.
40. ** Αν τα ψηφία ενός τριψηφίου αριθμού είναι διαδοχικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι ο αριθμός διαιρείται με το 3.
41. ** Για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $2^{2v} + 15v - 1 = \text{πολ}9$.
42. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^v + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3 για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

43. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^n - 6n - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 36 για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $n \geq 2$.
44. ** Σε ένα πάπυρο μιας πυραμίδας της Αιγύπτου βρέθηκε γραμμένος ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρείται με όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 10. Να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.
45. ** Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι α, β .
- α) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:
- i) Αν α/β και β/α τότε $\alpha = \beta$. ii) Αν $\alpha/\alpha+\beta$ τότε α/β .
- β) Με τη βοήθεια των i) και ii) του α) να βρείτε όλα τα ζεύγη των θετικών ακεραίων α, β για τα οποία ισχύει: Το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ διαιρεί το άθροισμα $\alpha + \beta$.
46. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha = n(n^2 - 1)(4n^2 - 1)$ διαιρείται με το 5 για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
47. ** Έστω ένας διψήφιος αριθμός α . Αποδείξτε ότι όταν στο τριπλάσιο του αριθμού των δεκάδων του προσθέσουμε τις μονάδες του και το αποτέλεσμα διαιρείται δια του 7, τότε ο αριθμός α διαιρείται δια 7. Εξετάστε αν ισχύει το παραπάνω κριτήριο για τριψήφιους, τετραψήφιους κ.λπ. αριθμούς.
48. *** Γράφουμε έναν τριψήφιο αριθμό $\alpha\beta\gamma$. Μετά επαναλαμβάνουμε τον ίδιο αριθμό δίπλα στον πρώτο, ώστε να πάρουμε έναν εξαψήφιο της μορφής $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$. Να αποδείξετε ότι:
- i) $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma = 1001(100\alpha + 10\beta + \gamma)$
- ii) Ο αριθμός $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$ διαιρείται δια του 7 του 11 και του 13.
49. ** Αν α είναι διψήφιος ακέραιος αριθμός και β ο ακέραιος, ο οποίος προκύπτει από τον α , όταν εναλλάζουμε τα ψηφία του να αποδείξετε ότι η διαφορά $\alpha - \beta$ διαιρείται με τον 9.

50. ** Εάν $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = 1$ και τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ανάγωγα να αποδείξετε ότι:

α) ο β διαιρεί τον δ β) $|\beta| = |\delta|$

51. ** Αν α, β ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι: $(\alpha, \beta) = (5\alpha + 4\beta, \alpha + \beta)$.

52. ** Αν $(\alpha, \beta) = 1$ και δ/α δείξτε ότι $(\delta, \beta) = 1$.

53. ** Να αποδειχθεί ότι $(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta\gamma, \beta)$.

54. ** Εάν $\delta_1 = (\alpha, \beta)$ και $\delta_2 = (\alpha + \beta\gamma, \alpha + \beta(\gamma-1))$ να αποδείξετε ότι $\delta_1 = \delta_2$.

55. ** Εάν $\delta_1 = (\alpha, \beta)$ και $\delta_2 = (\alpha, \beta\gamma)$ τότε δ_1/δ_2 .

56. * Εάν $v \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι: $(5v + 1, 6v + 1) = 1$

57. ** α) Οι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί.

Να εξετάσετε αν μπορεί η περίμετρός του να ισούται με πρώτο αριθμό.

β) Οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί.

Να εξετάσετε αν μπορεί το εμβαδόν του να ισούται με πρώτο αριθμό.

58. ** Για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$(v + 1)(v + 2)(v + 3) \dots (2v - 1)2v = \text{πολ}2^v$$

59. ** Αν ο 2 δεν διαιρεί τον $x\psi$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) x, ψ περιττοί αριθμοί

ii) ο 2 διαιρεί το $x^2 + \psi^2$

iii) ο 4 δεν διαιρεί το $x^2 + \psi^2$

60. ** Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και ισχύει $(\alpha, \beta, \gamma) = 7$ και $[\alpha, \beta, \gamma] = 105$, να βρεθούν οι α, β, γ .

61. ** Να δείξετε ότι ο μοναδικός πρώτος της μορφής $v^3 - 1$ είναι ο αριθμός 7.
62. ** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - κx + λ = 0$, $κ, λ \in \mathbb{Z}$ δεν μπορεί να έχει για ρίζες δύο ανάγωγα κλάσματα.
63. ** Αν $[\beta, \gamma] = \varepsilon$, $[\beta_1, \gamma_1] = \varepsilon_1$, β_1/β και γ_1/γ να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1/\varepsilon$.
64. * Ένας ανθοπώλης διαθέτει 30 τριαντάφυλλα, 72 γαρύφαλλα και 54 υάκινθους. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει; Από πόσα άνθη κάθε είδους θα αποτελείται η κάθε ανθοδέσμη;
65. * Ένας βοσκός μετρώντας τα πρόβατά του τα έβρισκε πάντα κάπου ανάμεσα στα 113 και 137. Τα μετρούσε σε οκτάδες, δεκάδες ή δωδεκάδες, του περίσσευαν πάντα πέντε. Βοηθήστε τον να βρει πόσα πρόβατα έχει ακριβώς.
66. * Οι μαθητές μιας τάξης μπορούν να τοποθετηθούν σε τετράδες, πεντάδες ή εξάδες χωρίς να περισσεύει κανείς. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός των μαθητών αυτής της τάξης; Ποια μορφή έχουν οι αριθμοί που μπορεί να αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των μαθητών αυτής της τάξης;
67. * Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι προς διαφορετικές κατευθύνσεις και όταν επιστρέφουν ξαναφεύγουν αμέσως. Το ταξίδι του ενός διαρκεί τρεις ημέρες και του άλλου πέντε ημέρες. Μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί τα δύο πλοία να αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα;
68. * Τρεις αθλητές τρέχουν ένα κυκλικό στίβο. Ο πρώτος για μία στροφή χρειάζεται 2 λεπτά, ο δεύτερος 3 λεπτά και ο τρίτος 5 λεπτά. Ξεκινούν και οι τρεις από το ίδιο σημείο. Μετά από πόσα λεπτά θα έχουν συμπληρώσει και οι τρεις (για πρώτη φορά) ακέραιο αριθμό στροφών;

69. ** Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^*$, να δειχθεί ότι:
 $(\alpha, \beta) (\beta, \gamma) (\gamma, \alpha) [\alpha, \beta] [\beta, \gamma] [\gamma, \alpha] = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$.
70. ** Οι αριθμοί p και $8p - 1$ είναι πρώτοι. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $8p + 1$ είναι σύνθετος.
71. ** Εάν ο $n \geq 1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(n + 1)! + 1$ δε μπορεί να γραφτεί ως δύναμη του 2.
72. ** Δείξτε ότι το τετράγωνο κάθε πρώτου $p > 3$ είναι της μορφής $3\lambda + 1$.
73. * Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $2x - 3y = 5$.
74. ** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $36x + 42y = 66$.
75. ** Να βρεθούν οι θετικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης $3x + 5y = 16$.
76. * Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $4x - 8y = 3$.
77. ** Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας $(\epsilon): 6x + 5y = 4$, τα οποία έχουν αρνητική ακέραια τετμημένη και θετική ακέραια τεταγμένη.
78. ** Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει μια ανταλλαγή ενός χαρτονομίσματος των 200 δραχ. με κέρματα των 10 και 20 δραχ.; (Θέλουμε κέρματα και των δύο ειδών).
79. * Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:
 i) $71x - 50y = 1$
 ii) $43x + 64y = 1$
 iii) $243x + 189y = 9$

80. ** Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ να αποδείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \kappa\alpha + \lambda\beta$ έχει λύση για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$.
81. ** α) Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $4x + 5y = 2$
 β) Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy να βρεθούν τα σημεία της ευθείας που έχει εξίσωση $4x + 5y = 2$, τα οποία βρίσκονται στην δεύτερη γωνία των αξόνων και έχουν ακέραιες συντεταγμένες.
82. ** Μια ομάδα ποδοσφαίρου για το πρωτάθλημα της Α' Εθνικής κατηγορίας στους αγώνες, που έχει δώσει έως τώρα, έχει συγκεντρώσει 38 βαθμούς και έχει υποστεί 5 ήττες. Αν οι ισοπαλίες που έχει φέρει, είναι περισσότερες από τις ήττες, αλλά και οι νίκες περισσότερες από τις ισοπαλίες, να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των αγώνων, που έχει δώσει η ομάδα αυτή, με δεδομένο ότι, από κάθε νίκη παίρνει 3 βαθμούς, από κάθε ισοπαλία 1 και στην ήττα 0.
83. *** Ένας χρυσοχόος, επιστρέφοντας στο μαγαζί του, διαπιστώνει ότι του λείπουν οι λίρες που είχε αφήσει το προηγούμενο βράδυ διατεταγμένες σε σχήμα τετραγώνου.
 Στην ερώτηση που έκανε στον υπάλληλό του: "που πήγαν οι λίρες;" πήρε την απάντηση:
 - «Ήρθαν τρεις κλέφτες και τις άρπαξαν. Άφησαν μόνο δύο, που τις έχω στο συρτάρι. Θα τις έπαιρναν και αυτές, αλλά δεν μπορούσαν να τις μοιράσουν εξίσου οι τρεις μεταξύ τους».
 Να εξετάσετε αν ο υπάλληλος έλεγε την αλήθεια.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 4ο:**ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ****Απαντήσεις στις ερωτήσεις «Σωστό - Λάθος»**

1. Λ	17. Σ	32. Σ	47. Σ	62. Σ
2. Σ	18. Σ	33. Λ	48. Λ	63. Σ
3. Λ	19. Λ	34. Σ	49. Σ	64. Λ
4. Λ	20. Σ	35. Σ	50. Λ	65. Λ
5. Σ	21. Σ	36. Σ	51. Λ	66. Λ
6. Σ	22. Λ	37. Λ	52. Σ	67. Σ
7. Λ	23. Σ	38. Σ	53. Λ	68. Λ
8. Σ	24. Σ	39. Σ	54. Σ	69. Σ
9. Λ	25. Σ	40. Σ	55. Σ	70. Σ
10. Σ	26. Σ	41. Λ	56. Λ	71. Σ
11. Λ	27. Λ	42. Σ	57. Λ	72. Σ
12. Σ	28. Σ	43. Λ	58. Σ	73. Λ
13. Λ	29. Σ	44. Σ	59. Σ	74. Σ
14. Σ	30. Σ	45. Λ	60. Σ	75. Λ
15. Λ	31. Λ	46. Λ	61. Λ	76. Λ
16. Σ				77. Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δ	11. Β	21. Γ	31. Ε
2. Γ	12. Γ	22. Α	32. Γ
3. Β	13. Δ	23. Γ	33. Δ
4. Β	14. Ε	24. Ε	34. Γ
5. Δ	15. Δ	25. Δ	35. Ε
6. Δ	16. Γ	26. Γ	36. Γ
7. Δ	17. Γ	27. Ε	37. Δ
8. Ε	18. Ε	28. Δ	38. Δ
9. Δ	19. Γ	29. Γ	
10. Δ	20. Γ	30. Γ	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. 1Β, 2Γ, 3Ε, 4ΣΤ	7. 1Β, 2Α, 3Δ
2. 1Β, 2Ε, 3Α	8. 1Δ, 2Α, 3Β, 4Ζ, 5Ε
3. 1Β, 2Δ, 3Α	9. 1Α, 2Δ, 3Β, 4Ε
4. 1Γ, 2Δ, 3Β	10. 1Γ, 2Δ, 3Α
5. 1Ε, 2Γ, 3Β	11. 1Δ, 2Ε, 3Β, 4Α
6. 1Γ, 2Α, 3ΣΤ, 4Ζ, 5Δ	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. δ, α, β, ε, γ
2. γ, β, ε, α, δ, στ
3. α : 0, γ : 1, β : 2, δ : 3, ε : 4

Υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Ο τύπος είναι $1 + 2 + 3 + \dots + v = \frac{v(v+1)}{2}$.
2. Ο αριθμός των διαγωνίων ενός v -γώνου θα είναι $P_v = \frac{v(v-3)}{2}$. Για την απόδειξη παρατηρείστε ότι προσθέτοντας μια πλευρά στο πολύγωνο, προσθέτουμε $(v-2) + 1 = v - 1$ διαγώνιες, άρα $P_{v+1} = P_v + (v - 1) = \frac{(v+1)(v-2)}{2}$
3. Η ελάχιστη τιμή είναι $v = 5$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.
4. Ένας άλλος τρόπος απόδειξης είναι ο εξής:
 $2^{4v} - 1 = (2^4)^v - 1^v = 16^v - 1^v = (16-1)(16^{v-1} + \dots + 1) = \text{πολ.}15$
5. Επαγωγή ή με την ταυτότητα:
 $(\alpha + \beta)^v - \alpha^v = (\alpha + \beta - \alpha) [(\alpha + \beta)^{v-1} + \dots + \alpha^{v-1}] = \text{πολ.}\beta$
6. i) Επαγωγή
 ii) Αν ισχύει η P_v τότε ισχύει και η P_{v+1} , όμως δεν ισχύει για $v = 1$, άρα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.
7. ii) Έστω $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \dots$ ($\kappa + 1$ ριζικά), τότε $\alpha^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (κ ριζικά)
 άρα $\alpha^2 < 2 + 2$ δηλαδή $\alpha^2 < 4$, άρα $\alpha < 2$. Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος ριζικών.

8. i) Είναι $1 + 2 + 3 = 6$

ii) Είναι $1 + 2 + 3 + \dots + v = \frac{v(v+1)}{2}$

9. Απλή επαγωγή.

10. Επαγωγή.

11. Θα είναι $\alpha = 3 \cdot \kappa + v$ με $\kappa = 2v$, άρα $\alpha = 3 \cdot 2v + v$, με $v = 0, 1, 2$. Επομένως $\alpha = 7v$. Άρα $\alpha = 0$ (απορρίπτεται), $\alpha = 7$ ή $\alpha = 14$.

12. Θα έχουμε $60 = \delta \cdot \pi + 12$, άρα $\delta \cdot \pi = 48$ με $12 < \delta$. Άρα θα έχουμε $(\delta, \pi) = (16, 3)$ ή $(24, 2)$ ή $(48, 1)$

13. $\alpha = \beta \cdot \pi + v$ με $0 \leq v < \beta$, άρα $-\alpha = (-\beta) \pi - v$, άρα $-\alpha = (-\beta) (\pi + 1) + (\beta - v)$ με $0 \leq \beta - v < |-\beta|$. Δηλαδή είναι πηλίκο $\pi + 1$ και υπόλοιπο $\beta - v$ με $0 \leq \beta - v < \beta$, που ισχύει.

14. Αν $\alpha = 2\kappa$ τότε $\alpha^2 = 4\kappa^2 = \text{πολ.}4$
αν $\alpha = 2\kappa + 1$, τότε $\alpha^2 = (2\kappa + 1)^2 = \text{πολ.}4 + 1$

15. Θα είναι $\alpha = 13 \pi + v$ με $\pi = v$ και $0 \leq v < 13$.
Άρα $\alpha = 14 v$ με $v = 0, 1, 2, \dots, 13$.

16. Έχουμε $2285 = \delta\pi_1 + 8$ και $977 = \delta\pi_2 + 5$, άρα $\delta\pi_1 = 2285 - 8 = 2277$ και $\delta\pi_2 = 977 - 5 = 972$ άρα $\delta = (2277, 972) = 9$.

17. Έστω α ο αριθμός των δένδρων, τότε θα είναι $\alpha - 2 = \text{πολ. } [3, 4, 5, 6] = \text{πολ. } 60$ και λόγω των υποθέσεων θα είναι $\alpha - 2 = 120$ δηλαδή $\alpha = 122$.

18. Είναι $\frac{100}{80} = \frac{\alpha\pi_1 + 1}{\alpha\pi_2 + 8}$ με $\alpha > 8$. Άρα $\frac{\alpha\pi_1}{\alpha\pi_2} = \frac{99}{72}$ με $\alpha > 8$, άρα είναι α κοινός διαιρέτης των 99 και 72 με $\alpha > 8$, δηλαδή $\alpha = 9$.

19. α) Θα είναι $x = 5x_1$ και $y = 5y_1$ με $(x_1, y_1) = 1$, άρα $x + y = 200 \Leftrightarrow 5x_1 + 5y_1 = 200 \Leftrightarrow x_1 + y_1 = 40$ με $(x_1, y_1) = 1$
 β) $x = 3x_1$ και $y = 3y_1$, άρα $x_1 + y_1 = \frac{200}{3}$, άτοπο.
 Άρα το σύστημα είναι αδύνατο

20. Θα είναι $x = 10x_1$ και $y = 10y_1$ με $(x_1, y_1) = 1$ και $[x, y] = 100$,
 άρα $[x_1, y_1] = 10$. Επομένως $(x_1, y_1) = (1, 10)$ ή $(2, 5)$ ή $(10, 1)$ ή $(5, 2)$.

21. i) $2\kappa + 2\lambda = 2(\kappa + \lambda) = 2\rho$, άρτιος
 ii) ομοίως
 iii) $(2\kappa + 1) + (2\lambda + 1) = 2(\kappa + \lambda + 1) = 2\rho$
 iv) ομοίως
 v) $2\kappa + (2\lambda + 1) = 2(\kappa + \lambda) + 1 = 2\rho + 1$, περιττός
 vi) ομοίως

$$\text{vii) } (2\kappa + 1)(2\lambda + 1) = 4\kappa\lambda + 2\kappa + 2\lambda + 1 = 2\rho + 1$$

$$\text{viii) } 2\kappa(2\lambda + 1) = 2[\kappa(2\lambda + 1)] = 2\rho$$

22. Είναι $v(v - 1)$

αν v άρτιος τότε $2\kappa(2\kappa - 1) = 2\rho$, άρτιος

αν v περιττός τότε $(2\kappa - 1)(2\kappa - 2) = 2\rho$

23. $2v(2v + 2) = 4v(v + 1) = 4 \cdot 2\kappa = 8\kappa$

24. Σε 5 διαδοχικούς ακεραίους υπάρχει ένας που είναι πολ/σιο του 5, ένας που είναι πολ/σιο του 3 και γινόμενο δύο διαδοχικών αρτίων που είναι (σύμφωνα με την άσκηση 23) πολ/σιο του 8. Επειδή $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$, έχουμε το συμπέρασμα.

25. Παίρνουμε το γινόμενο $(v - 1)v(v + 1)$ και θέτουμε $v = 3\kappa$ ή $v = 3\kappa + 1$ ή $v = 3\kappa + 2$.

26. Στο γινόμενο $(v - 2)(v - 1)v(v + 1)(v + 2)$, θέτουμε $v = 5\kappa + \upsilon$, με $\upsilon = 0, 1, 2, 3, 4$.

27. Αν ο ένας είναι περιττός, τότε η διαφορά τους θα είναι περιττός, άτοπο. Αν είναι και οι δύο περιττοί, τότε το γινόμενό τους θα είναι περιττός, άτοπο. Άρα και οι δύο θα είναι άρτιοι.

28. i) πράξεις
 ii) Από το i)

iii) $80 = 4 \cdot 20 = (20 + 1)^2 - (20 - 1)^2$

29. Έχουμε $2\kappa + 1 = 2\kappa + 1 + \kappa^2 - \kappa^2 = (\kappa + 1)^2 - \kappa^2$.

30. α) Αν ο ακέραιος είναι άρτιος θα είναι της μορφής 2κ , αν είναι περιττός θα είναι $2\kappa + 1$ ($\alpha = 2\kappa + \upsilon$ με $\upsilon = 0$ ή $\upsilon = 1$).

β) Αν $\alpha = 2\rho$, τότε $\alpha^2 = 4\rho^2 = 4\kappa$

αν $\alpha = 2\rho + 1$, τότε $\alpha^2 = (2\rho + 1)^2 = 4\rho^2 + 4\rho + 1 = 4\kappa + 1$

- γ) Περιπτώσεις για α άρτιο ή α περιττό.

31. α) Αν α είναι η αξία του ενός κιλού, θα έχουμε: $1.500 = \kappa \cdot \alpha + 220$,
 $2.000 = (\kappa + 2) \alpha + 80$ από όπου έχουμε $\alpha = 320$

- β) Αφού η τιμή του ενός κιλού είναι 320 δραχ., θα πρέπει το 320, να διαιρεί κάποιο πολ/σιο του 5.000. Άρα είναι $[5.000, 320] = 40.000$. Άρα με 8 χαρ/τα των 5.000 δεν θα πάρουμε ρέστα.

32. $\alpha = \kappa \cdot \upsilon + \upsilon$ και $\beta = \lambda \cdot \upsilon + \upsilon$, άρα $\alpha - \beta = (\kappa - \lambda) \upsilon$, άρα $\frac{\alpha - \beta}{\upsilon} = \kappa - \lambda$

33. $\alpha + \lambda\beta = (\beta\kappa + \upsilon) + \lambda\beta = (\kappa + \lambda) \beta + \upsilon$

34. α) $v^3 - v = (v - 1) v (v + 1)$. Οι $v - 1$ και $v + 1$ είναι άρτιοι, άρα το γινόμενο τους διαιρείται με το 8. Επίσης μεταξύ των τριών διαδοχικών, ένας είναι πολ/σιο του 3, άρα το γινόμενό τους διαιρείται με το $3 \cdot 8 = 24$.
- β) $(v^2 - 1) v^2 (v^2 + 1) = (v - 1) (v + 1) v^2 (v^2 + 1)$ και $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5$ και κάθε ένας από τους 4, 3, 5 διαιρεί την παράσταση.
- γ) $(v^3 - 1) (v^2 - 4) = (v - 2) (v - 1) v (v + 1) (v + 2)$ (γινόμενο πέντε διαδοχικών) και $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$
35. α) αν $\beta = 1 + 3\kappa$, τότε $\beta^2 = 1 + 3\lambda$
 β) $\beta^3 = 1 + 3\rho$
36. Αν $v = 1 + 5\kappa$, τότε $3v^2 + 3v - 1 = 5\rho$
37. Θέτουμε $v = 2 + 5\kappa$
38. Αν $v = 3 + 5\kappa$ τότε $3v^2 + 3v - 1 = \text{πολ.}5$
 αν $v = 1 + 5\kappa$, ομοίως
39. Ο α θα είναι της μορφής $3\kappa + 1$ ή $3\kappa + 2$ και ο β επίσης, έστω $3\lambda + 1$ ή $3\lambda + 2$. Συνδυάζουμε όλες τις περιπτώσεις.
40. Τα ψηφία του θα είναι της μορφής $\kappa, \kappa + 1, \kappa + 2$ (ή $\kappa + 2, \kappa + 1, \kappa$). Έτσι θα ισούται με $100\kappa + 10(\kappa + 1) + \kappa + 2 = 111\kappa + 12 = 3(37\kappa + 4) = \text{πολ.}3$

41. με επαγωγή

42. Ομοίως

43. Ομοίως

44. Αφού διαιρείται με όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 10, θα είναι κοινό τους πολ/σιο. Άρα θα είναι $[1, 2, 3, \dots, 10] = 2.520$

45. α) i) Θα είναι $\alpha = \kappa\beta$ και $\beta = \lambda\alpha$, άρα $\alpha\beta = \kappa\lambda\alpha\beta \Leftrightarrow \kappa\lambda = 1 \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 1$. Άρα $\alpha = \beta$

ii) Θα είναι $\alpha + \beta = \kappa\alpha \Leftrightarrow \beta = (\kappa - 1)\alpha$. Άρα α / β

β) Θα έχουμε $\alpha + \beta = \kappa\alpha\beta$, άρα $\alpha / \alpha + \beta$ και $\beta / \alpha + \beta$ άρα α / β και β / α , δηλαδή $\alpha = \beta$. Επομένως $2\alpha = \kappa\alpha^2 \Leftrightarrow 2 = \kappa\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = 2$

46. Είναι $\alpha = v(v-1)(v+1)(2v-1)(2v+1)$. Παίρνουμε περιπτώσεις για τον $v = 5\kappa + \upsilon$, με $\upsilon = 0, 1, 2, 3, 4$. Σε κάθε περίπτωση ένας παράγοντας είναι πολ/σιο του 5.

47. Αν $\alpha = \lambda\mu$, τότε $\alpha = 10\lambda + \mu = 7\lambda + (3\lambda + \mu) = \text{πολ.}7$, αφού το $3\lambda + \mu = \text{πολ.}7$.

48. α) $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma = 10^5\alpha + 10^4\beta + 10^3\gamma + 10^2\alpha + 10 \cdot \beta + \gamma = 1001(100\alpha + 10\beta + \gamma)$

β) Είναι $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

49. Αν $\alpha = x \cdot y = 10x + y$, τότε θα είναι $\beta = y \cdot x = 10y + x$.
 Άρα $\alpha - \beta = 9(x - y) = \text{πολ.}9$

50. α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = 1 \Leftrightarrow \alpha\delta + \beta\gamma = \beta\delta$, άρα
 $\alpha\delta = \beta\delta - \beta\gamma$ και $\beta\gamma = \beta\delta - \alpha\delta$, άρα
 $\alpha\delta = \beta(\delta - \gamma)$ και $\beta\gamma = \delta(\beta - \alpha)$, άρα
 δ / β και β / δ
 β) άρα $|\beta| = |\delta|$

51. Έστω $(\alpha, \beta) = \delta_1$ και $(5\alpha + 4\beta, \alpha + \beta) = \delta_2$ τότε δ_1 / δ_2 και δ_2 / δ_1 .

52. Αφού $(\alpha, \beta) = 1$, θα υπάρχουν ακέραιοι x, y ώστε $\alpha x + \beta y = 1$. Όμως $\alpha = \kappa\delta$,
 άρα $\delta(\kappa x) + \beta y = 1$, άρα $(\delta, \beta) = 1$.

53. Έστω $(\alpha, \beta) = \delta_1$ και $(\alpha + \beta\gamma, \beta) = \delta_2$ προφανώς δ_1 / δ_2 και άρα δ_2 / δ_1 , οπότε
 $\delta_1 = \delta_2$.

54. Έχουμε $\delta_1 / \alpha \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 / \alpha + \beta\gamma \\ \delta_1 / \beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{άρα} \\ \delta_1 / \alpha + \beta(\gamma - 1) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{άρα} \delta_1 / \delta_2 \end{array} \right.$
 και
 $\left\{ \begin{array}{l} \delta_2 / \alpha + \beta\gamma \\ \delta_2 / \alpha + \beta\gamma - \beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{άρα} \\ \delta_2 / \beta\gamma \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \delta_2 / \beta \\ \delta_2 / \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{άρα} \\ \delta_2 / \delta_1 \end{array}$

55. Αφού $\delta_1 = (\alpha, \beta)$ θα έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 / \alpha \\ \delta_1 / \beta \end{array} \right\} \text{άρα} \quad \left. \begin{array}{l} \delta_1 / \alpha \\ \delta_1 / \beta \gamma \end{array} \right\} \text{άρα } \delta_1 / \delta_2$$

56. Αφού $(5\nu + 1, 6\nu + 1) = \delta$, τότε

$$\left. \begin{array}{l} \delta / 5\nu + 1 \\ \delta / 6\nu + 1 \end{array} \right\} \text{άρα } \delta / \nu \quad \left. \begin{array}{l} \delta / 5\nu \\ \delta / 5\nu + 1 \end{array} \right\} \text{άρα } \delta / 1$$

57. α) Αν οι πλευρές του είναι x και y τότε η περίμετρος είναι

$$2x + 2y = 2(x + y)$$

β) Το εμβαδόν του ισούται με $x \cdot y = \text{σύνθετος αφού } x, y \neq 1 \text{ και } 2$.

58. Επαγωγή

$$P_v: (\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3) \dots (2\nu - 1) 2\nu = \text{πολ.} 2^\nu$$

$$P_{\nu+1}: (\nu + 2)(\nu + 3)(\nu + 4) \dots (2\nu - 1) 2\nu (2\nu + 1) 2(\nu + 1) = \text{πολ.} 2^{\nu+1}$$

59. i) Αν ο ένας τουλάχιστον είναι άρτιος, τότε ο 2 θα διαιρεί τον $x \cdot y$.

ii) Θα είναι $x = 2\kappa + 1$ και $y = 2\lambda + 1$, άρα $x^2 + y^2 = (2\kappa + 1)^2 + (2\lambda + 1)^2 = \text{πολ.} 2$.

iii) $x^2 + y^2 = 4\rho + 2$.

60. Επειδή $(\alpha, \beta, \gamma) = 7$, θα είναι $\alpha = 7\kappa$, $\beta = 7\lambda$, $\gamma = 7\mu$ άρα $7[\kappa, \lambda, \mu] = 105 \Leftrightarrow [\kappa, \lambda, \mu] = 15 = 1.3.5$. Άρα θα είναι $\kappa = 1, \lambda = 3, \mu = 5$ ή $\kappa = 5, \lambda = 3, \mu = 1$, δηλαδή $\alpha = 7, \beta = 21, \gamma = 35$ ή $\alpha = 35, \beta = 21, \gamma = 7$.
61. Για $v = 2$ έχουμε $v^3 - 1 = 7$, πρώτος
Για $v > 2$ είναι $v^3 - 1 = (v - 1)(v^2 + v + 1)$, σύνθετος
62. Έστω $\rho_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, $\rho_2 = \frac{\gamma}{\delta}$ με $(\alpha, \beta) = 1$ και $(\gamma, \delta) = 1$ δύο ρίζες της εξίσωσης.
Θα έχουμε $\rho_1 + \rho_2 = \kappa$, $\rho_1 \cdot \rho_2 = \lambda$ άρα $\alpha\delta + \beta\gamma = \kappa\beta\delta$ και $\alpha\gamma = \lambda\beta\delta$ άρα $\alpha\delta = \beta(\kappa\delta - \gamma)$ και $\alpha\gamma = \delta(\lambda\beta)$ άρα $\beta/\alpha\delta$ και $\delta/\alpha\gamma$ άρα β/δ και δ/α άρα β/α , άτοπο
63. Ένα παράδειγμα είναι οι αριθμοί 3, 4 και 6.
Είναι $[3, 4, 6] = 12$ και $(3, 4, 6) = 1$
αλλά $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$.
64. Θα είναι $(30, 72, 54) = 6$. Άρα μπορεί να φτιάξει το πολύ 6 ομοιόμορφες ανθοδέσμες.
65. $[8, 10, 12] = 120$. Άρα ο αριθμός θα είναι $120 + 5 = 125$.
66. $[4, 5, 6] = 60$. Ο μικρότερος αριθμός των μαθητών είναι 60 και μπορεί να είναι οποιοδήποτε πολ/σιο του 60.

67. Για πρώτη φορά αυτό θα συμβεί μετά από $[3, 5] = 15$ ημέρες.

68. Αυτό θα συμβεί μετά από $[2, 3, 5] = 30$ λεπτά.

69. Χρησιμοποιούμε τη σχέση $(\alpha, \beta) [\alpha, \beta] = \alpha \cdot \beta$.

70. Αν $p = 2$ τότε ο $8p - 1$ δεν είναι πρώτος.

Αν $p \geq 3$ τότε θα είναι $p = 3\kappa + 1$ ή $p = 3\kappa + 2$

Για $p = 3\kappa + 1$ έχουμε $8p + 1 = 8(3\kappa + 1) + 1 = 24\kappa + 9 = \text{πολ.3}$.

Για $p = 3\kappa + 2$ έχουμε $8p - 1 = 8(3\kappa + 2) - 1 = 24\kappa + 15$, όχι πρώτος.

71. Ο αριθμός $(n + 1)!$ έχει παράγοντα τον αριθμό 2, άρα είναι άρτιος, επομένως ο $(n + 1)! + 1$ είναι περιττός.

72. Θα είναι $p = 3\kappa$, άτοπο, ή $p = 3\kappa + 1$ ή $p = 3\kappa + 2$. Άρα

$$p^2 = (3\kappa + 1)^2 = 3\lambda + 1 \text{ ή}$$

$$p^2 = (3\kappa + 2)^2 = 3\lambda + 1$$

73. Είναι $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Άρα $x = 1 - 3t$, $y = -1 - 2t$, $t \in \mathbb{Z}$

74. Έχουμε $(x_0, y_0) = (3, -1)$. Άρα $x = 3 + 7t$, $y = -1 - 6t$, $t \in \mathbb{Z}$

75. Έχουμε $(x_0, y_0) = (7, -1)$. Άρα $x = 7 + 5t$, $y = -1 - 3t$, $t \in \mathbb{Z}$. Θέλουμε $x > 0$ και $y > 0$, από όπου έχουμε $t = -1$. Άρα $(x, y) = (2, 2)$.

76. Επειδή $(4, 8) = 2$ και ο 2 δεν διαιρεί τον 3, η εξίσωση είναι αδύνατη

77. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x = -1 + 5t$, $y = 2 - 6t$, $t \in \mathbb{Z}$. Θέλουμε $x < 0$ και $y > 0$, από όπου έχουμε $t \leq 0$.

78. Αν x είναι τα κέρματα των 10 δρχ. και y τα κέρματα των 20 δρχ., θα έχουμε $10x + 20y = 200 \Leftrightarrow x + 2y = 20$, με λύσεις $x = 4 + 2t$, $y = 8 - t$, $t \in \mathbb{Z}$. Θέλουμε $x > 0$ και $y > 0$ από όπου έχουμε $t = -1, 0, 1 \dots 7$.

79. i) Είναι $(71, 50) = 1$ και $1 = 71(-19) - 50(-27)$ άρα μία λύση είναι η $(x_0, y_0) = (-19, -27)$

ii) Ομοίως μία λύση είναι η $(x_0, y_0) = (3, -2)$

iii) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $27x + 21y = 1$. Επειδή $(27, 21) = 3$ και ο 3 δεν διαιρεί τον 1, η εξίσωση είναι αδύνατη.

80. Έστω $\delta = (\alpha, \beta)$ τότε δ/α και δ/β , άρα $\delta/\kappa\alpha$ και $\delta/\lambda\beta$. Επομένως $\delta/\kappa\alpha + \lambda\beta$, άρα η εξίσωση έχει λύση.

81. α) Είναι $(x_0, y_0) = (-2, 2)$. Άρα $x = -2 + 5t$, $y = 2 - 4t$, $t \in \mathbb{Z}$.

β) Θέλουμε $x < 0$ και $y > 0$, από όπου έχουμε $t < \frac{2}{5}$. Άρα $x = -2 + 5t$,

$y = 2 - 4t$, με $t \leq 0$.

- 82.** Αν x είναι οι νίκες και y οι ισοπαλίες της ομάδας, θα έχουμε $3x + y = 38$,
με $x > y > 0$. Είναι $(x_0, y_0) = (1, 35)$, $x = 1 + t$, $y = 35 - 3t$, $t \in \mathbb{Z}$,
 $x > 0$ και $y > 0$, άρα $t = 0, 1, \dots, 11$. Επειδή θέλουμε $x > y$, είναι $t = 9$ ή 10 ή
 11 . Επειδή $y > 5$ τελικά έχουμε $t = 9$ με $x = 10$ και $y = 8$.
- 83.** Αν x το πλήθος των λιρών σε μια πλευρά, τότε όλες οι λίρες θα είναι x^2 . Αν
 $x = 3\kappa$ τότε $x^2 = 9\kappa^2$, δεν είναι της μορφής $3\lambda + 2$ (αφού περίσσεψαν 2 λί-
ρες). Ομοίως για $x = 3\kappa + 1$ ή $x = 3\kappa + 2$. Άρα ο υπάλληλος δεν έλεγε την α-
λήθεια.

ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ
(Κεφάλαιο 4ο: Θεωρία Αριθμών)

*Τα κριτήρια αξιολόγησης που ακολουθούν είναι ενδεικτικά.
Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα διαμόρφωσής τους σε
ενιαία θέματα, επιλογής ή τροποποίησης των θεμάτων,
ανάλογα με τις διδακτικές ανάγκες του συγκεκριμένου
τμήματος στο οποίο απευθύνεται.*

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή

Διδακτική ενότητα:

Θεωρία Αριθμών

ΘΕΜΑ 1ο

- A. α)** Πότε λέμε ότι ένας ακέραιος $\beta \neq 0$ διαιρεί έναν ακέραιο α ;
- β)** Τι ονομάζουμε μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακέραιων α και β , ένας τουλάχιστον από τους οποίους είναι διάφορος του μηδενός;
- γ)** Να αποδείξετε ότι δυο ακέραιοι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους, αν και μόνο αν υπάρχουν ακέραιοι κ, λ τέτοιοι, ώστε $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$.
- B. α)** Να δικαιολογήσετε ότι αν β/α τότε $\kappa\beta/\kappa\alpha$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}^*$.
- β)** Να αποδείξετε ότι $(\alpha, \beta) = (3\alpha + 2\beta, \alpha + \beta)$ όπου α, β ακέραιοι.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι ακέραιοι $\alpha, \beta \neq 0$.

- A.** Αν $(\alpha, \beta) = 3$, ποια μορφή μπορεί να έχει ο ακέραιος α ;
- B.** Αν ισχύει $3\alpha + (-2)\beta = 1$, ποιος είναι ο Μ.Κ.Δ. των α και β ;
- Γ.** Να αποδείξετε ότι $(\alpha\beta, \alpha + \beta)$, αν $(\alpha, \beta) = 1$.
- Δ.** Να αποδείξετε ότι οι α και β διαιρούνμενοι με το κ αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο αν και μόνο αν $\kappa/\alpha - \beta$.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή

Διδακτική ενότητα:

Θεωρία Αριθμών

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω α, β, γ ακέραιοι. Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Αν α/β , τότε $\alpha/\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ .

β) Αν α/β και α/γ , τότε $\alpha/(\beta + \gamma)$.

B. Έστω ότι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι τέσσερις διαδοχικοί ακέραιοι με τη σειρά που δίνονται. Να αποδείξετε ότι:

α) $\beta\gamma - \alpha\delta = 2$

β) $\beta\delta - \alpha\gamma$ περιττός αριθμός.

ΘΕΜΑ 2ο

Εάν $\beta = 3 + \text{πολ}5$, να συνδέσετε κάθε στοιχείο της στήλης A του πίνακα (I) με την αντίστοιχη μορφή του που βρίσκεται στη στήλη B, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη A	Στήλη B
1. β^2	A. $\text{πολ}5$
2. β^3	B. $1 + \text{πολ}5$
3. β^4	Γ. $2 + \text{πολ}5$
	Δ. $3 + \text{πολ}5$
	E. $4 + \text{πολ}5$

Πίνακας (II)

1	2	3

ΘΕΜΑ 3ο

- α)** Να δείξετε ότι αν οι θετικοί ακέραιοι α, β έχουν ίδιο το ψηφίο των μονάδων τους, τότε ο $\alpha - \beta$ διαιρείται με 10.
- β)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός: $(n - 1) n (n + 1) (n^2 + 1)$ διαιρείται με 2 και με 5 για κάθε θετικό ακέραιο n .
- γ)** Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n οι αριθμοί n και n^5 έχουν ίδιο το τελευταίο ψηφίο.

**3ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του μαθητή
στη Θετική Κατεύθυνση**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ (1) με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ και κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

B. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(a-1)x + (2a+1)y + a^2 - 1 = 0$ (1) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό a .

β) Η τιμή του a για την οποία η παραπάνω ευθεία ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$ είναι

A. 2 **B.** -1 **Γ.** 1 **Δ.** 1/2 **E.** καμία

γ) Η τιμή του a για την οποία η παραπάνω ευθεία διέρχεται από το σημείο $(-2, 1)$ είναι

A. 1 **B.** -2 **Γ.** 2 **Δ.** -3 **E.** καμία

δ) Η τιμή του a για την οποία η παραπάνω εξίσωση είναι παράλληλη με τον $y'y$ είναι

A. -1 **B.** 1 **Γ.** -1/2 **Δ.** 2 **E.** καμία

ε) Για $a = 0$ η ευθεία (1) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία

A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\frac{\pi}{3}$ **Δ.** $\frac{2\pi}{3}$ **E.** π

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με

A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ Γ. 4 Δ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ε. 2

β) Τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα. Τότε η τιμή του κ είναι

A. 3 B. $-\frac{5}{2}$ Γ. -2 Δ. $\frac{3}{2}$ Ε. $\frac{2}{3}$

γ) Το μέτρο του $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι:

A. 4 B. -4 Γ. 8 Δ. $\sqrt{24}$ Ε. 16

δ) Να θέσετε σε μια διάταξη, από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, τους αριθμούς $2\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$, $(\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta})^2$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$, $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$, $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

ε) Να εξετάσετε αν υπάρχουν αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $k\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \lambda x$ και ο κύκλος C με εξίσωση

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

A. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται με ένα σημείο τομής το O (0, 0).

B. Αν A είναι το δεύτερο κοινό τους σημείο, να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του OA συναρτήσει του λ.

Γ. Να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται το M κινείται επίσης σ' ένα κύκλο με εξίσωση $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 4ο

A. Δίνεται η διοφαντική εξίσωση $x + 2y = 20$.

α) Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης.

β) Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης.

B. Θέλουμε να ανταλλάξουμε ένα χαρτονόμισμα των 200 δρχ. με κέρματα των 10 και 20 δρχ. (και των δύο ειδών), με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η ανταλλαγή και πόσα κέρματα από κάθε είδος θα έχουμε σε κάθε περίπτωση;

**4ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή
στη Θετική Κατεύθυνση**

ΘΕΜΑ 1ο

- A. α)** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$.
- β)** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

- B. α)** Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$ είναι

A. 16 **B.** 8 **Γ.** 4 **Δ.** 2 **Ε.** 32

- β)** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο $(2, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία

A. $x - 2y + 1 = 0$ **B.** $2x + 3y + 7 = 0$ **Γ.** $x + 2y = 4$

Δ. $4x + 2y + 1 = 0$ **Ε.** $y = x$

- γ)** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο του $M(-1, 2)$. Η εφαπτομένη του στο M έχει εξίσωση

A. $2x - y = 5$ **B.** $x + 2y = -5$ **Γ.** $x + 2y = 5$

Δ. $x - 2y + 5 = 0$ **Ε.** $2x + y = 5$

- δ)** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 9$ και η ευθεία $y = 2$.

A. ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία

B. ο κύκλος και η ευθεία δεν τέμνονται

Γ. ο κύκλος και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία με ίδια τετμημένη

Δ. ο κύκλος και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία με ίδια τεταγμένη

Ε. η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου

- ε)** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο $M(\eta\mu\theta, \sqrt{3})$, $\theta \in (0, 2\pi)$.

Το σημείο M ανήκει στον κύκλο όταν

A. $\theta = \frac{\pi}{3}$ **B.** $\theta = \frac{\pi}{2}$ **Γ.** $\theta = \pi$ **Δ.** $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Ε. δεν υπάρχει τιμή του θ ώστε το M να ανήκει στον κύκλο

ΘΕΜΑ 2ο

A. Στη στήλη Α του πίνακα (I) φαίνονται ζεύγη αριθμών (α , β). Στη στήλη Β υπάρχουν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του α με το β . Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος με το αντίστοιχο υπόλοιπό της, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α	Στήλη Β
	A. - 1
1. (23, 3)	B. 2
2. (- 35, 6)	Γ. 1
3. (- 27, - 5)	Δ. 0
4. (5, 7)	E. 3
	Z. 5

Πίνακας (II)

1	2	3	4

- B.** Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της στήλης Α του πίνακα (I) με τον αριθμό ο οποίος είναι διαιρέτης του για κάθε τιμή του λ ($\lambda \neq 0$) στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 27λ	Α. 2
2. λ^3	Β. 3
3. $\lambda(\lambda + 1)$	Γ. 5
	Δ. λ^2
	Ε. $\lambda^2 + 1$

Πίνακας (II)

1	2	3

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία Α (3, 2) και Β (7, - 4).

- α)** Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ
- β)** Να βρείτε σημεία Ν του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο ΝΑΒ να είναι ορθογώνιο στο Ν.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία A (1, 4) και B (- 1, - 5).

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθυγράμμου τμήματος AB.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία AB.
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία AB.