



2018

**ΜΙΑ «ΧΗΡΑ» ΒΟΗΘΕΙΑΣ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΕ...ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**



**ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**90+ ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ, ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ,
ΚΙΝΗΣΗΣ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ**

**Γιάννης Μήταλης
Θανάσης Δρούγας
Βαλάντης Χάδος
Ξένος Γερμανός
Σπύρος Πάτσος**

εκδόσεις Σ.Ο.Κ.Ο.Ν.



Φέτος, περισσότερο από κάθε άλλη χρονιά κυκλοφορεί η φήμη ότι στις εξετάσεις, θα τεθεί πρόβλημα. Άλλωστε, το σχολικό βιβλίο έχει αρκετά προβλήματα, είτε γεωμετρικά, είτε κίνησης είτε ακόμα και οικονομίας. Θεωρήσαμε καλό, να εντάξουμε στον νέο οδηγό επανάληψης του 2018 μια τελευταία ενότητα με λυμένα προβλήματα. Ένα μικρό αριθμό ενδεικτικών προβλημάτων. Το «μικρός» δεν μπορέσαμε να το τηρήσουμε, καθώς είναι πιο ενδιαφέροντα από εκείνες τις βαριές τεχνικές ξ-ασκήσεις. Οπότε λόγω μεγέθους η ενότητα αυτονομήθηκε και την ανεβάζουμε ξεχωριστά από τον υπόλοιπο οδηγό για το 2018. Γεγονός είναι, ότι τα προβλήματα δεν απαιτούν μεγάλο θεωρητικό υπόβαθρο για την επίλυση τους, μόνο βασικές γνώσεις άλγεβρας, ανάλυσης και γεωμετρίας, αυτό που τα καθιστά ιδανικά ως θέματα εξετάσεων είναι η απαιτούμενη κριτική ικανότητα και η ευρετική ματιά που πρέπει να έχει αναπτύξει ο υποψήφιος. Στην τελική, αυτό θα έπρεπε να είναι και το ζητούμενο από την μαθηματική και κάθε είδους εκπαίδευση. Συνεπώς, το παρόν κατ' ουσίαν είναι μια συλλογή λυμένων προβλημάτων και απέχει από μεθοδολογίες και μπούσουλες. Τα περισσότερα «πατάνε» στο σχολικό βιβλίο, τα υπόλοιπα-πάντα εντός σχολικής ύλης - απλά μας άρεσαν, όπως και κάθε κομμάτι αυτής της ιδιότυπης χήρας βοήθειας που άρχισε ως αστείο και τελικά επιβεβαίωσε ότι τα σοβαρά πράγματα γίνονται μόνο στα αστεία....

Σ.Ο.Κ.Ο.Ν

(Το παρόν συμπληρώνει και δεν υποκαθιστά το σχολικό βιβλίο)

-«Υλικό σημείο Α κινείται σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ που ονειρεύεται να γίνει τετράγωνο και η τετμημένη του μεταβάλλεται με τον ίδιο ρυθμό που μεταβάλλεται η τεταγμένη του την ίδια εκείνη χρονική στιγμή που όταν το υλικό σημείο Ε κινείται στην διαγώνιο δίνει στο μέσο της για το τρίγωνο ΑΒΕ το μέγιστο εμβαδό και -προσοχή- την ελάχιστη περίμετρο. Α, να μην ξεχάσω, η κορυφή Δ έχει ταχύτητα ίση με τα 2/3 του κόστους παραγωγής μιας εργασιακής μονάδας που κατασκευάζει ομπρέλες κοψοχρονιά στο Νεπάλ και είναι ανάλογη του ελληνικού χρέους το τρέχον έτος πριν αρχίσει δίαιτα για να ελαφρύνει καθώς ο καναπές με το ζόρι στρίβει στον διάδρομο.....»

-«Τι κάνεις εκεί;»

-«Προβληματίζομαι!!!»

Ήταν κάποιος που νόμιζε
ότι ήταν αστείος....



ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΝΑΤΤΑΡΑΧΘΕΙ ΚΑΙ ΝΑ ΔΙΑΝΕΜΗΘΕΙ ΕΛΕΥΘΕΡΑ

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Μαθηματικά Θετικού προσανατολισμού, Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης.Ο.Ε.Δ.Β
2. Γενικά μαθηματικά θέματα 1^η δέσμη, Ι. Μαντάς (τόμοι 1-5) ,Εκδόσεις Μαντά
3. Προβλήματα μαθηματικών Γ Λυκείου. Στεργίου, Νάκης ,Εκδόσεις Σαββάλα
4. Προβλήματα Γ Λυκείου ,Ξένος. Θ. ,Εκδόσεις Ζήτη
5. Γ και Δ θέματα με βάση το σχολικό, Μιχαήλογλου, Πατσιμάς, Ραμαντάνης, Τόλης, Εκ. Μαυρίδη
6. Μαθηματικά Γ Λυκείου, Σκομπής Γ., Εκδόσεις Σαββάλα
7. Μαθηματικά Γ Λυκείου, Μαυρίδης Γ., Εκδόσεις Μαυρίδη
8. 35 διαγωνίσματα και 150 γενικά θέματα , Πατήλας Χ. Εκδόσεις Μαυρίδη
9. Οδηγός επανάληψης στα μαθηματικά Γ λυκείου, Χ. Πατήλας, εκδόσεις Κωστόγιαννος
10. Θέματα για πανελλήνιες εξετάσεις 1^{ης} δέσμης, Σάκης Λιπορδέζης
11. Επαναληπτικά διαγωνίσματα, Μπαιλάκης Σ.Γ., Εκδόσεις Σαββάλα
12. Μαθηματικά Γ Λυκείου, Αρχείο Σ.Ο.Κ.Ο.Ν, Αρχείο ΕΜΕ, Κ.Ε.Ε, Αρχείο θεμάτων πανελλαδικών
13. Συλλογή συνδυαστικών ασκήσεων ,μαθηματικά της 1^{ης} δέσμης ,Αβραμόπουλος, Θεοδωρίδης
14. Παράγωγοι συναρτήσεων, Θ.Ν.Καζαντζή, Εκδόσεις Σπηλιώτη
15. Προβλήματα, Θ.Ν.Καζαντζή ,Ε.Μήτσιου, Εκδόσεις Μαθηματική βιβλιοθήκη
16. 100 θέματα μαθηματικών Γ λυκείου ,Κανακης Α. Εκδόσεις Μαυρίδη
17. Οδός μαθηματικής σκέψης ,Θωμαΐδης, Ρίζος ,Εκδόσεις Μαυρίδη
18. Μεθοδολογία για ασκήσεις και προβλήματα μαθηματικών,Καλομητίνη Σπ., Εκδόσεις Σμίλη
19. Θέματα Abitur, AHSME,SAT II, Baccalauréat,IGSCE
20. Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα,V.M. TIKHOMIROV, εκδόσεις Κάτοπτρο
21. Τριγωνομετρικά λουκούμια, Ελι Μαορ, εκδόσεις Κάτοπτρο
22. Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions, Alfred S. Posamentier
23. Bad problems in Calculus, A.G .Drolkun
24. The art of problem posing, Brown, Walter
25. A Problem book in mathematical analysis, G.N Berman
26. The Stanford mathematics problem book,Polya Kilpatrick
27. Wheels, Life and Other Mathematical Amusements, Martin Gardner, 1983
28. Problems in calculus of one variable, I.Marón,Mir
29. Problems in mathematical analysis, Demidovich, Mir
30. Problems in Algebra ,T.Andreesku, Z.Feng

Τα σχήματα επιμελήθηκε ο γάτος Γκάρφιλντ ενώ τους γραμμοκώδικες (qr-code) δημιούργησε ο Γκούφυ σε συνεργασία με τον σουπερ Γκούφυ αλλά έβαλε και ο Πάτσης το χέρι του. Διορθώσεις και τελική επιμέλεια έκαναν ο Αχιλλέας και η χελώνα.



Ρετσίνι. (ουσ.) Έκκριση υδρογονανθράκων πολλών φυτών,ειδικά των κωνοφόρων δένδρων. Διακρίνεται από άλλες υγρές ενώσεις που βρίσκονται μέσα στα φυτά ή εκκρίνονται από φυτά, όπως οι φυτικοί χυμοί, κόμμεα, ή κολλώδεις ουσίες. Σύμφωνα με πολιτικό άνδρα τεραστίου βεληνεκούς κηλιδώνει στους αρίστους πάσης φύσεως.Αν λοιπόν το καμάρι σας, έρθει με τον σχολικό έλεγχο φουλ στα εικοσάρια βάλτε τον μπουγάδα γιατί το ρετσίνι αν ξεραθεί δύσκολα βγαίνει....



ΣΥΝΟΨΗ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ρυθμός μεταβολής

Ορισμός: Έστω δυο μεταβλητά μεγέθη x, y τα οποία συνδέονται με την σχέση $y=f(x)$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο x_0 τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Προβλήματα κίνησης

Είναι γνωστό ότι, αν η συνάρτηση θέσης ενός σώματος που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση είναι η $S(t)$, τότε η παράγωγος $S'(t)$ είναι η **ταχύτητα** του σώματος. Η ταχύτητα που ονομάζεται και **ρυθμός μεταβολής της θέσης ως προς τον χρόνο** φανερώνει πόσο γρήγορα αλλάζει η θέση του σώματος ανά μονάδα χρόνου. Γι' αυτό η μονάδα μέτρησης της ταχύτητας είναι:

$$\left(\frac{\text{μονάδα μέτρησης της}}{\text{ταχύτητας}} \right) = \frac{\text{μονάδα μέτρησης της θέσης}}{\text{μονάδα μέτρησης του χρόνου}}.$$

Αν π.χ. η θέση μετριέται σε m και ο χρόνος σε sec, τότε η ταχύτητα μετριέται σε m/sec. Συνήθως συμβολίζουμε την ταχύτητα με το γράμμα v . Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε επομένως: $v(t) = S'(t)$, ή χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό Leibniz: $v(t) = \frac{dS(t)}{dt}$.

Για παράδειγμα, η ίδια ταχύτητα είναι ένα φυσικό μέγεθος που μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς τον χρόνο, δηλαδή η παράγωγός της, ονομάζεται επιτάχυνση, και φανερώνει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου. Γι' αυτό η μονάδα μέτρησης της επιτάχυνσης είναι:

$$\left(\frac{\text{μονάδα μέτρησης της}}{\text{επιτάχυνσης}} \right) = \frac{\text{μονάδα μέτρησης της ταχύτητας}}{\text{μονάδα μέτρησης του χρόνου}}.$$

Αν π.χ. η ταχύτητα μετριέται σε m/sec (και ο χρόνος προφανώς σε sec) τότε η επιτάχυνση μετριέται σε $\frac{\text{m/sec}}{\text{sec}}$, δηλαδή σε m/sec². Συνήθως, συμβολίζουμε την επιτάχυνση με το γράμμα a .

Είναι επομένως: $a(t) = v'(t)$, ή χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό Leibniz: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$.

Παρατηρούμε ότι, αφού $a'(t) = v(t)$ και $v(t) = S'(t)$, η επιτάχυνση είναι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης θέσης. $a(t) = v'(t) = S''(t)$. Από τις συναρτήσεις θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή καθενός από αυτά τα μεγέθη οποιαδήποτε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 , απλά θέτοντας στον τύπο της αντίστοιχης συνάρτησης όπου t το t_0 . Η ταχύτητα ή και η επιτάχυνση μπορούν να είναι αρνητικές.

Αρνητική ταχύτητα φανερώνει κίνηση προς τα πίσω.

-Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 $v(t_0) = f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.

-**Μέση ταχύτητα** ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι το χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$

$$\bar{v}_{[t_1, t_2]} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$



-Η επιτάχυνση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι $a(t) = v'(t)$, $a(t) = x''(t)$

Έστω ότι η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα είναι $x = x(t)$ και η ταχύτητά του είναι $v(t)$, τη χρονική στιγμή t .

Ισχύουν:

1. Το κινητό είναι ακίνητο όταν $v(t) = 0$
2. Το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση όταν $v(t) > 0$
3. Το κινητό κινείται στην αρνητική κατεύθυνση όταν $v(t) < 0$
4. Η απόσταση που διανύει το κινητό από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 με την προϋπόθεση ότι έχει θετική ή αρνητική κατεύθυνση στο διάστημα χρόνου $[t_1, t_2]$ είναι

$$S = |x(t_2) - x(t_1)|$$

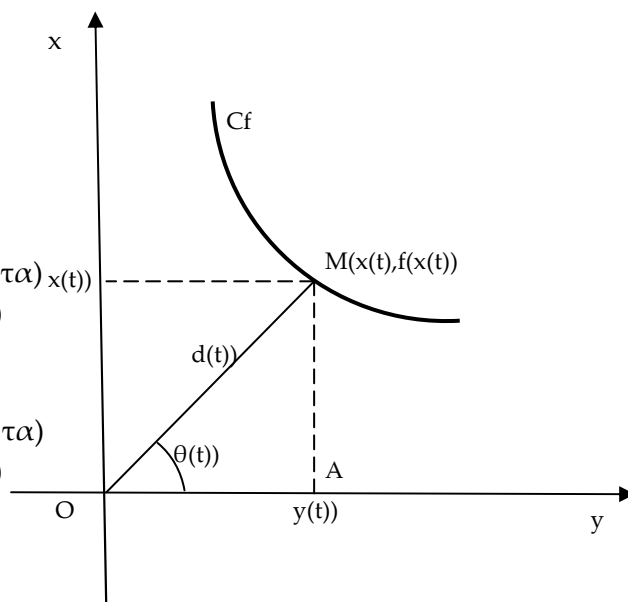
Κίνηση υλικού σημείου πάνω σε καμπύλη

Αν ένα υλικό σημείο $M(x, y)$ κινείται πάνω σε μια καμπύλη με εξίσωση $y = f(x)$, τότε η τετμημένη του x καθώς και η τεταγμένη του y είναι συναρτήσεις του χρόνου.

$$x = x(t), y = y(t)$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, (ταχύτητα) $x'(t)$ με την οποία κινείται (πλησιάζει ή απομακρύνεται) από την αρχή των αξόνων είναι $x'(t)$.

- Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$, (ταχύτητα) με την οποία κινείται (πλησιάζει ή απομακρύνεται) από την αρχή των αξόνων είναι $y'(t)$.



- Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης $d(t)$ ($d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$) είναι

$$d'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta(t)$ που σχηματίζει η OM με τον x' υπολογίζεται ως εξής: $\varphi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$ Παραγωγίζουμε ως προς t :

$$(\varphi\theta(t))' = \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)', \Leftrightarrow \frac{\theta'(t)}{\sin^2 t} = \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)', \Leftrightarrow (\varphi^2 \theta(t) + 1) \theta'(t) = \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)'$$

- Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού OMA ($E(t) = \frac{1}{2} x(t)y(t)$)

$$E'(t) = \frac{1}{2} (x'(t)y(t) + x(t)y'(t))$$



• Ο ρυθμός μεταβολής που αφορά εφαπτόμενη
Όταν σε ένα πρόβλημα είναι σχετικό με την
εφαπτομένη της Cf σε ένα μεταβλητό σημείο
 $M(a(t), f(a(t)))$ τότε γράφουμε την εξίσωση της
εφαπτομένης σε ένα τυχαίο σημείο με
τετμημένη $x=a$: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

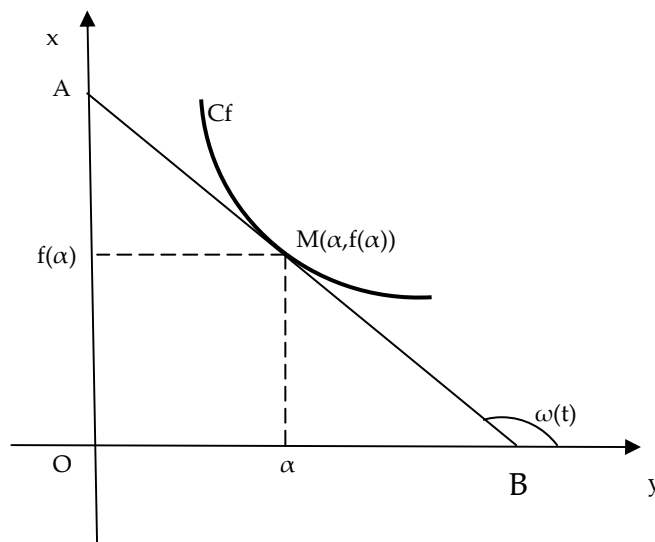
Έτσι:

-Για την γωνία ω ισχύει $\epsilon\phi\omega = f'(a)$, οπότε
την χρονική στιγμή t είναι:

$$\epsilon\phi\omega(t) = f'(a(t))$$

-Για την τετμημένη x του σημείου στο οποίο
η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x' ισχύει:

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$



Άρα, την χρονική στιγμή t είναι $x(t) = a(t) - \frac{f(a(t))}{f'(a(t))}$

Στα γεωμετρικά προβλήματα και ιδιαίτερα στα προβλήματα κίνησης υλικού σημείου, καλό είναι να έχετε φρεσκάρει τις γνώσεις σας από τα μαθηματικά της κατεύθυνσης β λυκείου

ΕΥΘΕΙΑ

• **Εξίσωση γραμμής C** ονομάζεται μια εξίσωση της μορφής $f(x, y) = 0$ (με δύο μεταβλητές x, y) όταν για κάθε σημείο $M(x_0, y_0)$ ισχύει η ισοδυναμία

$$M(x_0, y_0) \in C \Leftrightarrow f(x_0, y_0) = 0.$$

• **Γωνία ω που σχηματίζει μια ευθεία ϵ με τον άξονα x' :**

- Ισχύει πάντα $0 \leq \omega \leq \pi$
- Επίσης $\omega = 0 \Leftrightarrow \epsilon // x'$
- $\lambda = \epsilon\phi\omega = \text{συντελεστής διεύθυνσης της } \epsilon$ (εφόσον $\epsilon \not\parallel y'y$)

• Αν $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της ϵ με $x_1 \neq x_2$, τότε $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

• Αν οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τότε $\epsilon_1 // \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $\epsilon_1 \perp \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

• **Αν μια ευθεία ϵ διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και**

- **έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$**
- **είναι κατακόρυφη ($\epsilon \parallel y'y$), τότε έχει εξίσωση $x = x_0$.**

• Αν για μια ευθεία ϵ έχουμε $\epsilon \not\parallel y'y$, τότε η ϵ έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \beta$ (λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ϵ και β η τεταγμένη του κοινού σημείου της με τον άξονα $y'y$). Αν $\epsilon \parallel y'y$, τότε η ϵ έχει εξίσωση της μορφής $x = x_0$ (x_0 είναι η κοινή τετμημένη όλων των σημείων της ϵ).

• **Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας:** $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

• Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:

- παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$



- κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$
- Απόσταση σημείου $M(x_0, y_0)$ από ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Εμβαδόν τριγώνου με κορυφές τα σημεία A, B, Γ : $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})|$

ΚΥΚΛΟΣ

Εξίσωση κύκλου ακτίνας ρ :

- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ (κέντρο $K(x_0, y_0)$)
- $x^2 + y^2 = \rho^2$ (κέντρο $O(0,0)$)
- Μοναδιαίος κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$ (κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$)

- Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ (κέντρο $O(0,0)$) στο σημείο του $A(x_1, y_1)$: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

- Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο, αν και μόνο αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

Στην περίπτωση αυτή το κέντρο είναι $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Ορισμός παραβολής C , με εστία E και διευθετούσα δ : $M \in C \Leftrightarrow (ME) = d(M, \delta)$

- Εξίσωση παραβολής C :
 - με διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$ και εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$: $y^2 = 2px$
 - με διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$ και εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$: $x^2 = 2py$
- Εξίσωση εφαπτομένης παραβολής C στο σημείο της $A(x_1, y_1)$:
 - Αν $C: y^2 = 2px$, τότε $\varepsilon: yy_1 = p(x + x_1)$
 - Αν $C: x^2 = 2py$, τότε $\varepsilon: xx_1 = p(y + y_1)$
- Ανακλαστική ιδιότητα $\phi_1 = \phi_2$

ΕΛΛΕΙΨΗ

Ορισμός έλλειψης C με εστίες E', E : $M \in C \Leftrightarrow (ME') + (ME) = 2a > (E'E)$

- $A'A$ μεγάλος άξονας
- $B'B$ μικρός άξονας
- A, A', B, B' κορυφές της έλλειψης
- Μήκος μεγάλου άξονα: $(A'A) = 2a$
- Μήκος μικρού άξονα: $(B'B) = 2b$
- Εστιακή απόσταση: $(E'E) = 2c$
- Ισχύει $a^2 = b^2 + c^2$
- Εκκεντρότητα $\varepsilon: 0 < \varepsilon = \frac{c}{a} < 1$
- Εξίσωση έλλειψης με εστίες $E'(-c, 0), E(c, 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



- Εξίσωση έλλειψης με εστίες $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$: $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$
- Εξίσωση εφαπτομένης έλλειψης C : $\frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{\kappa^2} + \frac{yy_1}{\lambda^2} = 1$$

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Υπερβολή C με εστίες E' και E : $M \in C \Leftrightarrow |(ME') - (ME)| = 2\alpha$, $2\alpha < (E'E) = 2\gamma$

- Εξίσωση υπερβολής με εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$
 - Κορυφές: $A(\alpha, 0)$, $A'(-\alpha, 0)$
 - Ασύμπτωτες: $\varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x$, $\varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{\alpha}x$
 - Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$
 - Ορθογώνιο βάσης: Το ορθογώνιο $KLMN$ με $K(\alpha, \beta)$, $L(\alpha, -\beta)$, $M(-\alpha, -\beta)$, $N(-\alpha, \beta)$
 - Εξίσωση εφαπτομένης στο $P(x_1, y_1)$: $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
- Εξίσωση υπερβολής με εστίες $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$: $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$
 - Κορυφές: $A(0, \alpha)$, $A'(0, -\alpha)$
 - Ασύμπτωτες: $\varepsilon_1: y = \frac{\alpha}{\beta}x$, $\varepsilon_2: y = -\frac{\alpha}{\beta}x$
 - Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$
 - Ορθογώνιο βάσης: Το ορθογώνιο $KLMN$ με $K(\beta, \alpha)$, $L(-\beta, \alpha)$, $M(-\beta, -\alpha)$, $N(\beta, -\alpha)$
 - Εξίσωση εφαπτομένης στο $P(x_1, y_1)$: $\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$

ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΠΟΥ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΔΕΝ
ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ;;





ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

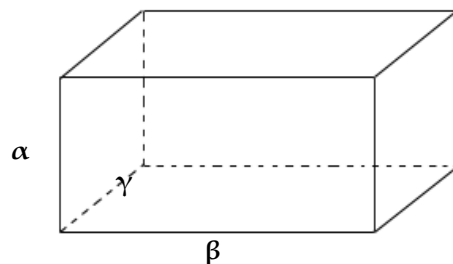
(Το πιθανότερο είναι σε εκφώνηση θέματος πανελλαδικών να δοθούν, αλλά με την επιτροπή ποτέ δεν ξέρεις....)

- Εμβαδόν ολικής επιφάνειας ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου

$$E = 2(\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)$$

- Όγκος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου

$$V = \alpha\beta\gamma$$

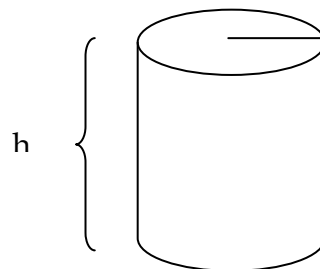


- Εμβαδόν ολικής επιφάνειας κυλίνδρου

$$E = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

- Όγκος κυλίνδρου

$$V = \pi r^2 h$$

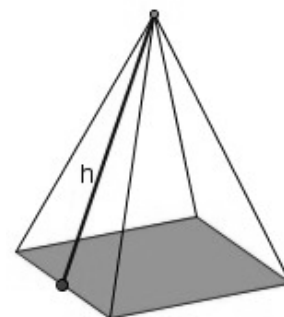


- Εμβαδόν ολικής επιφάνειας πυραμίδας

$$E = \frac{1}{2} \text{περίμετρος βάσης} \cdot \text{παράπλευρο ύψος} + E_{\text{βάσης}}$$

- Όγκος πυραμίδας

$$V = \frac{1}{3} E_{\text{βάσης}} \cdot \text{ύψος}$$

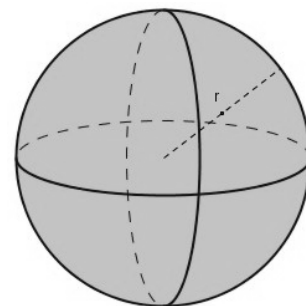


Εμβαδόν Σφαίρας

$$E = 4\pi r^2$$

- Όγκος Σφαίρας

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



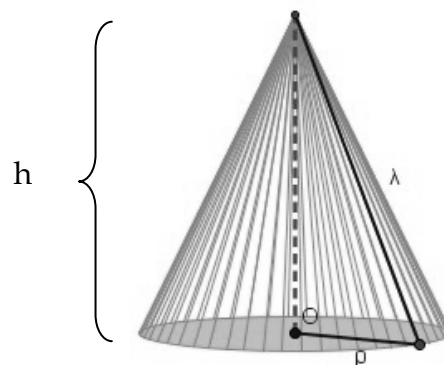
- Εμβαδόν ολικής επιφάνειας κώνου

$$E = \pi r l + \pi r^2$$

- Όγκος κώνου

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Οι υπόλοιποι τύποι από την γεωμετρία που θα χρειαστούμε δίνονται καθοδόν στην λύση των προβλημάτων





Προβλήματα οικονομίας

Όσο μεγαλώνει η παραγωγή ενός εργοστασίου μεγαλώνει και το κόστος λειτουργίας του, αφού αυξημένη παραγωγή σημαίνει περισσότερες πρώτες ύλες, περισσότερες εργατοώρες, κ.λπ. Επομένως το **κόστος παραγωγής** $C(x)$ ενός συγκεκριμένου προϊόντος είναι συνάρτηση της ποσότητας x που πρόκειται να παραχθεί. Η συνάρτηση $C(x)$ ονομάζεται **συνάρτηση κόστους**.

Αν υποθέσουμε ότι το εργοστάσιο πουλάει ολόκληρη την παραγωγή του τότε είναι φανερό ότι τα **έσοδα** $E(x)$ είναι επίσης συνάρτηση του x , η οποία ονομάζεται **συνάρτηση εσόδων**. Η **συνάρτηση κέρδους** $K(x) = E(x) - C(x)$ δίνει τα κέρδη που προκύπτουν για το εργοστάσιο από την παραγωγή ποσότητας x του συγκεκριμένου προϊόντος.

Φυσικά, οι συναρτήσεις κόστους και εσόδων παίρνουν μόνο θετικές τιμές. Όμως η συνάρτηση κέρδους μπορεί να πάρει τιμές με οποιοδήποτε πρόσημο. Αν η τιμή της συνάρτησης κέρδους για παραγωγή ποσότητας x του προϊόντος είναι **αρνητική** τότε αυτό σημαίνει ότι το κόστος υπερβαίνει τα έσοδα και επομένως η **παραγωγή είναι ζημιογόνα**. Άρα αρνητικό κέρδος σημαίνει ζημιά.

Συχνά χρησιμοποιούνται και οι συναρτήσεις **μέσου κόστους, μέσων εσόδων και μέσου κέρδους**. Που δείχνουν αντίστοιχα το κόστος, τα έσοδα και το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος. Αν για την παραγωγή x προϊόντων το κόστος είναι $C(x)$ δρχ. τότε προφανώς η παραγωγή καθενός προϊόντος κοστίζει $\frac{C(x)}{x}$ ευρώ.

Άρα η **συνάρτηση μέσου κόστους** ορίζεται από τον τύπο $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$.

Ομοίως ορίζονται οι συναρτήσεις **μέσων εσόδων και μέσου κέρδους**:

$$\bar{E}(x) = \frac{E(x)}{x}, \quad \bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

Παρατηρούμε, ότι αν π.χ. τα παραγόμενα προϊόντα είναι αυτοκίνητα τότε το x μπορεί να πάρει μόνο θετικές ακέραιες τιμές. Ωστόσο στην πράξη θεωρούμε ότι το x παίρνει σε κάθε περίπτωση πραγματικές τιμές αφού έτσι διευκολύνεται πολύ η μελέτη των συναρτήσεων κόστους, εσόδων και κέρδους. Γεγονός που δεν βλάπτει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Προφανώς το ενδιαφέρον σημείο στις συναρτήσεις κόστους, εσόδων και κέρδους βρίσκεται στις μεταβολές που παρουσιάζουν οι συναρτήσεις αυτές όταν μεταβάλλεται η ποσότητα x του παραγόμενου προϊόντος.

Για παράδειγμα, για να εξετάσει ο διευθυντής ενός εργοστασίου κατασκευής αυτοκινήτων αν πρέπει να αυξήσει την παραγωγή πρέπει να ελέγξει ποιο αντίκτυπο θα έχει αυτή η αύξηση στις συναρτήσεις κόστους και εσόδων.

Άρα, έχει ενδιαφέρον ο ρυθμός μεταβολής των συναρτήσεων αυτών ως προς την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κόστους $C(x)$ ονομάζεται **οριακό κόστος**: $C'(x)$, και φανερώνει την τάση μεταβολής του κόστους όταν μεταβάλλεται η παραγωγή. **Θετικό οριακό κόστος** σημαίνει **αύξηση του κόστους** ενώ **αρνητικό οριακό κόστος** σημαίνει **μείωση του κόστους**. Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται τα **οριακά έσοδα** και το **οριακό κέρδος**.

Αλλά, όλα τα παραπάνω
τα ήξερες, είναι η θεωρία.
Δες τα παρακάτω λυμένα
προβλήματα





ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Η Διδώ έχει ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου και το περιφράξε με συρματοπλέγμα μήκους 100 μέτρων. Έστω x είναι η μια διάσταση του ορθογωνίου. Α.ι. Να εκφράσετε το εμβαδό $E(x)$ του ορθογωνίου συναρτήσει του x .

Α.ii. Η Διδώ γνωρίζει ότι το εμβαδό του χωραφιού της, είναι το μέγιστο δυνατό που μπορεί να περιφραχτεί με 100 μέτρα συρματοπλέγμα.

Ποιες είναι οι διαστάσεις του χωραφιού;

Β. Τώρα, που βρήκατε ότι οι διαστάσεις του χωραφιού είναι 625 τετραγωνικά μέτρα σας πληροφορώ ότι η Διδώ διαθέτει άλλο ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου με το ίδιο εμβαδό.

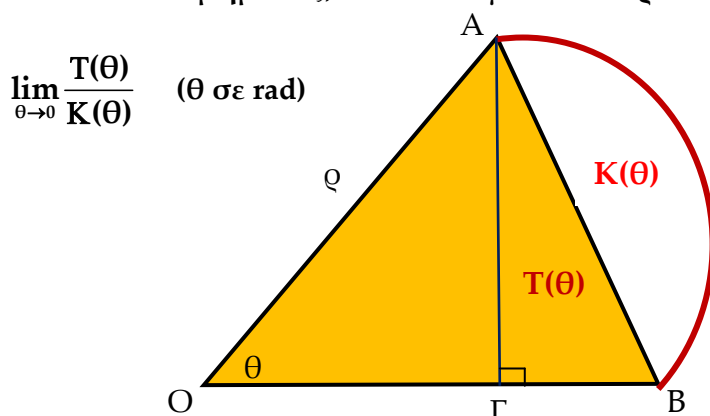
Αν a είναι η μια διάσταση του δευτέρου ορθογωνίου χωραφιού.

Β.ι. Να εκφράσετε το μήκος M του συρματοπλέγματος που χρειάζεται η Διδώ για να περιφράξει και το δεύτερο χωράφι συναρτήσει του a .

Β.ii. Η Διδώ περιφράξε και το δεύτερο οικοπέδο και γνωρίζει ότι οι διαστάσεις του είναι τέτοιες ώστε, το περιφράξε με το ελάχιστο μήκος περιφράξης.

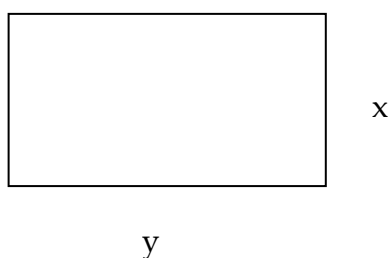
Ποιες είναι οι διαστάσεις του δεύτερου οικοπέδου;

Γ. Bonus. Η Διδώ τέλειωσε με τις περιφράξεις και πείνασε, αγόρασε το παρακάτω κομμάτι πίτσα (δείτε σχήμα). Αν $T(\theta)$ το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ και $K(\theta)$ το εμβαδό του κυκλικού τμήματος, να υπολογίσετε το όριο:



Λύση

Α.ι. Αν x είναι μια διάσταση του ορθογωνίου και y η άλλη τότε θα ισχύει:



$$\text{Περίμετρος} = 2x + 2y = 100 \quad \text{ή}$$

$$2(x + y) = 100 \Leftrightarrow x + y = 50 \Leftrightarrow y = 50 - x$$

$$\text{Προφανώς } y > 0, x > 0 \quad \text{ή} \quad 50 - x > 0, x > 0 \quad \text{ή} \quad 0 < x < 50$$

Συνεπώς το εμβαδό του ορθογωνίου είναι :

$$E = xy = x(50 - x) = 50x - x^2 \quad \text{τελικά} \quad E(x) = 50x - x^2, x \in (0, 50)$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Αναγνωρίζω το μέγεθος του οποίου θέλω να κατασκευάσω την αντίστοιχη συνάρτηση.
2. Κατασκευάζω σχήμα αν είναι απαραίτητο.
3. Δίνω ονόματα σε μεταβλητές και τα σημειώνω στο σχήμα.
4. Βρίσκω τη σχέση μεταξύ μεταβλητών κάνοντας χρήση κυρίως
 - γεωμετρικών τύπων (εμβαδών, όγκων),
 - θεωρημάτων (Πυθαγόρειο, Θαλή, κ.λπ.),
 - ιδιοτήτων (όμοια τρίγωνα, μετρικές σχέσεις, ανάλογα ποσά).
5. Τελικά εκφράζω όλα τα μεγέθη ως συνάρτηση μόνο μιας μεταβλητής (συνήθως x).



A.ii.θα εξετάσουμε πότε το εμβαδό μεγιστοποιείται. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα,

$$E'(x) = 50 - 2x$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 25$$

x	0	25	50
$E'(x)$	+		-
$E(x)$		↗	↘

Μέγιστο

Άρα το εμβαδό μεγιστοποιείται όταν $x=25, y=25$ με μέγιστο εμβαδό $E(25) = 50 \cdot 25 - 25^2 = 625$ τετραγωνικά μέτρα.

B.i. Αν α είναι μια διάσταση του δεύτερου ορθογωνίου και β η άλλη τότε θα ισχύει ότι το εμβαδό του ορθογωνίου είναι :

$$E = \alpha\beta = 625 \text{ ή } \beta = \frac{625}{\alpha}, \alpha, \beta > 0$$



α

β

Το μήκος M του συρματοπλέγματος που χρειάζεται η Διδώ για να περιφράξει και το δεύτερο χωράφι είναι

$$M = 2\alpha + 2\beta = 2\alpha + 2\frac{625}{\alpha} = 2\left(\alpha + \frac{625}{\alpha}\right)$$

Δηλαδή,

$$M(\alpha) = 2\left(\alpha + \frac{625}{\alpha}\right), \alpha > 0$$

$$\text{Bii. } M'(\alpha) = \left(2\left(\alpha + \frac{625}{\alpha}\right)\right)' = 2\left(1 - \frac{625}{\alpha^2}\right) = 2\left(\frac{\alpha^2 - 625}{\alpha^2}\right)$$

$$M'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\alpha^2 - 625}{\alpha^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 25$$

α	0	25	$+\infty$
$M'(\alpha)$	-		+
$M(\alpha)$	↘		↗

Ελάχιστο

Άρα, η περίμετρος ελαχιστοποιείται όταν $\alpha=25, \beta=25$ με ελάχιστο μήκος περιμέτρου

$$M(25) = 2\left(25 + \frac{625}{25}\right) = 100 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

ΣΚΟΠΟΣ ΕΙΝΑΙ ΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΟΥΜΕ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Η ΟΠΟΙΑ ΝΑ ΕΚΦΡΑΖΕΙ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΟΠΟΙΟΥ ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ Ή ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

1. Διαβάζω προσεκτικά το πρόβλημα
2. Σχεδιάζω σχήμα.
3. Σημειώνω τις σχέσεις μεταξύ σταθερών – μεταβλητών
- από τα δεδομένα της υπόθεσης ή
- από τις γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος (θεωρήματα, κ.λπ)
4. Αναγνωρίζω ποιού μεγέθους ζητάω το μέγιστο ή το ελάχιστο
5. Κατασκευάζω συνάρτηση που εκφράζει το μέγεθος αυτό
8. υπολογίζω το ακρότατο της συνάρτησης αυτής

Προσοχή, αν μου ζητάει τη θέση ακρότατου x_0 , την τιμή του ακροτάτου $f(x_0)$ ή το σημείο ακροτάτου $(x_0, f(x_0))$



Το ηθικό δίδαγμα είναι ότι από όλα τα ορθογώνια με συγκεκριμένη περίμετρο αυτό με το μέγιστο εμβαδό είναι το τετράγωνο ενώ από όλα τα ορθογώνια με συγκεκριμένο εμβαδό αυτό με την ελάχιστη περίμετρο είναι πάλι.. το τετράγωνο.

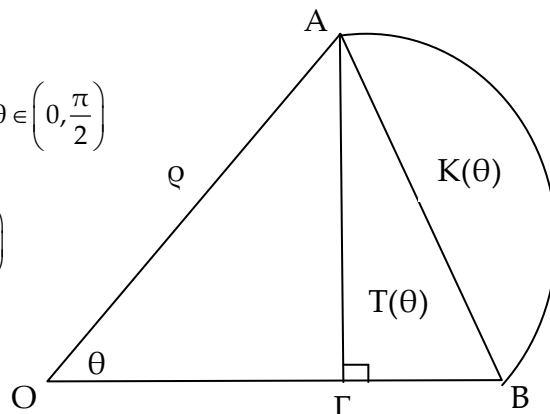
Γ. Το εμβαδό του τριγώνου είναι:

$$T(\theta) = \frac{1}{2}(AG)(BG) = \frac{1}{2}(\eta\mu\theta)(\rho - \rho\sigma\eta\theta) = \frac{1}{2}\rho^2\eta\mu\theta(1 - \sigma\eta\theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Το εμβαδό του κυκλικού τομέα $K(\theta)$

$$K(\theta) = \frac{\pi\rho^2\theta}{2\pi} - (OAB) = \frac{\rho^2\theta}{2} - \frac{1}{2}\rho^2\eta\mu\theta = \frac{1}{2}\rho^2(\theta - \eta\mu\theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

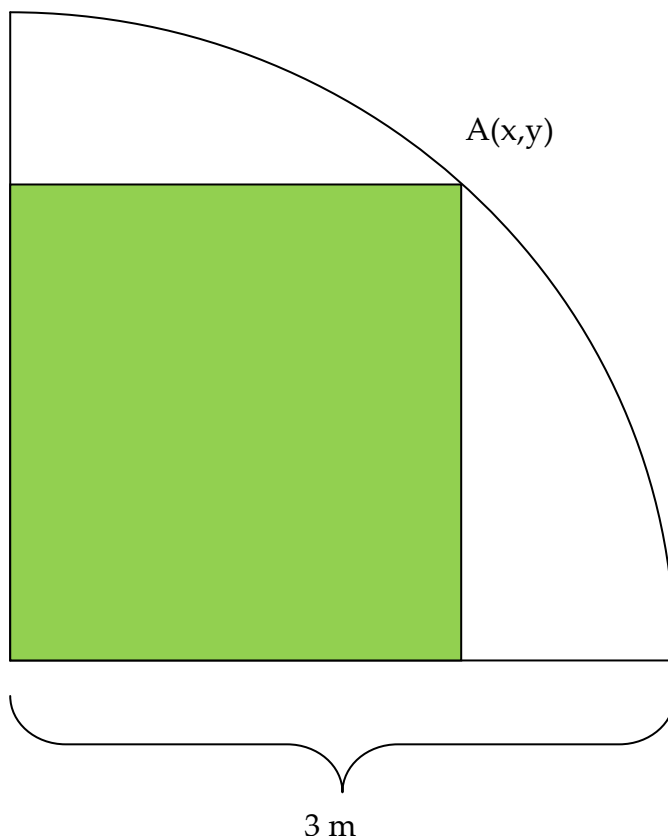
Το ζητούμενο όριο είναι



$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{T(\theta)}{K(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\rho^2\eta\mu\theta(1 - \sigma\eta\theta)}{\frac{1}{2}\rho^2(\theta - \eta\mu\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\theta(1 - \sigma\eta\theta)}{\theta - \eta\mu\theta} \stackrel{D.H.Hospital}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu\theta(1 - \sigma\eta\theta))'}{(\theta - \eta\mu\theta)'} = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu\theta)'(1 - \sigma\eta\theta) + \eta\mu\theta(1 - \sigma\eta\theta)'}{1 - \sigma\eta\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sigma\eta\theta(1 - \sigma\eta\theta) + \eta\mu\theta\eta\mu\theta}{1 - \sigma\eta\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sigma\eta\theta - \sigma\eta^2\theta + \eta\mu^2\theta}{1 - \sigma\eta\theta} = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sigma\eta\theta - \sigma\eta^2\theta + 1 - \sigma\eta^2\theta}{1 - \sigma\eta\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-2\sigma\eta^2\theta + \sigma\eta\theta + 1}{1 - \sigma\eta\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\eta\theta)(1 + 2\sigma\eta\theta)}{1 - \sigma\eta\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} (1 + 2\sigma\eta\theta) = 3 \end{aligned}$$

2. Μια παραλλαγή...

Ο Μήτσος έχει ένα κήπο σε σχήμα τεταρτοκύκλιου με ακτίνα κύκλου 3 μέτρα και σκοπεύει να φυτέψει ένα παρτέρι με γλαδιόλες σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο Μήτσος θέλει το παρτέρι του να έχει την μέγιστη περίμετρο. Να βρεθούν οι συνταγμένες του σημείου Α.





Λύση

Για $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{3} \Leftrightarrow y = 3\eta\mu\theta \quad (1)$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = 3\sigma\upsilon\nu\theta \quad (2)$$

Η περίμετρος είναι

$$\begin{aligned} \text{Περίμετρος} &= 2y + 2x = 2(y + x) = \\ &= 2(3\eta\mu\theta + 3\sigma\upsilon\nu\theta) = 6(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta) \end{aligned}$$

Αν η συνάρτηση που δίνει την περίμετρο συναρτήσει του θ είναι:

$$\Pi(x) = 6(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η $\Pi(x)$ είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ως πράξεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Παραγωγίζουμε.

$$\Pi'(x) = (6(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta))' = 6(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)$$

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Η $\Pi'(x)$ είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και μηδενίζεται μόνο στο

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ άρα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα } \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right),$$

Θα βρούμε το πρόσημο με επιλεγμένες τιμές. Έτσι

$$\frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) : \Pi'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - \eta\mu\frac{\pi}{6}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) > 0$$

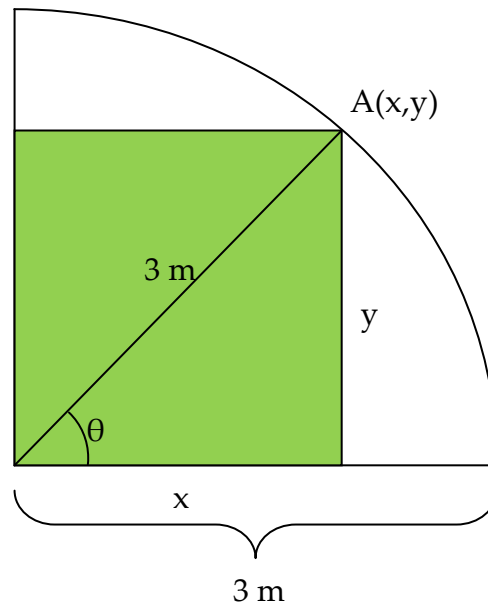
$$\frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) : \Pi'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \eta\mu\frac{\pi}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών

Η $\Pi(x)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $\theta = \frac{\pi}{4}$

Απ' ο (1), (2) βρίσκουμε τις συντεταγμένες του

$$A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$



Εγώ θα το έλυνα ως εξής:
Η περίμετρος $2x+2y$
μεγιστοποιείται όταν $x+y$
μεγιστοποιείται.

$$\begin{aligned} \text{Περίμετρος} &= x + y = \sqrt{(x+y)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = \\ &= \sqrt{9 + 2xy} \end{aligned}$$

Μεγιστοποιείται το xy
σύμφωνα με το πρόβλημα 1
όταν $x=y$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \Rightarrow 2y^2 = 9 \Leftrightarrow \\ y^2 &= \frac{9}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

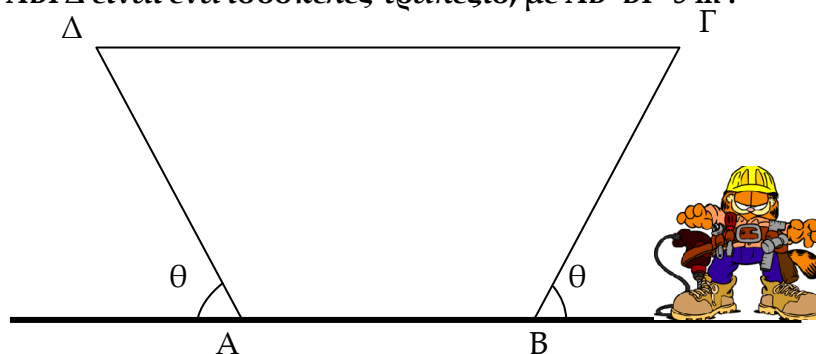


θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\Pi'(\theta)$		+	-
$\Pi(\theta)$		↗	↘

Μεγιστ



3. Για την κατασκευή ενός καναλιού, η κάθετη διατομή πρέπει να έχει το παρακάτω σχήμα, όπου ΑΒΓΔ είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο, με $AB=BG=5\text{ m}$.



Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ με τη βάση του καναλιού

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της διατομής του καναλιού δίνεται από τον τύπο

$$E(\theta) = 25\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

ii. Να υπολογίσετε την γωνία θ έτσι ώστε το κανάλι να μεταφέρει την μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα νερού.

Λύση

i. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ, τότε ισχύει.

$$EZ = AB = 5\text{ m} \text{ και } \Delta E = Z\Gamma$$

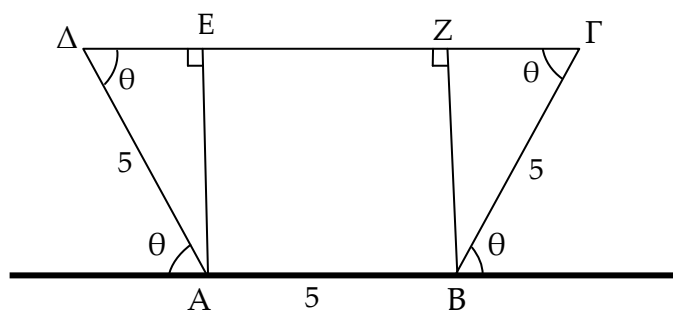
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{AE}{5} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\Delta E}{5}$$

$$\text{Δηλαδή } AE = 5\eta\mu\theta \text{ και } \Delta E = Z\Gamma = 5\sigma\upsilon\nu\theta$$

Το εμβαδό του τραπέζιου ΑΒΓΔ ισούται με

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{(AB + \Gamma\Delta) \cdot AE}{2} = \frac{(5 + 5 + 2 \cdot 5\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 5\eta\mu\theta}{2} = \\ &= \frac{(10 + 10\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 5\eta\mu\theta}{2} = \frac{10(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 5\eta\mu\theta}{2} = \frac{50(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}{2} = 25\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \end{aligned}$$



$$\text{Άρα } E(\theta) = 25\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

ii. Για να μεταφέρει το κανάλι την μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα νερού αρκεί να γίνει μέγιστο το εμβαδό της διατομής, δηλαδή του τραπέζιου. Αρκεί να βρούμε την γωνία θ έτσι ώστε το $E(\theta)$ να γίνεται μέγιστο.

Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη, έτσι

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= (25\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta))' = 25\sigma\upsilon\nu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) + 25\eta\mu\theta(-\eta\mu\theta) = 25\sigma\upsilon\nu\theta + 25\sigma\upsilon\nu^2\theta - 25\eta\mu^2\theta = \\ &= 25(\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta) = 25(\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta)) = 25(\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = \\ &= 25(\sigma\upsilon\nu\theta + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1) = 25(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1) \end{aligned}$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 25(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Όμως } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ αρά } \sigma\upsilon\nu\theta > 0 \text{ συνεπώς } \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Επειδή η συνάρτηση $E'(\theta)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα διατηρεί πρόσημο.



- Για $\theta = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ έχουμε

$$E'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 25(2\sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} - 1) = 25\left(2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 25\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{25\sqrt{2}}{2} > 0$$

- Για $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ η $E'(\theta)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} E'(\theta) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 25(2\sin^2 \theta + \sin \theta - 1) = -25 < 0$

Κατασκευάζουμε το διπλανό πίνακα πρόσημου της $E'(\theta)$ από το οποίο είναι προφανές ότι η $E(\theta)$ παρουσιάζει

μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{3}$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$E'(\theta)$		+	-
$E(\theta)$		↗	↘

μέγιστο

4.Ο θλιμμένος θαλάσσιος μπούφος -ένα είδος γλάρου- τρέφεται κυρίως με ψάρια τα οποία πιάνει βουτώντας εν πτήση στην θάλασσα. Διαπιστώθηκε ότι η τροχιά του πτηνού περιγράφεται από την συνάρτηση

$$f(t) = (2-t)e^{2-t}, \quad t \in [0, 6]$$

i. Να προσδιοριστεί η γωνία με την οποία ο γλάρος έπεσε στην θάλασσα.

ii. Να βρεθεί το μέγιστο βάθος στο οποίο έφτασε.

Παρατήρηση. Το μήκος της τροχιάς μετράται σε μέτρα. Τα σημεία στην επιφάνεια της θάλασσας έχουν τεταγμένη μηδέν.

Λύση

i. Είναι

$$f'(t) = ((2-t)e^{2-t})' = \dots = (t-3)e^{2-t}$$

Ο γλάρος αγγίζει την επιφάνεια της θάλασσας όταν

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow (t-2)e^{2-t} = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Τότε, } f'(2) = (2-3)e^{2-2} = -1$$

Άρα η τροχιά του πτηνού σχηματίζει με επιφάνεια της θάλασσας οξεία γωνία 45° .

ii. Είναι

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

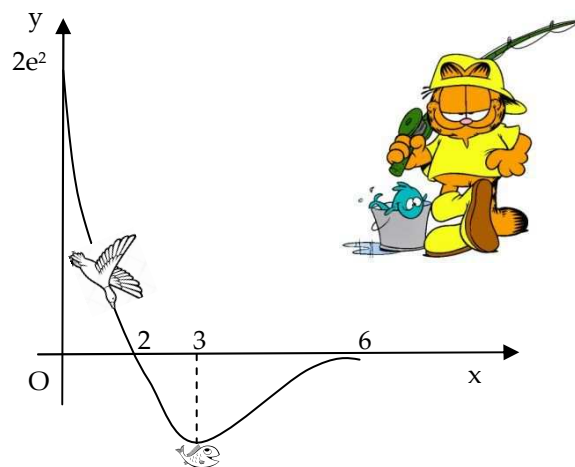
Ο πίνακας μεταβολών είναι

Η ελάχιστη τιμή της f είναι :

$$f(3) = (2-3)e^{2-3} = -e^{-1}$$

Άρα, ο γλάρος έφτασε σε βάθος

$$e^{-1} \approx 0,37 \text{ m}$$



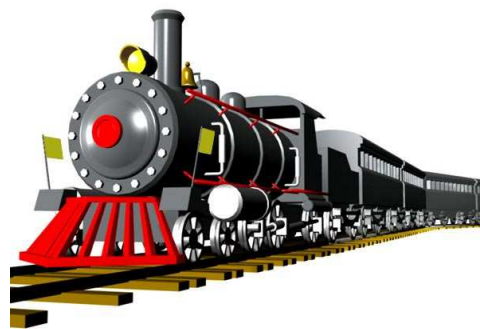
t	0	3	6
$f'(t)$		-	+
$f(t)$		↘	↗

ελάχιστο



5. Η εταιρεία σιδηροδρόμων Μπάρμπα Ευριπίδης κατόπιν στατιστικών μελετών κατέληξε στο συμπέρασμα.

Όταν η τιμή του εισιτηρίου του τρένου για την διαδρομή μεταξύ της Άνω πλατανιάς και της Κάτω πλατανιάς είναι 5 ευρώ, τότε χρησιμοποιούν το τραίνο 900 πελάτες την ημέρα. Κάθε μείωση της τιμής του εισιτηρίου κατά 0,25 ευρώ, έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση των επιβατών κατά 75 άτομα.



i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $E(x)$ των επιβατών που αντιστοιχεί στην τιμή x του εισιτηρίου δίνεται από την σχέση

$$E(x) = 2400 - 300x, 0 < x < 5$$

ii. Να βρείτε την τιμή του εισιτηρίου για την οποία η εταιρεία θα έχει μέγιστο αριθμό εσόδων.

iii. Την προηγούμενη Δευτέρα το τραίνο διένυσε χωρίς στάσεις την απόσταση ανάμεσα στην Άνω και στην Κάτω Πλατανιά μήκους 300 χλμ (!) σε 4 ώρες. Να δείξετε ότι σε κάποια χρονική στιγμή, κατά την διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του τρένου ήταν 75 χλμ την ώρα.

iv. Τρεις πόλεις Α, Β, Γ βρίσκονται κατά μήκος της σιδηροδρομικής τροχιάς με αποστάσεις $AB=200$ km, $BF=400$ Km, $AG=600$ km. Ένα τρένο κινούμενο συνεχώς ξεκινά από την πόλη Α, περνάει από την πόλη Β μετά από 3 ώρες και φτάνει στην πόλη Γ σε 6 ώρες. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά 3 ώρες, έτσι ώστε το τρένο την μια χρονική στιγμή έχει διπλάσια ταχύτητα απ' ότι την άλλη

(Όλες οι συναρτήσεις που εκφράζουν το διάστημα που διανύει το τρένο συναρτήσει του χρόνου είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες ☺ ☺)

Λύση

i. Για κάθε μείωση 0,25 ευρώ οι επιβάτες αυξάνονται κατά 75 τότε αν μειωθεί 1 ευρώ το πλήθος των επιβατών θα αυξηθεί κατ $4 \cdot 75 = 300$ άτομα. Άρα αν το εισιτήριο έχει x ευρώ τότε η μείωση του εισιτηρίου θα είναι $5-x$ και οι επιπλέον επιβάτες θα είναι $(5-x) \cdot 300$. Έτσι,

$$E(x) = 900 + (5-x)300 = 900 + 1500 - 300x = 2400 - 300x, 0 < x \leq 5$$

ii. Τα έσοδα της εταιρείας είναι $\Pi(x) = x \cdot E(x) = 2400x - 300x^2, 0 < x \leq 5$

$$\Pi'(x) = (2400x - 300x^2)' = 2400 - 600x$$

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2400 - 600x = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Άρα για $x=4$ έχουμε τα μέγιστα έσοδα

$$\Pi(4) = 2400 \cdot 4 - 300 \cdot 4^2 = 9600 - 4800 = 4800 \text{ ευρώ}$$

t	0	4	5
$\Pi'(x)$		+	-
$\Pi(x)$		↗	↘

Μεγιστ



ii. Αν $s(t)$ η συνάρτηση θέσης του τρένου τότε $s'(t)$ η στιγμιαία ταχύτητα του τρένου την χρονική στιγμή t . Η συνάρτηση θέσης $s(t)$ του τρένου στο διάστημα $[0,4]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, άρα από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $t_0 \in (0,4)$ τέτοιο ώστε

$$s'(t_0) = \frac{s(4) - s(0)}{4 - 0} = \frac{300 - 0}{4} = 75 \text{ χλμ / ώρα}$$

Οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

iii. Έστω $S_1(t)$ η συνάρτηση θέσης του διαστήματος AB και $S_2(t)$ η συνάρτηση θέσης του διαστήματος BG.

Έστω $A(t) = S_2(t+3) - 2S_1(t)$. Η $A(t)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,3]$

$A(0)=0, A(3)=0$ οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει:

$$t_1 \in (0,3): A'(t_1) = 0 \Leftrightarrow S_2'(t_1 + 3) - 2S_1'(t_1) = 0 \Leftrightarrow S_2'(t_1 + 3) = 2S_1'(t_1) \Leftrightarrow u_2(t_2) = 2u_1(t_1) \quad t_1 + 3 = t_2$$

Άσκηση είναι μια επαναλαμβανομένη πράξη που στοχεύει στην ενίσχυση αποκτηθείσας δεξιότητας.

Η διαδικασία λύσης μιας άσκησης είναι μια επανάληψη γνωστών ενεργειών. **Μονοδιάστατη νοητική πράξη** που εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την μνήμη και την αυτοματοποιημένη επανάληψη αφομοιωμένων αντιδράσεων....



Πίθηκος Πινγκ Πονγκ

Κάθε πρόβλημα σίγουρα έχει δυο λύσεις, η πιο σίγουρη είναι να το γράψεις στα παλιά σου τα παπούτσια!!



Ανώνυμος πίθηκος

Πρόβλημα είναι κάθε εργασία για την οποία το άτομο που την αντιμετωπίζει θέλει ή έχει ανάγκη να την κάνει.

- Κάθε εργασία για την οποία το άτομο δεν έχει έτοιμη διαδικασία για να την εκτελέσει, δηλαδή να βρει λύση.
- Κάθε εργασία για την οποία το άτομο πρέπει να κάνει κάποια προσπάθεια να την εκτελέσει, δηλαδή να βρει την λύση.



Πίθηκος Κινγκ Κονγκ



6. Σε ένα λούνα Παρκ στο Ντέρι ο περιστρεφόμενος τροχός έχει ακτίνα 4 μέτρα και το κέντρο του Ο απέχει 5 μέτρα από το έδαφος. Όταν αρχίζει να κινείται ο τροχός, ένα παιδί βρίσκεται στο κουτί στην θέση Α και κάνει μια πλήρη περιστροφή σε 12 sec με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει το ύψος του βρίσκεται το κουτί του παιδιού από το έδαφος συνάρτηση του χρόνου $t \in [0, 12]$ είναι:

$$h(t) = 5 + 4\eta\mu \frac{\pi t}{6}, t \in [0, 12]$$

ii. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ύψους που βρίσκεται το κουτί του παιδιού 4 sec μετά την εκκίνηση.

ii. Η πιο επικίνδυνη στιγμή για να πηδήξει το παιδί από το τροχό είναι όταν ο ρυθμός μεταβολής του ύψους του κουτιού του παιδιού είναι μηδέν αλλά ταυτόχρονα και η πιο ακίνδυνη χρονική στιγμή για να πηδήξει το παιδί από τον τροχό είναι όταν ο ρυθμός μεταβολής είναι μηδέν.

Αιτιολογήστε.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $h(t) = t^2 - 6t + 18, t \in [0, 12]$

Λύση

i. Εφόσον ο περιστρεφόμενος τροχός κάνει μια περιστροφή σε 12 sec, η ακτίνα ΟΑ σε 1 sec διαγράφει γωνία $\frac{2\pi}{12} \text{ rad}$ ή

$\frac{\pi}{6} \text{ rad}$. Επομένως σε t sec θα

διαγράψει γωνία $\omega = \frac{\pi t}{6} \text{ rad}$.

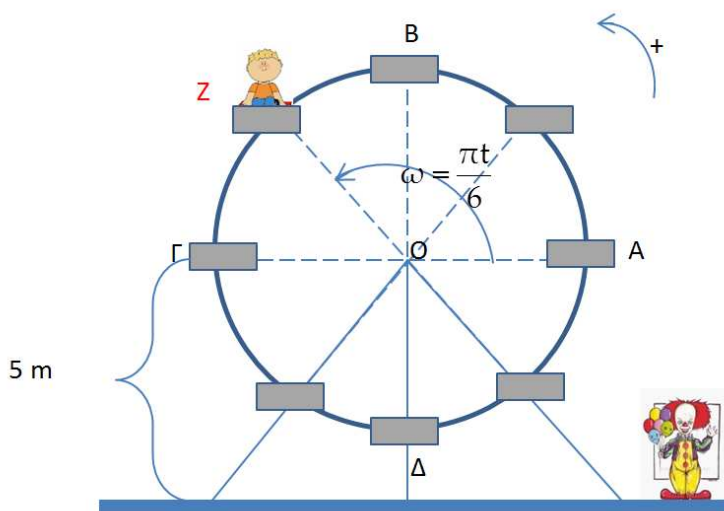
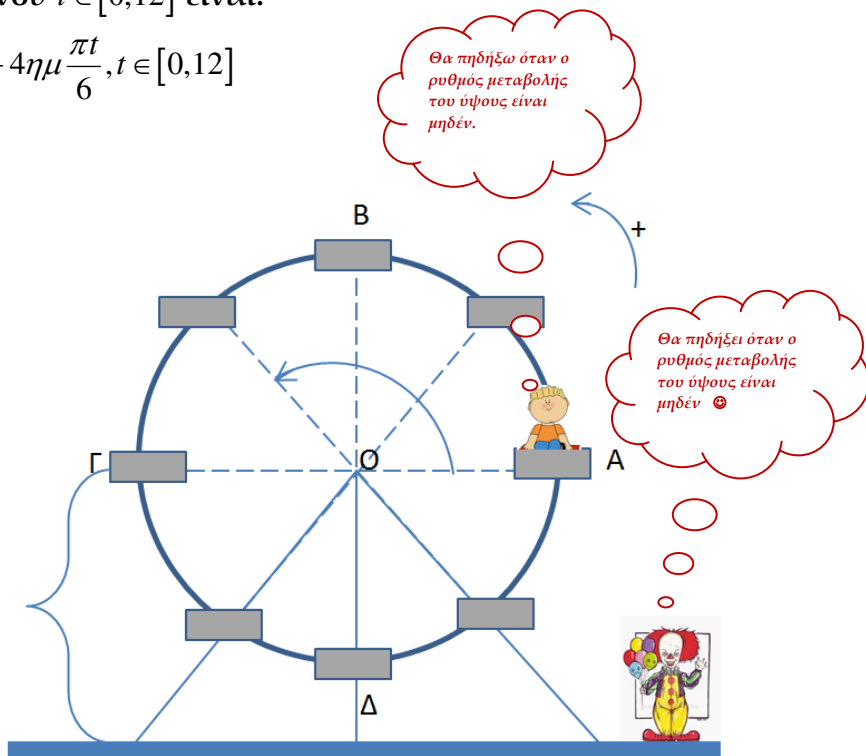
Τώρα t sec μετά την εκκίνηση το κουτί του παιδιού βρίσκεται στην θέση Ζ, είναι ΟΑ = ρ = 4 μέτρα και

$$y_Z = \rho \eta\mu\omega \Leftrightarrow y_Z = 4\eta\mu \frac{\pi t}{6}$$

και το ύψος του όπως φαίνεται στο σχήμα είναι:

$$h(t) = 5 + 4\eta\mu \frac{\pi t}{6}, t \in [0, 12]$$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής του ύψους την χρονική στιγμή t είναι





$$h'(t) = \left(5 + 4\eta\mu\frac{\pi t}{6} \right)' = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{6} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{6}$$

Για $t=4$ sec : $h'(4) = \frac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$ μέτρα ανά sec.

iii. Ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι μηδέν όταν

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{6} = 0 \quad t \in [0, 12] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t = 3 \text{ sec ή } t = 9 \text{ sec}$$

-Για $t=3$ sec το ύψος $h(3) = 5 + 4\eta\mu\frac{3\pi}{6} = 9$ μέτρα άρα το κουτί του παιδιού βρίσκεται στην θέση Β.

-Για $t=9$ sec το ύψος $h(9) = 5 + 4\eta\mu\frac{9\pi}{6} = 1$ μέτρο άρα το κουτί του παιδιού βρίσκεται στην θέση Δ.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι μηδέν στο ανώτερο και στο κατώτερο ύψος ο.ε.δ

iii. θεωρούμε συνάρτηση $g(t) = t^2 - 6t + 18, t \in [0, 12]$ και την μελετάμε ως προς τα

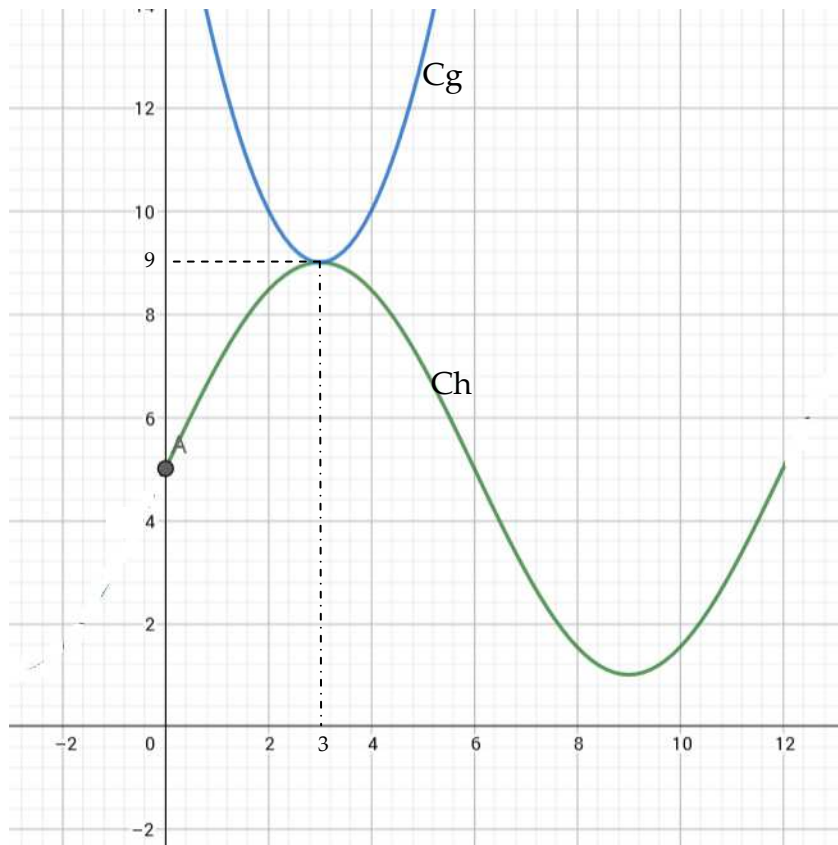
ακρότατα, εύκολα διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $t=3$ το $g(3) = 9$

Όμως για $t \in [0, 12]$ ισχύει $h(t) \leq h(3) = g(3) \leq g(t)$

Συνεπώς η εξίσωση $h(t) = g(t)$ έχει μοναδική λύση $t=3$

Αν με καλορωτήσετε όμως, θα προτιμούσα να την λύσω ως εξής:

Θα έγραφα την $g(t) = (t-3)^2 + 9$, και θα χάρασσα στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των Ch, Cg από όπου θα ήταν προφανές ότι η μοναδική λύση είναι το $t=3$





7.(Εξετασεις Δ Δέσμη 1998) Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με την συνάρτηση $f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}$ με $t \geq 0$ όπου $A > 0$.

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $K(t)$ από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από την συνάρτηση $K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}$, με $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι $K(0) = 0$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

Λύση. Το συνολικό κέρδος $P(t)$ προκύπτει από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής και συνεπώς $P(t) = K(t) + f(t)$, $t \geq 0$.

Έτσι είναι

$$P'(t) = K'(t) + f'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} + \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}} \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} + \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}} \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{A}{4} (e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t+28}{14}})$$

Έχουμε,

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{4} (e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t+28}{14}}) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t+28}{14}} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}} = e^{-\frac{t+28}{14}} \Leftrightarrow -\frac{t}{7} = -\frac{t+28}{14} \Leftrightarrow t = 28$$

Άρα η συνάρτηση $P(t)$ παρουσιάζει μέγιστο στην θέση $t = 28$. Επομένως η μηχανή πρέπει να πουληθεί μετά την πάροδο 28 ετών.

t	0	28	$+\infty$
$P'(t)$	+	0	-
$P(t)$	↗		↘

Μέγιστο

8. Ο ρυθμός με τον οποίο δύνει ο ήλιος, την χρονική στιγμή που οι ακτίνες του σχηματίζουν με το έδαφος γωνία $\theta = 30^\circ$ είναι 20° ανά ώρα.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της σκιάς x του γνωστού γάτου (ύψους 0,3 m) την ίδια χρονική στιγμή. (σχήμα)

Λύση

Έστω ότι την χρονική στιγμή t_0 , οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν

με το έδαφος γωνία 30° δηλαδή, $\theta(t_0) = \frac{\pi}{6}$ rad

Καθώς ο ήλιος δύνει η γωνία $\omega(t)$

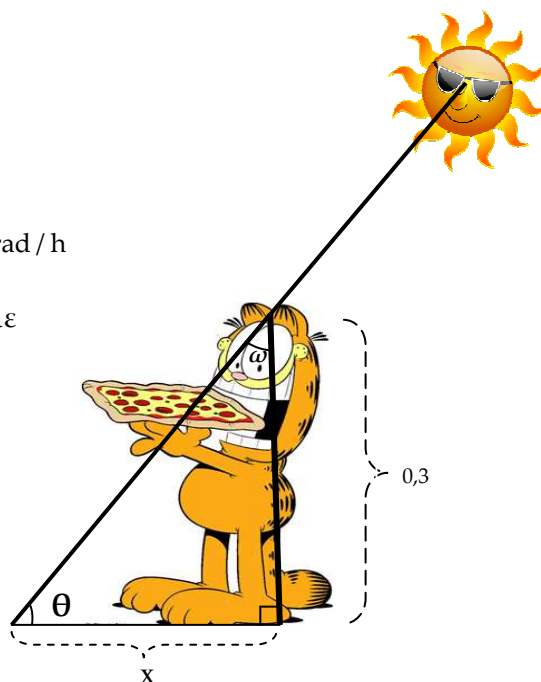
αυξάνει με ρυθμό $\omega'(t) = 20^\circ$ ανα ώρα ή $\omega'(t) = \frac{\pi}{9}$ rad/h

Έτσι, $\epsilon\phi\omega(t) = \frac{x(t)}{0,3} \Leftrightarrow x(t) = 0,3 \cdot \epsilon\phi\omega(t)$ παραγωγίζουμε

ως προς το t : $x'(t) = 0,3 \cdot (\epsilon\phi\omega(t))' \Leftrightarrow x'(t) = \frac{0,3 \cdot \omega'(t)}{\sin^2 \omega(t)}$

Ο ρυθμός μεταβολής της σκιάς $x(t)$ του γάτου την χρονική στιγμή t_0 είναι

$$x'(t_0) = \frac{0,3 \cdot \omega'(t_0)}{\sin^2 \omega(t_0)} = \frac{0,3 \cdot \frac{\pi}{9}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{30}}{\frac{1}{4}} = \frac{2\pi}{15} \text{ m/h}$$





9. (All time classic)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο με μήκος των πλευρών ίσο με 1 cm να βρεθεί το μήκος της τρίτης πλευράς έτσι ώστε το εμβαδό του τριγώνου να γίνεται μέγιστο.

Λύση

α τρόπος

Το εμβαδό του τριγώνου γράφεται

$$E(\theta) = \frac{1}{2}(AB)(AG)\eta\mu\theta = \frac{1}{2}\eta\mu\theta, 0 < \theta < \pi$$

$$E'(\theta) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\theta, \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \stackrel{0 < \theta < \pi}{\Leftrightarrow} \theta = \frac{\pi}{2}$$

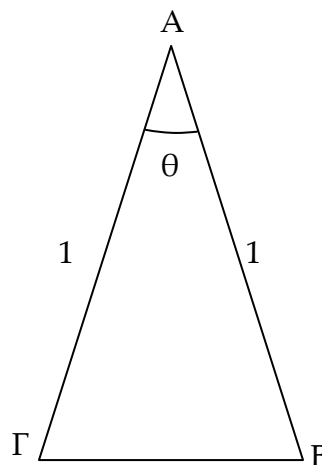
Η συνάρτηση $E'(\theta)$ είναι συνεχής

στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα

διατηρεί πρόσημο σε αυτά οπότε με την μέθοδο των επιλεγμένων τιμών

$$\frac{\pi}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] : E'(\theta) > 0$$

$$\frac{4\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) : E'(\theta) < 0$$



Εμβαδό τριγώνου με πλευρές α, β, γ

$$E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{1}{2}\alpha\gamma\eta\mu\hat{B} = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\hat{A}$$

Συνεπώς το εμβαδό του τριγώνου μεγιστοποιείται όταν $\theta = \frac{\pi}{2}$

Άρα πρόκειται για ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με πλευρές 1, 1, $\sqrt{2}$

β τρόπος

Φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Από το πυθαγόρειο

θεώρημα στο ΑΓΔ προκύπτει

$$\upsilon = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

Άρα το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$E = \frac{1}{2}x \cdot \upsilon = \frac{1}{2}x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Η συνάρτηση που δίνει το εμβαδό συναρτήσει του x είναι

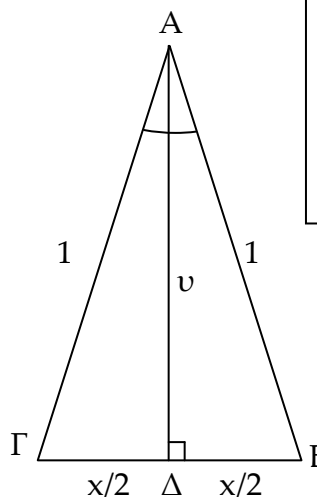
$$E(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, 0 < x < 2$$

$$E(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x^2 - x^4}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2 - x^4}, 0 < x < 2$$

Η $E(x)$ μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η υπορίζος ποσότητα $(4x^2 - x^4, 0 < x < 2)$ άρα θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = 4x^2 - x^4, 0 < x < 2$$

$$g'(x) = (4x^2 - x^4)' = 8x - 4x^3 = 4x(2 - x^2)$$



Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:
 $ΑΓ - ΑΒ < ΒΓ < ΑΓ + ΑΒ$ ή
 $0 < x < 2$



Όταν $x \in (0, 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

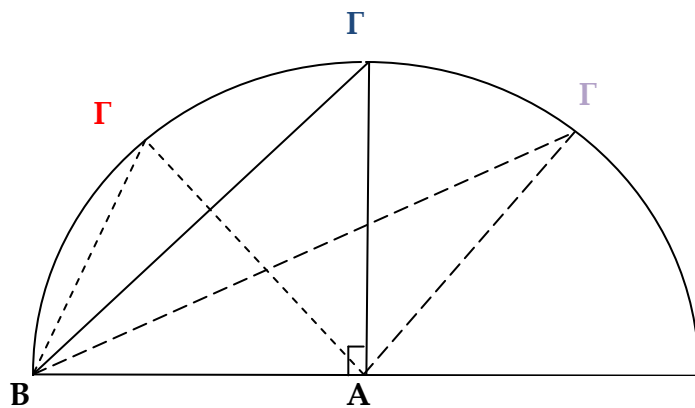
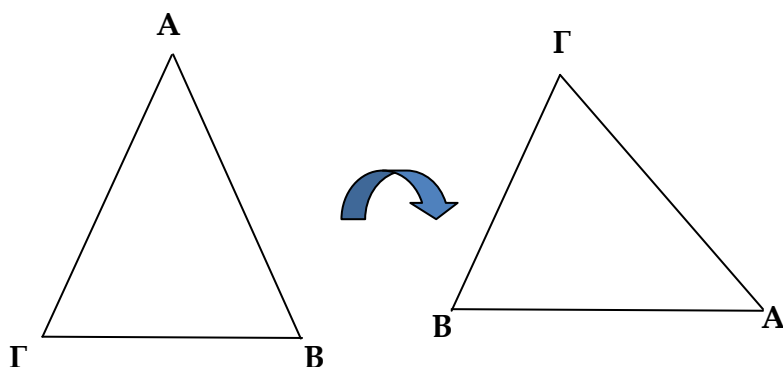
$$g'(x) > 0, \text{ όταν } 0 < x < \sqrt{2}$$

$$g'(x) < 0, \text{ όταν } \sqrt{2} < x < 2$$

Συνεπώς, η $g(x)$ και κατ'επέκταση και $E(x)$ μεγιστοποιείται για $x = \sqrt{2}$

Εγώ θα το έλυνα γεωμετρικά χωρίς παράγωγο!!

Περιστρέφουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ έτσι ώστε να έχει βάση την AB . Κατόπιν σχεδιάζουμε ημικύκλιο με ακτίνα AB και κέντρο το A . Παρατηρούμε ότι όλα τα δυνατά τρίγωνα με τις προϋποθέσεις του προβλήματος έχουν βάση την ακτίνα του κύκλου AB και κορυφή Γ πάνω στο ημικύκλιο. Το εμβαδό τους τώρα λόγω σταθερής βάσης γίνεται μέγιστο όταν γίνεται μέγιστο το ύψος $\Gamma\Delta$. Η μεγαλύτερη τιμή του ύψους $\Gamma\Delta$ προκύπτει όταν $\Gamma AB = 90^\circ$. Με τιμή $\Gamma A = \sqrt{2}$.

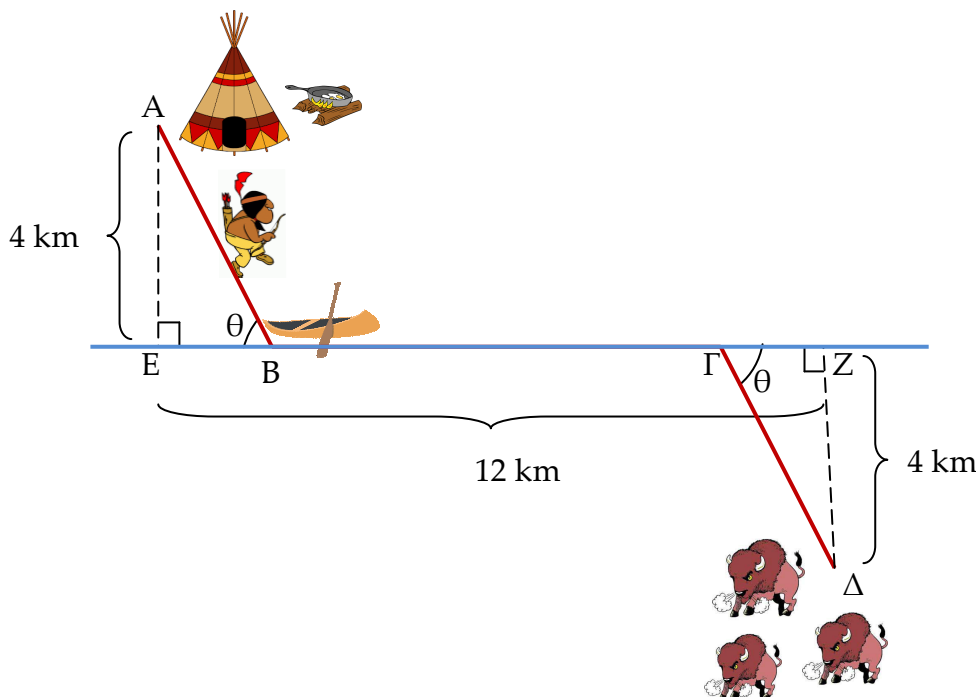


**Πίθηκος Πινγκ Πονγκ,
γεωμέτρης την τοποθεσία
Χήρα βοήθειας**



10. Τριγωνομετρία και ερυθρόδερμοι....

Ο καθιστός Μείταλας κάθε μέρα πάει για κυνήγι βουβαλιών. Ξεκινά από την σκηνή του (Α) πεζοπορεί σε μια δασώδη έκταση και φτάνει στο ποτάμι στο σημείο Β, εκεί παίρνει την βάρκα του και κωπηλατεί μέχρι το σημείο Γ, αφήνει την βάρκα και πεζοπορεί μέχρι το σημείο Δ- το λιβάδι της χοντρής μάζας - όπου βόσκουν αμέριμνα τα βουβάλια (σχήμα). (Ισχύει $\hat{EBA} = \hat{Z\Gamma\Delta} = \theta$)



Είναι γνωστό ότι, ο ερυθρόδεσμος Μείταλας πεζοπορεί με ταχύτητα 8 km/h και κωπηλατεί με ταχύτητα 16 km/h.

Να αποδείξετε ότι:

i. Ο χρόνος που χρειάζεται ο καθιστός Μείταλας για να μεταβεί από το σημείο Α στο σημείο Δ είναι

$$t = 15 \left(3 + \frac{4}{\eta\mu\theta} - \frac{2}{\epsilon\phi\theta} \right) \text{ λεπτά } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

ii. Ο ελάχιστος χρόνος που χρειάζεται ο καθιστός Μείταλας για να μεταβεί από το σημείο Α στο σημείο Δ είναι $30\sqrt{3} + 45$ λεπτά.

Λύση

i. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ, ΓΖΔ έχουμε,

$$\eta\mu\theta = \frac{4}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{4}{\eta\mu\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\eta\mu\theta = \frac{4}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{4}{\eta\mu\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

Επίσης

$$\epsilon\phi\theta = \frac{4}{EB} \Leftrightarrow EB = \frac{4}{\epsilon\phi\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΓΖΔ είναι ίσα (ορθογώνια, Β=Γ, ΖΔ=ΑΕ) άρα ΕΒ=ΓΖ,

$$ΒΓ = 12 - 2ΕΒ = 12 - \frac{8}{\epsilon\phi\theta}$$



Αν t_1 ο χρόνος που κάνει ο καθιστός Μείταλας για να διανύσει πεζός την διαδρομή AB θα ισχύει:

$$u_1 = \frac{S_{AB}}{t_1} \Leftrightarrow 8 = \frac{\frac{4}{\eta\mu\theta}}{t_1} \Leftrightarrow t_1 = \frac{\frac{4}{\eta\mu\theta}}{8} \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{2\eta\mu\theta}$$

Αν t_2 ο χρόνος που κάνει ο καθιστός Μείταλας για να διανύσει πεζός την διαδρομή ΓΔ ομοίως προκύπτει $t_2 = \frac{1}{2\eta\mu\theta}$

Αν t_3 ο χρόνος που κάνει ο καθιστός Μείταλας για να διανύσει κωπηλατώντας την διαδρομή ΓΔ τότε

$$u_3 = \frac{S_{BG}}{t_3} \Leftrightarrow 16 = \frac{12 - \frac{8}{\epsilon\phi\theta}}{t_3} \Leftrightarrow t_3 = \frac{12 - \frac{8}{\epsilon\phi\theta}}{16} \Leftrightarrow t_3 = \frac{12}{16} - \frac{\frac{8}{\epsilon\phi\theta}}{16} \Leftrightarrow t_3 = \frac{3}{4} - \frac{8}{16\epsilon\phi\theta} \Leftrightarrow t_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\epsilon\phi\theta}$$

Ο συνολικός χρόνος σε ώρες που απαιτείται για ολόκληρη την διαδρομή

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{2\eta\mu\theta} + \frac{1}{2\eta\mu\theta} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2\epsilon\phi\theta} = \frac{2}{2\eta\mu\theta} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2\epsilon\phi\theta} = \frac{3}{4} + \frac{1}{\eta\mu\theta} - \frac{1}{2\epsilon\phi\theta}$$

Τελικά, ο συνολικός χρόνος σε λεπτά είναι

$$t(\theta) = 60 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{\eta\mu\theta} - \frac{1}{2\epsilon\phi\theta} \right) = 15 \cdot 4 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{\eta\mu\theta} - \frac{1}{2\epsilon\phi\theta} \right) = 15 \left(3 + \frac{4}{\eta\mu\theta} - \frac{2}{\epsilon\phi\theta} \right), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

ii. Αρκεί να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $t(\theta)$ στο $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$. Είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής ως πράξεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\begin{aligned} t'(\theta) &= \left(15 \left(3 + \frac{4}{\eta\mu\theta} - \frac{2}{\epsilon\phi\theta} \right) \right)' = 15 \left(-\frac{4(\eta\mu\theta)'}{\eta\mu^2\theta} - \frac{2(\epsilon\phi\theta)'}{\epsilon\phi^2\theta} \right) = 15 \left(-\frac{4\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} + \frac{2\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}{\epsilon\phi^2\theta} \right) = \\ &= 15 \left(-\frac{4\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} + \frac{2}{\epsilon\phi^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta} \right) = 30 \left(-\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} + \frac{1}{\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} \right) = 30 \left(-\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} + \frac{1}{\eta\mu^2\theta} \right) = 30 \left(\frac{1-2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} \right) \end{aligned}$$

$$t'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 30 \left(\frac{1-2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} \right) = 0 \Leftrightarrow 1-2\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Αλλά $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ οπότε

$$0 < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2\kappa + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < 2\kappa + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < 2\kappa < \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < \kappa < \frac{1}{12} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$$

Για $\kappa=0$: $x = \frac{\pi}{3}$

$$0 < 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2\kappa - \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < 2\kappa + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < 2\kappa < \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < \kappa < \frac{5}{12}, \text{ αλλά } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ δεν}$$

έχει λύση.

Οπότε μοναδική λύση είναι $x = \frac{\pi}{3}$



Η $t'(\theta)$ είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ διατηρεί πρόσημο

Θα βρούμε το πρόσημο κάθε διαστήματος με την μέθοδο των επιλεγμένων τιμών

$$\frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ τότε } t'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 30 \left(\frac{1 - 2\sin\frac{\pi}{6}}{\eta\mu^2\frac{\pi}{6}} \right) = 30 \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{\eta\mu^2\frac{\pi}{6}} \right) < 0$$

$$\frac{5\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τότε } t'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 30 \left(\frac{1 - 2\sin\frac{5\pi}{6}}{\eta\mu^2\frac{5\pi}{6}} \right) = 30 \left(\frac{1 - 2\sin(\pi - \frac{\pi}{6})}{\eta\mu^2\frac{5\pi}{6}} \right) = 30 \left(\frac{1 + 2\sin\frac{\pi}{6}}{\eta\mu^2\frac{5\pi}{6}} \right) = 30 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\eta\mu^2\frac{\pi}{6}} \right) > 0$$

Τελικά, προκύπτει ο διπλανός πίνακας

Ο ελάχιστος χρόνος είναι ο

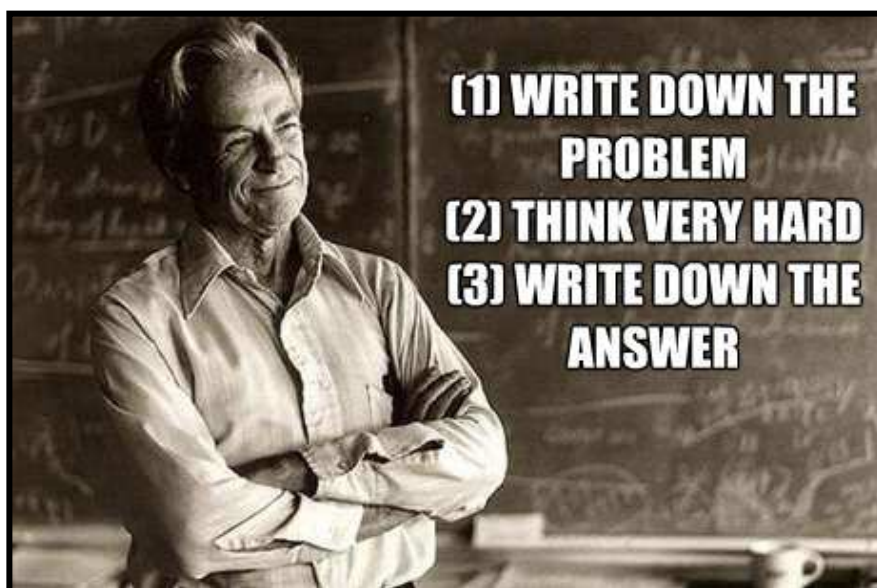
t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$t'(\theta)$		-	+
$t(\theta)$		$\searrow$	$\nearrow$

Ελαχ

$$t\left(\frac{\pi}{3}\right) = 15 \left(3 + \frac{4}{\eta\mu\frac{\pi}{3}} - \frac{2}{\epsilon\phi\frac{\pi}{3}} \right) = 15 \left(3 + \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) =$$

$$15 \left(3 + \frac{6}{\sqrt{3}} \right) = 15 \left(3 + \frac{6\sqrt{3}}{3} \right) = 15(3 + 2\sqrt{3}) = 45 + 30\sqrt{3} \text{ λεπτά}$$

Ο Ρ. Φ. Φάινμαν νομπελίστας
φυσικός και απόλυτη math geek
περσόνα συμβουλεύει:

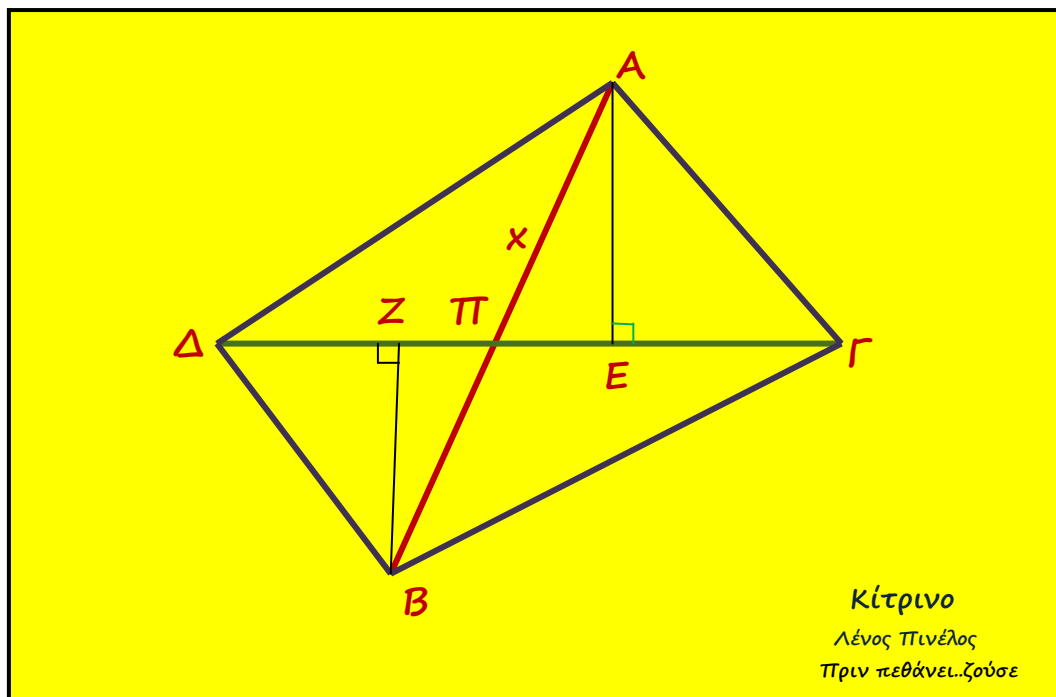




11. Στον πίνακα ζωγραφικής «Κίτρινο....» του μεταμοντέρνου ζωγράφου Λένου Πινέλου απεικονίζονται δυο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ με μήκος 5 cm το καθένα τα οποία τέμνονται στο σημείο Π. Είναι γνωστό ότι το ΠΑ υπολείπεται του ΠΓ κατά 1 cm.



Πίθηκος Πινγκ
Πονγκ, γεωμέτρης
την τοποθεσία
Χήρα βοήθειας



Κίτρινο
Λένος Πινέλος
Πριν πεθάνει... ζούσε

Αν $PA=x$ και δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{E1}{E2}$ όπου $E1 = (\triangle P \hat{A} \Delta)$, $E2 = (\triangle P \hat{\Gamma} B)$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να βρείτε το μέγιστο της f .
- Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle PAD, \triangle PB\Gamma$ είναι ισοσκελή όταν η f είναι μέγιστη.
- Να αποδείξετε ότι

$$PA \geq \frac{4(9AE - BZ)}{9AE + 4BZ} \quad (AE \perp \Delta\Gamma, AZ \perp \Delta\Gamma)$$

Λύση

i. Είναι $PG=x+1, PD=5-(x+1)=4-x, PB=5-x$

Πρέπει $x>0$ και $4-x>0$ από όπου προκύπτει $D_f = (0, 4)$

ii. Αρχικά θα βρούμε τον τύπο της συνάρτησης

$$E1 = \frac{1}{2} \Delta P \cdot PA \eta \mu(\angle P \hat{A} \Delta) = \frac{1}{2} (4-x) \cdot x \eta \mu(\angle P \hat{A} \Delta),$$

$$E1 = \frac{1}{2} PG \cdot PB \eta \mu(\angle P \hat{\Gamma} B) = \frac{1}{2} (x+1) \cdot (5-x) \eta \mu(\angle P \hat{\Gamma} B)$$

$$f(x) = \frac{E1}{E2} = \frac{\frac{1}{2} (4-x) \cdot x \eta \mu(\angle P \hat{A} \Delta)}{\frac{1}{2} (x+1) \cdot (5-x) \eta \mu(\angle P \hat{\Gamma} B)} \stackrel{\angle P \hat{A} \Delta = \angle P \hat{\Gamma} B}{=} \frac{(4-x) \cdot x}{(x+1) \cdot (5-x)} = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x - 5}$$

Τελικά

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x - 5}, x \in (0, 4)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής ως ρητή στο $(0, 4)$, έτσι

Εμβαδό τριγώνου με πλευρές α, β, γ

$$E = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu \hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \alpha \gamma \eta \mu \hat{B} = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu \hat{A}$$



$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x - 5} \right)' = \frac{(x^2 - 4x)'(x^2 - 4x - 5) - (x^2 - 4x)(x^2 - 4x - 5)'}{(x^2 - 4x - 5)^2} =$$

$$\frac{(2x - 4)(x^2 - 4x - 5) - (x^2 - 4x)(2x - 4)}{(x^2 - 4x - 5)^2} = \frac{(2x - 4)(x^2 - 4x - 5 - x^2 + 4x)}{(x^2 - 4x - 5)^2} =$$

$$\frac{-5(2x - 4)}{(x^2 - 4x - 5)^2} = \frac{10(2 - x)}{(x^2 - 4x - 5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10(2 - x)}{(x^2 - 4x - 5)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	0	2	4
f'(x)		+	-
f(x)		↗	↘

Μεγιστ

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο για x=2 το f(2)

$$f(2) = \frac{2^2 - 4 \cdot 2}{2^2 - 4 \cdot 2 - 5} = \frac{4}{9}$$

iii. Για x=2 : ΠΑ=2, ΠΓ=2+1=3, ΠΔ=4-2=2, ΠΒ=5-2=3 άρα τα τρίγωνα ΠΑΔ, ΠΒΓ είναι ισοσκελή.

iv. Η f παρουσιάζει μέγιστο για x=2 το f(2) άρα

$$f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow \frac{E1}{E2} \leq \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot \Delta \Pi \cdot AE}{\frac{1}{2} \cdot \Pi \Gamma \cdot ZB} \leq \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{(4-x) \cdot AE}{(x+1) \cdot ZB} \leq \frac{4}{9} \Leftrightarrow$$

$$9(4-x) \cdot AE \leq 4(x+1) \cdot ZB \Leftrightarrow 36AE - 9x \cdot AE \leq 4x \cdot ZB + 4ZB \Leftrightarrow 36AE - 4ZB \leq 4x \cdot ZB + 9x \cdot AE \Leftrightarrow$$

$$36AE - 4ZB \leq (4ZB + 9AE)x \stackrel{4ZB+9AE>0}{\Leftrightarrow} \frac{36AE - 4ZB}{4ZB + 9AE} \leq x \Leftrightarrow \frac{4(9AE - ZB)}{4ZB + 9AE} \leq x \Leftrightarrow \Pi A \geq \frac{4(9AE - ZB)}{9AE + 4ZB}$$

Η διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων είναι μια καλλιέργεια της θέλησης....

Όταν ένας μαθητής κάνει ανόητα και πολύ σοβαρά λάθη ή είναι απελπιστικά αργός, το πρόβλημα είναι συνήθως το ίδιο, δεν έχει καμία διάθεση να λύσει το πρόβλημα, ούτε καν να το αντιλήφθη σωστά και συνεπώς δεν το έχει καταλάβει. Άρα ένας δάσκαλος, που επιθυμεί σοβαρά να βοηθήσει τον μαθητή, θα πρέπει, πρώτα από όλα, να κεντρίσει την περιέργεια του μαθητή, να του δημιουργήσει κάποιο ενδιαφέρον να λύσει το πρόβλημα. Ο δάσκαλος θα πρέπει επίσης να δώσει κάποιο χρόνο στον μαθητή να πάρει μια απόφαση, να αφοσιωθεί στο καθήκον του.

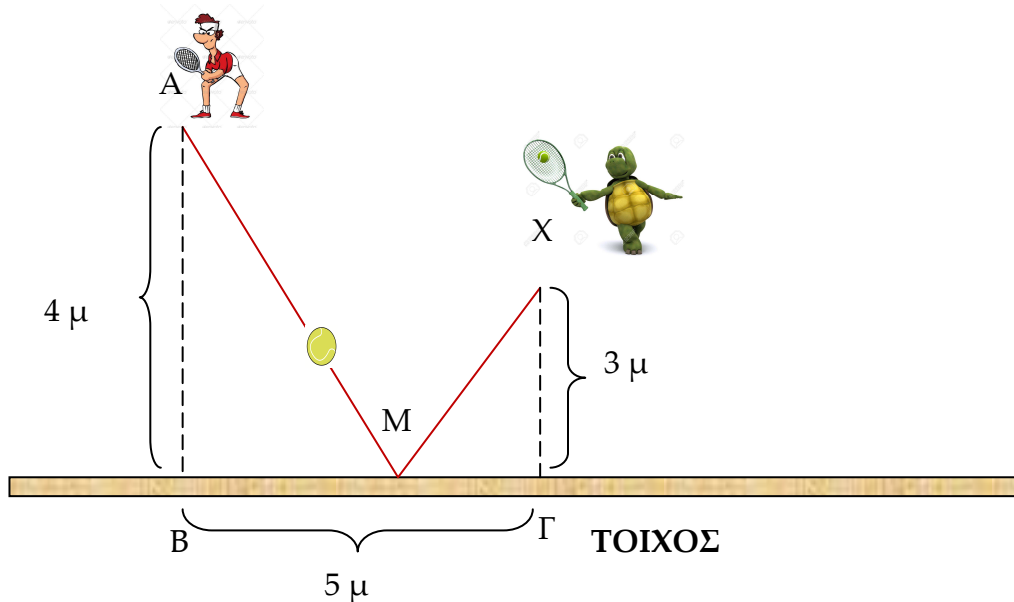


Η διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων είναι μια καλλιέργεια της θέλησης. Λύνονται προβλήματα, που δεν είναι τόσο εύκολα για αυτόν, ο μαθητής μαθαίνει να επιμένει ακόμα και μετά από αποτυχίες, να εκτιμά μια μικρή πρόοδο, να περιμένει την κρίσιμη ιδέα, να συγκεντρώσει όλες του τις δυνάμεις, όταν η ιδέα αυτή εμφανιστεί. Αν ο μαθητής δεν είχε την ευκαιρία στο σχολείο να δοκιμάσει τα ποικίλα συναισθήματα της προσπάθειας για την λύση, αυτό σημαίνει πως η μαθηματική του εκπαίδευση απέτυχε στο πιο βασικό σημείο.

G Polya, Πώς να το λύσω



12. Ο Αχιλλέας και η χελώνα παίζουν σκουός στον τελικό του Τουρνουά Ήρωνας. Το σκουός είναι το άθλημα που δυο παίκτες ανταλλάσσουν μπαλίες με μια ρακέτα χτυπώντας ένα μπαλάκι στον τοίχο. Σε ένα στιγμιότυπο του παιχνιδιού, ο Αχιλλέας (Α) βρίσκεται 4 μέτρα από τον τοίχο, η χελώνα (Χ) 3 μέτρα από τον τοίχο ενώ μεταξύ τους απέχουν 5 μέτρα. Αν θεωρηθεί ότι η μπάλα κινείται πάντα στο ίδιο επίπεδο, να βρείτε σε πιο σημείο (Μ) σε σχέση με τα σημεία Β και Γ χτύπησε τον τοίχο αν είναι γνωστό ότι η τροχιά ΑΜ+ΜΧ της μπάλας ελάχιστη.



Λύση

Έστω $BM=x$ τότε $MG=5-x$. Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΒΜ, ΜΓΧ

$$AM = \sqrt{4^2 + x^2} = \sqrt{16 + x^2}, \quad MX = \sqrt{3^2 + (5-x)^2} = \sqrt{9 + (5-x)^2}, \quad x \in [0, 5]$$

$$\text{Το άθροισμα } AM + MX = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{9 + (5-x)^2}, \quad x \in [0, 5]$$

Άρα η συνάρτηση που δίνει την τροχιά της μπάλας συναρτήσει του x είναι

$$f(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{9 + (5-x)^2}, \quad x \in [0, 5]$$

Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0, 5]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{16 + x^2} + \sqrt{9 + (5-x)^2} \right)' = \frac{(16 + x^2)'}{2\sqrt{16 + x^2}} + \frac{(9 + (5-x)^2)'}{2\sqrt{9 + (5-x)^2}} = \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{16 + x^2}} + \frac{2(5-x)(-1)}{2\sqrt{9 + (5-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} - \frac{5-x}{\sqrt{9 + (5-x)^2}} \end{aligned}$$

Θα λύσουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$

$$\frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} - \frac{5-x}{\sqrt{9 + (5-x)^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} = \frac{5-x}{\sqrt{9 + (5-x)^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9 + (5-x)^2}}{\sqrt{16 + x^2}} = \frac{5-x}{x}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και τα δυο μέλη

$$\frac{9 + (5-x)^2}{16 + x^2} = \frac{(5-x)^2}{x^2} \Leftrightarrow 9x^2 + x^2(5-x)^2 = 16(5-x)^2 + x^2(5-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 = 16(5-x)^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 16(5-x)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - (4(5-x))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3x+4(5-x))(3x-4(5-x))=0 \Leftrightarrow (3x+20-4x)(3x-20+4x)=0 \Leftrightarrow$$

$$(20-x)(7x-20)=0 \stackrel{x \in [0,5]}{\Leftrightarrow} x = \frac{20}{7}$$

Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[0,5]$ και διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $\left[0, \frac{20}{7}\right), \left(\frac{20}{7}, 5\right]$ θα βρούμε το πρόσημο με την μέθοδο των επιλεγμένων τιμών.

$$2 \in \left[0, \frac{20}{7}\right): f'(2) = \frac{2}{\sqrt{16+2^2}} - \frac{5-2}{\sqrt{9+(5-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{20}} - \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} - \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}} < 0$$

$$4 \in \left(\frac{20}{7}, 5 \right] : f'(4) = \frac{4}{\sqrt{16+4^2}} - \frac{5-4}{\sqrt{9+(5-4)^2}} = \frac{4}{\sqrt{32}} - \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}\sqrt{2}} > 0$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

Η f έχει ελάχιστο για $x = \frac{20}{7}$, άρα

$$\text{BM} = \frac{20}{7} \text{ μέτρα} .$$

x	0	$\frac{20}{7}$	5
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

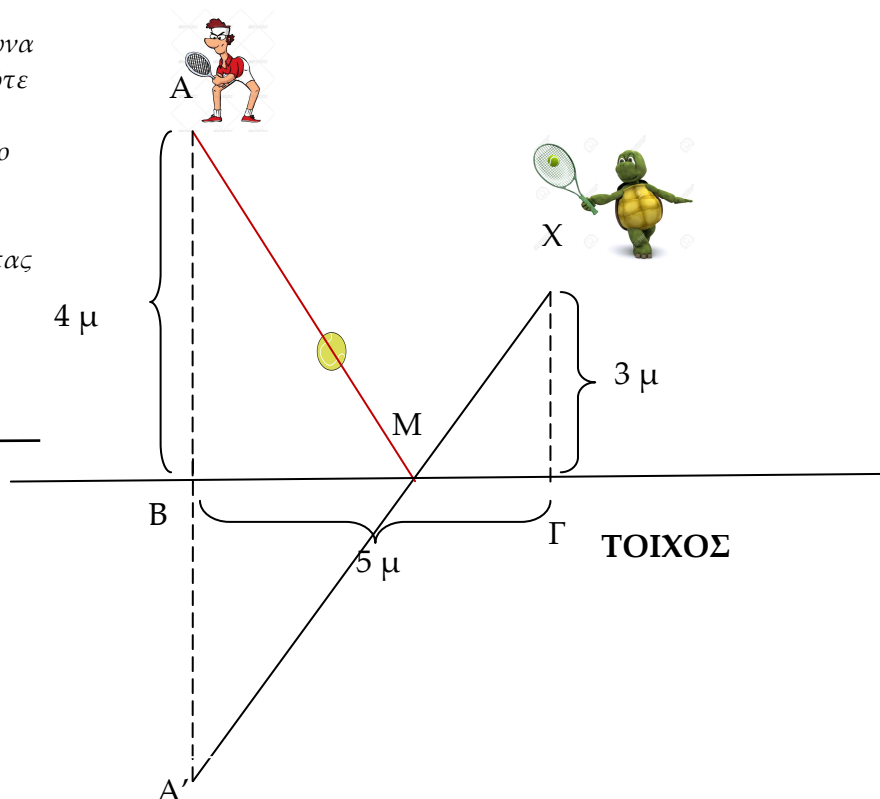
Ελαχ.

Εγώ θα το έλυνα όπως ο Ηρώνας ο Αλεξανδρευσ. Φέρνουμε το συμμετρικό Α' του σημείου Α ως προς τον τοίχο. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α'ΒΜ είναι ίσα άρα ΑΜ=Α'Μ οπότε το ΑΜ+ΜΒ=Α'Μ+ΜΒ .Η Α'ΜΒ είναι μια τεθλασμένη γραμμή ,για να είναι ελάχιστο το άθροισμα Α'Μ+ΜΒ πρέπει τα σημεία Α',Μ,Β να είναι συνευθειακά. Τα τρίγωνα Α'ΒΜ,ΜΧΓ είναι όμοια με λόγους ομοιότητας

$$\frac{BA'}{X\Gamma} = \frac{BM}{M\Gamma} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{x}{5-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20 - 4x = 3x \Leftrightarrow x = \frac{20}{7}$$



Πίθηκος Πινγκ
Πονγκ, γεωμέτρης
την τοποθεσία
Χήρα βοθείας





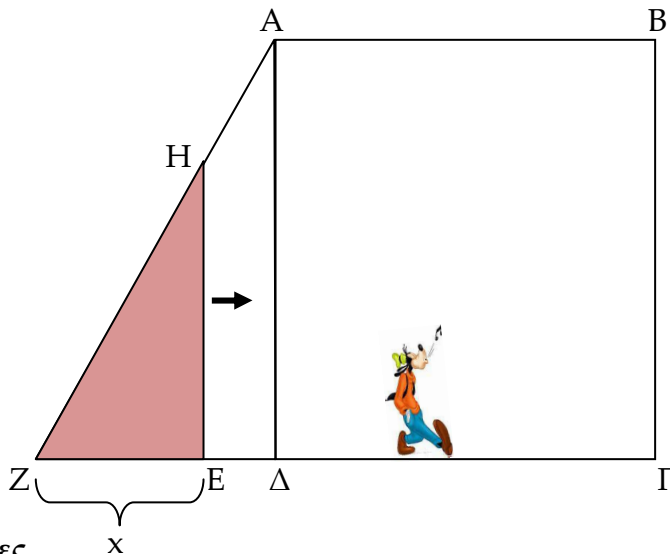
13.(All time classic) Στο παρακάτω σχήμα ισχύει: $Z\Delta=1, Z\Gamma=4, B\Gamma=8, ZE=x$

i. Να αποδείξετε ότι $EH=8x$ για κάθε $x \in (0,1]$.

ii. Να αποδείξετε ότι καθώς το σημείο E κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα $Z\Gamma$, το εμβαδό του χωρίου δίνεται από την συνάρτηση.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 8x-4, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

iii. Να βρείτε όλες τις παράγουσες της συνάρτησης f στο διάστημα $x \in (0,4]$.



iv. Να αποδείξετε ότι όλες οι παράγουσες της συνάρτησης f είναι γνησίως αύξουσες και κυρτές και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της παράγουσας F για την οποία ισχύει:

$$\int_4^1 F(x)dx + 60 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = 0$$

Λύση

i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και ZHE είναι όμοια (Z κοινή γωνία) με λόγους ομοιότητας

$$\frac{EH}{AZ} = \frac{ZE}{Z\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{EH}{8} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow EH = 8x \quad \text{για κάθε } x \in (0,1].$$

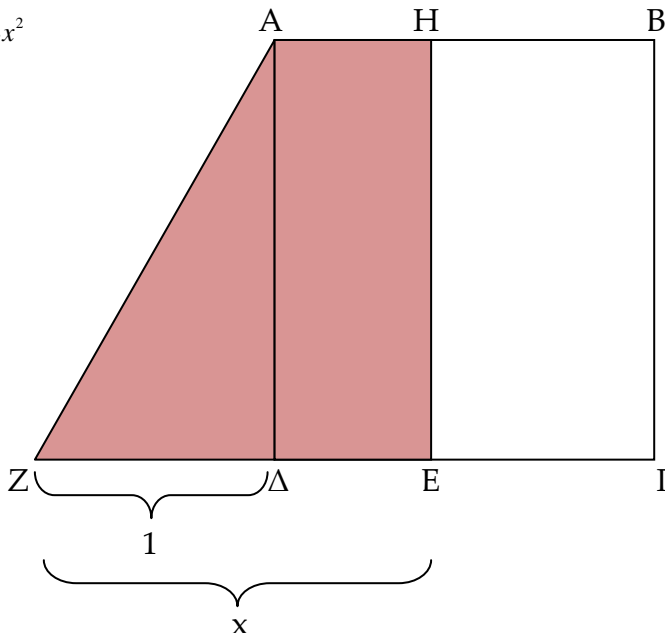
ii. Αν $x \in (0,1]$ τότε το ροζ χωρίο είναι το τρίγωνο ZHE , με εμβαδό:

$$E_{AZE} = \frac{1}{2} 8x^2 = 4x^2$$

Αν $x \in (1,4]$ τότε το ροζ χωρίο είναι το τραπέζιο $ZAHE$, με εμβαδό:

$$E_{ZAHE} = E_{ZAA} + E_{AHEA} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 + (x-1)8 = 8x-4$$

$$\text{Τελικά, } f(x) = \begin{cases} 4x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 8x-4, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$



iii. Οι παράγουσες της συνάρτησης f στο διάστημα $x \in (0,1]$ είναι οι συναρτήσεις της

$$\text{μορφής } \frac{4x^3}{3} + c_1 \quad \text{με } c_1 \in \mathbb{R} \quad \left(\left(\frac{4x^3}{3} + c_1 \right)' = 4x^2 = f(x), x \in (0,1] \right)$$

Οι παράγουσες της συνάρτησης f στο διάστημα $x \in (1,4]$ είναι οι συναρτήσεις της μορφής $4x^2 - 4x + c_2$ με $c_2 \in \mathbb{R}$ $\left((4x^2 - 4x + c_2)' = 8x - 4 = f(x), x \in (1,4] \right)$



Άρα, οι παράγουσες είναι:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{3} + c_1, & 0 < x \leq 1 \\ 4x^2 - 4x + c_2, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Η F είναι παράγουσα της f στο $(1, 4]$ άρα είναι παραγωγίσιμη και

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in (1, 4]$$

Οπότε η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $x_0 = 1$

Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1)$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{4x^3}{3} + c_1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x^2 - 4x + c_2) \text{ ή } c_2 = \frac{4}{3} + c_1$$

Άρα

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{3} + c_1, & 0 < x \leq 1 \\ 4x^2 - 4x + \frac{4}{3} + c_1, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = F'(1) = f(1)$$

Έτσι,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{4x^3}{3} + c_1 - \frac{4}{3} - c_1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 - 4x + \frac{4}{3} + c_1 - \frac{4}{3} - c_1}{x - 1} = 4 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{4x^3}{3} - \frac{4}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 - 4x}{x - 1} = 4 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{4}{3}(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x(x - 1)}{x - 1} = 4 \text{ ή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{4}{3}(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x(x - 1)}{x - 1} = 4 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{3}(x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 4x = 4 \text{ που ισχύει για κάθε } c_1 \in \mathbb{R}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όλες οι παράγουσες της συνάρτησης f στο διάστημα $(0, 4]$ είναι οι συναρτήσεις :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{3} + c, & 0 < x \leq 1 \\ 4x^2 - 4x + \frac{4}{3} + c, & 1 < x \leq 4 \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

ιν. Έχουμε :

$$F'(x) = f(x) = 4x^2 > 0, 0 < x \leq 1$$

$$F'(x) = f(x) = 8x - 4 > 0, 1 < x \leq 4$$

Συνεπώς $F'(x) > 0, 0 < x \leq 4$, οπότε όλες οι παράγουσες της f είναι γνησίως αύξουσες



$$F''(x) = f'(x) = 8x > 0, 0 < x < 1$$

$$F''(x) = f'(x) = 8 > 0, 1 < x \leq 4$$

Επομένως

$$F''(x) > 0, x \in (0,1) \cup (1,4]$$

Όμως η συνάρτηση $F'(x) = f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, διότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 4$$

Άρα η F' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,4]$ και συνεπώς όλες οι παράγουσες της συνάρτησης f είναι κυρτές.

$$\begin{aligned} \int_4^1 F(x) dx &= \int_4^1 (4x^2 - 4x + \frac{4}{3} + c) dx = \left[\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + \frac{4x}{3} + cx \right]_4^1 = \\ &= \left(\frac{4}{3} - 2 + \frac{4}{3} + c \right) - \left(\frac{256}{3} - 32 + \frac{16}{3} + 4c \right) = \frac{4}{3} - 2 + \frac{4}{3} + c - \frac{256}{3} + 32 - \frac{16}{3} - 4c = \\ &= -\frac{264}{3} + 30 - 3c = -88 + 30 - 3c = -58 - 3c \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 4x^2 dx = \left[\frac{4x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{24} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

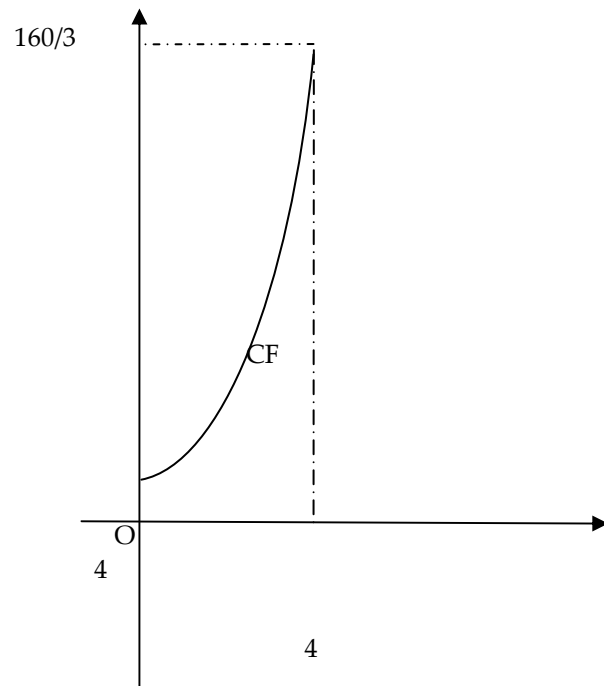
$$\int_4^1 F(x) dx = -60 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \Leftrightarrow -58 - 3c = -60 \cdot \frac{7}{6} \Leftrightarrow -58 - 3c = -70 \Leftrightarrow -3c = -12 \Leftrightarrow c = 4$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{3} + 4, & 0 < x \leq 1 \\ 4x^2 - 4x + \frac{4}{3} + 4, & 1 < x \leq 4 \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

Η F είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο διάστημα $(0,4]$. Επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x^3}{3} + 4 \right) = 4,$$

$$\begin{aligned} F(4) &= 4 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + \frac{4}{3} + 4 = \\ &= 64 - 16 + 4 + \frac{4}{3} = 48 + 4 + \frac{4}{3} = \frac{160}{3} \end{aligned}$$





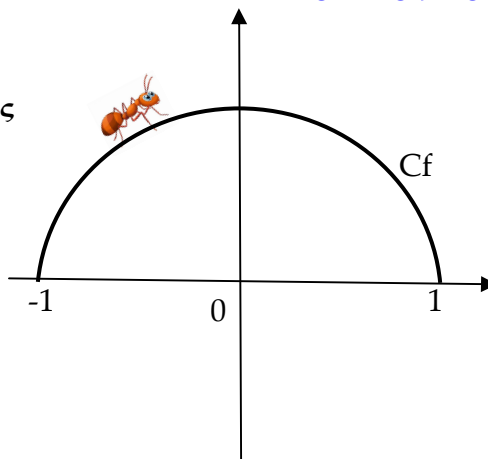
14. Μυρμήγκι...

i. Ένα μυρμήγκι κινείται πάνω σε κλαδί δέντρου που το σχήμα του έχει την μορφή της καμπύλης της C_f με $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

Όταν το μυρμήγκι περνάει από το σημείο $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ η τεταγμένη y

ελαττώνεται με ρυθμό 3 mm/s.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής τη τετμημένης x στην χρονική στιγμή που το μυρμήγκι διέρχεται από το A .



ii. Το ίδιο μυρμήγκι την επομένη μέρα κινείται πάνω σε άλλο κλαδί δέντρου που ένα μέρος του βρίσκεται κάτω από το νερό και έχει την μορφή της καμπύλης της C_g με $g(x) = \ln x$, $x > 0$. Τα σημεία στην επιφάνεια του ποταμιού έχουν τεταγμένη μηδέν. Να αποδείξετε ότι την στιγμή t_0 που το μυρμήγκι βρίσκεται στην επιφάνεια της λίμνης, ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του μυρμηγκιού από την ευθεία $y=x$ είναι ίσο με 0.

Παρατήρηση. Θεωρούμε το μυρμήγκι ως ένα υλικό σημείο της καμπύλης. Το μήκος της τροχιάς μετράται σε mm.

Λύση

i. Είναι $M(x(t), y(t))$ η θέση του μυρμηγκιού συναρτήσει του χρόνου με

$$y(t) = \sqrt{1-x^2(t)} \Leftrightarrow y^2(t) = 1-x^2(t) \quad (1)$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το μυρμήγκι διέρχεται από το A τότε

$$x(t_0) = \frac{1}{2}, y(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}, y'(t_0) = -3 \text{ mm/s}$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς τον χρόνο t .

$$2y(t)y'(t) = -2x(t)x'(t) \Leftrightarrow y(t)y'(t) = -x(t)x'(t)$$

Την χρονική στιγμή t_0 είναι

$$y(t_0)y'(t_0) = -x(t_0)x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(-3) = -\frac{1}{2}x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3\sqrt{3} \text{ mm/sec}$$

ii. Θεωρούμε πάλι $M(x(t), y(t))$ η θέση του μυρμηγκιού συναρτήσει του χρόνου. Η απόσταση του μυρμηγκιού (M) από την ευθεία $y=x \Leftrightarrow x-y=0$, είναι

$$d(t) = \frac{|x(t)-y(t)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow d(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}|x(t)-\ln x(t)| \Leftrightarrow d(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}|x(t)-\ln x(t)|$$

Αλλά $x > \ln x$ για κάθε $x > 0$ (αποδεικνύεται εύκολα αν θέσουμε συνάρτηση ...)

Έτσι «διώχνουμε» την απόλυτη τιμή από την (1) και έχουμε:

$$d(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x(t) - \ln x(t))$$

Έτσι

$$d'(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x(t) - \ln x(t)) \right)' = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x'(t) - \frac{x'(t)}{x(t)} \right)$$

Η απόσταση d ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ είναι

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$





Για $t=t_0$

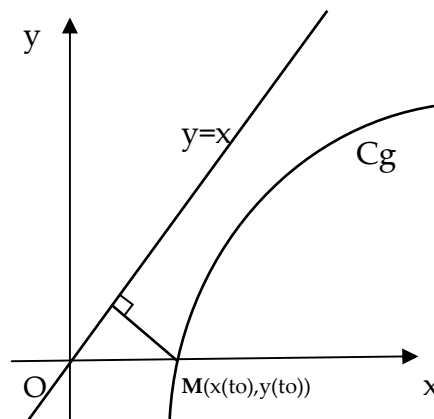
$$d'(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x'(t_0) - \frac{x'(t_0)}{x(t_0)} \right) \quad (2)$$

Την στιγμή το που το μυρμήγκι βρίσκεται στην επιφάνεια της λίμνης είναι η στιγμή που το μυρμήγκι (M) είναι στον άξονα x' άρα:

$$y(t_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x(t_0) = 0 \Leftrightarrow x(t_0) = 1$$

Οπότε η (2) γίνεται

$$d'(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x'(t_0) - \frac{x'(t_0)}{1} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (x'(t_0) - x'(t_0)) = 0$$



15.Μυρμήγκι part II

Μυρμήγκι (M) κινείται πάνω σε κλαδί δέντρου που το σχήμα του έχει την μορφή της καμπύλης της C_f με

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

και η τεταγμένη του M κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = 3t^2 - 2t, t \in [0, 8]$$

Όπου t σε λεπτά και $x(t)$ ε cm. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή, πριν συμπληρωθεί το πρώτο λεπτό της κίνησης του μυρμηγκιού κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του γίνεται ίσος με 2 cm/min.

Λύση

i. Η τεταγμένη του μυρμηγκιού (M) είναι

$$y(t) = e^{x(t)} \text{ για κάθε } t \in [0, 8]$$

Και μεταβάλλεται με ρυθμό

$$y'(t) = (e^{3t^2-2t})' = e^{3t^2-2t} (6t-2), t \in [0, 8]$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 < 1$ τέτοια ώστε

$$y'(t_0) = 2 \Leftrightarrow e^{3t_0^2-2t_0} (6t_0-2) = 2$$

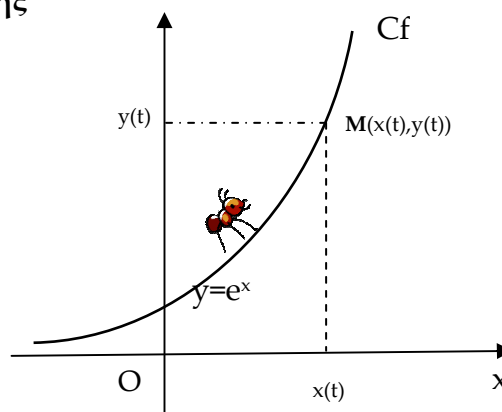
Θεωρούμε συνάρτηση

$$g(t) = e^{3t^2-2t} (6t-2) - 2, t \in [0, 1], \text{ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης,}$$

$$g(0) = -4 < 0, \quad g(1) = e(6-2) - 2 = 4e - 2 > 0 \text{ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει}$$

$t_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$g(t_0) = 0 \Leftrightarrow e^{3t_0^2-2t_0} (6t_0-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{3t_0^2-2t_0} (6t_0-2) = 2$$





16. Μυρμήγκι part III

Μυρμήγκι (Μ) κινείται πάνω σε κλαδί δέντρου που το σχήμα του έχει την μορφή της καμπύλης της Cf με $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$. Ένα δεύτερο μυρμήγκι βρίσκεται στο σημείο $\Pi(2+\ln 2, 1)$. Σε ποιο σημείο της τροχιάς του πρώτου μυρμηγκιού (Μ) η απόσταση μεταξύ τους είναι ελάχιστη.

Λύση

Η θέση του μυρμηγκιού Μ είναι το σημείο $M(x, e^x), x \in \mathbb{R}$ ενώ η θέση του δεύτερου μυρμηγκιού Π είναι το σημείο $\Pi(2+\ln 2, 1)$. Τα δυο μυρμήγκια έχουν απόσταση ΜΠ που δίνεται από τον τύπο

$$d(x) = \sqrt{(x-2-\ln 2)^2 + (e^x - 1)^2}$$

Η $d(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\begin{aligned} d'(x) &= \left(\sqrt{(x-2-\ln 2)^2 + (e^x - 1)^2} \right)' = \frac{\left((x-2-\ln 2)^2 + (e^x - 1)^2 \right)'}{2\sqrt{(x-2-\ln 2)^2 + (e^x - 1)^2}} = \\ &= \frac{2(x-2-\ln 2) + 2(e^x - 1)e^x}{2\sqrt{(x-2-\ln 2)^2 + (e^x - 1)^2}} = \frac{x-2-\ln 2 + (e^x - 1)e^x}{\sqrt{(x-2-\ln 2)^2 + (e^x - 1)^2}} = \\ &= \frac{x-2-\ln 2 + e^{2x} - e^x}{\sqrt{(x-2-\ln 2)^2 + (e^x - 1)^2}} \end{aligned}$$

«Εκθετικό κλαδί;
Τι άλλο θα δω;»



Πίθηκος Πινγκ Πονγκ

Αναζητούμε το πρόσημο του αριθμητή και που μηδενίζεται. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = x - 2 - \ln 2 + e^{2x} - e^x, x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε αρχικά ότι η $g(x) = 0$ έχει προφανή λύση την $x = \ln 2$. Παραγωγίζουμε,

$$g'(x) = (x - 2 - \ln 2 + e^{2x} - e^x)' = 2e^{2x} - e^x + 1 = e^{2x} + e^{2x} - 2\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = e^{2x} + \left(e^x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε η $x = \ln 2$ είναι μοναδική ρίζα άρα η g διατηρεί πρόσημο ως συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, \ln 2), (\ln 2, +\infty)$

Έτσι, αν

$$x = \ln 2 \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} g(x) = 0 \text{ άρα από (1) } d'(x) = 0$$

$$x < \ln 2 \stackrel{g \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} g(x) < 0 \quad \ggg \quad d'(x) < 0$$

$$x > \ln 2 \stackrel{g \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} g(x) > 0 \quad \ggg \quad d'(x) > 0$$

Οπότε, η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x = \ln 2$ και η ελάχιστη τιμή είναι

$$d(\ln 2) = \sqrt{(\ln 2 - 2 - \ln 2)^2 + (e^{\ln 2} - 1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5} \text{ μονάδες μήκους}$$



17.Μυρμήγκι part IV

Τεμπέλικο μυρμήγκι (M1) βολτάρει σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων αλλά κινείται αποκλειστικά στον θετικό ημιάξονα των τετμημένων, δυο άλλα μυρμήγκια (M2,M3) στέκουν ακίνητα ως φρουροί στην είσοδο της αποθήκης της αποικίας στον θετικό ημιάξονα των τεταγμένων με τεταγμένες 1 και 3 αντίστοιχα. Το σύνθημα για να περάσει ένα μυρμήγκι από τους φρουρούς είναι η μέγιστη τιμή της γωνίας $\hat{\theta} = \angle M_2 M_1 M_3$. Ποιο είναι το σύνθημα;

Λύση

Από υπόθεση κατασκευάζουμε σχήμα

$$\text{Για } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{OM_2}{OM_1} = \frac{1}{x},$$

$$\varepsilon\varphi M_3 M_1 O = \frac{OM_3}{OM_1} = \frac{3}{x}$$

Ισχύει

$$\varepsilon\varphi \hat{\theta} = \varepsilon\varphi(M_3 M_1 O - \varphi) = \frac{\varepsilon\varphi M_3 M_1 O - \varepsilon\varphi \varphi}{1 + \varepsilon\varphi M_3 M_1 O \cdot \varepsilon\varphi \varphi} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

$$\text{Άρα } \varepsilon\varphi \hat{\theta} = \frac{2x}{x^2 + 3}, x > 0, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

θέλουμε την μέγιστη γωνία θ ($\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) άρα αρκεί να βρούμε την μέγιστη εφαιπτομένη

διότι η συνάρτηση $\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεπώς αρκεί να θεωρήσουμε

την συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}, x > 0$ και να την μελετήσουμε ως προς τα ακρότατα.

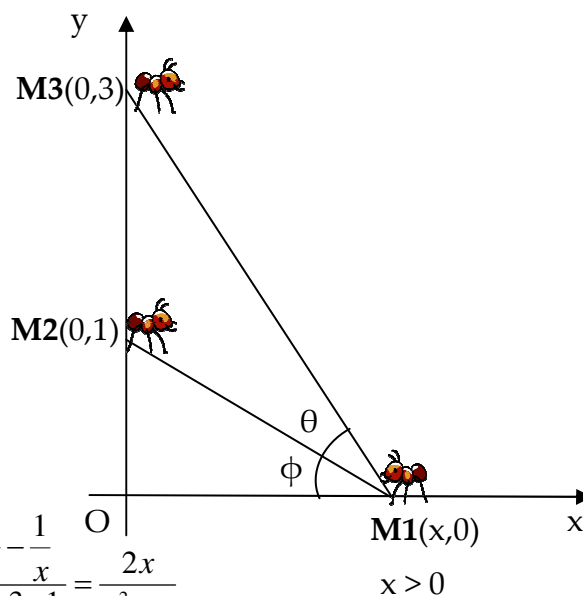
$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 3}\right)' = \frac{(2x)'(x^2 + 3) - (2x)(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2(x^2 + 3) - (2x)(2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6 - 4x^2}{(x^2 + 3)^2} = \frac{6 - 2x^2}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6 - 2x^2}{(x^2 + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}, \text{ κατασκευάζουμε πίνακα πρόσημου για την } f'$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο για $x = \sqrt{3}$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 + 3} = \frac{2\sqrt{3}}{3 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varepsilon\varphi \hat{\theta} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \hat{\theta} \leq \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \hat{\theta} \leq \frac{\pi}{6} \text{ άρα η μέγιστη τιμή της γωνίας } \hat{\theta} \text{ είναι } \frac{\pi}{6}$$



x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘



18. Το σπάνιο είδος νυχτερίδων *Brucolacus Roufiolus* στην νήσο Όρνεο αριθμεί σήμερα 32 χιλιάδες και σε t χρόνια από σήμερα ο πληθυσμός τους $N(t)$ (σε χιλιάδες) μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$N'(t) = 2 \ln 2 \cdot (\alpha - t)N(t), t \geq 0$$

Όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, σταθερός αριθμός. Αν σε ένα χρόνο το πλήθος $N(t)$ είναι μέγιστο

i. Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

ii. Να δείξετε ότι ο πληθυσμός $P(t)$ των νυχτερίδων (σε χιλιάδες) είναι

$$N(t) = 2^{5+2t-t^2}$$



iii. Να δείξετε ότι το παραπάνω είδος νυχτερίδων είναι υπό εξαφάνιση.

Λύση

i. Σε ένα χρόνο το πλήθος $N(t)$ είναι μέγιστο άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat για την συνάρτηση $N(t)$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x=1$, συνεπώς $N'(1) = 0 \Leftrightarrow 2(\alpha - 1)N(1) \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

ii. Για κάθε $t \geq 0$ και $\alpha=1$

$$N'(t) = 2(1-t)N(t) \ln 2 \Leftrightarrow \frac{N'(t)}{N(t)} = \ln 2(2-2t) \Leftrightarrow (\ln N(t))' = (\ln 2 \cdot (2t - t^2))'$$

Από το θεώρημα των ίσων παραγώγων προκύπτει,

$$\ln N(t) = \ln 2 \cdot (2t - t^2) + c \quad (1), \text{ όπου } c \text{ σταθερός πραγματικός αριθμός}$$

Αλλά από υπόθεση $N(0) = 32$

$$\text{Για } t=0 \text{ η (1): } \ln N(0) = \ln 2(2 \cdot 0 - 0^2) + c \Leftrightarrow c = \ln 32$$

Άρα

$$\ln N(t) = \ln 2 \cdot (2t - t^2) + \ln 32 \Leftrightarrow \ln N(t) = \ln 2^{2t-t^2} + \ln 32 \Leftrightarrow$$

$$\ln N(t) = \ln 2^{2t-t^2} + \ln 2^5 \Leftrightarrow \ln N(t) = \ln(2^{2t-t^2} \cdot 2^5) \Leftrightarrow \ln N(t) = \ln(2^{5+2t-t^2}) \Leftrightarrow N(t) = 2^{5+2t-t^2}$$

iii. $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2^{5+2t-t^2} = 2^{-\infty} = 0$, άρα το παραπάνω είδος πτηνών είναι υπό εξαφάνιση.

19. (Εξετάσεις δέση 1998) Έστω η συνάρτηση $\phi(t) = 2t + \mu$ με $t \in \mathbb{R}$ όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές με τον τύπο $E(t) = (t-1)\phi(t)$ με $t \geq 0$, όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη. Το κόστος λειτουργίας $K(t)$ της επιχείρησης δίνεται επίσης σε εκατομμύρια δραχμές, σύμφωνα με τον τύπο $K(t) = \phi(t+4)$ με $t \geq 0$.

i. Να βρείτε την συνάρτηση κέρδους $P(t)$ με $t \geq 0$ όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές.

ii. Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

iii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δευτέρου έτους.

iv. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \frac{111}{2} \int_0^6 P(t) dt$

(Δραχμή (πληθυντικός: δραχμές) νόμισμα, το οποίο χρησιμοποιήθηκε από τον αρχαίο ελληνικό κόσμο αλλά και από το σύγχρονο ελληνικό κράτος ως το 2002).

Λύση

$$\text{i. Είναι } P(t) = E(t) - K(t) = (t-1)\phi(t) - \phi(t+4) = (t-1)(2t+\mu) - (2(t+4)+\mu) = 2t^2 + \mu t - 2t - \mu - 2t - 8 - \mu = 2t^2 + (\mu-4)t - 2\mu - 8$$

Επειδή κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά 12 εκατομμύρια δραχ είναι $P(1) = -12 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^2 + (\mu-4) \cdot 1 - 2\mu - 8 = -12 \Leftrightarrow \mu = 2$

$$\text{Άρα } P(t) = 2t^2 + (2-4)t - 2 \cdot 2 - 8 = 2(t^2 - t - 6), t \geq 0$$



ii. Η επιχείρηση παρουσιάζει κέρδη όταν $P(t) > 0 = 2(t^2 - t - 6) > 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 > 0 \Leftrightarrow t > 3$ ^{$t \geq 0$}
 Άρα, η επιχείρηση θα παρουσιάζει κέρδη μετά το τέλος του τρίτου έτους.

iii. Επειδή $P'(t) = (2(t^2 - t - 6))' = 4t - 2, t \geq 0$

ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του 2^{ου} έτους είναι

$$P'(2) = 4 \cdot 2 - 2 = 6 \text{ εκατ. δρχ}$$

$$\text{iv. } I = \frac{111}{2} \int_0^6 P(t) dt = \frac{111}{2} \int_0^6 (2(t^2 - t - 6)) dt = \dots = 1998$$

20. Α. Η θέση ενός κινητού Α που κινείται σε μια ευθεία δίνεται κάθε χρονική στιγμή από την συνάρτηση θέσης

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 5, \quad t \in [0, 6] \quad (t \text{ σε λεπτά})$$

i. Να βρεθεί η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t=0$

ii. Να βρεθεί η ταχύτητα του κινητού

κάθε χρονική στιγμή, καθώς και η επιτάχυνση του.

iii. Να βρεθούν ποιες χρονικές στιγμές αλλάζει η φορά κίνησης του κινητού.

iv. Ποια χρονικά διαστήματα το κινητό κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά;

v. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διένυσε το κινητό τα πρώτα 6 λεπτά της κίνησης του.

vi. Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του κινητού τα πρώτα 6 λεπτά της κίνησης του.

vii. Σε ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα του κινητού θα έχει μέτρο 9;

viii. Τι εκφράζει η τιμή $|x(6) - x(0)|$;

Β. Ένα δεύτερο κινητό Β κινείται σε μια ευθεία και διανύει την ίδια απόσταση σε μήκος με το κινητό Α (απάντηση στο ερώτημα (Α. v) χωρίς όμωςπισωγυρίσματα με επιτάχυνση 2 m/sec και κάνει χρόνο 4 sec.

i. Να βρεθεί την αρχική ταχύτητα του κινητού Β.

ii. Να βρεθεί η ταχύτητα του κινητού 35 μέτρα πριν το τέλος της διαδρομής.

Λύση

$$\text{Ai. } x(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 5 = -5$$

Aii. Η ταχύτητα του κινητού κάθε χρονική στιγμή t είναι $u(t) = x'(t)$

$$u(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t - 5)' = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3)$$

Η επιτάχυνση του κινητού κάθε χρονική στιγμή t είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας άρα $a(t) = u'(t)$

$$a(t) = u'(t) = x''(t) = (3t^2 - 12t + 9)' = 6t - 12$$

A.iii. Είναι οι χρονικές στιγμές που μηδενίζεται η ταχύτητα και αλλάζει πρόσημο η ταχύτητα

$$u(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ή } t = 3$$

t	0	1	3	6
$u(t)$		+	-	+

Συνεπώς, η φορά κίνησης του κινητού αλλάζει όταν $t = 1$ ή $t = 3$

A.iv. Το κινητό κινείται προς τα δεξιά όταν $u(t) > 0 \Leftrightarrow t \in [0, 1) \cup (3, 6]$

Το κινητό κινείται προς τα αριστερά όταν $u(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (1, 3)$

A.v. Είναι $x(0) = -5, x(1) = -1, x(3) = -5, x(6) = 49$

All time classic





Το συνολικό διάστημα είναι :

$$S = |x(0) - x(1)| + |x(3) - x(1)| + |x(6) - x(3)| = |-5+1| + |-5+1| + |49+5| = 4+4+54 = 62$$

vi. Είναι $\bar{u} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{62}{6} = 10,33$

vii. Είναι

$$u(t) = 9 \Leftrightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 9 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 3 \Leftrightarrow t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ή } t = 4$$

viii. Η τιμή $|x(6) - x(0)| = |49 + 5| = 54$ δείχνει την απόσταση των θέσεων του κινητού τις χρονικές στιγμές $t = 6$ και $t = 0$.

B.i. Έστω $u(t)$ η ταχύτητα του κινητού B την χρονική στιγμή t . Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας άρα $a(t) = u'(t) \Leftrightarrow u'(t) = 2 = (2t)'$

Συνεπώς, υπάρχει σταθερό c τέτοιο ώστε:

$$u(t) = 2t + c, t \geq 0$$

Η ταχύτητα του κινητού B είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης $x(t)$ που διανύει το κινητό B άρα $x'(t) = u(t) \Leftrightarrow x'(t) = 2t + c \Leftrightarrow x'(t) = (t^2 + ct)'$, συνεπώς υπάρχει σταθερό c_1 τέτοιο ώστε:

$$x(t) = t^2 + ct + c_1, t \geq 0$$

Όμως, για $t=0$ ισχύει $x(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$, έτσι

$$x(t) = t^2 + ct, t \geq 0$$

Η συνολική απόσταση που διένυσε το κινητό είναι 62 μέτρα άρα

για $t=4$ ισχύει $x(4) = 62 \Leftrightarrow 4^2 + 4c = 62 \Leftrightarrow 16 + 4c = 62 \Leftrightarrow 16 + 4c = 62 \Leftrightarrow 4c = 46 \Leftrightarrow c = \frac{23}{2}$

$$x(t) = t^2 + \frac{23}{2}t, t \geq 0$$

ii. 35 μέτρα πριν το τέλος της διαδρομής το κινητό έχει διανύσει $62 - 35 = 27$ μέτρα άρα για να βρούμε το χρόνο αρκεί λύσουμε την εξίσωση

$$x(t) = 27 \Leftrightarrow t^2 + \frac{23}{2}t = 27 \Leftrightarrow 2t^2 + 23t = 54 \Leftrightarrow t = 2$$

Η ταχύτητα του κινητού B την χρονική στιγμή $t=2$ είναι $u(2) = 2 \cdot 2 + \frac{23}{2} = \frac{31}{2}$ m/sec

21. Ο Μήτσος έχει πυρετό $37,6^\circ \text{C}$ και για να ρίξει τον πυρετό (στην θερμοκρασία $36,6^\circ \text{C}$) ακολουθεί φαρμακευτική αγωγή με το φάρμακο Sirocol. Είναι γνωστό ότι σε χρόνο $t \geq 0$ ώρες η θερμοκρασία $\Theta(t)$ του Μήτσου μεταβάλλεται με ρυθμό ανάλογο του $1-t$ και ότι η μεγαλύτερη θερμοκρασία που παρουσιάζει, κατά την διάρκεια της αγωγής, είναι $37,6 + \frac{1}{24}$ βαθμούς Κελσίου.

i. Να δείξετε ότι η θερμοκρασία συναρτηθεί του χρόνου δίνεται από την συνάρτηση

$$\Theta(t) = -\frac{t^2}{24} + \frac{1}{12}t + 37,6, t \geq 0$$

ii. Σε πόσες ώρες ο Μήτσος δεν θα έχει πυρετό;

Λύση

i. Ισχύει: $\Theta'(t) = \lambda(1-t), \lambda \in \mathbb{R}^*$ σταθερός άρα $\Theta'(t) = \lambda - \lambda t \Leftrightarrow \Theta'(t) = \left(\lambda t - \frac{\lambda t^2}{2} \right)'$.

Από το θεώρημα των ισών παραγώγων $\Theta(t) = \lambda t - \frac{\lambda t^2}{2} + c$ (1), όπου c σταθερός

πραγματικός αριθμός. Από υπόθεση όμως $\Theta(0) = 37,6$ και από (1) $\Theta(0) = c \Leftrightarrow c = 37,6$

Έστω, $\Theta(t) = \lambda t - \frac{\lambda t^2}{2} + 37,6$, επίσης $\Theta'(t) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda t = 0 \Leftrightarrow \lambda(1-t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$





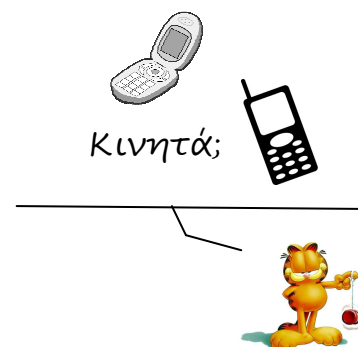
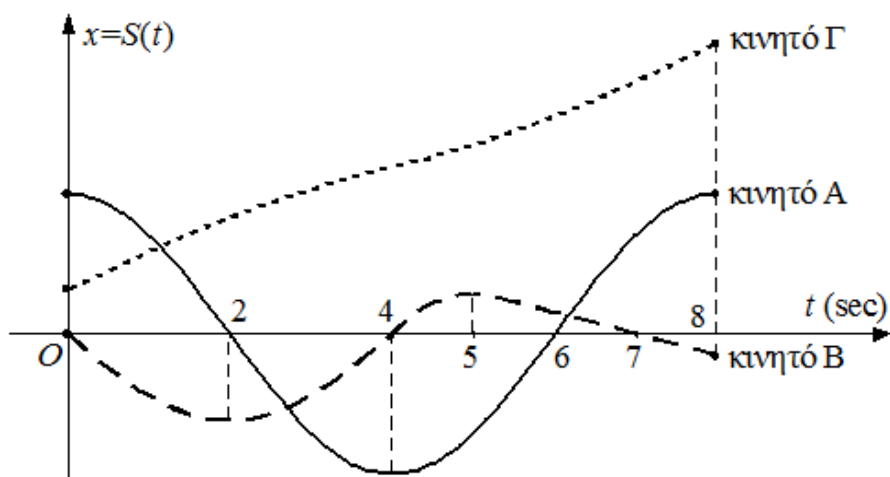
$$\text{Άρα } \Theta(1) = 37,6 + \frac{1}{24} \Leftrightarrow \lambda - \frac{\lambda}{2} + 37,6 = 37,6 + \frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{12}$$

$$\text{Έτσι } \Theta(t) = \frac{1}{12}t - \frac{t^2}{24} + 37,6$$

ii.

$$\Theta(t) = 36,6 \Leftrightarrow \frac{1}{12}t - \frac{t^2}{24} + 37,6 = 36,6 \Leftrightarrow \frac{1}{12}t - \frac{t^2}{24} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t - t^2 + 24 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \text{ } t \geq 0 \text{ } \text{ώρες}$$

22.(ΣΧ.) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 8 sec. Να βρείτε:



- i) Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;
- ii) Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;
- iii) Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ sec}$, ποιο τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ sec}$ και ποιο τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ sec}$;
- iv) Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0sec έως 4sec;
- v) Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;
- vi) Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

Λύση

Καταρχήν να υπενθυμίσουμε ότι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού $S(t)$ δίνει την απόσταση του κινητού από την αρχή του άξονα.

i. Την χρονική στιγμή $t=0$ μόνο το κινητό Β βρισκόταν στο $x=0$ άρα από την αρχή του άξονα κίνησης ξεκίνησε το κινητό Β.

ii. Ένα κινητό κινείται δεξιά, όταν το διάστημα που διανύει διαρκώς αυξάνεται, δηλαδή η $S(t)$ είναι διαρκώς γνησίως αύξουσα. Αυτό συμβαίνει μόνο για το κινητό Γ.

iii. Το κινητό Γ κινείται συνεχώς δεξιά, οπότε δεν άλλαξε φορά κίνησης τις στιγμές $t=2 \text{ sec}$, $t=4 \text{ sec}$ και $t=5 \text{ sec}$. Η συνάρτηση θέσης του κινητού Α είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[4,8]$, οπότε το Α άλλαξε φορά κίνησης μόνο την χρονική στιγμή $t=4 \text{ sec}$.

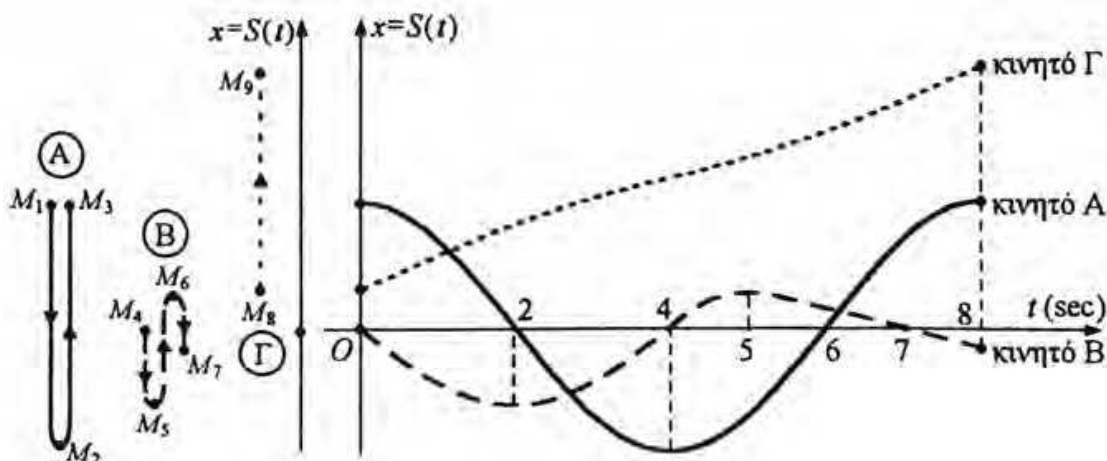
Η συνάρτηση θέσης του κινητού Β στο διάστημα $[0,2]$ είναι γνησίως φθίνουσα, στο διάστημα $[2,5]$ είναι γνησίως αύξουσα και στο $[5,8]$ είναι γνησίως φθίνουσα. Συνεπώς το κινητό Β άλλαξε φορά κίνησης τις χρονικές στιγμές $t=2 \text{ sec}$ και $t=5 \text{ sec}$.



iv. Επειδή η συνάρτηση θέσης του κινητού Α είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,4]$, το κινητό Α κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0 sec έως 4 sec

v. Το κινητό Α τερμάτισε στο σημείο Μ στον άξονα κίνησης, το κινητό Β στο Δ είναι πιο κοντά στην αρχή Ο του άξονα κίνησης, το κινητό Β τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης.

vi.



- Το κινητό Α στο χρονικό διάστημα $[0,4]$ διένυσε την απόσταση M_1M_2 και στο διάστημα $[4,8]$ την ίση απόσταση M_2M_3 άρα το συνολικό διάστημα είναι $2M_1M_2$.
 - Το κινητό Β στο χρονικό διάστημα $[0,2]$ διένυσε την απόσταση M_4M_5 , στο διάστημα $[2,5]$ την απόσταση M_5M_6 και στο διάστημα $[5,8]$ την απόσταση M_6M_7 άρα το συνολικό διάστημα είναι $M_4M_5 + M_5M_6 + M_6M_7$
 - Το κινητό Γ στο χρονικό διάστημα $[0,8]$ διένυσε την απόσταση M_8M_9
- Συγκρίνουμε τα τρία διαφορετικά μήκη βλέπουμε ότι το κινητό Α διένυσε το μεγαλύτερο διάστημα.

23. Α1. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη $[a, \beta]$ συνάρτηση f .

Αν $\gamma \in (\alpha, \beta)$ και $f(\alpha) < f(\gamma), f(\gamma) > f(\beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει

$\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

A2. Ένα ελάφι το οποίο κινείται συνέχεια την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ sec έχει ταχύτητα 2 m/sec , την χρονική στιγμή $t_1 = 20$ sec έχει ταχύτητα 4 m/sec και την χρονική στιγμή $t_2 = 30$ sec έχει ταχύτητα 3 m/sec . Να δείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή κατ' την διάρκεια της κίνησης στο οποία το ελάφι έχει μηδενική επιτάχυνση.

Λύση

A1. Η συνάρτηση f πληροί της προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στα διαστήματα $[a, \gamma], [\gamma, \beta]$ άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \gamma), \xi_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} > 0, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} < 0$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στο $[\xi_1, \xi_2]$ για την f' (συνεχής ως παραγωγίσιμη $f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0$) και προκύπτει το ζητούμενο.

A2. Αν $u(t)$ είναι η ταχύτητα του ελαφιού τότε $u(0) = 2, u(20) = 4, u(30) = 3$ και

Δεν πιστεύω να αρχίσεις πάλι με τα ξ!!





$u(0) < u(20), u(30) < u(20)$ άρα από το ερώτημα Α1 υπάρχει μια χρονική στιγμή t_4 τέτοια ώστε $u'(t_4) = 0 \Leftrightarrow a(t_4) = 0$ (όπου $a(t)$ η επιτάχυνση του ελαφίου)

24.Α1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$. Αν $f(a) > g(a)$ και $f(\beta) < g(\beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Α2. Ένας προσκυνητής ξεκίνησε μια μέρα στις 6 π.μ από τους πρόποδες του βουνού χιλ, περπάτησε χωρίς να σταματήσει και έφτασε στην κορυφή του βουνού στις 4 μ.μ. Προσευχήθηκε όλη την υπόλοιπη μέρα, κοιμήθηκε και την επόμενη μέρα ξεκίνησε πάλι στις 6 π.μ και περπάτησε ακριβώς την ίδια διαδρομή για να επιστρέψει στους πρόποδες του βουνού, ύστερα από 10 ώρες. Η ταχύτητα του προσκυνητή δεν ήταν σταθερή ούτε κατά την άνοδο ούτε κατά την κάθοδο. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής που ο προσκυνητής βρισκόταν την ίδια ώρα και τις δυο μέρες.

Α3. Ο προσκυνητής την τρίτη μέρα ξεκίνησε για το δάσος. Διένυσε μια απόσταση 5 χιλιομέτρων σε 30 λεπτά. Να δείξετε ότι υπάρχει συνεχές τμήμα της διαδρομής, μήκους 1 χιλιομέτρου το οποίο ο προσκυνητής διένυσε σε 5 λεπτά.

Λύση

Α1. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ η οποία είναι συνεχής το $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών. $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(\beta) = f(\beta) - g(\beta) < 0$ άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Bolzano συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

Α2. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που δίνει την απόσταση που βρίσκεται ο προσκυνητής από τους πρόποδες κατά την άνοδο την πρώτη μέρα με $t \in [6, 16]$ και $g(t)$ η συνάρτηση που δίνει την απόσταση βρίσκεται ο προσκυνητής από τους πρόποδες την δεύτερη μέρα κατά την κάθοδο με $t \in [6, 16]$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x), t \in [6, 16]$ τότε

$h(6) = f(6) - g(6) = 0 - A = -A$, όπου A η συνολική απόσταση της διαδρομής

$h(16) = f(16) - g(16) = A - 0 = A$

Η h είναι συνεχής στο $t \in [6, 16]$ και $h(16)h(6) = -A^2 < 0$ άρα από το θεώρημα Bolzano

υπάρχει μια χρονική στιγμή $t_0 \in (6, 16)$ τέτοια ώστε $h(t_0) = 0 \Leftrightarrow f(t_0) - g(t_0) = 0 \Leftrightarrow f(t_0) = g(t_0)$

Α3. Έστω x η απόσταση σε χιλιόμετρα που έχει διανύσει ο προσκυνητής, μετρούμενη από το σημείο εκκίνησης και $f(x)$ ο χρόνος που απαιτείται για να καλύψει την απόσταση από το σημείο x στο σημείο $x+1$, απόσταση που είναι 1 χιλιόμετρο.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει:

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 30$$

Οι αριθμοί $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ δεν μπορούν όλοι να είναι μικρότεροι αλλά ούτε και μεγαλύτεροι του 5.

Επομένως υπάρχουν $a, \beta \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ τέτοιοι, ώστε: $f(a) \leq 5 \leq f(\beta)$

Από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\gamma) = 5$. Συνεπώς ο

προσκυνητής διανύει την απόσταση από το γ στο $\gamma+1$ σε χρόνο 5 λεπτών.



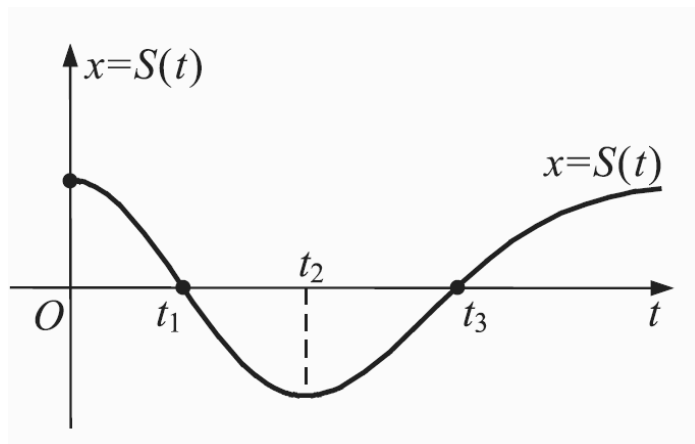
Αν σταματήσω
πρέπει να βγάλω
αλάρι αλλιώς με
πάτησαν!



25. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ που κινείται σε έναν άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 να βρείτε :

i. Πότε το κινητό κινείται κατά την θετική φορά;

ii. Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και ποτέ μειώνεται;



Λύση

i. Επειδή η συνάρτηση S είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, t_2]$ το κινητό για $t \in [0, t_2]$ κινείται κατά την αρνητική φορά. Επειδή η S είναι γνησίως αύξουσα στο $[t_2, +\infty)$, το κινητό για $t \geq t_2$ κινείται κατά την θετική φορά.

ii. Η ταχύτητα του κινητού είναι $v(t) = S'(t)$

- Στο διάστημα $[0, t_1]$, η S στρέφει τα κοίλα κάτω άρα η $S'(t) = v(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Άρα η ταχύτητα στο $[0, t_1]$ μειώνεται.
- Στο διάστημα $[t_1, t_3]$, η S στρέφει τα κοίλα πάνω άρα η $S'(t) = v(t)$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό. Άρα η ταχύτητα στο $[t_1, t_2]$ αυξάνεται.
- Ομοίως η ταχύτητα στο $[t_3, +\infty)$ μειώνεται.

t	0	t_1	t_3	$+\infty$
$v(t)$				

Δηλαδή η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται στο διάστημα $[t_1, t_3]$ και μειώνεται στα διαστήματα $[0, t_1], [t_3, +\infty)$.



26. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 16$ cm και ύψος $AD = 8$ cm. Εγγράφουμε ορθογώνιο $KLMN$ με την πλευρά KL στη $B\Gamma$ και τις κορυφές M και N στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα. Αν το ύψος $NK = x$ του ορθογωνίου αυξάνεται, να βρεθεί τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου αυξάνεται και τότε ελαττώνεται.

Λύση

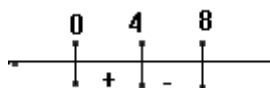
Όπως δείχνει το σχήμα αν y είναι το μήκος της πλευράς MN το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι $E = x \cdot y$. Από τα όμοια τρίγωνα AMN και $AB\Gamma$ (έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία λόγω παραλληλίας των MN και $B\Gamma$) προκύπτει η αναλογία των πλευρών τους

$$\frac{MN}{B\Gamma} = \frac{AS}{AD} \Leftrightarrow \frac{y}{16} = \frac{8-x}{8} \Leftrightarrow y = 2(8-x).$$

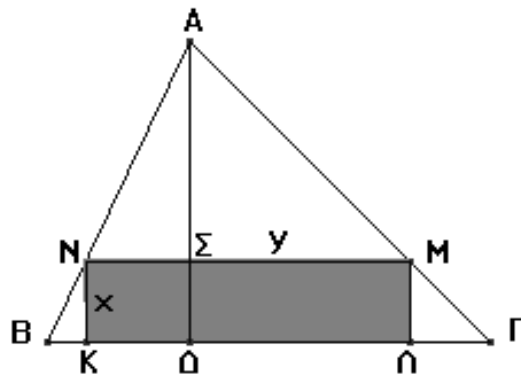
Έτσι το εμβαδόν είναι:

$$E(x) = x \cdot 2(8-x) = 16x - 2x^2.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ως προς την πλευρά x είναι: $E'(x) = x \cdot 2(8-x) = 16 - 4x$



Έτσι το εμβαδόν αυξάνεται όταν η πλευρά x αυξάνει μέχρι 4 cm, και ελαττώνεται όταν η πλευρά x αυξάνει από 4 έως 8 cm.



Με περισσότερα ερωτήματα ελαφρά παραλλαγμένη

27. Στο σχήμα φαίνεται ένα ορθογώνιο $KLMN$ με $KL = x$ cm, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση 4 cm ύψος $AE = 2$ cm.

i. Να αποδείξετε ότι $AD = \frac{x}{2}$ cm για κάθε $x \in (0, 4)$

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in (0, 4)$ το εμβαδό του ορθογωνίου $KLMN$ είναι μέγιστο και ποιο είναι το μέγιστο εμβαδό;

iii. Αν το x μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο με ρυθμό 6 cm/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου $KLMN$ την χρονική στιγμή t_0 κατά τη οποία το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.

Λύση

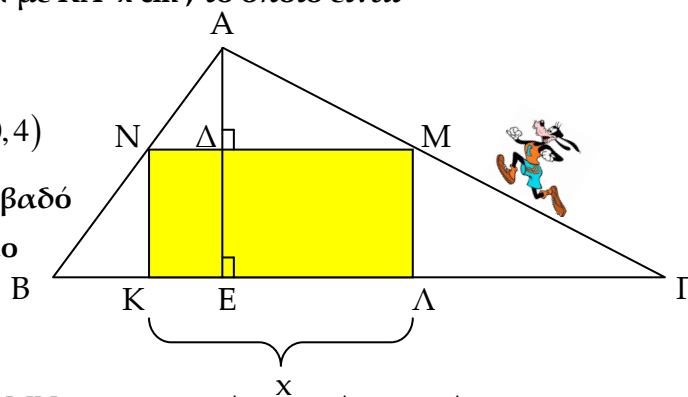
i. Τα τρίγωνα ANM και $AB\Gamma$ είναι όμοια και προκύπτουν οι λόγοι:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{NM}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{KL}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{x}{4}$$

Επίσης από την ομοιότητα των τριγώνων $AN\Delta$ και ABE έχουμε:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{A\Delta}{AE} \Leftrightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{A\Delta}{2}$$

$$\text{Συνεπώς } \frac{A\Delta}{2} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{x}{2}, x \in (0, 4)$$





ii. Οι διαστάσεις του ορθογώνιου ΚΛΜΝ είναι $ΚΛ=x$ cm και $NK = ΔΕ = ΑΕ - ΑΔ = 2 - \frac{x}{2}$ και το εμβαδό Ε είναι:

$$E(x) = x\left(2 - \frac{x}{2}\right) = 2x - \frac{x^2}{2}, x \in (0, 4)$$

Αναζητούμε το μέγιστο της παραπάνω συνάρτησης Ε, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$ ως πολυωνυμική, έτσι: $E'(x) = 2 - x, x \in (0, 4)$

Έτσι:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 - x < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

t	0	2	4
$E'(t)$		+	-
$E(t)$		↗	↘

μέγιστο

Η συνάρτηση Ε παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=2$ το $E(2) = 2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} = 2 \text{ cm}^2$

iii. Την χρονική στιγμή κατά την οποία το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο, έχουμε

$$ΚΛ = ΝΚ \Leftrightarrow x = 2 - \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2x = 4 - x \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

Άρα, από τα δεδομένα μας έχουμε τις συναρτήσεις: πλευρά ορθογώνιου συναρτήσει του χρόνου

$x(t)$, εμβαδό ορθογώνιου συναρτήσει του χρόνου $(E(t) = 2x(t) - \frac{x(t)^2}{2})$, το ρυθμό μεταβολής της

πλευράς του ορθογώνιου $(x'(t) = 6 \text{ cm/sec})$ και την πλευρά την χρονική στιγμή που γίνεται το

ορθογώνιο τετράγωνο $x(t_0) = \frac{4}{3} \text{ cm}$. $E'(t) = 2x'(t) - \frac{2x(t)x'(t)}{2} = 2x'(t) - x(t)x'(t)$ (1)

Για $t = t_0$ η (1) γίνεται: $E'(t_0) = 2x'(t_0) - x(t_0)x'(t_0) = 2 \cdot 6 - \frac{4}{3} \cdot 6 = 12 - 8 = 4 \text{ cm}^2/\text{sec}$





28. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = \frac{\pi}{2}$) το άθροισμα $AB + B\Gamma = \lambda$ παραμένει σταθερό. Να

δείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου γίνεται μέγιστο, τότε και μόνο, όταν η γωνία $AB\Gamma = \theta$ γίνει ίση με 60° .

Λύση

Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = \frac{1}{2}(AB)(A\Gamma)$. Όμως

$(AB) = \alpha \sin \theta$, $(A\Gamma) = \alpha \eta \mu \theta$. Βρίσκουμε

$$E = \frac{1}{2} \alpha^2 \sin \theta \eta \mu \theta = \frac{1}{4} \alpha^2 2 \sin \theta \eta \mu \theta = \frac{1}{4} \alpha^2 \eta \mu 2\theta$$

Η συνθήκη $(AB) + (B\Gamma) = \lambda = \text{σταθ.}$ γίνεται

$$\text{τώρα } \alpha + \alpha \sin \theta = \lambda \text{ και βρίσκουμε } \alpha = \frac{\lambda}{1 + \sin \theta}$$

Προκύπτει τελικά ότι είναι

$$E(\theta) = \frac{\lambda^2}{4} \frac{\eta \mu 2\theta}{(1 + \sin \theta)^2}, \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

Το μέγιστο εμβαδό E αντιστοιχεί λοιπόν στο μέγιστο της συνάρτησης $E(\theta)$, στο διάστημα

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= \left(\frac{\lambda^2}{4} \frac{\eta \mu 2\theta}{(1 + \sin \theta)^2} \right)' = \frac{\lambda^2}{4} \cdot \frac{2 \sin 2\theta (1 + \sin \theta)^2 + \eta \mu 2\theta \cdot 2(1 + \sin \theta) \eta \mu \theta}{(1 + \sin \theta)^4} = \\ &= \frac{2(1 + \sin \theta) \lambda^2}{4(1 + \sin \theta)^4} ((1 + \sin \theta) \sin 2\theta + \eta \mu \theta \eta \mu 2\theta) = \frac{\lambda^2}{2(1 + \sin \theta)^3} ((1 + \sin \theta) \sin 2\theta + \eta \mu \theta \eta \mu 2\theta) = \\ &= \frac{\lambda^2}{2(1 + \sin \theta)^3} (\sin 2\theta + \sin \theta \sin 2\theta + \eta \mu \theta \eta \mu 2\theta) = \frac{\lambda^2}{2(1 + \sin \theta)^3} (\sin 2\theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

(Ισχύει $\sin \theta \sin 2\theta + \eta \mu \theta \eta \mu 2\theta = \sin \theta$)

Προκύπτει

$$E'(\theta) = \frac{\lambda^2}{2(1 + \sin \theta)^3} (\sin 2\theta + \sin \theta) \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin 2\theta + \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin 2\theta = -\sin \theta \Leftrightarrow \sin 2\theta = \sin(\pi - \theta) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

Η $E'(\theta)$ είναι συνεχής στα $(0, \frac{\pi}{3}]$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ άρα διατηρεί πρόσημο, με την μέθοδο των

επιλεγμένων τιμών έχουμε: $\frac{\pi}{4} \in (0, \frac{\pi}{3}] : E'(\frac{\pi}{4}) > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} E'(\theta) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\lambda^2}{2(1 + \sin \theta)^3} (\sin 2\theta + \sin \theta) = \frac{\lambda^2}{2(1 + 0)^3} (-1 + 0) = -\lambda^2 < 0$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] : E'(x_0) < 0$.

Κατασκευάζουμε

τον πίνακα πρόσημου της $E'(\theta)$

και προκύπτει το ζητούμενο.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$E'(\theta)$	+	-	
$E(\theta)$	$\nearrow$	$\searrow$	

Μέγιστο



29. Εκτελούνται μεταφοραί

Ο Μήτσος ιδιοκτήτης και οδηγός της Α.Ε Εκτελούνται μεταφοραί έχει υπολογίσει το κόστος από το μοναδικό φορτηγό που διαθέτει η εταιρεία. Το φορτηγό καταναλώνει 1 λίτρο πετρέλαιο ανά 2 χιλιόμετρα. Η τιμή του πετρελαίου είναι 0,6 ευρώ το λίτρο.



Για κάθε αύξηση της ταχύτητας κατά 1

χιλιόμετρο / ώρα το κόστος καυσίμων αυξάνει

κατά 2%. Η ωριαία αμοιβή του Μήτσου είναι 10

ευρώ και τα λοιπά έξοδα του φορτηγού (συντήρηση, επισκευές, καφέδες Μήτσου) είναι 19,4 ευρώ /ώρα.

i. Αν ο Μήτσος οδηγεί το φορτηγό με σταθερή ταχύτητα 65 km/h. Ποιο είναι το ωριαίο κόστος μετακίνησης του;

ii. Ποιο είναι το ωριαίο κόστος μετακίνησης του φορτηγού όταν κινείται με ταχύτητα v χλμ/ώρα, όπου $v > 60$;

iii.

α. Να αποδείξετε ότι το κόστος μετακίνησης του φορτηγού σε ευρώ, για μια διαδρομή 100 χλμ με ταχύτητα v χλμ/ώρα ($v > 60$) είναι:

$$K(v) = 0,6v - 6 + \frac{2940}{v}$$

β. Με ποια ταχύτητα μεταξύ 55 και 90 χλμ / ώρα πρέπει να κινείται το φορτηγό ώστε η διαδρομή των 100 χλμ να κοστίζει όσο το δυνατό λιγότερο;

Λύση

i. Το φορτηγό κινείται με ταχύτητα 5 χλμ/ώρα μεγαλύτερη από 60 χλμ /ώρα, συνεπώς το κόστος του πετρελαίου ανά 2 χλμ είναι:

$$0,6 + 5 \cdot \frac{2}{100} \cdot 0,6 = 0,6 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,66 \text{ ευρώ}$$

Άρα το κόστος ανά χλμ θα είναι $\frac{0,66}{2} = 0,33$ ευρώ

Όπου το ωριαίο κόστος μετακίνησης του φορτηγού, όταν κινείται με ταχύτητα 65 χλμ/ώρα είναι

$$65 \cdot 0,33 + 10 + 19,4 = 50,85 \text{ ευρώ}$$

ii. Επειδή το φορτηγό έχει ταχύτητα κατά $v - 60$ χλμ/ώρα μεγαλύτερη από 60 χλμ/ώρα, το κόστος ανά 2 χλμ είναι:

$$0,6 + (v - 60) \cdot \frac{2}{100} \cdot 0,6 = 0,6 + (v - 60) \cdot 0,012 = 0,6 + v \cdot 0,012 - 0,72 = 0,012v - 0,12$$

Έτσι το κόστος ανά χλμ είναι

$$\frac{0,012v - 0,12}{2} = 0,006v - 0,06$$

Οπότε το ωριαίο κόστος μετακίνησης του φορτηγού όταν κινείται με ταχύτητα $v > 60$ θα είναι:

$$v(0,006v - 0,06) + 10 + 19,4 = 0,006v^2 - 0,06v + 29,4$$



iii.α. Για να διανύσει το φορτηγό απόσταση 100 χλμ με ταχύτητα v χλμ/ώρα θα χρειαστεί $\frac{100}{v}$ ώρες, έτσι το κόστος μετακίνησης για μια διαδρομή 100 χλμ θα είναι:

$$K(v) = \frac{100}{v}(0,006v^2 - 0,06v + 29,4) = 0,6v - 6 + \frac{2940}{v}$$

Β. Έχουμε

Αρκεί να βρούμε ο ελάχιστο της παραπάνω συνάρτησης στο διάστημα $[55, 90]$

$$K'(v) = \left(0,6v - 6 + \frac{2940}{v}\right)' = 0,6 - \frac{2940}{v^2} = \frac{0,6v^2 - 2940}{v^2}$$

$$K'(v) = 0 \Leftrightarrow \frac{0,6v^2 - 2940}{v^2} = 0 \Leftrightarrow 0,6v^2 - 2940 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{2940}{0,6} \Leftrightarrow v^2 = 4900 \quad v \in [55, 90] \Leftrightarrow v = 70$$

v	55	70	90
$K'(v)$	-		+
$K(\theta)$		↘	↗

ελάχιστο

Άρα το ελάχιστο κόστος διαδρομής των 100 χλμ επιτυγχάνεται όταν το φορτηγό κινείται με ταχύτητα 70 χλμ/ώρα.

30. Μια κωνική δεξαμενή (κορυφή προς τα κάτω) έχει ακτίνα βάσης 12 m και ύψος 4 m. Νερό διαρρέει από τη δεξαμενή με ρυθμό $1 \text{ m}^3 / \text{min}$, και νερό εισρρέει στη δεξαμενή έτσι ώστε η επιφάνεια του νερού να ανεβαίνει με ταχύτητα $\frac{1}{\pi} \text{ m} / \text{min}$. Να

βρεθεί με τι ρυθμό εισρρέει νερό στη δεξαμενή τη χρονική στιγμή που το βάθος του νερού στην δεξαμενή είναι 0,8 m.

Λύση

Αν $x \text{ m}^3 / \text{min}$ είναι ο ρυθμός του νερού που εισρρέει στη δεξαμενή επειδή η επιφάνεια του νερού ανεβαίνει ο ρυθμός του νερού που διαρρέει θα είναι $x > 1$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού θα είναι $V'(t) = x - 1 \text{ m}^3 / \text{sec}$.

Ο όγκος του νερού μέσα στη δεξαμενή είναι $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$ (όγκος κώνου).

Από τα όμοια τρίγωνα KPB και KOA

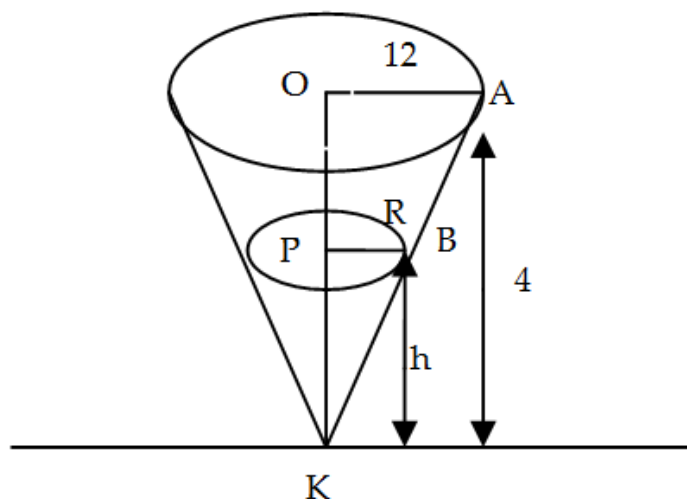
$$\text{έχουμε: } \frac{KP}{KO} = \frac{PB}{OA} \Leftrightarrow \frac{h}{4} = \frac{R}{12} \Leftrightarrow R = 3h.$$

Έτσι ο όγκος γίνεται:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 9h^2 \cdot h = 3\pi h^3 \text{ ή } V(t) = 3\pi \cdot h^3(t).$$

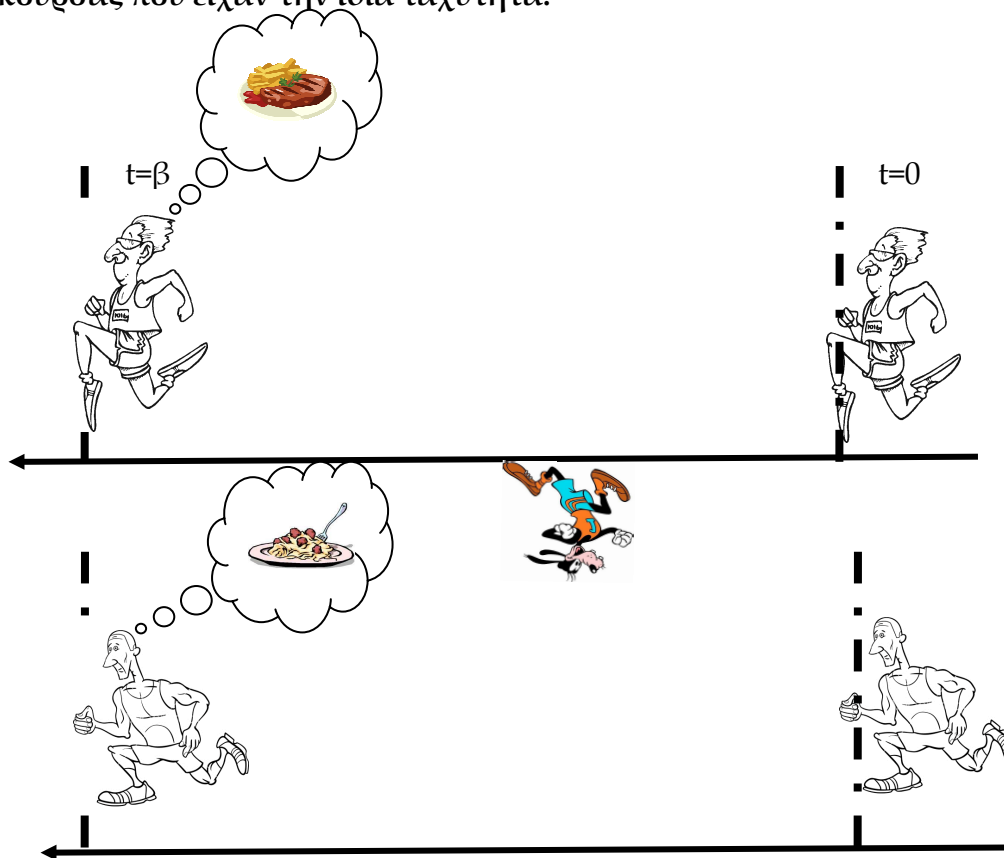
Με παραγωγή ως προς t είναι: $V'(t) = 9\pi h^2(t) \cdot h'(t)$, και με αντικατάσταση των γνωστών

$$\text{μεγεθών } x - 1 = 9\pi \cdot 0,8^2 \cdot \frac{1}{\pi}, x = 9 \cdot 0,8^2 + 1 = 6,76 \text{ m}^3 / \text{min}.$$





31. Αν ο Βρασίδας και ο Φιλώτας, δυο δρομείς, σε ένα αγώνα δρόμου τερματίζουν ταυτόχρονα, να αποδείξετε ότι υπάρχει μια, τουλάχιστον, στιγμή κατά την διάρκεια της κούρσας που είχαν την ίδια ταχύτητα.



Λύση

Αν $f(t)$ η θέση κάθε χρονική στιγμή t , του Βρασίδα και $f'(t)$ η ταχύτητα του. Αν τώρα $g(t)$ η θέση την κάθε χρονική στιγμή t , του Φιλώτα και $g'(t)$ η ταχύτητα του. Γνωρίζουμε ότι ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή $t=0$ και τερματίζουν μαζί μετά από χρόνο β , άρα ισχύουν $f(0) = g(0)$, $f(\beta) = g(\beta)$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια, τουλάχιστον, στιγμή t_0 κατά την διάρκεια της κούρσας που είχαν την ίδια ταχύτητα, δηλαδή $f'(t_0) = g'(t_0)$. Θεωρούμε συνάρτηση $h(t) = f(t) - g(t)$ στο διάστημα $(0, \beta)$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0, \beta]$
- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \beta)$
- $h(0) = f(0) - g(0) = 0$, $h(\beta) = f(\beta) - g(\beta) = 0$

Άρα ισχύει το θεώρημα Rolle, οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $t_0 \in (0, \beta)$ τέτοιο ώστε $h'(t_0) = 0 \Leftrightarrow f'(t_0) - g'(t_0) = 0 \Leftrightarrow f'(t_0) = g'(t_0)$, που είναι και το ζητούμενο.



32. Ένα πρόβλημα φιλοζωικού περιεχομένου

Ο Τοτός οδηγεί το αυτοκίνητο του και κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα 30 m/sec. Ξαφνικά, βλέπει, από μακριά μια γάτα στο μέσο του οδοστρώματος, πατάει φρένο και μειώνει την ταχύτητα του συνεχώς με μια επιβράδυνση 60 m/sec^2 σε χρόνο $t \text{ sec}$ αμέσως μετά που πάτησε το φρένο. Αν η γάτα απείχε από το αυτοκίνητο από την χρονική στιγμή που πάτησε το φρένο 19 μέτρα θα έχει ακινητοποιηθεί το αυτοκίνητο πριν την χτυπήσει;



Λύση

Έστω ότι σε χρόνο $t \text{ sec}$ αμέσως μετά το πάτημα των φρενών το αυτοκίνητο έχει ταχύτητα $v(t)$, επιβράδυνση $a(t) = -60t$ και έστω ότι έχει διανύσει διάστημα $s(t)$.

Ισχύει:

$$a(t) = -60t \Leftrightarrow v'(t) = (-60t)' \Leftrightarrow v(t) = -30t^2 + c \quad (1)$$

Επειδή $v(0) = 30$. Η (1) γίνεται για $t=0$: $v(0) = -30 \cdot 0^2 + c \Leftrightarrow c = 30$

$$\text{Άρα } v(t) = -30t^2 + 30$$

$$v(t) = -30t^2 + 30 \Leftrightarrow s'(t) = (-10t^3 + 30t)' \Leftrightarrow s(t) = -10t^3 + 30t + c_1 \quad (2)$$

Επειδή $s(0) = 0$ Η (2) γίνεται για $t=0$: $s(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$

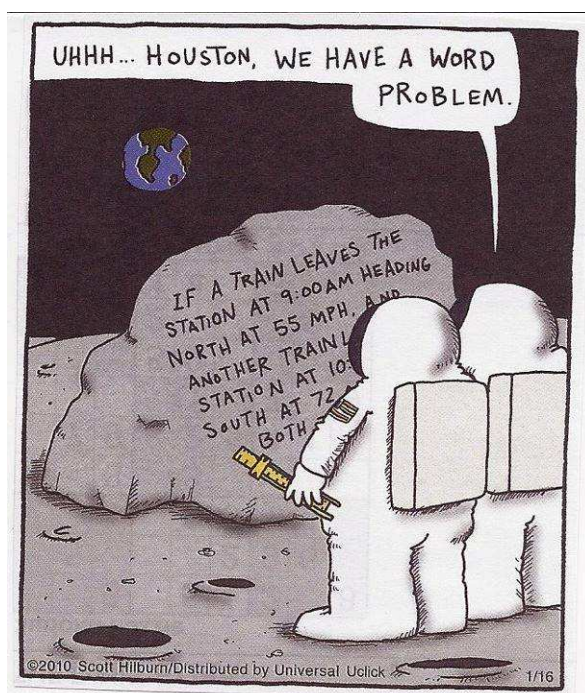
$$\text{Έτσι } s(t) = -10t^3 + 30t$$

Το αυτοκίνητο ακινητοποιείται όταν $v(t) = 0 \Leftrightarrow -30t^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ sec}$

Άρα έχει διανύσει διάστημα $s(1) = -10 \cdot 1^3 + 30 \cdot 1 = 20$ μέτρα.

Δεδομένου ότι η γάτα δεν θα έχει φύγει από το οδόστρωμα, προφανώς μιλάμε για μια γάτα με αυτοκτονικές τάσεις, το αυτοκίνητο θα την..χτυπήσει.

YOU G * WMM
88 0000 !!!





33. Η οθόνη ενός υπολογιστή έχει σχήμα ορθογωνίου, περίμετρο 10 cm και διαγώνιο δ cm. Αν συμβολίσουμε με θ την μια από τις γωνίες που σχηματίζει η διαγώνιος δ με μια πλευρά την οθόνης.

i. Να δείξετε ότι το μήκος της διαγώνιου δ συναρτήσει της γωνίας θ δίνεται από την συνάρτηση

$$\delta(\theta) = \frac{5}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

ii. Να υπολογίσετε την γωνία θ έτσι ώστε η διαγώνιος δ να γίνεται ελάχιστη και να βρείτε την ελάχιστη τιμή.
Λύση

i. Αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Η περίμετρος του ορθογωνίου

$$\text{είναι } 2x + 2y = 10 \Leftrightarrow x + y = 5 \quad (1)$$

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\delta} \Leftrightarrow y = \delta\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\delta} \Leftrightarrow x = \delta\sigma\upsilon\nu\theta$$

με αντικατάσταση στην (1)

$$x + y = 5 \Leftrightarrow \delta\sigma\upsilon\nu\theta + \delta\eta\mu\theta = 5 \Leftrightarrow \delta(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta) = 5 \Leftrightarrow \delta = \frac{5}{\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta}.$$

Τελικά

$$\delta(\theta) = \frac{5}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{ii. } \delta'(\theta) = \left(\frac{5}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta} \right)' = - \frac{5}{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2} (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)' = - \frac{5(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)}{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ισχύει:

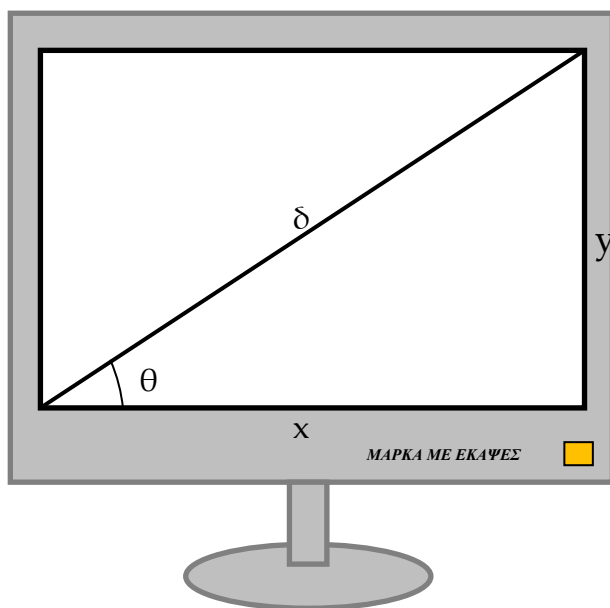
$$\delta'(\theta) = 0 \Leftrightarrow - \frac{5(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)}{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2} = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\delta'(\theta) > 0 \Leftrightarrow - \frac{5(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)}{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2} > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta < \eta\mu\theta \Leftrightarrow \epsilon\phi\theta > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\delta'(\theta) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, εκεί είναι

$$\delta\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + \eta\mu\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$





Πινγκ Πονγκ

34.Ο γορίλας Πινγκ πονγκ είναι φιλότεχνος, πήγε στο μουσείο και θαύμαζε τα εκθέματα, μεγαλύτερη εντύπωση του έκανε ο πίνακας του ιμπρεσιονιστή ζωγράφου Λένου Πινέλου με τίτλο «Μ....μπλε». Ο πίνακας έχει ύψος 75 cm και είναι αναρτημένος 2 μέτρα από το πάτωμα .Ο γορίλας έχει ύψος 1,75 cm .Η γωνία που σχηματίζει το μάτι του Πινγκ Πονγκ με τις οριζόντιες άκρες του πίνακα (σχήμα)

i.Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γωνίας ω ως συνάρτηση της απόστασης x του Πινγκ πονγκ από τον τοίχο που βρίσκεται ο πίνακας δίνεται από την σχέση:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{75x}{x^2 + 2500}, x > 0$$

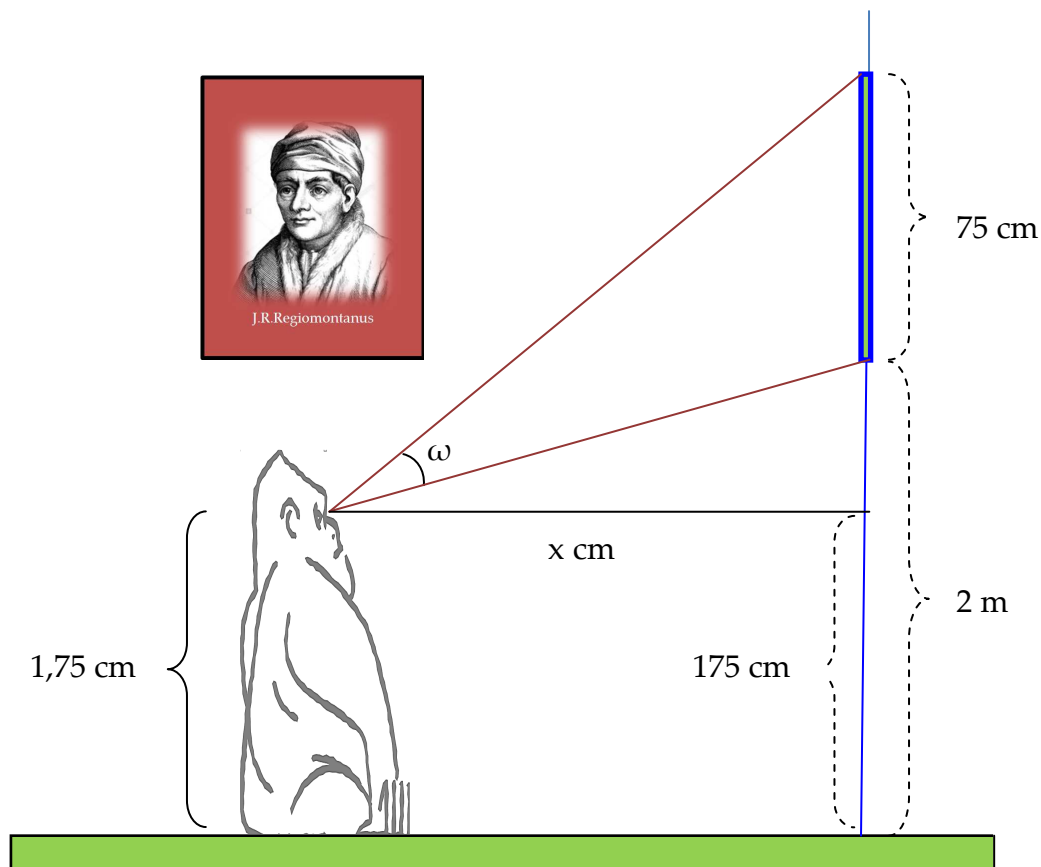
ii. Αν $x(t)$ η απόσταση του Πινγκ πονγκ από τον τοίχο συναρτήσει του χρόνου t ($t > 0$) να εκφράσετε ως συνάρτηση του $x(t)$ τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η γωνία ω , αν ο γορίλας πλησιάζει από μακριά τον πίνακα με ταχύτητα 1m/sec.

iii.Να βρείτε την θέση από την οποία ο γορίλας βλέπει τον πίνακα υπό την μέγιστη γωνία.

iv.Ποια είναι η μέγιστη γωνία ,με την οποία ο γορίλας βλέπει τον πίνακα;
Ο γορίλας είτε καθιστός είτε όρθιος βλέπει από το ίδιο ύψος.

$$(\varepsilon\varphi 37^\circ \approx \frac{3}{4})$$

(Regiomontanus problem)





Λύση

i. Από τα δεδομένα του προβλήματος και το παρακάτω σχήμα

 $\omega = \theta - \phi$, άρα

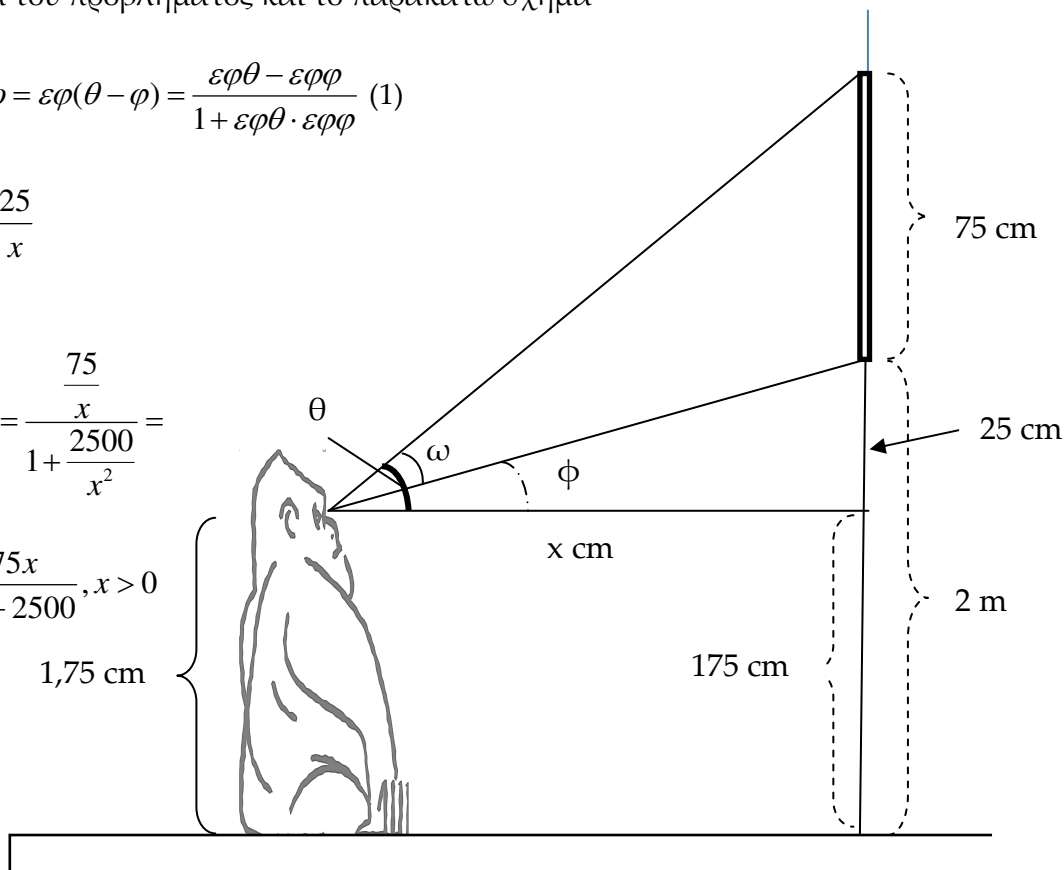
$$\varepsilon\phi\omega = \varepsilon\phi(\theta - \phi) = \frac{\varepsilon\phi\theta - \varepsilon\phi\phi}{1 + \varepsilon\phi\theta \cdot \varepsilon\phi\phi} \quad (1)$$

Επίσης

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{100}{x}, \varepsilon\phi\phi = \frac{25}{x}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \varepsilon\phi\omega &= \frac{\frac{100}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{100}{x} \cdot \frac{25}{x}} = \frac{\frac{75}{x}}{1 + \frac{2500}{x^2}} = \\ &= \frac{\frac{75}{x}}{\frac{x^2 + 2500}{x^2}} = \frac{75x}{x^2 + 2500}, x > 0 \end{aligned}$$



ii. Αν $x(t)$ η απόσταση του πινγκ πονγκ από τον τοίχο συναρτήσει του χρόνου t ($t > 0$) με $x'(t) = 1 \text{ m/sec} = 100 \text{ cm/sec}$ η σχέση γίνεται:

$$\varepsilon\phi(\omega(t)) = \frac{75x(t)}{(x(t))^2 + 2500}, x > 0$$

Παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο t ,

$$(\varepsilon\phi(\omega(t)))' = \left(\frac{75x(t)}{(x(t))^2 + 2500} \right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon^2\nu\omega(t)} \omega'(t) = \frac{75x'(t)((x(t))^2 + 2500) - 75x(t)(2x(t)x'(t))}{((x(t))^2 + 2500)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon^2\nu\omega(t)} \omega'(t) = 75x'(t) \frac{2500 - x^2(t)}{((x(t))^2 + 2500)^2} \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon\phi^2\omega(t) + 1)\omega'(t) = 75x'(t) \frac{2500 - x^2(t)}{((x(t))^2 + 2500)^2} \Leftrightarrow$$

$$\omega'(t) = 75x'(t) \frac{2500 - x^2(t)}{((x(t))^2 + 2500)^2} \cdot \frac{1}{(\varepsilon\phi^2\omega(t) + 1)} \quad x'(t) = 100 \text{ cm/sec} \Leftrightarrow$$

$$\omega'(t) = 7500 \frac{2500 - x^2(t)}{((x(t))^2 + 2500)^2} \cdot \frac{1}{(\varepsilon\phi^2\omega(t) + 1)} \Leftrightarrow$$



$$\omega'(t) = 7500 \frac{2500 - x^2(t)}{\left((x(t))^2 + 2500\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{75x(t)}{(x(t))^2 + 2500}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\omega'(t) = 7500 \frac{2500 - x^2(t)}{\left((x(t))^2 + 2500\right)^2} \cdot \frac{1}{\frac{(75x(t))^2 + ((x(t))^2 + 2500)^2}{((x(t))^2 + 2500)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\omega'(t) = 7500 \frac{2500 - x^2(t)}{\left((x(t))^2 + 2500\right)^2} \cdot \frac{((x(t))^2 + 2500)^2}{(75x(t))^2 + ((x(t))^2 + 2500)^2} \Leftrightarrow$$

$$\omega'(t) = 7500 \frac{2500 - x^2(t)}{(75x(t))^2 + ((x(t))^2 + 2500)^2} \text{ rad / sec, } t > 0$$

$$\omega'(100) = \dots$$

iii. $\varepsilon\varphi\omega = \frac{75x}{x^2 - 2500}$, $x > 0$, θέλουμε την μέγιστη γωνία ω ($\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) από την οποία ο γορίλας βλέπει τον πίνακα άρα αρκεί να βρούμε την μέγιστη εφαιπτόμενη διότι η συνάρτηση $\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα αρκεί να θεωρήσουμε την

συνάρτηση $f(x) = \frac{75x}{x^2 + 2500}$, $x > 0$ και να την μελετήσουμε ως προς τα ακρότατα.

$$f'(x) = \left(\frac{75x}{x^2 + 2500}\right)' = \dots = 75 \frac{2500 - x^2}{(x^2 + 2500)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 75 \frac{2500 - x^2}{(x^2 + 2500)^2} = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 50 \text{ cm}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 50$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 50$$

x	0	50	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

μέγιστο

Άρα όταν ο γορίλας βρίσκεται 50 cm από τον τοίχο, βλέπει τον πίνακα υπό την μέγιστη γωνία.

iv. Για $x=50$ έχουμε την μέγιστη εφαιπτόμενη άρα και λόγω της μονοτονίας την μέγιστη

γωνία άρα ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega_{\max}) = f(50) = \frac{75 \cdot 50}{50^2 + 2500} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, τελικά $\omega = 37^\circ$

Πρέπει να θυμάσαι

$$\bullet \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\bullet \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\bullet \varepsilon\varphi^2 x + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\bullet \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\bullet \varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$





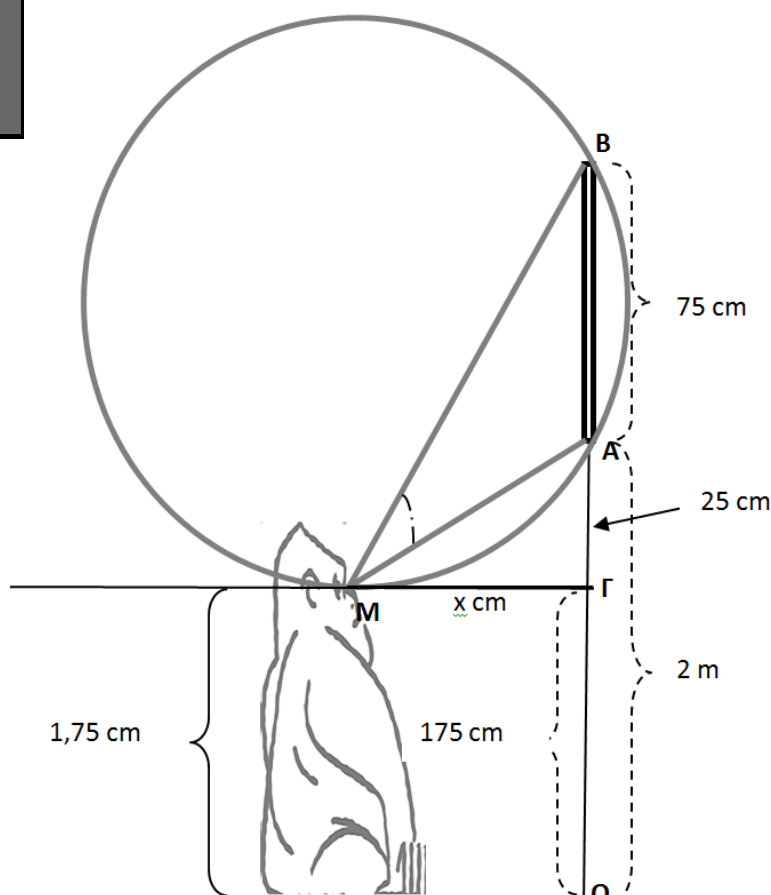
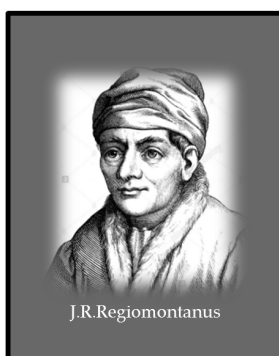
Το αρχικό πρόβλημα είχε διατυπωθεί το 1471 από τον Γερμανό μαθηματικό Regiomontanus και είχε αρχική διατύπωση :

«Από ποιο σημείο του εδάφους φαίνεται μεγαλύτερη μια ράβδος ανηρτημένη κατακόρυφα ,δηλαδή φαίνεται από την μεγαλύτερη γωνία;»

Υπάρχει η πεποίθηση ότι πρόκειται για το πρώτο πρόβλημα ακρότατων μετά την αρχαιότητα. Πως βρίσκουμε το επίμαχο σημείο;

Κατασκευάζουμε κύκλο που διέρχεται από τα σημεία A,B και εφάπτεται στην ευθεία (ε) στο σημείο επαφής O .Από την δύναμη σημείο σε κύκλο θα ισχύει $(OA)(OB)=(OM)^2$ δηλαδή $x = \sqrt{(OA)(OB)} = \sqrt{25 \cdot 100} = 50 \text{ cm}$.

Λεπτομερής ιστορική αναφορά και απόδειξη θα ανεβάσω στο ιστολόγιο.





35.A1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1), x \geq 0$$

Ήταν κάποιος που νόμιζε
ότι ήταν αστείος....

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

A2. Το πλήθος των κολοβακτηριδίων *Politicus Arpacticus* κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ μεταβάλλεται με ρυθμό

$$K'(t) = L \cdot \left(\frac{2}{t(2t+1)} - \frac{\ln(2t+1)}{t^2} \right)$$



Όπου L θετική σταθερά που εξαρτάται από την περιρρέουσα πολιτική ατμόσφαιρα.

i. Να δείξετε ότι το πλήθος $K(t)$ συνεχώς μειώνεται.

ii. Να βρεθεί το πλήθος των κολοβακτηριδίων $K(t), t \geq 0$ αν είναι γνωστό ότι

$$K(1) = L \ln 3 + 1974.$$

iii. Να βρεθεί το πλήθος $K(t)$ των κολοβακτηριδίων σε «άπειρο» χρόνο ($t \rightarrow +\infty$) και αμέσως μόλις άρχισε η ιστορία ($t \rightarrow 0$).

Λύση

A1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ έτσι

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \right)' = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{(x+1)^2} \leq 0, (x \geq 0)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

A2.i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $K'(t) < 0$, δηλαδή

$$L \cdot \left(\frac{2}{t(2t+1)} - \frac{\ln(2t+1)}{t^2} \right) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{t(2t+1)} - \frac{\ln(2t+1)}{t^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{t(2t+1)} < \frac{\ln(2t+1)}{t^2} \Leftrightarrow$$

$$2t < (2t+1)\ln(2t+1) \Leftrightarrow \frac{2t}{2t+1} < \ln(2t+1) \Leftrightarrow \frac{2t}{2t+1} - \ln(2t+1) < 0 \Leftrightarrow f(2t) > f(0)$$

Η τελευταία ισχύει καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα από το ερώτημα A1.

ii. Για κάθε $t > 0$

$$K'(t) = L \cdot \left(\frac{2}{t(2t+1)} - \frac{\ln(2t+1)}{t^2} \right) \Leftrightarrow K'(t) = L \cdot \left(\frac{2t}{t^2(2t+1)} - \frac{(2t+1)\ln(2t+1)}{(2t+1)t^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K'(t) = L \cdot \left(\frac{2t - (2t+1)\ln(2t+1)}{t^2(2t+1)} \right) \Leftrightarrow K'(t) = L \cdot \left(\frac{\frac{2}{(2t+1)}t - \ln(2t+1)}{t^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$K'(t) = L \cdot \left(\frac{(\ln(2t+1))'t - \ln(2t+1)(t)'}{t^2} \right) \Leftrightarrow K'(t) = L \cdot \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right)' \Leftrightarrow K'(t) = \left(L \cdot \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right) \right)'$$

Από το θεώρημα των ίσων παραγώγων

$$K(t) = L \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right) + c, c \text{ πραγματική σταθερά}$$

$$\text{Όμως } K(1) = L \cdot \ln 3 + 1974 \text{ άρα } K(1) = L \cdot \left(\frac{\ln(2 \cdot 1 + 1)}{1} \right) + c \Leftrightarrow L \cdot \ln 3 + 1974 = L \cdot \ln 3 + c \Leftrightarrow c = 1974$$

$$\text{Τελικά } K(t) = L \cdot \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right) + 1974$$

$$\text{iii. } \bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(L \cdot \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right) + 1974 \right)$$

$$\text{Όμως } \lim_{t \rightarrow +\infty} L \cdot \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right) \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} L \cdot \frac{(\ln(2t+1))'}{t'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} L \cdot \left(\frac{\frac{2}{2t+1}}{1} \right) = 0$$



Τελικά $\lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = 1974$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0} K(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(L \cdot \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right) + 1974 \right)$$

$$\text{Όμως } \lim_{t \rightarrow 0} L \cdot \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} L \cdot \frac{(\ln(2t+1))'}{t'} = \lim_{t \rightarrow 0} L \cdot \left(\frac{\frac{2}{2t+1}}{1} \right) = 2L$$

Τελικά $\lim_{t \rightarrow 0} K(t) = 1974 + 2L$

36.(Εξετάσεις 2000) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta} \right)^2}, \quad t \geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(t) = \frac{\alpha \cdot \left[1 + \left(\frac{t}{\beta} \right)^2 \right] - \alpha t \cdot 2 \frac{t}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta}}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta} \right)^2 \right]^2} = \frac{\alpha \left[1 - \left(\frac{t}{\beta} \right)^2 \right]}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta} \right)^2 \right]^2}, \quad t \geq 0$$

α) Αφού σε $t = 6$ ώρες επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή $f(t) = 15$ μονάδες, θα έχουμε:

$$\begin{cases} f(6) = 15 \\ f'(6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6\alpha}{1 + \frac{36}{\beta^2}} = 15 \\ \alpha \left[1 - \frac{6^2}{\beta^2} \right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \frac{540}{\beta^2} \\ -\frac{36}{\beta^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \frac{540}{36} \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 30 \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = \pm 6 \end{cases}$$

Αφού $\beta > 0$, η τιμή $\beta = -6$ απορρίπτεται, άρα $\beta = 6$. Επομένως: $f(t) = \frac{5t}{1 + \frac{t^2}{36}} = \frac{180t}{36 + t^2}, \quad t \geq 0$

β) Αφού το φάρμακο έχει αποτελεσματική δράση όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, αναζητούμε τις τιμές του t , έτσι ώστε: $f(t) \geq 12$, με $t \geq 0$.

Τότε:

$$\frac{180t}{36 + t^2} \geq 12 \Leftrightarrow 180t \geq 432 + 12t^2 \Leftrightarrow 0 \geq 12t^2 - 180t - 432 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 12$$

Άρα το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από 3 ώρες έως 12 ώρες.



37. Ένα δοκάρι στηρίζεται στο έδαφος και στον τοίχο, σχηματίζοντας γωνία θ με το έδαφος, και γωνία ϕ με τον τοίχο. Αν η δοκός αρχίσει να γλιστράει επί του εδάφους, ναδειχτεί ότι ο ρυθμός αύξησης της γωνίας ϕ είναι ίδιος με τον ρυθμό ελάττωσης της γωνίας θ .

Λύση

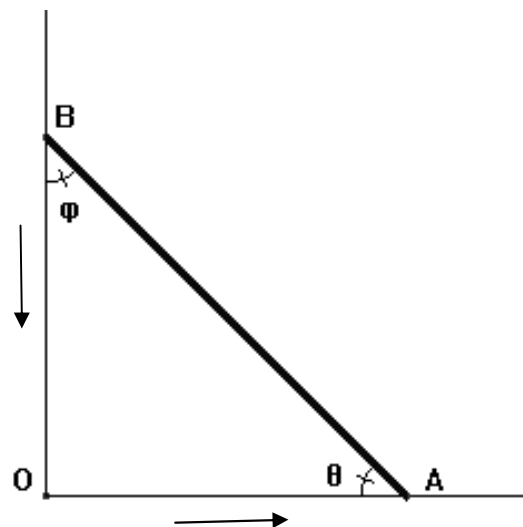
Όπως δείχνει το σχήμα στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB οι γωνίες θ και ϕ είναι συμπληρωματικές, οπότε ισχύει $\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\phi$ ή ως συναρτήσεις του χρόνου $\eta\mu\theta(t) = \sigma\upsilon\nu\phi(t)$.

Με παραγώγιση ως προς τον χρόνο t είναι:

$$\theta'(t) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta(t) = -\phi'(t) \cdot \eta\mu\phi(t) \Rightarrow \theta'(t) = -\phi'(t)$$

(γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\phi$, θ, ϕ συμπληρωματικές).

Έτσι, οι ρυθμοί μεταβολής $\theta'(t)$ και $\phi'(t)$ είναι ίσοι κατά απόλυτη τιμή και αντίθετοι γιατί το ένα μέγεθος αυξάνει και το άλλο ελαττώνεται.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΞΙΦΙΣΜΟΙ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ....

Χωρίστε κάθε πρόβλημα που εξετάζετε σε όσα μέρη μπορείτε και όσα χρειάζεστε ώστε να το επιλύσετε πιο εύκολα.

Αυτός ο κανόνας του Καρτέσιου δεν ωφελεί πολύ, εφόσον η τέχνη του διαχωρισμού... παραμένει ανεξήγητη..Χωρίζοντας το πρόβλημα του, σε μέρη όχι κατάλληλα, ο άπειρος λύτης μπορεί να αυξήσει την δυσκολία που αντιμετωπίζει.



Καρτέσιος, μαθηματικός και φιλόσοφος, ο πατέρας της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Ξέρετε, ο γνωστός τύπος που είπε *σκέπτομαι άρα υπάρχω*.



Leibniz, μαθηματικό- φιλόσοφος, μαζί με τον Νεύτωνα δημιούργησαν τον απειροστικό λογισμό, καλή ώρα την μελέτη των συναρτήσεων.



38. Ο Γκούφυ ανέβηκε σε μια σκάλα να σώσει ένα ..γατάκι. Η σκάλα έχει μήκος 10 μέτρα και στηρίζεται στον τοίχο μιας πολυκατοικίας. Για κακή του τύχη η σκάλα αρχίζει να ολισθαίνει. Η κορυφή της σκάλας (το σημείο B) κατακόρυφα προς τα κάτω και η βάση της σκάλας (το σημείο A) δεξιά προς το δρόμο. (σχήμα)

Την χρονική στιγμή t_0 , η βάση της σκάλας, το A, απέχει 6 μέτρα από την βάση του τοίχου O, η ταχύτητα του είναι 4 m/sec.

i. Αν συμβολίσουμε $OA=x$ και $OB=y$ να γράψετε την σχέση που θα δίνει το y ως

συνάρτηση του x .

ii. Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία το σημείο B πλησιάζει την βάση του τοίχου (το σημείο O) την χρονική στιγμή που απέχει 8 μέτρα από αυτή.

iii. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E του τριγώνου OAB ως προς το χρόνο t την χρονική στιγμή t_0 .

iv. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος ως προς το χρόνο t την χρονική στιγμή t_0 .

Λύση

i. Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAB

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 \Leftrightarrow 100 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}, x \in (0, 10)$$

Τα x, y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t άρα

$$x = x(t), y = y(t)$$

$$y(t) = \sqrt{100 - x(t)^2}, x \in (0, 10) \quad (1)$$

ii. Η ταχύτητα του σημείου B είναι $y'(t)$ και σύμφωνα με την εκφώνηση θέλουμε την χρονική στιγμή t_1 τέτοια ώστε $y(t_1) = 8$,

$$y(t_1) = 8 \Leftrightarrow 8 = \sqrt{100 - x(t_1)^2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x(t_1) = 6 \text{ m}$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς t .

$$y'(t) = \left(\sqrt{100 - x(t)^2} \right)' = \frac{(100 - x(t)^2)'}{2\sqrt{100 - x(t)^2}} = \frac{-x(t)x'(t)}{\sqrt{100 - x(t)^2}},$$

Από υπόθεση όταν $x(t_1) = 6$ ισχύει $x'(t_1) = 4$ (άρα $t_1 = t_0$)

Οπότε,

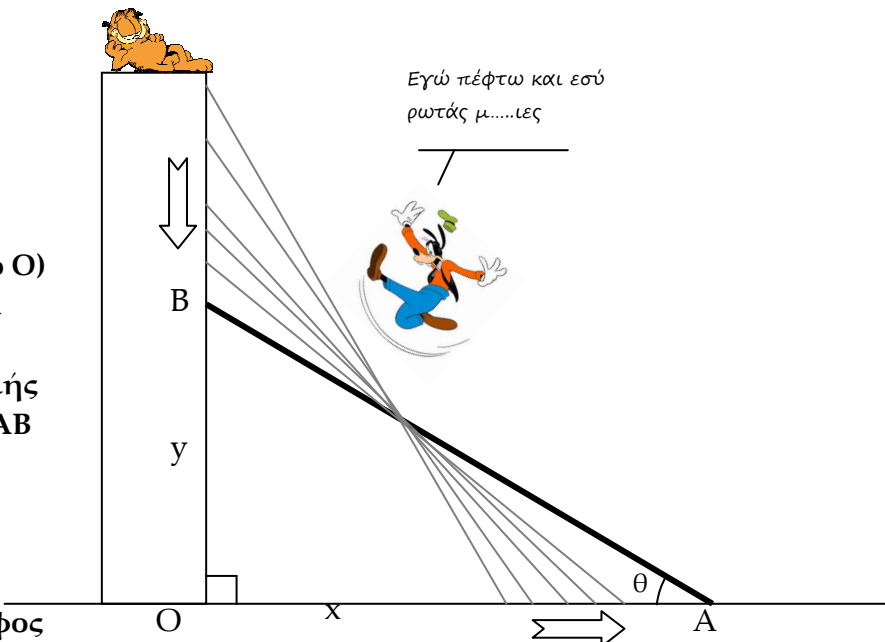
$$y'(t_1) = \frac{-x(t_1)x'(t_1)}{\sqrt{100 - x(t_1)^2}} = \frac{-6 \cdot 4}{\sqrt{100 - 6^2}} = -3 \text{ m/sec}$$

Το $y=OB$ μειώνεται άρα ήταν αναμενόμενο το πρόσημο της ταχύτητας να βγει αρνητικό.

iii. Το εμβαδό του τριγώνου συναρτήσει του χρόνου

$$\text{είναι } E(t) = \frac{1}{2} x(t)y(t) = \frac{1}{2} x(t)\sqrt{100 - x(t)^2}, x \in (0, 10)$$

ο ρυθμός μεταβολής του είναι:





$$E'(t) = \left(\frac{1}{2} x(t) \sqrt{100 - x^2(t)} \right)' = \frac{1}{2} x'(t) \sqrt{100 - x^2(t)} + \frac{1}{2} x(t) \frac{(100 - x^2(t))'}{2\sqrt{100 - x^2(t)}} = \frac{1}{2} x'(t) \sqrt{100 - x^2(t)} + \frac{1}{2} x(t) \frac{-2x(t)x'(t)}{2\sqrt{100 - x^2(t)}} =$$

$$= \frac{1}{2} x'(t) \sqrt{100 - x^2(t)} - \frac{1}{2} \frac{x^2(t)x'(t)}{\sqrt{100 - x^2(t)}} = \frac{1}{2} \left(x'(t) \sqrt{100 - x^2(t)} - \frac{x^2(t)x'(t)}{\sqrt{100 - x^2(t)}} \right)$$

Την χρονική στιγμή t_0

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \left(x'(t_0) \sqrt{100 - x^2(t_0)} - \frac{x^2(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{100 - x^2(t_0)}} \right) \stackrel{x'(t_0)=4, x(t_0)=6}{=} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(4\sqrt{100 - 36} - \frac{36 \cdot 4}{\sqrt{100 - 36}} \right) = \frac{1}{2} \left(32 - \frac{36 \cdot 4}{8} \right) = \frac{1}{2} (32 - 18) = 7 \text{ m}^2 / \text{sec}$$

iv. Έχουμε:

$$\eta\mu\theta(t) = \frac{y(t)}{10} \text{ παραγωγίζουμε ως προς } t$$

$$(\eta\mu\theta(t))' = \left(\frac{y(t)}{10} \right)' \Leftrightarrow \sin\theta(t)\theta'(t) = \frac{y'(t)}{10} \Leftrightarrow \frac{x(t)}{10} \theta'(t) = \frac{y'(t)}{10} \Leftrightarrow x(t)\theta'(t) = y'(t)$$

Για $t=t_0$

$$x(t_0)\theta'(t_0) = y'(t_0) \stackrel{x(t_0)=6, y'(t_0)=-3}{\Leftrightarrow} 6\theta'(t_0) = -3 \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -\frac{1}{2} \text{ rad} / \text{sec}$$

() Κάνε ένα διάλλειμα, να διαβάσεις για μια γάτα σε μια σκάλα που πέφτει με...άπειρη ταχύτητα**

Υπάρχει ένα γνωστό σχολικό πρόβλημα πρακτικής αριθμητικής

(<http://mathmagic.blogspot.gr/2016/12/pisa.html>) του προηγούμενου αιώνα που το αποδομούσε ο Λιουίς Κάρολ προτείνοντας διαφορετικές λύσεις ανάλογα με το πώς το προσλαμβάνει ο λύτης για να δώσει έμφαση στο γεγονός ότι η επιλογή προβλημάτων στα μαθηματικά είναι λεπτή διαδικασία. Τώρα, με τα προβλήματα στην Γ Λυκείου έπεσα πάνω σε κάτι παραπλήσιο που παραπεμπει στη γνωστή άσκηση του σχολικού με την σκάλα που ολισθαίνει.

Φανταστείτε μια γάτα στην κορυφή μιας σκάλας μήκους L στηριγμένης σε ένα τοίχο. Υποθέτουμε ότι η βάση της σκάλας αρχίζει να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα την ίδια στιγμή που η γάτα μαζί με την κορυφή της σκάλας πάντα γλιστράει προς τα κάτω. Θα

αποδείξουμε ότι η γάτα πέφτει προς τα κάτω με...άπειρη ταχύτητα.

Έχουμε και λέμε, από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο

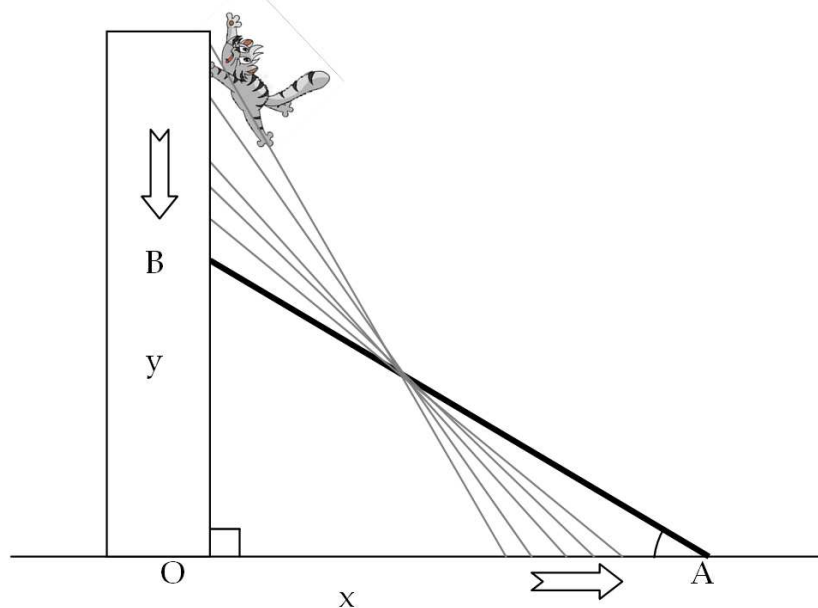
$$L^2 = x^2(t) + y^2(t) \Leftrightarrow y(t) = \sqrt{L^2 - x^2(t)}, \quad (1)$$

$x(t)$, $y(t)$ οριζόντια, κατακόρυφη

μετατόπιση συναρτήσει του χρόνου.

Παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο και τα δυο μέλη

$$y'(t) = -\frac{x'(t)x(t)}{\sqrt{L^2 - x^2(t)}}$$





Στο πρώτο μέλος είναι η παράγωγος της κατακόρυφης μετατόπισης ως προς το χρόνο δηλαδή η ταχύτητα της κορυφής της σκάλας και κατ επέκταση της γάτας που πέφτει. Πρέπει να βρούμε την ταχύτητα όταν η σκάλα πέσει τελείως δηλαδή όταν $x(t) \rightarrow L$

$$\lim_{x(t) \rightarrow L} y'(t) = \lim_{x(t) \rightarrow L} -\frac{x'(t)x(t)}{\sqrt{L^2 - x^2(t)}} \stackrel{x'(t) \text{ σταθερή}}{=} -\infty$$

Συνεπώς, η γάτα πέφτει με άπειρη ταχύτητα!!!! (Που είναι το λάθος;)

(Υποθέσαμε ότι η σκάλα όταν πέφτει και θα είναι συνεχώς σε επαφή με τον τοίχο κατι το ποιο δεν είναι εφικτό στην πραγματικότητα καθώς όταν φτάσει στο τέρμα σίγουρα θα απομακρυνθεί από τον τοίχο αρα κατά την διάρκεια της πτώσης δεν θα ισχύει η (1))

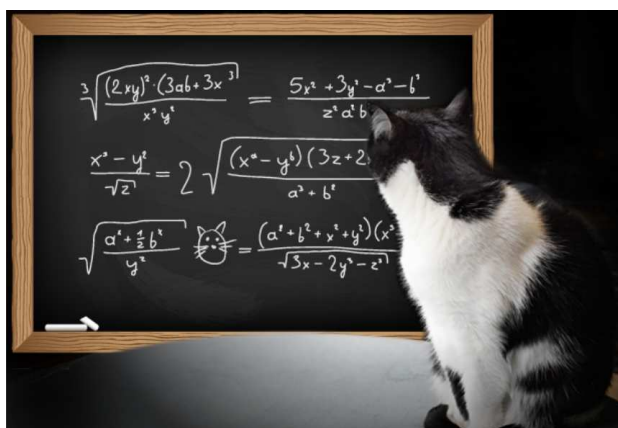
Falling ladder paradox)

Khan academy <https://www.youtube.com/watch?v=kBVDSu7v8os>

«Είναι εκπληκτικό και εγώ ακόμα δεν το καταλαβαίνω, σημειώνω ότι υπήρξα μαθηματικός όλη μου τη ζωή. Πώς μπορούν τα πράγματα να είναι εκεί, χωρίς στην πραγματικότητα να είναι εκεί; Δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι το 2 είναι εκεί ή το 3 ή η τετραγωνική ρίζα του ωμέγα. Είναι πολύ αληθινά πράγματα. Ακόμα δεν γνωρίζω την έννοια με την οποία τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν, αλλά είναι σίγουρο ότι το κάνουν. Φυσικά, είναι δύσκολο να πει κανείς με ποια έννοια μια γάτα υπάρχει μπροστά μας, αλλά οριστικά ξέρουμε ότι είναι εκεί. Οι γάτες έχουν μια επιμονή να μας υποδεικνύουν ότι υπάρχουν αλλά το ίδιο σας διαβεβαιώνω και οι αριθμοί. Είναι πολύ δύσκολο κάποιος να καθοδηγήσει μια γάτα σε μια κατεύθυνση που δεν θέλει να ακολουθήσει, το ίδιο συμβαίνει και με τους αριθμούς. Χρησιμοποιώντας την λέξη «αριθμός» είμαι σίγουρος ότι όλοι έχετε μια ασαφή ιδέα στο μυαλό σας ως προς το τι εννοώ. Τα αντικείμενα μελέτης των μαθηματικών είναι πολύ πιο αφηρημένα από τους αριθμούς αλλά εξίσου πραγματικά.

Σκέφτομαι συχνά τις γάτες. Σκέφτομαι τα δέντρα. Νομίζω και τα σκυλιά κατά καιρούς, όχι πολύ συχνά ίσως επειδή είναι διαχειρίσιμα. Κάνουν ότι θέλετε να κάνουν σε κάποιο βαθμό. Μερικοί άνθρωποι πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι αυτό που πιστεύουμε και δημιουργούνται από τις σκέψεις μας. Εγώ, πάλι όχι. Είμαι πλατωνιστής στην καρδιά, αν και αναγνωρίζω τις δυσκολίες που ανακύπτουν σε αυτή μου την οπτική.»

Τζον Κόνγουει, μαθηματικός-συγγραφέας





39. Ένα δοχείο έχει το σχήμα κυλίνδρου με χωρητικότητα $100\pi \text{ cm}^3$ και ακτίνα βάσης r (σε cm). Το κόστος του υλικού από το οποίο είναι φτιαγμένες οι βάσεις είναι $2,5 \text{ ευρώ/cm}^2$ ενώ το κόστος του υλικού από το οποίο είναι φτιαγμένη η παράπλευρη επιφάνεια είναι 2 ευρώ/cm^2 .

i. Να εκφραστεί το κόστος κατασκευής του δοχείου ως συνάρτηση του r .

ii. Να βρεθεί η ακτίνα βάσης του κυλίνδρου έτσι ώστε να έχουμε το ελάχιστο κόστος.
Λύση

i. Η κάθε βάση του δοχείου έχει εμβαδόν πr^2 (σε cm^2). Οι δύο βάσεις

μαζί έχουν εμβαδόν $2\pi r^2$, οπότε κοστίζουν $2\pi r^2 \cdot 2,5 = 5\pi r^2$ ευρώ

Η παράπλευρη επιφάνεια έχει εμβαδόν $2\pi rh$, όπου h το ύψος του δοχείου και κοστίζει $2\pi rh \cdot 2 = 4\pi rh$ ευρώ.

Θα βρούμε τώρα το h συναρτήσει του r . Από τον τύπο του όγκου V ενός κυλίνδρου έχουμε: $V = \pi r^2 h$, δηλαδή $100\pi = \pi r^2 h$,

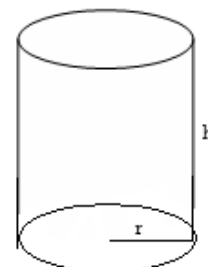
δηλαδή $h = \frac{100}{r^2}$. Άρα η παράπλευρη επιφάνεια του δοχείου κοστίζει

$4\pi r \cdot \frac{100}{r^2} = \frac{400\pi}{r}$ ευρώ. Το κόστος κατασκευής του δοχείου είναι το άθροισμα του κόστους

κατασκευής της παράπλευρης επιφάνειας και του κόστους κατασκευής των βάσεων, άρα θα δίνεται ως συνάρτηση του r από τον τύπο $K(r) = \left(5\pi r^2 + \frac{400\pi}{r} \right)$ ευρώ.

$$\text{ii. } K'(r) = \left(5\pi r^2 + \frac{400\pi}{r} \right)' = 10\pi r - \frac{400\pi}{r^2} = \frac{10\pi r^3 - 400\pi}{r^2} = \frac{10\pi(r^3 - 40)}{r^2}$$

$$K'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{40} \text{ cm}$$



r	0	$\sqrt[3]{40}$	$+\infty$
$K'(r)$		-	+
$K(r)$		$\searrow$	$\nearrow$

Σωκράτης δια χειλέων Ρουσό

Αν βοηθήσετε το μαθητή σας να μάθει να παρατηρεί τα φυσικά φαινόμενα, θα του αναπτύξετε γρήγορα την περιέργεια. Αλλά για να τροφοδοτήσετε την περιέργεια του δεν πρέπει να βιάζεστε να την ικανοποιήσετε. Τοποθετήστε τον μπροστά στα προβλήματα και αφήστε τον μόνο του να τα λύσει.

Η γνώση του δεν πρέπει να προέρχεται από την δική σας διδασκαλία αλλά από την δική του κατανόηση. Δεν πρέπει να μαθαίνει τη γνώση, αλλά να την ανακαλύπτει. Εάν στο μυαλό του μαθητή η λογική αντικατασταθεί με το κύρος του δασκάλου, τότε ο μαθητής θα πάψει να σκέπτεται και θα γίνει φορέας του της αντίληψης των άλλων.

J.J. Rousseau





40.(Επαναληπτικές 2017)

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ.

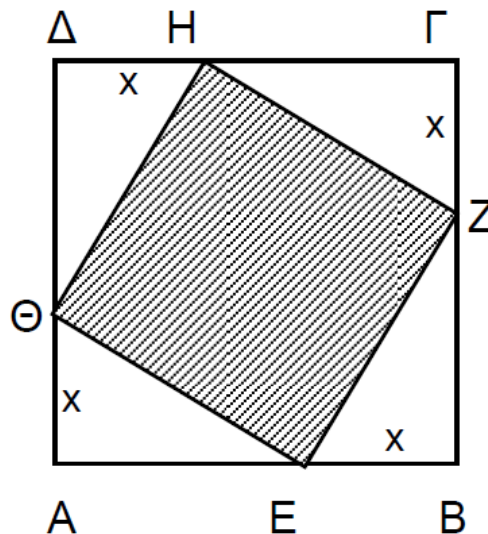
i. να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από την συνάρτηση :

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, 0 \leq x \leq 2$$

iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδό του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

iv. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ για το οποίο το εμβαδό $f(x_0)$ του αντιστοίχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$



Λύση

i. Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο BEZ

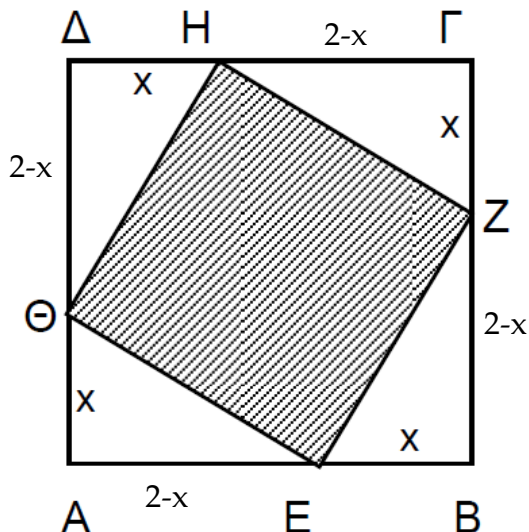
$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2$$

$$EZ^2 = x^2 + (2-x)^2$$

$$EZ^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2$$

$$EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$$

$$EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}, 0 \leq x \leq 2$$



ii. Έχουμε $(EZH\Theta) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, 0 \leq x \leq 2$$

iii. $f'(x) = (2x^2 - 4x + 4)' = 4x - 4, 0 \leq x \leq 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1, 0 \leq x \leq 2$$

είναι $f(0) = f(2) = 4, f(1) = 2$

Το εμβαδό του ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο για $x=1$ και γίνεται μέγιστο για $x=0$ ή $x=2$

x	0	1	2
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

iv. Για $x_0 \in [0, 2]$ είναι

$$x_0 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq 1 \Leftrightarrow 4e^{x_0} \geq 4 \Leftrightarrow 4e^{x_0} + 1 \geq 5 \text{ Όμως παρατηρούμε ότι:}$$

$$2 \leq (EZH\Theta) = f(x) \leq 4 \text{ για κάθε } x \in [0, 2]$$

Οπότε $4e^{x_0} + 1 > f(x_0)$ άρα δεν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε το εμβαδό (ΕΖΗΘ) να ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.



41. Δίνεται ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Theta$ στο παρακάτω σχήμα και μια συνεχής στο $[0,1]$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.

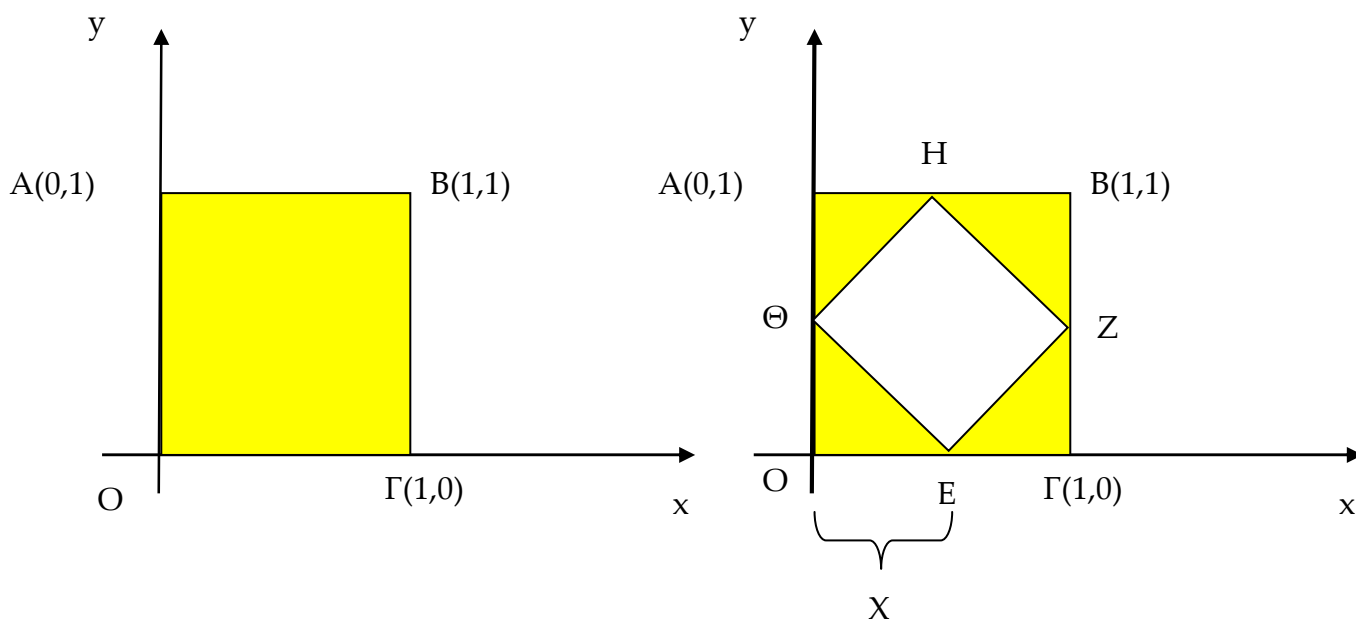
i. Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου.

ii. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τις δυο διαγώνιες.

iii. Έστω τετράγωνο $EZH\Theta$ του οποίου οι κορυφές είναι σημεία των πλευρών του $AB\Gamma\Theta$, δείτε το σχήμα, με $OE=x$. Να βρείτε το x για το οποίο το εμβαδό $E(x)$ του $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο.

iv. Αν F είναι η αρχική της f στο $[0,1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)F(1-x) - F(x)f(1-x) = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (0,1)$$



Λύση

i. Η εξίσωση της διαγωνίου OB είναι: $y-0 = \frac{1-0}{1-0}(x-0) \Leftrightarrow y=x$

Η εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$ είναι: $y-1 = \frac{0-1}{1-0}(x-0) \Leftrightarrow y-1=-x \Leftrightarrow y=-x+1$

ii. Επειδή η f είναι συνεχής και ολόκληρη η γραφική παράσταση της f βρίσκεται μέσα σε στο τετράγωνο, ισχύει ότι $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Για να αποδείξουμε ότι η C_f τέμνει την διαγώνιο OB , αρκεί η εξίσωση $f(x) = x$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0,1]$.

Έστω $g(x) = f(x) - x, x \in [0,1]$

Είναι $g(0) = f(0) \geq 0, g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ άρα $g(0)g(1) \leq 0$

• Αν $g(0)g(1) = 0$ τότε $g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει ρίζα το 0 ή το 1.

• Αν $g(0)g(1) < 0$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Ανάλογα για να αποδείξουμε η C_f τέμνει την διαγώνιο $A\Gamma$ αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = -x+1$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0,1]$.

Έστω $h(x) = f(x) + x - 1, x \in [0,1]$

Είναι $h(0) = f(0) - 1 \leq 0, h(1) = f(1) \geq 0$ άρα $h(0)h(1) \leq 0$

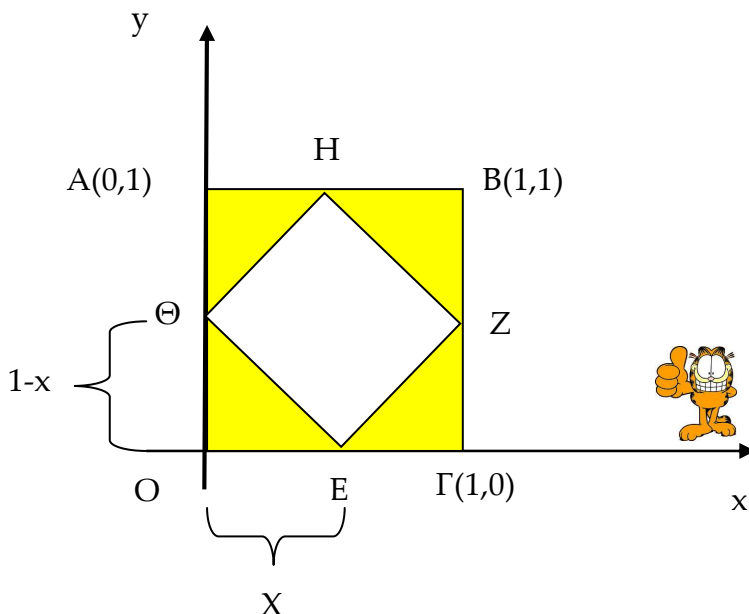


• Αν $h(0)h(1) = 0$ τότε $h(0) = 0$ ή $h(1) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει ρίζα το 0 ή το 1.

• Αν $h(0)h(1) < 0$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

iii. Τα τρίγωνα $\triangle A\Theta\Gamma$, $\triangle \Theta\Gamma\Gamma$ είναι ίσα (ορθογώνια και έχουν $\Theta\Gamma = \Gamma\Gamma$ και $\widehat{\Theta\Gamma\Gamma} = \widehat{\Gamma\Gamma\Gamma}$ ως οξείες γωνίες με τις πλευρές κάθετες)

Οπότε $\Theta\Gamma = \Gamma\Gamma = x$, $\Gamma\Gamma = 1-x$



Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\triangle \Theta\Gamma\Gamma$ και προκύπτει

$$(\Theta\Gamma)^2 = x^2 + (1-x)^2 = \dots = 2x^2 - 2x + 1$$

$$\text{Είναι } E(x) = 2x^2 - 2x + 1, x \in [0,1]$$

Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $E'(x) = 4x - 2$.

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ισχύει $E'(x) < 0$, η E είναι συνεχής άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ισχύει $E'(x) > 0$, η E είναι συνεχής άρα είναι γνησίως αύξουσα

στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Οπότε η E έχει ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$.

iv. Η F είναι η αρχική της f στο $[0,1]$ άρα $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$

Βλέπουμε ότι:

$$f(x)F(1-x) - F(x)f(1-x) = 0 \Leftrightarrow F'(x)F(1-x) - F(x)F'(1-x) = 0 \Leftrightarrow (F(x)F(1-x))' = 0 \text{ (Υποψία για Rolle)}$$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$\varphi(x) = F(x)F(1-x), x \in [0,1]$$

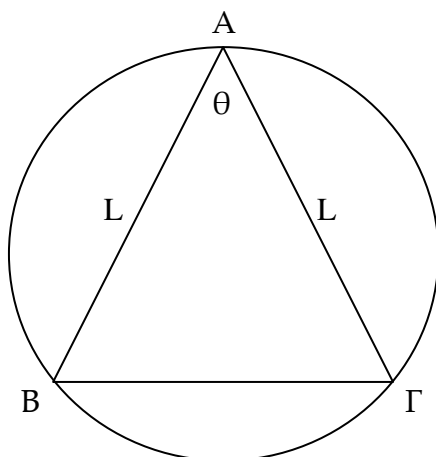
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$, επίσης $\varphi(0) = F(0)F(1)$, $\varphi(1) = F(0)F(1)$ δηλαδή $\varphi(0) = \varphi(1)$

Οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$

τέτοιο ώστε $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow F'(x_0)F(1-x_0) - F(x_0)F'(1-x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0)F(1-x_0) - F(x_0)f(1-x_0) = 0$



42. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1 cm. Έστω L το μήκος των ίσων πλευρών του και θ η γωνία που σχηματίζουν.



Είναι που η γεωμετρία δεν χρειάζεται στην Γ λυκείου...



i. Να δείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου δίνεται από τον τύπο:

$$E = (1 + \sin \theta) \eta \mu \theta$$

ii. Να βρείτε την γωνία θ για την οποία το εμβαδό του τριγώνου γίνεται μέγιστο.

iii. Αν η γωνία θ αυξάνεται με ρυθμό 2 rad/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους L των ίσων πλευρών την χρονική στιγμή που το τρίγωνο γίνεται μέγιστο.

Λύση

i. Για το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει

$$E = \frac{1}{2} (AB)(A\Gamma) \eta \mu \theta = \frac{1}{2} L^2 \eta \mu \theta \quad (1)$$

Από τον τύπο των συνημιτόνων στο τρίγωνο

Εμβαδό τριγώνου με πλευρές α, β, γ

$$E = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu \hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \alpha \gamma \eta \mu \hat{B} = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu \hat{A}$$

Νόμος συνημιτόνων

Σε τρίγωνο με πλευρές α, β, γ ισχύει:

- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$
- $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos B$
- $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \Gamma$

$$L^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB) \cos \omega \Leftrightarrow L^2 = 1 + 1 - 2 \cos \omega \Leftrightarrow L^2 = 2 - 2 \cos \omega \Leftrightarrow L^2 = 2(1 - \cos \omega) \quad (2)$$

Ομως από το τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$$\widehat{ABO} + \widehat{BAO} + \widehat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 180^\circ - \theta \quad (3)$$

Η (2) γίνεται: $L^2 = 2(1 - \cos \omega) \stackrel{(3)}{=} 2(1 - \cos(180^\circ - \theta)) = 2(1 + \sin \theta)$

$$\text{Τελικά, } E = \frac{1}{2} L^2 \eta \mu \theta = \frac{1}{2} \cdot 2(1 + \sin \theta) \eta \mu \theta = (1 + \sin \theta) \eta \mu \theta$$

ii. Είναι $E(\theta) = (1 + \sin \theta) \eta \mu \theta, \theta \in (0, \pi)$. Η E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με

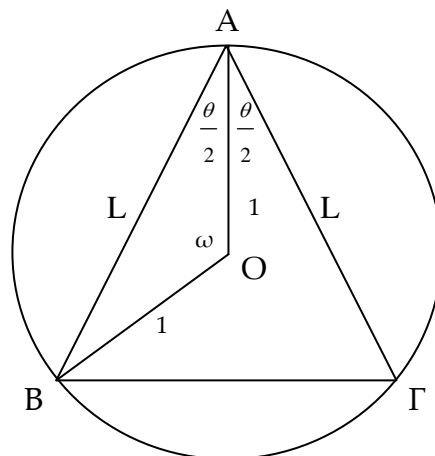
$$\begin{aligned} E'(\theta) &= ((1 + \sin \theta) \eta \mu \theta)' = -\eta \mu^2 \theta + \sin \theta + \sin^2 \theta = \\ &= -(1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta + \sin^2 \theta = (2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) \end{aligned}$$

Αλλά για κάθε $\theta \in (0, \pi)$ ισχύει $\sin \theta + 1 > 0$, έτσι

$$E'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow (2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \sin \theta - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin \theta \geq \frac{1}{2} \stackrel{\sin \theta \in (0, \pi)}{\Leftrightarrow} \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

Άρα, για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $E'(\theta) > 0$, E είναι συνεχής άρα E γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$

για κάθε $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$, $E'(\theta) < 0$, E είναι συνεχής άρα E γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$





Άρα, το εμβαδό του τριγώνου γίνεται μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{3}$.

iii. $\theta'(t) = 2 \text{ rad/sec}$ Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το τρίγωνο γίνεται ισόπλευρο, τότε

$\theta(t_0) = \frac{\pi}{3}$. Είναι: $L^2 = 2(1 + \sin\theta) \Leftrightarrow L = \sqrt{2(1 + \sin\theta)}$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$L(t) = \sqrt{2(1 + \sin\theta(t))}$, $t \geq 0$ Έτσι

$$L'(t) = \left(\sqrt{2(1 + \sin\theta(t))} \right)' = \frac{2(1 + \sin\theta(t))'}{2\sqrt{2(1 + \sin\theta(t))}} = \frac{-\eta\mu\theta(t) \cdot \theta'(t)}{\sqrt{2(1 + \sin\theta(t))}} = \frac{\left(-\eta\mu\frac{\pi}{3} \right) \cdot 2}{\sqrt{2(1 + \sin\frac{\pi}{3})}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{\sqrt{2(1 + \frac{1}{2})}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1 \text{ cm/sec}$$

43. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει γωνία $\hat{A} = 150^\circ$ και ίσες πλευρές $\beta = \gamma = 4 \text{ cm}$. Αν οι ίσες πλευρές αυξάνουν με ρυθμό 4 cm/sec , να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού τη στιγμή κατά την οποία το εμβαδόν του τριγώνου έχει τετραπλασιαστεί.

Λύση

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \eta\mu 150^\circ = 4 \text{ cm}^2.$$

Το τετραπλάσιό του είναι 16 cm^2 . Έτσι ο τύπος γίνεται:

$$\frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = 16, \frac{1}{2} \beta \cdot \beta \cdot \eta\mu 150^\circ = 16, \frac{1}{4} \beta^2 = 16, \beta^2 = 64, \beta = 8$$

(το τρίγωνο παραμένει ισοσκελές γιατί οι ίσες πλευρές έχουν τον ίδιο ρυθμό αύξησης). Το

εμβαδόν είναι: $E(t) = \frac{1}{2} \beta(t) \cdot \gamma(t) \cdot \eta\mu 150^\circ = \frac{1}{4} \beta(t) \cdot \gamma(t)$ και ο ρυθμός μεταβολής

$E'(t) = \frac{1}{4} (\beta'(t) \cdot \gamma(t) + \beta(t) \cdot \gamma'(t))$, οπότε τη στιγμή t_1 που το εμβαδόν έχει τετραπλασιαστεί θα

είναι $E'(t_1) = \frac{1}{4} (4 \cdot 8 + 4 \cdot 8) = 16 \text{ cm}^2 / \text{sec}$.

44. Ένα κτίριο ΑΒ έχει ύψος 30 m και ρίχνει τη σκιά του ΑΓ στο έδαφος. Αν η γωνία $\hat{\theta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$ των ακτινών του ηλίου με το έδαφος, ελαττώνεται με ρυθμό $0,3 \text{ rad/min}$, να βρείτε το ρυθμό αύξησης της σκιάς του κτιρίου τη χρονική στιγμή κατά την οποία η σκιά του είναι 40 m .

Λύση

Αν συμβολίσουμε με s το μήκος της σκιάς, τότε όπως φαίνεται στο σχήμα η εφαπτομένη της γωνίας θ είναι:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{30}{s}, s \cdot \epsilon\phi\theta = 30 \text{ και ως συνάρτηση του χρόνου}$$

$s(t) \cdot \epsilon\phi\theta(t) = 30$. Με παραγωγή ως προς t έχουμε:

$$s'(t) \cdot \epsilon\phi\theta(t) + s(t) \frac{\theta'(t)}{\sin^2\theta(t)} = 0$$

$$\text{ή } s'(t) \cdot \eta\mu\theta(t) \cdot \sin\theta(t) + s(t) \cdot \theta'(t) = 0$$

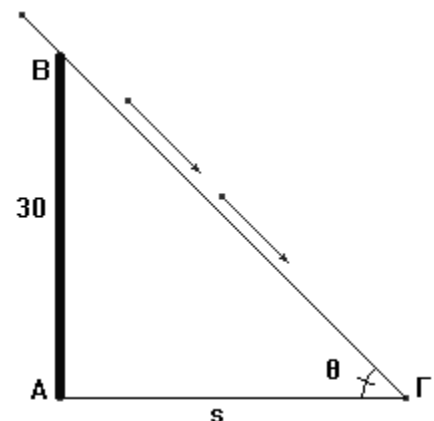
Για $s = 40 \text{ m}$ είναι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2$, $B\Gamma = 50 \text{ m}$,

οπότε σύμφωνα με τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας είναι:

$$\eta\mu\theta(t) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \text{ και } \sin\theta(t) = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

Έτσι έχουμε $s'(t) \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - 40 \cdot 0,3 = 0 \parallel$ γιατί $\theta'(t) = -0,3 \text{ rad/min}$, και τελικά ο ρυθμός αύξησης της σκιάς

είναι $s'(t) = 25 \text{ m/min}$.





45.(Γνωστή άσκηση με έξτρα ερώτημα) Μια γυναίκα ύψους 1,60 m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8 m με ταχύτητα 0,8 m/s.

i. Αν $s(t)$ είναι η σκιά της γυναίκας, τότε να αποδείξετε ότι $s(t) = 0,25 \cdot x(t)$

ii. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος $s(t)$ της γυναίκας;

iii. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η γωνία θ , όταν η σκιά της γυναίκας έχει το ίδιο μήκος με το ύψος της.

Λύση

i) Από την ομοιότητα των τριγώνων

ΦΟΣ, ΚΠΣ έχουμε

$$\frac{ΚΠ}{ΦΟ} = \frac{ΣΠ}{ΣΟ} \Leftrightarrow \frac{1,6}{8} = \frac{s}{x+s} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{s}{x+s} \quad (1)$$

Τα x, s είναι συναρτήσεις του χρόνου t και ισχύει: $x'(t) = 0,8 \text{ m/s}$ ενώ $s'(t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του ίσκιου της γυναίκας.

Από την ισότητα (1) :

$$0,2 = \frac{s}{x+s} \Leftrightarrow 0,2(x+s) = s \Leftrightarrow$$

$$0,2x + 0,2s = s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,2x = 0,8s \Leftrightarrow s = \frac{0,2}{0,8} x \Leftrightarrow$$

$$s(t) = \frac{1}{4} x(t) \Leftrightarrow s(t) = 0,25x(t)$$

ii. Η ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται η γυναίκα από τον φανοστάτη είναι $x'(t) = 0,8 \text{ m/s}$

Η ταχύτητα με την οποία αυξάνεται η σκιά της γυναίκας είναι:

$$s'(t) = 0,25x'(t) \text{ οπότε } s'(t) = 0,25 \cdot 0,8 = 0,2 \text{ m/s}$$

iii. Είναι $\varepsilon\phi\theta(t) = \frac{1,6}{s(t)}$ άρα

$$(\varepsilon\phi\theta(t))' = \left(\frac{1,6}{s(t)} \right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\theta(t)} \theta'(t) = -\frac{1,6}{s^2(t)} s'(t)$$

Την στιγμή το που η σκιά της γυναίκας έχει το ίδιο μήκος με το ύψος της το τρίγωνο ΚΠΣ είναι ισοσκελές, αφού ΚΠ=ΠΣ=1,6 οπότε $\theta(t) = 45^\circ$

Επομένως

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t_0)} \theta'(t_0) = -\frac{1,6}{s^2(t_0)} s'(t_0) \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -\frac{1,6}{s^2(t_0)} s'(t_0) \sin^2\theta(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta'(t_0) = -\frac{1,6}{1,6^2} (0,2) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{1,6} (0,2) \frac{1}{2} = -\frac{0,2}{1,6} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{16} \text{ rad/sec}$$

Αν έφτασες μέχρι εδώ, άκου μουσική υψηλού επιπέδου

<https://www.youtube.com/watch?v=I2Q8l4k33z0>





Ένα ιδίου φυράματος

46. Ένας γάτος μπασκετμπολίστας ύψους 2 m (;;) απομακρύνεται από ένα προβολέα ύψους 12 m με ταχύτητα 4 m/sec.

i. Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του μήκους της σκιάς του.

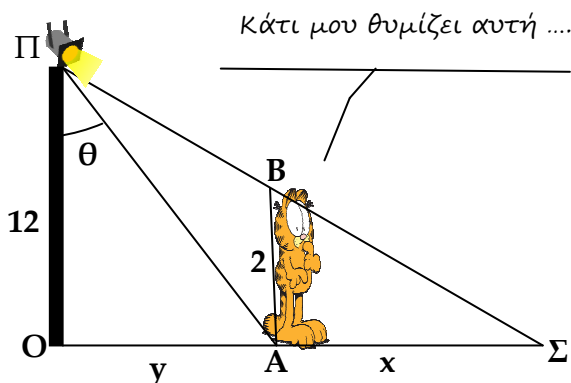
2. Να βρεθεί η ταχύτητα του άκρου της σκιάς του.

3. Αν θ είναι γωνία που σχηματίζει η κολόνα στήριξης του προβολέα με την ακτίνα που αντιστοιχεί στα άκρα των ποδιών να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης αυτής, τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο γάτος απέχει 30 m από την κολόνα του προβολέα.

Λύση

i. Στο σχήμα έστω y η απόσταση του γάτου AB από την κολόνα ΟΠ του προβολέα και x το μήκος της σκιάς του ΑΣ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΠΣ και ΑΒΣ είναι όμοια γιατί έχουν τη γωνία $\hat{\Sigma}$ κοινή. Έτσι ισχύει η αναλογία

$$\frac{ΑΣ}{ΟΣ} = \frac{ΑΒ}{ΟΠ}, \frac{x}{y+x} = \frac{2}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{y+x} = \frac{1}{6}, \Leftrightarrow 6x = y+x \Leftrightarrow 5x = y$$



και επειδή τα μεγέθη x και y είναι συναρτήσεις του χρόνου t , $5x(t) = y(t)$.

Με παραγωγήση έχουμε: $5 \cdot x'(t) = y'(t)$.

Η $y'(t)$ είναι η ταχύτητα, 4 m/sec, και η $x'(t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της σκιάς:

$$5x'(t) = 4, \text{ οπότε } x'(t) = 0,8 \text{ m/sec.}$$

ii. Το άκρο της σκιάς Σ αντιστοιχεί στο μεταβαλλόμενο διάστημα

$ΟΣ = s = y + x$ ή $s(t) = y(t) + x(t)$, οπότε με παραγωγήση είναι

$$s'(t) = y'(t) + x'(t) = 4 + 0,8 = 4,8 \text{ m/sec.}$$

Εναλλακτικά το προσεγγίζουμε από τα όμοια τρίγωνα ΟΠΣ και ΑΒΣ με την

αναλογία $\frac{x}{s} = \frac{2}{12} \Leftrightarrow 6x = s$ ή $s(t) = 6x(t)$, και με παραγωγήση $s'(t) = 6x'(t) = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ m/sec.}$

iii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΠΑ η εφαπτομένη της γωνίας θ είναι

$\epsilon\phi\theta = \frac{y}{12} \Leftrightarrow 12\epsilon\phi\theta = y$ ή $12\epsilon\phi\theta(t) = y(t)$. Με παραγωγήση ως προς t έχουμε

$$12 \frac{\theta'(t)}{\sin^2\theta(t)} = y'(t) \Leftrightarrow \theta'(t) = \frac{1}{12} y'(t) \cdot \sin^2\theta(t) \quad (1).$$

Όταν $y = 30 \text{ m}$, τότε η υποτείνουσα ΑΠ είναι $ΑΠ^2 = 12^2 + 30^2 = 1044$, οπότε

$$\sin^2\theta = \left(\frac{ΟΠ}{ΑΠ} \right)^2 = \frac{144}{1044} = \frac{4}{29}.$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$\theta'(t) = \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot \frac{4}{29} = \frac{4}{87} \text{ rad/sec.}$$

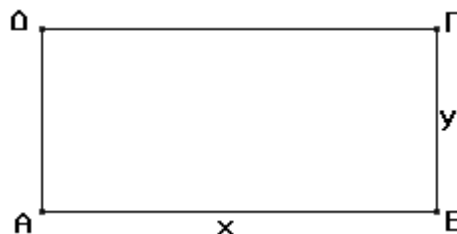


47. Σε ορθογώνιο σταθερού εμβαδού $E = 80 \text{ cm}^2$, το μήκος του x αυξάνει με ρυθμό 2 cm/sec και το πλάτος του y ελαττώνεται. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου όταν το μήκος x γίνει 10 cm .

Λύση

Έστω $AB\Gamma\Delta$ το ορθογώνιο με $AB = x$ και $B\Gamma = y$. Το εμβαδόν του είναι: $E = x \cdot y = 80 \text{ cm}^2$. Για $x = 10$ έχουμε $10y = 80 \Leftrightarrow y = 8 \text{ cm}$. Αν παραγωγίσουμε τη σχέση $xy = 80$ ή $x(t) \cdot y(t) = 80$ ως προς t θα έχουμε: $x'(t) \cdot y(t) + y'(t) \cdot x(t) = 0$, οπότε με αντικατάσταση γίνεται: $2 \cdot 8 + y'(t) \cdot 10 = 0$, $y'(t) = -1,6 \text{ cm/sec}$.

Η περίμετρος είναι $\Pi = 2x + 2y$ ή $\Pi(t) = 2x(t) + 2y(t)$ και ο ρυθμός μεταβολής της $\Pi'(t) = 2x'(t) + 2y'(t) = 2 \cdot 2 + 2(-1,6) = 0,8 \text{ cm/sec}$.



48. Δίνεται το μεταβλητό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου η υποτείνουσα α είναι σταθερή και ισχύει:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{4 - \gamma}{(\hat{\phi})^v} = L \in \mathbb{R}^*, v \in \mathbb{N}^*$$

Η γωνία $\hat{\phi}$ εκφράζεται σε ακτίνια. Να υπολογίσετε:

i. α

ii. v

Β. Για $\alpha = 4$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\beta + \gamma}{\gamma}$ ii. $\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2(8 - \beta\gamma)}{\beta - \gamma}$

Λύση

A.i. $\sin \phi = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma = \alpha \sin \phi$ άρα $\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{4 - \alpha \sin \phi}{(\hat{\phi})^v} = L \in \mathbb{R}^*$

$g(\phi) = \frac{4 - \alpha \sin \phi}{(\hat{\phi})^v} \Leftrightarrow g(\phi)(\hat{\phi})^v = 4 - \alpha \sin \phi$ λαμβάνουμε όρια (υπάρχουν) όταν $\phi \rightarrow 0$

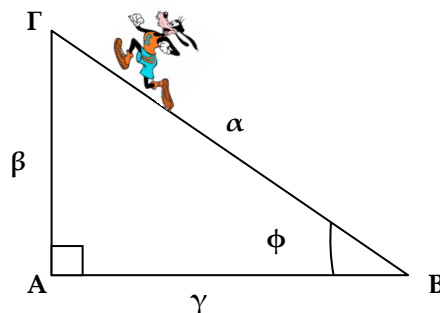
$\lim_{\phi \rightarrow 0} (g(\phi)(\hat{\phi})^v) = \lim_{\phi \rightarrow 0} (4 - \alpha \sin \phi)$ οπότε $L \cdot 0 = 4 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 4$

ii. $\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{4 - \gamma}{(\hat{\phi})^v} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \sin \phi}{(\hat{\phi})^v} \stackrel{0}{=} \lim_{D.H.L. \phi \rightarrow 0} \frac{(4 - 4 \sin \phi)'}{((\hat{\phi})^v)'} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{4 \eta \mu \phi}{v (\hat{\phi})^{v-1}} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu \phi}{\hat{\phi}} \cdot \frac{4}{v} \cdot \frac{1}{(\hat{\phi})^{v-2}} \right)$

Το όριο είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός συνεπώς θα πρέπει $v = 2$ (σε κάθε άλλη περίπτωση $v > 2$ ή $v = 1$ το όριο είναι $+\infty$ ή 0)

B.i. $\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\beta + \gamma}{\gamma} = \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) = \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\epsilon \phi \phi + 1) = 2$

ii. $\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2(8 - \beta\gamma)}{\beta - \gamma} = \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{16 - 2\beta\gamma}{\beta - \gamma} \stackrel{\beta^2 + \gamma^2 = 16}{=} = \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma}{\beta - \gamma} = \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\beta - \gamma)^2}{\beta - \gamma} = \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\beta - \gamma) = 0$





49.Επενδύσεις I

Ο γνωστός επενδυτής Τοτός επένδυσε σε μια εταιρεία στον τομέα της βιομηχανικής τετρατριχεκτομής (*) το ποσό των 65000 ευρώ και ήδη σε ένα χρόνο είχε κέρδη 11000 ευρώ. Η εταιρεία ισχυρίζεται και δεν έχουμε λόγο να την αμφισβητήσουμε ότι $\Pi(t)$ είναι ο τύπος που δίνει (σε χιλιάδες ευρώ) την αρχική επένδυση μαζί με το κέρδος του Τοτού την χρονική στιγμή t ($t \geq 0$) καθώς επίσης ότι ισχύει $\Pi'(t) = -6t$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\Pi(t)$.

ii. Σε πόσα χρόνια ο Τοτός πρέπει να αποσύρει από την εταιρεία το συνολικό του κεφάλαιο;

(*) Τετρατριχεκτομή: Πώς να κόβεις την τρίχα στα τέσσερα, τεχνολογία αιχμής !!

Λύση

Αρχικά θα βρούμε το τύπο της συνάρτησης Π . Με $t \geq 0$ έχουμε:

$$\Pi''(t) = -6t \Leftrightarrow \Pi'(t) = -3t^2 + c_1 \text{ όπου } c_1 \text{ πραγματική σταθερά}$$

$$\Pi'(t) = -3t^2 + c_1 \Leftrightarrow \Pi(t) = -t^3 + c_1 t + c_2, \text{ όπου } c_1, c_2 \text{ πραγματικές σταθερές}$$

Από υπόθεση όμως, $\Pi(0) = 65$, $\Pi(1) = 65 + 11 = 76$

$$\Pi(0) = 65 \Leftrightarrow -0^3 + c_1 \cdot 0 + c_2 = 65 \Leftrightarrow c_2 = 65$$

$$\Pi(1) = 76 \Leftrightarrow -1^3 + c_1 \cdot 1 + 65 = 76 \Leftrightarrow c_1 = 12$$

Τελικά ο τύπος είναι:

$$\Pi(t) = -t^3 + 12t + 65$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $\Pi(t)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $t=5$ και με χρήση Horner βρίσκουμε $-t^3 + 12t + 65 = (t-5)(t^2 + 5t + 13)$ το τριώνυμο $t^2 + 5t + 13 > 0$ για κάθε $t \geq 0$, η $\Pi(t)$ ως συνεχής διατηρεί πρόσημο στο $(0,5)$ ($\Pi(t) > 0$, $\Pi(1) > 0$). Συνεπώς το συνολικό ποσό $\Pi(t)$ (αρχική επένδυση μαζί με το κέρδος σε $t \geq 0$ χρόνια) του Τοτού δεν έχει νόημα για $t > 5$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Π είναι το $[0,5]$.

ii. Ο Τοτός πρέπει να πάρει τα λεφτά του όταν το ποσό $\Pi(t)$ γίνει μέγιστο.

$$\Pi'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow t \in [0,5] \Rightarrow t = 2$$

Άρα στα δυο χρόνια ο Τοτός

πρέπει να πάρει το χρήμα και να φύγει

t	0	2	5
$\Pi'(t)$		+	-
$\Pi(t)$		↗	↘

μέγιστο

50.Επενδύσεις II

Ο Τοτός μετά την απόσυρση του κεφαλαίου του από την εταιρεία αποφασίζει να επενδύσει στην εταιρεία [Πλαστικοφλέξ](#). Για την εταιρεία το οικονομικό επιτελείο του Τοτού τον ενημέρωσε ως εξής:

Σε $t \geq 0$ χρόνια (από σήμερα) έχει κέρδος $\Pi(t)$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ με

$\Pi(0) = 0$. Η συνάρτηση κέρδους ικανοποιεί την εξίσωση

$$2\Pi'(t) + \Pi(t) = \frac{2t}{\sqrt{e^t}} \text{ για κάθε } t \geq 0$$

i. Να βρεθεί το κέρδος $\Pi(t)$ της εταιρείας.

ii. Να βρείτε σε πόσα χρόνια η εταιρεία έχει μέγιστο κέρδος.

iii. Μακροπρόθεσμα η εταιρεία θα αποφέρει κέρδος σε όποιον επενδύσει;

Λύση



i. Η εξίσωση γράφεται

$$2\Pi'(t) + \Pi(t) = \frac{2t}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow \Pi'(t) + \frac{1}{2}\Pi(t) = \frac{2t}{2\sqrt{e}} \Leftrightarrow \Pi'(t) + \frac{1}{2}\Pi(t) = te^{-\frac{t}{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{t}{2}}\Pi'(t) + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\Pi(t) = t \Leftrightarrow \left(e^{\frac{t}{2}}\Pi(t)\right)' = \left(\frac{t^2}{2}\right)',$$

$$e^{\frac{t}{2}}\Pi(t) = \frac{t^2}{2} + c \text{ αλλά } \Pi(0) = 0$$

$$e^{\frac{0}{2}}\Pi(0) = \frac{0^2}{2} + c \Leftrightarrow c = 0 \text{ τελικά } e^{\frac{t}{2}}\Pi(t) = \frac{t^2}{2} \Leftrightarrow \Pi(t) = \frac{t^2}{2}e^{-\frac{t}{2}}, t \geq 0$$

$$\text{ii. } \Pi'(t) = \left(\frac{t^2}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)' = te^{-\frac{t}{2}} - \frac{t^2}{4}e^{-\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}\left(t - \frac{t^2}{4}\right), \Pi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = 4$$

Η εταιρεία θα έχει μέγιστο κέρδος για $t = 4$ χρόνια

το ποσό $\Pi(4) = 2e^{-2}$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ.

t	0	4	$+\infty$
$\Pi'(t)$		+	-
$\Pi(t)$		↗	↘

μέγιστο

iii. Η συνάρτηση $\Pi(t)$ από τα 4 χρόνια και μετά είναι γνησίως φθίνουσα και μάλιστα

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{2}e^{-\frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{2e^{\frac{t}{2}}} \stackrel{D.L.HOSPITAL}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{e^{\frac{t}{2}}} \stackrel{D.L.HOSPITAL}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}} = 0$$

Άρα η εταιρεία στο μακρινό μέλλον θα έχει μηδενικό κέρδος.

"Ένα μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να είναι αρκετά δύσκολο ώστε να μας κινητοποιεί. Όχι όμως απρόσιτο, ώστε να βρίσκεται πέρα από τις δυνατότητές μας. Πρέπει να λειτουργεί ως οδηγός στα δαιδαλώδη μονοπάτια της κρυμμένης αλήθειας και ως υπόμνηση της χαράς μιας επιτυχούς λύσης."

DAVID HILBERT





Όπως θα παίρνω τις στροφές I

51. Δυο διάδρομοι πλάτους 1 m τέμνονται κάθετα (σχήμα). Μια σκάλα μεταφέρεται οριζόντια έτσι ώστε να περάσει την γωνία.

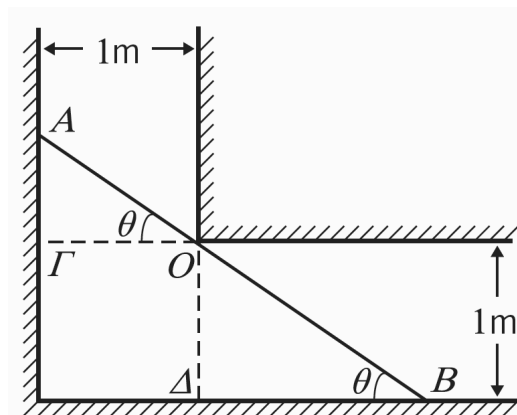
i. Να εκφράσετε τα OA, OB συναρτήσεις της

γωνίας θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ii. Να αποδείξετε ότι

$$(AB) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = f(\theta)$$

iii. Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μια σκάλας που μπορεί να μεταφερθεί οριζόντια για να στρίψει την γωνία.



Λύση

i. Από τα ορθογώνια τρίγωνα OAG και ODB έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OG}{OA} = \frac{1}{OA}, \eta\mu\theta = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{OB} \quad \text{ή} \quad OA = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, OB = \frac{1}{\eta\mu\theta}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$ii. AB = OA + OB = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1}{\eta\mu\theta}$$

$$iii. \text{Θεωρούμε την συνάρτηση } f(\theta) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(\theta) = \left(\frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} \right)', \dots = \frac{\eta\mu^3\theta - \sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta - \sigma\upsilon\nu^3\theta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta = \sigma\upsilon\nu^3\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f'

Η f στο $\theta = \frac{\pi}{4}$ παρουσιάζει ελάχιστο

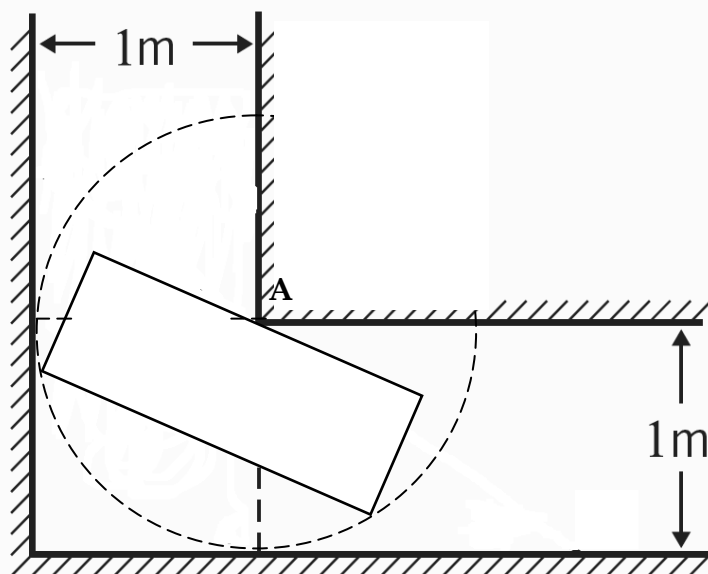
$$\text{στο } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

Άρα το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μια σκάλας που μπορεί να μεταφερθεί οριζόντια και να στρίψει την γωνία είναι $2\sqrt{2}$ μέτρα.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	-	0	+
$f(\theta)$			

Όπως θα παίρνω τις στροφές II.

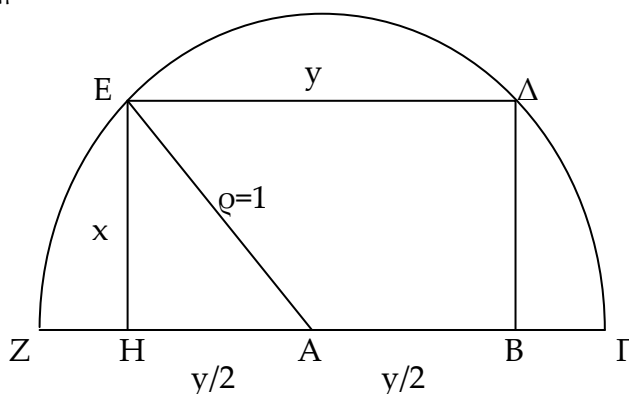
52. Δύο διάδρομοι πλάτους 1 μέτρου τέμνονται κάθετα (σχήμα). Ένα έπιπλο σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου σύρεται οριζόντια έτσι ώστε να περάσει την γωνία. Το ορθογώνιο για να περάσει την στροφή του διαδρόμου περιστρέφεται με κέντρο στο σημείο Α και οι αποστάσεις του Α από τις απέναντι κορυφές του ορθογώνιου απέχουν λιγότερο από 1 μέτρο, δηλαδή, η μέγιστη ακτίνα κίνησης του είναι ο κυκλικός τομέας με κέντρο το Α και ακτίνα 1 μέτρο που εφάπτεται στις πλευρές του διαδρόμου. (σχήμα) Να βρείτε τις διαστάσεις του μέγιστου ορθογώνιου που μπορεί να πάρει την στροφή.



Λύση

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι ένα ορθογώνιο που οι κορυφές του κατά την κίνηση «βγαίνουν έξω» από τον κυκλικό τομέα δεν μπορεί να πάρει την στροφή, άρα αναζητούμε ορθογώνια που εγγράφονται στο ημικύκλιο ακτίνας 1 μέτρου, για την ακρίβεια αναζητούμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που εγγράφεται σε ημικύκλιο ακτίνας 1 μέτρου με το μέγιστο εμβαδό.

Έστω ορθογώνιο ΕΔΒΗ εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο ακτίνας $\rho=1$ με διαστάσεις x, y . Κατασκευάζουμε σχήμα.



Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΗΑ

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = 1 - x^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - 4x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - 4x^2} \quad y > 0$$

Το εμβαδό του ορθογώνιου είναι

$$E = xy = x\sqrt{4 - 4x^2}$$



Πρόπει

$$\begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ 4 - 4x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,1)$$

Άρα η συνάρτηση που δίνει το εμβαδό του ορθογωνίου συναρτήσει του x είναι

$$E(x) = x\sqrt{4-4x^2}, x \in (0,1)$$

Η E είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\begin{aligned} E'(x) &= (x\sqrt{4-4x^2})' = \sqrt{4-4x^2} + \frac{x(4-4x^2)'}{2\sqrt{4-4x^2}} = \sqrt{4-4x^2} + \frac{-8x^2}{2\sqrt{4-4x^2}} = \sqrt{4-4x^2} + \frac{-4x^2}{\sqrt{4-4x^2}} = \\ &= \frac{4-4x^2}{\sqrt{4-4x^2}} + \frac{-4x^2}{\sqrt{4-4x^2}} = \frac{4-8x^2}{\sqrt{4-4x^2}} = \frac{4(1-2x^2)}{\sqrt{4-4x^2}} \end{aligned}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(1-2x^2)}{\sqrt{4-4x^2}} = 0 \Leftrightarrow 4(1-2x^2) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

Άρα το εμβαδό είναι μέγιστο όταν οι διαστάσεις στον ορθογωνίου είναι $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ μ και

$$y = \sqrt{4 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2} \text{ μ και μέγιστο εμβαδό } E = xy = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} = 1 \text{ τ.μ}$$

(Αναμενόμενο, γιατί;)

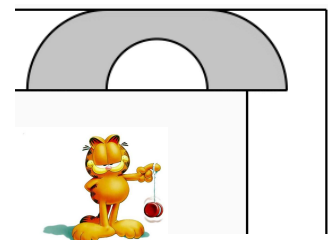
Το πρόβλημα του καναπέ! (Sofa problem)

Το 1966, ο Αυστριακός μαθηματικός Leo Moser έθεσε ένα πρακτικό ερώτημα:

Έστω ένας διάδρομος με ένα μέτρο πλάτος, ποιο θα είναι το σχήμα και οι διαστάσεις του μεγαλύτερου καναπέ που θα μπορούσε να περάσει από μια γωνία αυτού του διαδρόμου;

Ουσιαστικά το πρόβλημα προβάλλει στις δυο διαστάσεις ένα ζήτημα μεταφοράς επίπλου (καναπέ) του πραγματικού κόσμου. Το ερώτημα είναι να βρεθούν οι ακριβείς διαστάσεις του μεγαλύτερου επιπέδου σχήματος εμβαδού A ώστε να μπορεί να «περάσει» μέσα από ένα διάδρομο σχήματος L με πλάτος 1 μονάδα μήκους. Το εμβαδό A του μεγίστου σχήματος ονομάζεται **σταθερά του καναπέ (sofa Constant)**.

Όλα αυτά πριν από 46 χρόνια, όπου παραμένει ένα ανοικτό πρόβλημα. Το 1968, ο Βρετανός John Michael Hammersley έδειξε ότι ένας καναπές σε σχήμα ακουστικού τηλεφώνου θα μπορούσε να «περάσει» την γωνία του διαδρόμου, ακόμη και αν το εμβαδό του είναι μεγαλύτερο από 2 τετραγωνικά μέτρα (δείτε το σχήμα). Η σταθερά του καναπέ (sofa Constant) σύμφωνα με τον Hammersley είναι μεγαλύτερη από 2.207416099. Το 1992, ο Joseph Gerver βελτίωσε την προσέγγιση του Hammersley, βρήκε ένα μεγαλύτερο κάτω άκρο της σταθεράς τον αριθμό 2.219531669. Το πρόβλημα όμως παραμένει ανοικτό.



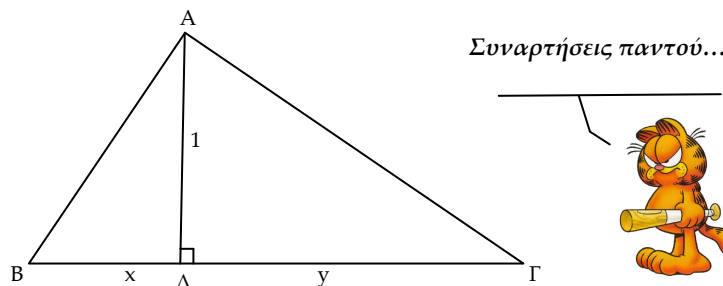


53. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με ύψος $AD=1$ cm.



Συμβολίζουμε $(BD)=x, (D\Gamma)=y$.

i. Να εκφράσετε τα μήκη των πλευρών AB και $A\Gamma$ συναρτήσει των x, y .

ii. Να εκφράσετε την περίμετρο L του τριγώνου συναρτήσει των x, y .

iii. Να δείξετε ότι $L > 2$

iv. Αν επιπλέον $B\Gamma=2$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της περιμέτρου L του τριγώνου.

Λύση

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα

$$f'(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})' = 1 + \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq -x \text{ άρα } \sqrt{x^2 + 1} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$$

Άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})' \sqrt{x^2 + 1} - (x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})'}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) \sqrt{x^2 + 1} - (x + \sqrt{x^2 + 1}) \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right)}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \sqrt{x^2 + 1} - (x + \sqrt{x^2 + 1}) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x - \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} + x \right)}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} - x}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Β. i. Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο στα τρίγωνα $AB\Delta, A\Delta\Gamma$ άρα

$$(AB) = \sqrt{x^2 + 1}, (A\Gamma) = \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\text{B.ii. } L = (AB) + (BD) + (D\Gamma) + (A\Gamma) = \sqrt{x^2 + 1} + x + y + \sqrt{y^2 + 1} = f(x) + f(y)$$

$$\text{B.iii. } x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 \quad (\text{με το } '=' \text{ να ισχύει για } x=0) \quad (1)$$

$$y \geq 0 \Leftrightarrow f(y) \geq f(0) \Leftrightarrow f(y) \geq 1 \quad (\text{με το } '=' \text{ να ισχύει για } y=0) \quad (2)$$



Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) : $f(x) + f(y) \geq 2$ (με το '=' να ισχύει για $x=y=0$, αλλά στο τρίγωνο δεν μπορούν ταυτόχρονα να είναι και το x και το y μηδέν).

Τελικά $f(x) + f(y) > 2$ ή $L > 2$.

in $x+y=2$, είναι $L(x) = f(x) + f(2-x)$, $x \in [0, 2]$

τότε $L'(x) = f'(x) + f'(2-x)(2-x)' = f'(x) - f'(2-x)$, $x \in [0, 2]$

$$\bullet L'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq f'(2-x) \xrightarrow{f \text{ κυρτή}, f' \nearrow} x \geq 2-x \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\bullet L'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \leq 1$$

Άρα η συνάρτηση L είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 2]$. Οπότε η $L(x)$ έχει ελάχιστο στο 1 το $L(1) = f(1) + f(2-1) = 2f(1) = 2 + 2\sqrt{2}$

Και μέγιστο στο 0 και το 2 το $L(0) = L(2) = f(2) + f(2-2) = f(2) + f(0) = 3 + \sqrt{5}$

54. Ένας μοτοσικλετιστής, ο Μήτσος, κινείται στο επίπεδο γράφοντας μια καμπύλη.

Οι συντεταγμένες του κατά την χρονική στιγμή t δίνονται από τους τύπους:

$$x = \ln t, y = (\ln t)^2$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση C_f είναι η τροχιά που γράφει η μοτοσικλέτα του Μήτσου.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της τροχιάς αυτής στο τυχαίο σημείο της C_f $M(x_1, y_1)$

iii) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_1, y_1)$, $0 < x_1 < 3$ τέμνει στο σημείο Π ένα τοίχο T παράλληλο προς τον άξονα $y'y$ που τα σημεία του ικανοποιούν την εξίσωση $x=3$ (σχήμα). Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θέσεως του Π στον τοίχο T (ταχύτητα), όταν το σημείο M βρίσκεται στην θέση $x=1$.

Λύση

$$i) \begin{cases} x = \ln t \\ y = (\ln t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln t \\ y = x^2 \end{cases} \text{ άρα } f(x) = x^2, x > 0$$

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της C_f στο M είναι

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1) \Leftrightarrow y = 2x_1x - x_1^2$$

iii) Η ευθεία αυτή τέμνει τον τοίχο T στο σημείο όπου $x=3$ δηλαδή

$$y = 2x_1(3) - x_1^2 \Leftrightarrow y = 6x_1 - x_1^2 \text{ άρα οι συντεταγμένες του}$$

μεταβλητού σημείου Π είναι: $\Pi(x_1, 6x_1 - x_1^2)$

$$x_1(t) = \ln t$$

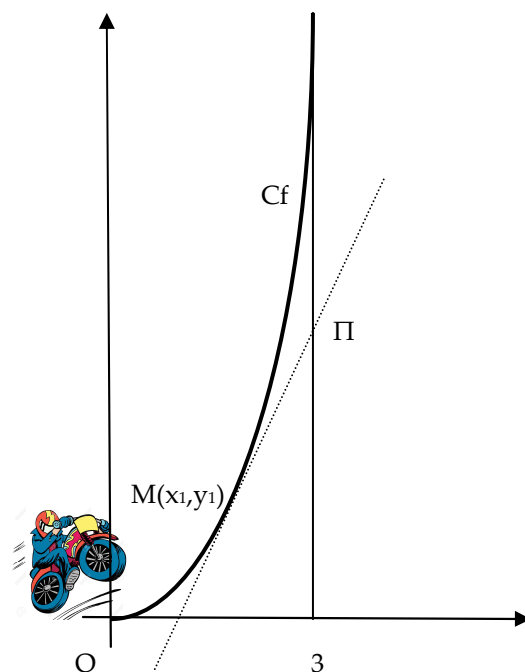
$$y_1(t) = 6 \ln t - \ln^2 t$$

Παραγωγίζουμε εφόσον αναζητούμε τον ρυθμό μεταβολής της θέσεως του Π

$$x_1'(t) = (\ln t)' = \frac{1}{t}, \quad y_1'(t) = \frac{6}{t} - \frac{2 \ln t}{t}$$

Από υπόθεση, όμως $x_1 = 1$ άρα $\ln t = 1 \Leftrightarrow t = e$

$$\text{Και με αντικατάσταση } y'(t) = \frac{6}{e} - \frac{2 \ln e}{e} = \frac{4}{e}$$





55. Δυο πόλεις Α, Β απέχουν μεταξύ τους απόσταση 216 km. Ο Μήτσος με την μοτοσικλέτα του και ο Κώστος- ένας φίλος του- επίσης με μοτοσικλέτα ξεκινούν ταυτόχρονα ο ένας από την πόλη Α και ο άλλος από την πόλη Β κατευθυνόμενοι ο πρώτος στην πόλη Β και δεύτερος στην πόλη Α, οι ταχύτητες τους αντίστοιχα είναι $u_1 = t^2 + 3t$ km/h και $u_2 = 5t$ km/h αντίστοιχα. Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο οι δυο μοτοσικλετιστές θα συναντηθούν και σε ποιο σημείο μεταξύ των δυο πόλεων;

Λύση

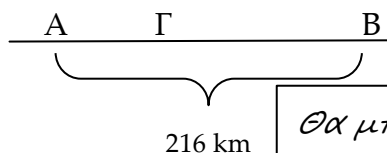
Έστω t_0 η διάρκεια της κίνησης των δυο μοτοσικλετιστών μέχρι την συνάντησής τους στο σημείο Γ. Είναι τότε

$$(ΑΓ) = \int_0^{t_0} (t^2 + 3t) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right]_0^{t_0} = \frac{t_0^3}{3} + \frac{3t_0^2}{2} \text{ km}$$

$$(ΒΓ) = \int_0^{t_0} 5t dt = \left[\frac{5t^2}{2} \right]_0^{t_0} = \frac{5t_0^2}{2} \text{ km}$$

$$\text{Όμως } (ΑΓ) + (ΒΓ) = 216 \Leftrightarrow \frac{5t_0^2}{2} + \frac{t_0^3}{3} + \frac{3t_0^2}{2} = 216 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t_0 = 6 \text{ h}$$

$$\text{Για } t_0 = 6 \text{ h προκύπτει } (ΑΓ) = \frac{6^3}{3} + \frac{3 \cdot 6^2}{2} = 126 \text{ km}, (ΒΓ) = \frac{5 \cdot 6^2}{2} = 90 \text{ km}$$



Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με το θεώρημα των ίσων παραγώγων



56. Ποδηλατοδρόμιο Ι

Σε ένα ποδηλατοδρόμιο ακτίνας $R = 200 \text{ m}$ ένας ποδηλάτης τρέχει με ταχύτητα 60 Km/h , διαγράφοντας τόξο ΑΒ. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της χορδής ΑΒ κατά τη χρονική στιγμή που η επίκεντρη γωνία θ του τόξου $\widehat{ΑΒ}$ είναι $\frac{\pi}{3}$.

Λύση

Αν Ο είναι το κέντρο του κύκλου και ΟΚ το απόστημα της χορδής ΑΒ = s, τότε η γωνία ΑΟΚ είναι $\frac{\theta}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ ισχύει

$$(ΑΚ) = (ΟΑ) \eta\mu \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \frac{s}{2} = R \cdot \eta\mu \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow s = 400 \eta\mu \frac{\theta}{2}$$

ή ως συνάρτηση του χρόνου

$$s(t) = 400 \eta\mu \frac{\theta(t)}{2}$$

Με παραγώγιση έχουμε

$$s'(t) = 400 \cdot \frac{1}{2} \theta'(t) \text{ συν } \frac{\theta(t)}{2} = 200 \theta'(t) \text{ συν } \frac{\theta(t)}{2} \quad (1).$$

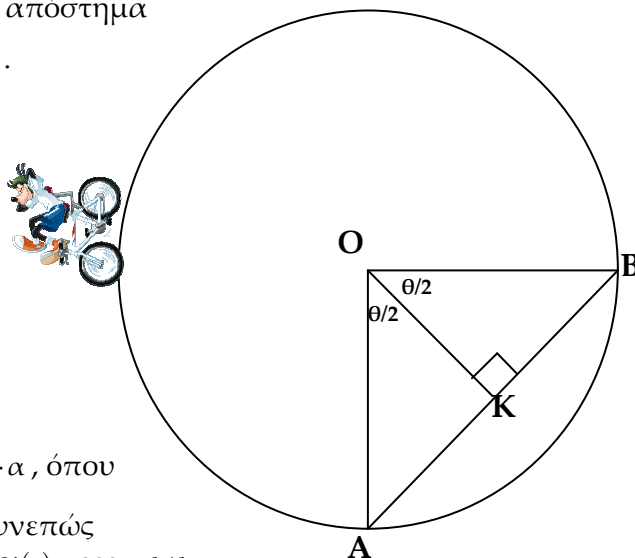
Το μήκος L του τόξου ΑΒ είναι $L = 2\pi R \frac{\alpha}{2\pi} = R \cdot \alpha$, όπου

α η επίκεντρη γωνία του τόξου σε ακτίνια, συνεπώς

$$L = R \cdot \theta = 200\theta \text{ ή } L'(t) = 200\theta'(t), 60000 = 200\theta'(t), \theta'(t) = 300 \text{ rad/h}$$

$$(L'(t) = 60000 \text{ ταχύτητα ποδηλάτη σε μέτρα ανά ώρα}) \dots$$

$$\text{Έτσι η σχέση (1) γίνεται: } s'(t) = 200 \cdot 300 \text{ συν } \frac{\pi}{6} = 30 \cdot 10^3 \sqrt{3} \text{ m/sec ή } 30\sqrt{3} \text{ Km/sec}$$

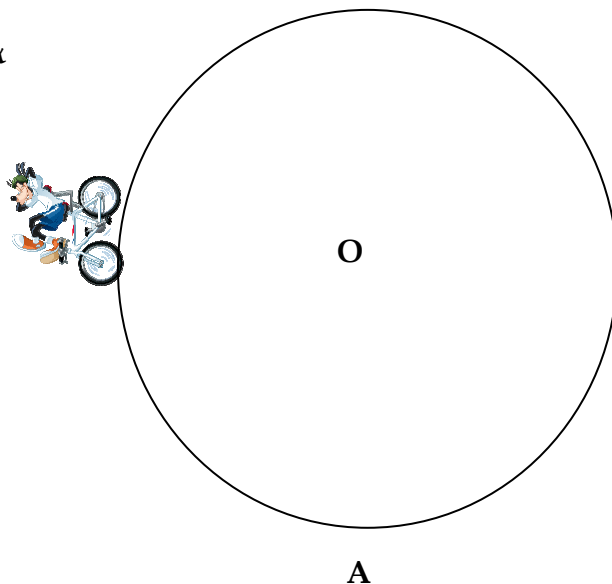




57. Ποδηλατοδρόμιο II

Την επόμενη μέρα σε ένα άλλο κυκλικό ποδηλατοδρόμιο ο ποδηλάτης ξεκινά από την αφετηρία στο σημείο Α και διαγράφει δίχως να σταματήσει ένα κυκλικό γύρο επιστρέφοντας στο Α.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο αντιδιαμετρικά σημεία της κυκλικής διαδρομής του ποδηλάτη στα οποία έχει την ίδια ταχύτητα



Λύση

Έστω $\varphi(\theta)$ η συνάρτηση της ταχύτητας του ποδηλάτη την στιγμή που έχει διαγράψει τόξο $\theta \in [0, 2\pi]$. Η φ είναι συνεχής με $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$. Για να υπάρχουν δυο αντιδιαμετρικά σημεία της κυκλικής διαδρομής στα οποία ο ποδηλάτης να έχει την ίδια ταχύτητα αρκεί να υπάρχει $\theta_0 \in [0, \pi]$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\theta_0) = \varphi(\pi + \theta_0)$

Θέτουμε συνάρτηση $f(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi(\pi + \theta)$, $\theta \in (0, \pi)$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής με

$$f(0) = \varphi(0) - \varphi(\pi)$$

$$f(\pi) = \varphi(\pi) - \varphi(2\pi) = \varphi(\pi) - \varphi(0)$$

όμως

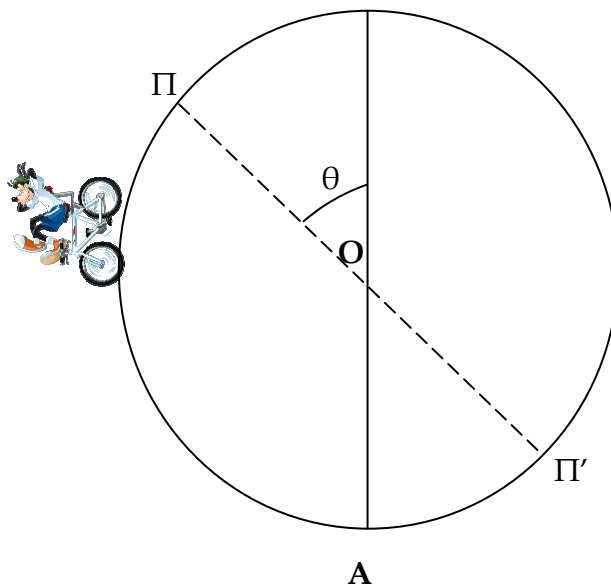
$$f(0)f(\pi) = (\varphi(0) - \varphi(\pi))^2 \geq 0$$

-Αν $f(0)f(\pi) = 0$ τότε $f(0) = 0$ ή $f(\pi) = 0$

Επιλέγουμε ως $\theta_0 = 0$ ή $\theta_0 = \pi$ αντίστοιχα

-Αν $f(0)f(\pi) < 0$ τότε από το θεώρημα Bolzano

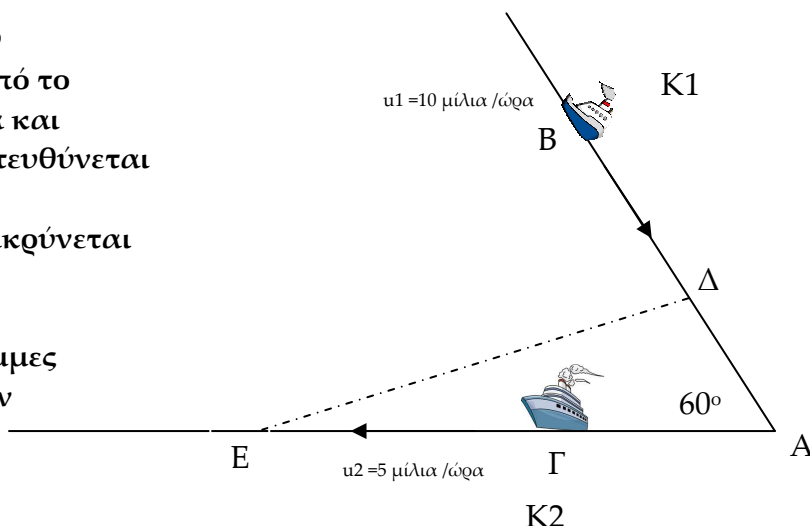
Υπάρχει $\theta_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(\theta_0) = 0$





58.Καραβιές....

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ δυο καράβια K1 και K2 απέχουν από το λιμάνι A αποστάσεις 100 μίλια και 50 μίλια αντίστοιχα. Το K1 κατευθύνεται προς το λιμάνι με ταχύτητα $u_1 = 10$ μίλια /ώρα το K2 απομακρύνεται από το λιμάνι με ταχύτητα $u_2 = 5$ μίλια /ώρα. Οι πορείες των καραβιών είναι ευθύγραμμες (δείτε σχήμα) και σχηματίζουν γωνία 60° .



i. Να δείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t \in [0, 10)$, η απόσταση των καραβιών είναι

$$d(t) = 5\sqrt{3}(10 - t) \quad \text{μίλια}$$

ii. Ποια χρονική στιγμή η απόσταση των καραβιών είναι μέγιστη;

Λύση

i. Έστω ότι την χρονική στιγμή $t \geq 0$ τα καράβια βρίσκονται στις θέσεις Δ και Ε, αντίστοιχα $(A\Delta) = 100 - 10t$, $(A\Gamma) = 50 - 5t$,

Από τον νόμο των συνημίτονων

$$\begin{aligned} (DE)^2 &= (A\Delta)^2 + (A\Gamma)^2 - 2(A\Delta)(A\Gamma)\cos 60^\circ = \\ &= (100 - 10t)^2 + (50 - 5t)^2 - 2(100 - 10t)(50 - 5t)\cos 60^\circ = \\ &= 10000 - 2000t + 100t^2 + 2500 - 500t + 25t^2 - 2(100 - 10t)(50 - 5t)\frac{1}{2} = \\ &= 10000 - 2000t + 100t^2 + 2500 - 500t + 25t^2 - 5000 + 500t + 500t - 50t^2 = \\ &= 7500 - 1500t + 75t^2 = 25(300 - 60t + 3t^2) = 25(3t^2 - 60t + 300) \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} (DE) &= \sqrt{25(3t^2 - 60t + 300)} = 5\sqrt{3(t^2 - 20t + 100)} = 5\sqrt{3(t-10)^2} \stackrel{0 \leq t < 10}{=} 5\sqrt{3}(10 - t) \\ d(t) &= 5\sqrt{3}(10 - t), t \in [0, 10) \end{aligned}$$

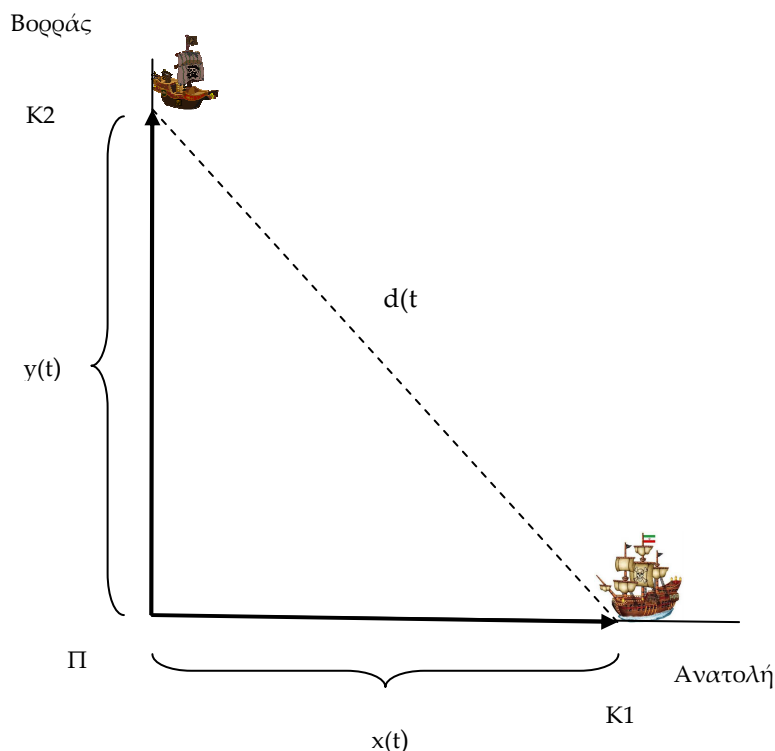
$$\text{ii. } d'(t) = (5\sqrt{3}(10 - t))' = -5\sqrt{3} < 0$$

Άρα η συνάρτηση d είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 10)$,

$0 \leq t \stackrel{d' < 0, t \in [0, 10)}{\Leftrightarrow} d(0) \geq d(t)$ άρα η μέγιστη απόσταση των καραβιών στο $[0, 10)$ εμφανίζεται την χρονική στιγμή $t=0$ και είναι $d(0) = 50\sqrt{3}$ μίλια



59. Δύο καράβια K1 και K2 αναχωρούν συγχρόνως από το λιμάνι του Πειραιά (Π). Το καράβι K1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα $u_1(t) = 12 \text{ km/h}$ και το K2 κινείται βόρεια με ταχύτητα $u_2(t) = 5 \text{ km/h}$.



- i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσης $x(t)$ και $y(t)$ των πλοίων K1 και K2 αντίστοιχα.
- ii) Ποια είναι η απόσταση του πλοίου K1 από τον Πειραιά μετά από ταξίδι 2 ωρών.
- iii) Ποια χρονική στιγμή t_1 ωρών το καράβι K2 απέχει από τον Πειραιά απόσταση 35 km.
- iv) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ η απόσταση $d(t)$ των δυο πλοίων δίνεται από την σχέση $d(t) = 13t$.

Λύση

Η θέση $x(t)$ του πλοίου K1, την στιγμή t , δίνεται από την σχέση

$$x(t) = u_1(t) \cdot t = 12t \quad (\text{σε Km})$$

Ανάλογα, η θέση $y(t)$ του καραβιού Π2, δίνεται από την σχέση

$$y(t) = u_2(t) \cdot t = 5t \quad x(t) = u_1(t) \cdot t = 12t$$

$$\text{ii) } x(2) = 12 \cdot 2 = 24 \text{ Km}$$

$$\text{iii) } y(t) = 35 \Leftrightarrow 5t = 35 \Leftrightarrow t = 7 \text{ ώρες}$$

iv) Σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο K₂ΠK₁ έχουμε:

$$d^2(t) = y^2(t) + x^2(t) \Leftrightarrow d^2(t) = (5t)^2 + (12t)^2 = 169t^2$$

Άρα είναι $d(t) = 13t \text{ Km}$.



60.(All time classic) Σημείο Μ κινείται στην παραβολή $y = 2x^2$ ($x > 0$). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι 3 cm/sec τη στιγμή που η απόσταση OM του σημείου από την αρχή των αξόνων είναι $\sqrt{68} \text{ cm}$, να βρεθεί:

- Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης.
- Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις δύο πλευρές του στους άξονες και διαγώνιο OM.
- Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta = \angle MOx$.
- Το σημείο όπου οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του Μ είναι ίσοι.

Λύση

i. Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο και A, B οι

προβολές του στους άξονες Ox και Oy

αντίστοιχα, τότε

είναι $OA = x > 0$ και $OB = AM = y > 0$.

Στο τρίγωνο OAM ισχύει το Πυθαγόρειο

Θεώρημα: $x^2 + y^2 = 68$ και

επειδή $y = 2x^2$ ή $x^2 = \frac{y}{2}$,

είναι

$$\frac{y}{2} + y^2 = 68 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 136 = 0 \Leftrightarrow y = 8 \text{ ή } y = -\frac{17}{2}.$$

Για τη δεκτή τιμή $y = 8$ βρίσκουμε από την

$y = 2x^2$ την τιμή $x = 2$. (1).

Η παραβολή $y = 2x^2$ γράφεται $y(t) = 2x^2(t)$, γιατί οι συντεταγμένες x και y είναι συναρτήσεις του χρόνου.

Με παραγωγή έχουμε: $y'(t) = 4x(t) \cdot x'(t)$ (1).

Είναι $x'(t) = 3 \text{ cm/sec}$ και $x(t) = 2$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε $y'(t) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \text{ cm/sec}$.

(ii). Το εμβαδόν του ορθογωνίου OAMB είναι $E(t) = x(t)y(t)$.

Με παραγωγή έχουμε: $E'(t) = x'(t) \cdot y(t) + y'(t) \cdot x(t)$, και με αντικατάσταση

$$E'(t) = 3 \cdot 8 + 24 \cdot 2 = 72 \text{ cm}^2/\text{sec}.$$

(iii). Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM έχουμε $\epsilon\phi\theta = \frac{y}{x} = \frac{2x^2}{x} = 2x$ και με την έκφραση συναρτήσεων του χρόνου t: $\epsilon\phi\theta(t) = 2x(t)$.

Με παραγωγή είναι $\frac{\theta'(t)}{\sin^2\theta(t)} = 2x'(t)$, οπότε $\theta'(t) = 2x'(t) \cdot \sin^2\theta(t)$ (2).

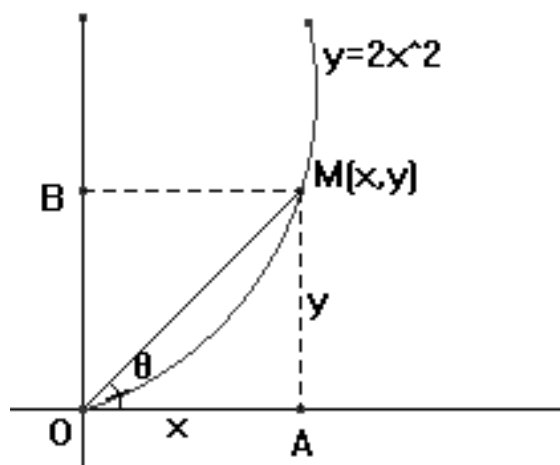
Στο OAM είναι: $\sin\theta = \frac{MA}{MO} = \frac{2}{\sqrt{68}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin^2\theta = \frac{4}{68} = \frac{1}{17}$. Έτσι

$$\text{βρίσκουμε } \theta'(t) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{17} = \frac{6}{17} \text{ rad/sec}.$$

(iv). Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου $x'(t) = y'(t) \neq 0$, έχουμε

$$y'(t) = 4x(t) \cdot y'(t), 1 = 4x(t), 1 = 4x, x = \frac{1}{4}, \text{ οπότε λόγω της } y = 2x^2, \text{ θα είναι } y = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

Έτσι, το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.



All time classic





▪ Πολύ καλή άσκηση του σχολικού που εμπλέκει πρόβλημα κίνησης και εφαπτομένη και ταιριάζει με το ύψος των προβλημάτων

61. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$

πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα).

Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

Bonus Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

Λύση

Ο προβολέας του περιπολικού φωτίζει κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης C_f , καθώς αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Αρχικά θα υπολογίσουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της

$$A(\alpha, -\frac{1}{3}\alpha^3)$$

Έχουμε λοιπόν $f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3\right)' = -x^2$, οπότε $f'(\alpha) = -\alpha^2$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης AM είναι:

$$y + \frac{1}{3}\alpha^3 = -\alpha^2(x - \alpha)$$

Για $y = 0$ έχουμε: $y + \frac{1}{3}\alpha^3 = -\alpha^2(x - \alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\alpha^3 = -x\alpha + \alpha^3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\alpha$

Άρα το σημείο Μ έχει τετμημένη $x(t) = \frac{2}{3}\alpha(t)$. Επομένως $x'(t) = \frac{2}{3}\alpha'(t) = -\frac{2}{3}\alpha(t)$

Και την χρονική στιγμή t_0 , που είναι, $\alpha(t_0) = -3$, έχουμε:

$$x'(t_0) = -\frac{2}{3}\alpha(t_0) = -\frac{2}{3}(-3) = 2 \text{ μονάδες μήκους / μονάδα χρόνου}$$

Bonus. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολωνομική άρα $f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3\right)' = -x^2 < 0$ για κάθε

$x \neq 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα είναι 1-1 συνεπώς αντιστρέφεται.

Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} που ταυτοχρόνως θα είναι το σύνολο τιμών της f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, έχει σύνολο τιμών το

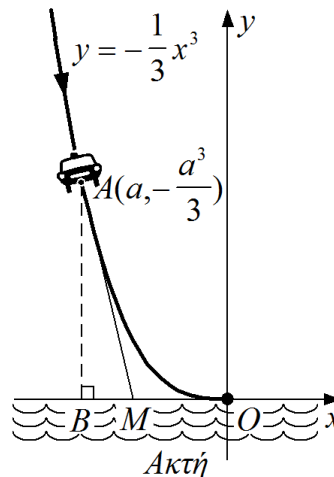
$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}, \text{ άρα } A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } y = f(x) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow x^3 = -3y$$

$$\text{Αν } y < 0 \Leftrightarrow -3y > 0, \text{ τότε } x = \sqrt[3]{-3y}, \text{ ενώ αν } y \geq 0 \Leftrightarrow -3y \leq 0, \text{ τότε } x = -\sqrt[3]{3y}$$

Τελικά

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{-3y}, & y < 0 \\ -\sqrt[3]{3y}, & y \geq 0 \end{cases} \text{ αλλάζουμε μεταβλητή } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-3x}, & x < 0 \\ -\sqrt[3]{3x}, & x \geq 0 \end{cases}$$





62. (Επαναληπτικές εξετάσεις 2011) Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένας παρατηρητής

βρίσκεται στην θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένος του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t ,

είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$, $t \geq 0$

i) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , με $t \geq 0$, δίνεται από τον τύπο $x(t) = 16t$.

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στην συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο διαρκεί η οπτική επαφή.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠM του παρατηρητή από το σημείο O μέχρι το σημείο A .

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, κατά την οποία η απόσταση

$d = (OM)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Να θεωρήσετε ότι το κινητό M και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος Oxy .

Λύση

i) Είναι $x'(t) = 16 \Leftrightarrow x'(t) = (16t)'$ άρα $x(t) = 16t + c$, c σταθερός πραγματικός αριθμός

Όμως $x(0) = 0$ και με αντικατάσταση έπεται ότι $c = 0$ άρα $x'(t) = 16 \text{ m/min}$, $t \geq 0$.

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, αναζητούμε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από σημείο $\Pi(0,1)$. Αν $M(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής τότε:

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{ή} \quad y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $\Pi(0,1)$ άρα

$$1 - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(0 - x_0) \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x_0} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x_0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_0 = 4$$

Οπότε το σημείο επαφής είναι το $A(4, f(4))$ ή $A(4, 2)$ $x(t_0) = 4 \Leftrightarrow 16t_0 = 4 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4} \text{ min}$

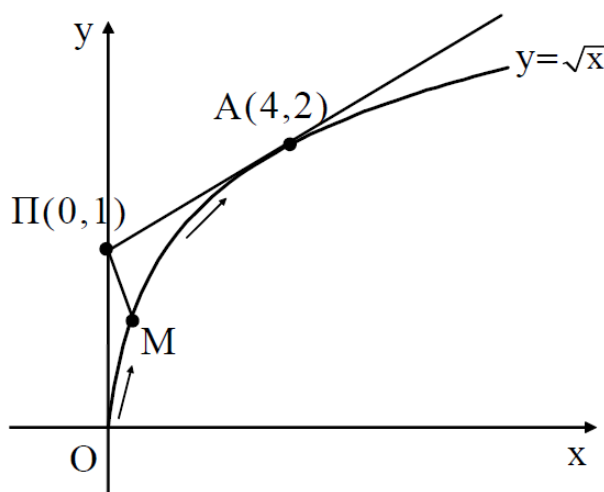
Άρα η οπτική επαφή διαρκεί 15 δευτερόλεπτα.

iii) Είναι $\varepsilon: y - \sqrt{4} = \frac{1}{2\sqrt{4}}(x - 4)$ ή $\varepsilon: y = \frac{1}{4}x + 1$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x}\right) dx = \dots = \frac{2}{3} \text{ m}^2$

iv) Το σημείο $M(x, \sqrt{x})$ συναρτήσει του χρόνου t είναι $M(16t, 4\sqrt{t})$. Η απόσταση ΠM είναι

$$(\Pi M) = d(t) = \sqrt{(16t - 0)^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$$





Για κάθε $t > 0$, $d'(t) = \left(\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1} \right)' = \frac{256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}$

Εξετάζουμε το πρόσημο του αριθμητή θεωρώντας την συνάρτηση $g(t) = 256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}, t > 0$,

$$g'(t) = 256 + \frac{1}{t\sqrt{t}} > 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε: $g\left(0, \frac{1}{4}\right) = \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t), g\left(\frac{1}{4}\right)\right) = (-\infty, 68]$

Το $0 \in (-\infty, 68]$ άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, η οποία λόγω της μονοτονίας

είναι και μοναδική. Επίσης έχουμε:

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow g(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0$$

$$d'(t) < 0 \Leftrightarrow g(t) < 0 \Leftrightarrow g(t) < g(t_0) \Leftrightarrow t < t_0$$

$$d'(t) > 0 \Leftrightarrow g(t) > 0 \Leftrightarrow g(t) > g(t_0) \Leftrightarrow t > t_0$$

Περισσότερα ερωτήματα με την κίνηση
υλικού σημείου στα γενικά
επαναληπτικά θέματα τον Φεβρουάριο



Άρα η απόσταση $d(t)$ γίνεται ελάχιστη για την χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$

63. Το εμβαδόν ενός κυκλικού δακτυλίου είναι σταθερό και ίσο με $9\pi \text{ cm}^2$. Αν οι κύκλοι έχουν μεταβλητές ακτίνες x, y με $x > y$, να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης της ακτίνας y όταν η ακτίνα x αυξάνεται με ρυθμό 8 cm/sec τη στιγμή που η τιμή της είναι 5 cm .

Λύση

Αν $E(x)$ και $E(y)$ είναι τα εμβαδά των δύο

κύκλων, το εμβαδόν του δακτυλίου

$$\text{είναι } E(x) - E(y) = 9\pi \text{ ή } \pi x^2 - \pi y^2 = 9\pi,$$

$$\text{οπότε } x^2 - y^2 = 9 \quad (1). \text{ Για } x = 5$$

$$\text{έχουμε } 5^2 - y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = 4 \text{ cm.}$$

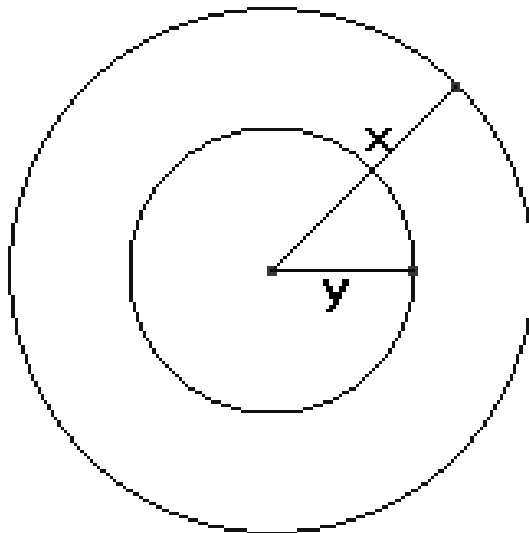
Η σχέση (1) γράφεται: $x^2(t) - y^2(t) = 9$ και με

παραγωγή ως προς t γίνεται:

$$2x(t) \cdot x'(t) - 2y(t) \cdot y'(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) \cdot y'(t) = x(t) \cdot x'(t).$$

Αντικαθιστούμε με τα γνωστά μεγέθη:

$$4y'(t) = 5 \cdot 8 \Leftrightarrow y'(t) = 10 \text{ cm/sec.}$$





64. Πρέπει να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία που να έχει σχήμα ορθογωνίου με ένα ημικύκλιο πάνω σε αυτό. Η περίμετρος του παραθύρου πρέπει να είναι 3 μέτρα. Πως θα γίνει η κατασκευή για να έχει μέγιστο εμβαδό.



Λύση

Αρκεί να προσδιορίσουμε στις διαστάσεις x, y

του ορθογωνίου και η ακτίνα $\rho = \frac{x}{2}$ του ημικύκλιου.

Η περίμετρος του παραθύρου ισούται με

$$x + 2y + \pi\rho = x + 2y + \frac{1}{2}\pi x$$

Οπότε ισχύει

$$x + 2y + \frac{1}{2}\pi x = 3 \Leftrightarrow 2y = 3 - \frac{1}{2}\pi x - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\pi x - \frac{1}{2}x$$

Το εμβαδό του παραθύρου

$$E = xy + \frac{1}{2}\pi\rho^2 = x\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\pi x - \frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 =$$

$$= \dots = \frac{3}{2}x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2$$

Η συνάρτηση

$$E(x) = \frac{3}{2}x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2, x > 0 \text{ έχει παράγωγο}$$

$$E'(x) = \frac{3}{2} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x = \frac{3}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x$$

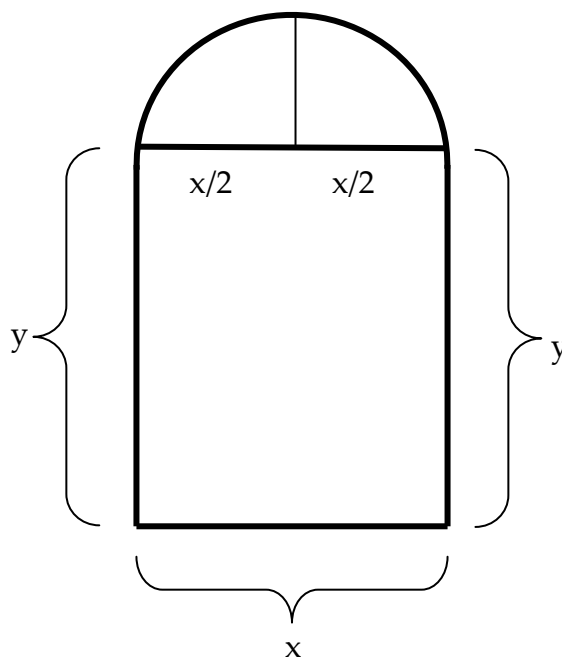
$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{4+\pi}{4}x \Leftrightarrow 3 = \frac{4+\pi}{2}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = (4+\pi)x \Leftrightarrow x = \frac{6}{\pi+4}$$

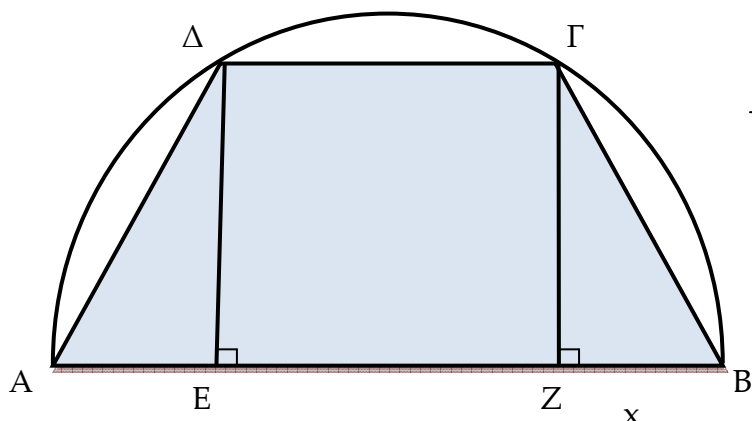
Το εμβαδό του παραθύρου γίνεται μέγιστο όταν $x = \frac{6}{\pi+4}$ μέτρα

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{6}{\pi+4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\pi+4} = \frac{3}{\pi+4} \text{ μέτρα.}$$





65. Σε ένα ημικύκλιο με ακτίνα R έχουμε εγγράψει τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με μεγάλη βάση την διάμετρο του ημικυκλίου. Φέρουμε τα ύψη του τραπεζίου ΔE και ΓZ και συμβολίζουμε με x το ευθύγραμμο τμήμα ZB .



All time classic



i. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπεζίου συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο

$$P(x) = 4R - 2x + 2\sqrt{2Rx}, x \in (0, R)$$

Για ποια τιμή του x έχει εγγραφεί τραπέζιο με μέγιστη περίμετρο;

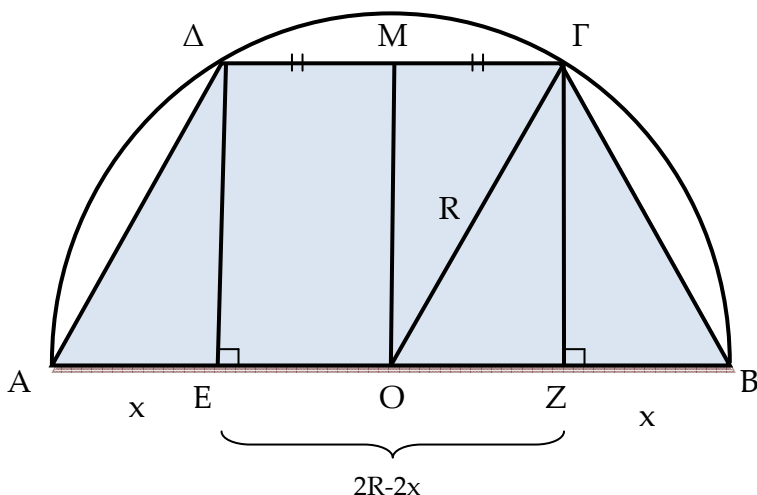
ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τραπεζίου συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = (2R - x)\sqrt{2Rx - x^2}, x \in (0, R)$$

Για ποια τιμή του x έχει εγγραφεί τραπέζιο με μέγιστο εμβαδό;

Λύση

i.



Τα τρίγωνα ΔE και ΓZB είναι ίσα (Ορθογώνια, $\Delta\Gamma = \Gamma B, \Gamma Z = \Delta E$) αρα $AE = ZB = x$, αρα $EZ = \Delta\Gamma = 2R - 2x$

Φέρνουμε και το ύψος OM από το κέντρο O του ημικυκλίου, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $OM\Gamma$ (Πυθαγόρειο θεώρημα) ισχύει:

$$OM^2 = OG^2 - MG^2 = R^2 - (R - x)^2 = 2Rx - x^2$$

Δηλαδή το τραπέζιο έχει ύψος $v = \sqrt{2Rx - x^2}$

Ακόμη στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma Z$ ισχύει:

$$B\Gamma^2 = \Gamma Z^2 + BZ^2 = (2Rx - x^2) + x^2 = 2Rx$$

Συνεπώς $(\Delta\Gamma) = (B\Gamma) = \sqrt{2Rx}$



Η περίμετρος του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισούται με

$$P(x) = 2R + (2R - 2x) + 2\sqrt{2Rx} = 4R - 2x + 2\sqrt{2Rx}, x \in (0, R)$$

Η συνάρτηση P είναι παραγωγίσιμη και

$$P'(x) = (4R - 2x + 2\sqrt{2Rx})' = -2 + \frac{2R}{\sqrt{2Rx}} = \frac{2R - 2\sqrt{2Rx}}{\sqrt{2Rx}}$$

$$\bullet P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2R - 2\sqrt{2Rx}}{\sqrt{2Rx}} = 0 \Leftrightarrow 2R - 2\sqrt{2Rx} = 0 \Leftrightarrow R - \sqrt{2Rx} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{2Rx} \Leftrightarrow R^2 = 2Rx \Leftrightarrow x = \frac{R}{2}$$

$$\bullet P'(x) > 0 \Leftrightarrow R^2 > 2Rx \Leftrightarrow x < \frac{R}{2}$$

$$\bullet P'(x) < 0 \Leftrightarrow R^2 < 2Rx \Leftrightarrow x > \frac{R}{2}$$

x	0	R/2	R
P'(x)		+	-
P(x)		↗	↘

μέγιστο

Άρα η περίμετρος γίνεται μέγιστη όταν $x = \frac{R}{2}$

ii. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ ισούται με:

$$E(x) = \frac{(AB + \Delta\Gamma) \cdot \Delta E}{2} = \frac{(2R + 2R - 2x)\sqrt{2Rx - x^2}}{2} = \frac{(4R - 2x)\sqrt{2Rx - x^2}}{2} = \frac{2(2R - x)\sqrt{2Rx - x^2}}{2} = (2R - x)\sqrt{2Rx - x^2}$$

$$\text{Τελικά } E(x) = (2R - x)\sqrt{2Rx - x^2}, x \in (0, R)$$

Η συνάρτηση E(x) έχει παράγωγο

$$\begin{aligned} E'(x) &= ((2R - x)\sqrt{2Rx - x^2})' = -\sqrt{2Rx - x^2} + (2R - x) \frac{2R - 2x}{2\sqrt{2Rx - x^2}} = \\ &= -\sqrt{2Rx - x^2} + \frac{(2R - x)(R - x)}{\sqrt{2Rx - x^2}} = \frac{(2R - x)(R - x) - (2Rx - x^2)}{\sqrt{2Rx - x^2}} = \\ &= \frac{2R^2 - 2Rx - xR + x^2 - 2Rx + x^2}{\sqrt{2Rx - x^2}} = \frac{2x^2 - 5Rx + 2R^2}{\sqrt{2Rx - x^2}} \end{aligned}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5Rx + 2R^2}{\sqrt{2Rx - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5Rx + 2R^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2R \text{ ή } x = \frac{R}{2}$$

Από το πρόσημο του τριώνυμου κατασκευάζουμε τον πίνακα:

x	0	R/2	R
E'(x)		+	-
E(x)		↗	↘

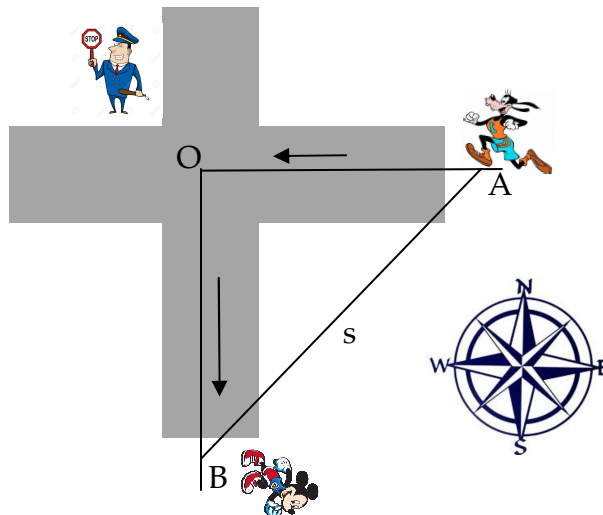
μέγιστο

Άρα το τραπεζίο ΑΒΓΔ έχει μέγιστο εμβαδό

$$\text{όταν } x = \frac{R}{2}$$



66. Ο Γκούφυ (δρομέας Α) βρίσκεται σε απόσταση 8 Km ανατολικά από ένα σταυροδρόμι Ο και τρέχει προς αυτό με ταχύτητα 8 Km/h. Την ίδια στιγμή ο Μίκυ Μάους (δρομέας Β) βρίσκεται σε απόσταση 6 Km νότια από το σταυροδρόμι Ο και απομακρύνεται από αυτό με ταχύτητα 9 Km/h. Να βρεθεί αν στη θέση αυτή η απόστασή των δρομέων $AB = s$ μεγαλώνει ή μικραίνει και με ποιο ρυθμό.



Λύση

Αν $OA = x$ και $OB = y$ τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB ισχύει $s^2 = x^2 + y^2$, οπότε για $x = 8$ και $y = 6$ είναι: $s^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, $s = 10$.

Αν τα μεγέθη x, y, s τα εκφράσουμε ως συναρτήσεις του χρόνου η σχέση γίνεται $s^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$ και με παραγωγή

$s(t) \cdot s'(t) = x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t)$. Είναι $s(t) = 10$, $x(t) = 8$, $y(t) = 6$, $x'(t) = -8$ γιατί το διάστημα $OA = x$ μικραίνει και $y'(t) = +9$

γιατί το διάστημα $OB = y$ μεγαλώνει. Έτσι με αντικατάσταση έχουμε:

$$10 \cdot s'(t) = 8(-8) + 6 \cdot 9, \quad 10 \cdot s'(t) = -10, \quad s'(t) = -1 \text{ Km/h}.$$

Η απόσταση s μειώνεται με ρυθμό 1 Km/h.

Η πρωτότυπη σύλληψη που μπορεί να εφαρμοστεί μια μόνο φορά αποτελεί τρικ. Αν όμως μπορεί να εφαρμοστεί περισσότερες, συνιστά μέθοδο.»

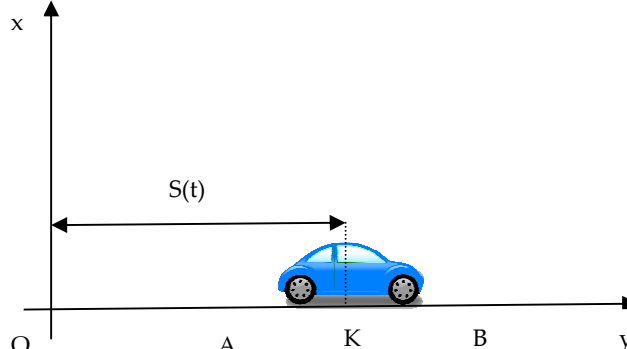
G. Polya





67. (on the road...) Ένα όχημα Κ κινείται σε ένα ευθύ δρόμο με ταχύτητα που μεταβάλλεται στην διάρκεια του χρόνου. Η θέση στην οποία βρίσκεται την στιγμή t δίνεται από την συνάρτηση $S(t)$. Η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού είναι $u(t) = S'(t)$, ενώ η μέση ταχύτητα με την οποία διέτρεξε την απόσταση $AB = S(t_B) - S(t_A)$ είναι:

$$\bar{u} = \frac{S(t_B) - S(t_A)}{t_B - t_A}$$



Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο χρονικές στιγμές t_1, t_2 τέτοιες, ώστε το άθροισμα των στιγμιαίων ταχυτήτων στις στιγμές αυτές είναι διπλάσιο της μέσης ταχύτητας του Κ στο διάστημα $[t_A, t_B]$.

Λύση

Από υπόθεση συμπεραίνουμε ότι η $S(t)$ είναι συνεχής κα παραγωγίσιμη στο διάστημα $[t_A, t_B]$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση $S(t)$ στα διαστήματα

$$\left[t_A, \frac{t_A + t_B}{2} \right] \text{ και } \left[\frac{t_A + t_B}{2}, t_B \right]. \text{ Οπότε υπάρχουν}$$

$$t_1 \in \left(t_A, \frac{t_A + t_B}{2} \right), \quad t_2 \in \left(\frac{t_A + t_B}{2}, t_B \right)$$

Τέτοια ώστε

$$s'(t_1) = \frac{s(t_A) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{t_A - \frac{t_A + t_B}{2}} = \frac{s(t_A) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{\frac{t_A - t_B}{2}} = 2 \frac{s(t_A) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{t_A - t_B}$$

$$s'(t_2) = \frac{s(t_B) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{t_B - \frac{t_A + t_B}{2}} = \frac{s(t_B) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{\frac{t_B - t_A}{2}} = 2 \frac{s(t_B) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{t_B - t_A}$$

Αλλά $s'(t_1) = u(t_1)$, $s'(t_2) = u(t_2)$ όπου $u(t_1), u(t_2)$ οι στιγμιαίες ταχύτητες τις χρονικές στιγμές t_1, t_2

Έτσι

$$\begin{aligned} u(t_1) + u(t_2) &= s'(t_1) + s'(t_2) = 2 \frac{s(t_A) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{t_A - t_B} + 2 \frac{s(t_B) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{t_B - t_A} = 2 \left[\frac{s(t_A) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{t_A - t_B} - \frac{s(t_B) - s\left(\frac{t_A + t_B}{2}\right)}{t_A - t_B} \right] = \\ &= 2 \frac{s(t_A) - s(t_B)}{t_A - t_B} = 2\bar{u} \text{ δηλαδή } u(t_1) + u(t_2) = 2\bar{u} \end{aligned}$$



68. Ένα αυτοκίνητο Μ φεύγει από την πόλη Α και ταξιδεύει βόρεια με μέση ταχύτητα 40 km/h. Την ίδια χρονική στιγμή ένα άλλο αυτοκίνητο Ν αφήνει την πόλη Β, που βρίσκεται 50 km ανατολικά της πόλης Α, και κατευθύνεται νότια με ταχύτητα 80 km/h.

i. Να δείξετε ότι η σχέση που συνδέει την απόσταση Α των αυτοκινήτων Μ και Ν και τις αποστάσεις τους x, y από τις πόλεις Α και Β είναι:

$$S = \sqrt{2500 + (x + y)^2}$$

ii. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των αυτοκινήτων μια ώρα μετά την αναχώρησή τους.

Λύση

i. Κατασκευάζουμε σχήμα

$MN=s, AM=x, NB=y$. Η ευθεία NB και

Η παράλληλη από το Μ προς την ΑΒ

τέμνονται στο Σ. Τότε θα ισχύει:

$MΣ=50 \text{ km}, ΣΒ=ΜΑ=x$ και το τρίγωνο ΜΣΝ

είναι ορθογώνιο

Οπότε:

$$MN^2 = MΣ^2 + ΣΝ^2 \Leftrightarrow$$

$$MN = \sqrt{50^2 + (x + y)^2} \Rightarrow s = \sqrt{2500 + (x + y)^2}$$

ii. Η απόσταση των δυο αυτοκινήτων

συναρτήσει του χρόνου t είναι

$$s(t) = \sqrt{2500 + (x(t) + y(t))^2}, t \geq 0$$

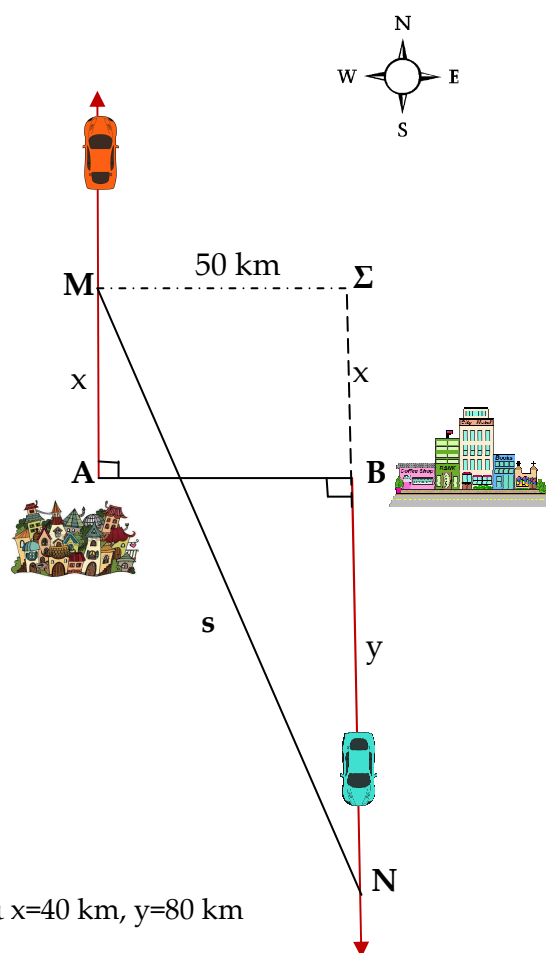
Παραγωγίζουμε ως προς t για να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης, δηλαδή την ζητούμενη ταχύτητα.

$$\begin{aligned} s'(t) &= \left(\sqrt{2500 + (x(t) + y(t))^2} \right)' = \frac{(2500 + (x(t) + y(t))^2)'}{2\sqrt{2500 + (x(t) + y(t))^2}} = \\ &= \frac{2(x(t) + y(t))(x'(t) + y'(t))}{2\sqrt{2500 + (x(t) + y(t))^2}} = \frac{(x(t) + y(t))(x'(t) + y'(t))}{\sqrt{2500 + (x(t) + y(t))^2}} \end{aligned}$$

Μια ώρα μετά την αναχώρηση των αυτοκινήτων είναι $x=40 \text{ km}, y=80 \text{ km}$

και $s=130 \text{ km}$. ($s = \sqrt{2500 + (80 + 40)^2} = 130$)

$$\begin{aligned} s'(1) &= \frac{(x(1) + y(1))(x'(1) + y'(1))}{\sqrt{2500 + (x(1) + y(1))^2}} = \frac{(x(1) + y(1))(x'(1) + y'(1))}{s(1)} = \\ &= \frac{(40 + 80)(40 + 80)}{130} = \frac{14400}{130} \approx 111 \text{ km/h} \end{aligned}$$





69. Υποθέτουμε ότι το κόστος $K(x)$ σε ευρώ για την παραγωγή x χιλιάδων μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x) = 0,1 + 2x$ και η τιμή πώλησης της μονάδας είναι $M(x) = 4 - ex$ ευρώ.

α. Σε ποιο επίπεδο παραγωγής μεγιστοποιεί το κέρδος;

β. Ποια είναι τότε η τιμή πώλησης της μονάδας;

γ. Ποιο είναι το κέρδος γι' αυτό το επίπεδο παραγωγής;

δ. Αν η κυβέρνηση φορολογήσει το κάθε κομμάτι που πωλείται με t ευρώ, να σχολιάσετε τη διαφορά της αρχικής τιμής πώλησης και εκείνης που θα διαμορφωθεί μετά την επιβολή του φόρου.

ΛΥΣΗ

α. Έστω $P(x)$ η συνάρτηση κέρδους και $E(x)$ η συνάρτηση εσόδων. Τότε:

$$P(x) = E(x) - K(x) \quad (1)$$

Αλλά έσοδα = (πλήθος μονάδων) * (τιμή μονάδας) άρα

$$E(x) = x \cdot M(x) = x \cdot (4 - ex) = 4x - ex^2 \Leftrightarrow E(x) = 4x - e \cdot x^2 \quad (2).$$

$$P(x) = 4x - ex^2 - (0,1 + 2x) = 4x - ex^2 - 0,1 - 2x \Leftrightarrow P(x) = -ex^2 + 2x - 0,1 \quad (3).$$

Αρκεί να βρούμε το μέγιστο της $P(x)$. Η $P(x)$ ως πολυωνμική είναι παραγωγίσιμη και

$$P'(x) = -2ex + 2. \text{ Έστω } P'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2ex + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2ex \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{e}. \text{ Έτσι}$$

σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της $P(x)$ από όπου συμπεραίνουμε ότι

η παραγωγή $x = \frac{1}{e}$ χιλιάδων μονάδων μεγιστοποιεί το κέρδος.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$P'(x)$		+	-
$P(x)$		γν. αυξ.	γν. φθιν.

β. Είναι τότε $M\left(\frac{1}{e}\right) = 4 - e \cdot \frac{1}{e}$, άρα $M\left(\frac{1}{e}\right) = 3\text{€}$ τιμή πώλησης της μονάδας.

γ. Από τη συνάρτηση κέρδους (3):

$$P\left(\frac{1}{e}\right) = -e \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{e} - 0,1 = -\frac{e}{e^2} + \frac{2}{e} - 0,1 = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e} - 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 0,1 \text{ ή}$$

$$P\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,37 - 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,27\text{€}.$$

δ. Αν το κάθε κομμάτι φορολογηθεί με t €, τότε ο φόρος που αντιστοιχεί με x κομμάτια είναι tx και η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi(x) = E(x) - K(x) - tx = 4x - ex^2 - (0,1 + 2x) - tx = 4x - ex^2 - 0,1 - 2x - tx \Leftrightarrow \Pi(x) = -ex^2 + (2-t)x - 0,1$$

$$\text{Άρα } \Pi'(x) = -2ex + (2-t).$$

$$\text{Έστω } \Pi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2ex + (2-t) \geq 0 \Leftrightarrow -2ex \geq -(2-t) \Leftrightarrow x \leq \frac{2-t}{2e}.$$

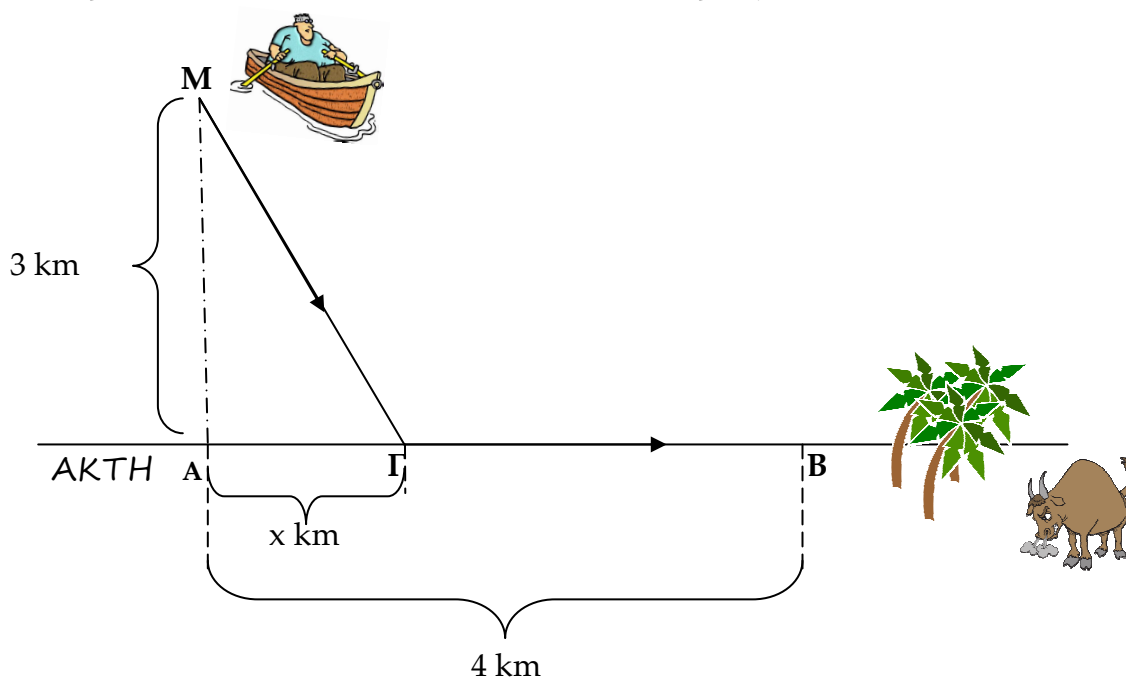
Τώρα η τιμή πώλησης της μονάδας που μεγιστοποιεί το κέρδος είναι

$$M\left(\frac{2-t}{2e}\right) = 4 - e \cdot \frac{2-t}{2e} = 4 - \frac{2-t}{2} = \frac{8-2+t}{2} = 3 + \frac{t}{2} \Leftrightarrow M\left(\frac{2-t}{2e}\right) = 3 + \frac{t}{2}.$$

Άρα η τιμή πώλησης της μονάδας είναι αυξημένη κατά $\frac{t}{2}$ από αυτή της αρχικής.



70. Ο Αντώνης, ο βαρκάρης, ο σερέτης (ένα πρόσωπο είναι όλοι αυτοί ☺ ☺) βρίσκεται στην θάλασσα μέσα στην βάρκα του σε ένα σημείο Μ, που απέχει 3 χιλιόμετρα από το κοντινότερο σημείο Α μια ευθύγραμμης ακτής. Θέλει να φτάσει, στον ελάχιστο δυνατό χρόνο, σε σημείο Β της ακτής, που απέχει 4 χιλιόμετρα από το σημείο Σ. Υποθέτουμε ότι πρέπει να αποβιβαστεί σε σημείο Γ της ακτής, δηλαδή θα κάνει την διαδρομή ΜΓ με την βάρκα και την διαδρομή ΓΒ πεζός. Η ταχύτητα της βάρκας είναι 3 χιλιόμετρα ανά ώρα και του βαρκάρη στην ξηρά είναι 5 χιλιόμετρα την ώρα. Υποθέτουμε, επίσης ότι η απόσταση ΓΑ είναι x χιλιόμετρα.



i. Να δείξετε ότι ο χρόνος που χρειάζεται ο Αντώνης για να κάνει την διαδρομή από το σημείο Μ ως το σημείο Β δίνεται από την συνάρτηση.

$$t(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}, 0 \leq x \leq 4$$

ii. Για ποια τιμή του x ο παραπάνω χρόνος είναι ελάχιστος και για ποια τιμή είναι μέγιστος;

Λύση

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΑΓ ισχύει $(ΜΓ) = \sqrt{9+x^2}$. Επειδή η διαδρομή ΜΓ γίνεται με ταχύτητα 3km/h, ο αντίστοιχος χρόνος σε ώρες είναι

$$t_1 = \frac{s}{u} = \frac{(ΜΓ)}{3} = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}. \text{ Ο χρόνος για την διαδρομή ΓΒ είναι } t_2 = \frac{(ΓΒ)}{5} = \frac{4-x}{5}$$

Άρα, ο συνολικός χρόνος σε ώρες είναι $t(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}, 0 \leq x \leq 4$



ii. Η συνάρτηση $t(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}, 0 \leq x \leq 4$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις

παραγωγίσιμων άρα και συνεχής στο $[0, 4]$.

$$t'(x) = \left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{(9+x^2)'}{2\sqrt{9+x^2}} + \frac{1}{5}(4-x)' = \frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{5x}{15\sqrt{9+x^2}} - \frac{3\sqrt{9+x^2}}{15\sqrt{9+x^2}} = \frac{5x-3\sqrt{9+x^2}}{15\sqrt{9+x^2}}, 0 < x < 4$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-3\sqrt{9+x^2}}{15\sqrt{9+x^2}} = 0 \Leftrightarrow 5x-3\sqrt{9+x^2} = 0 \Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 = 9(9+x^2) \Leftrightarrow 25x^2 = 81+9x^2 \Leftrightarrow 16x^2 = 81 \Leftrightarrow x^2 = \frac{81}{16} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$t'(x) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 < \frac{81}{16} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{9}{4}$$

$$t'(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 > \frac{81}{16} \Leftrightarrow 4 \geq x > \frac{9}{4}$$

Για $x = \frac{9}{4}$ ο χρόνος είναι ελάχιστος

x	0	$\frac{9}{4}$	4
$t'(x)$		-	+
$t(x)$		↘	↗

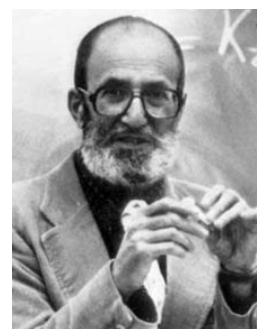
ελάχιστο

Η συνάρτηση $t(x)$ έχει τοπικά μέγιστα τα

$t(0) = \frac{9}{5}$, $t(4) = \frac{5}{3}$ τώρα επειδή $t(0) > t(4)$ για $x = 0$ ο χρόνος είναι μέγιστος.

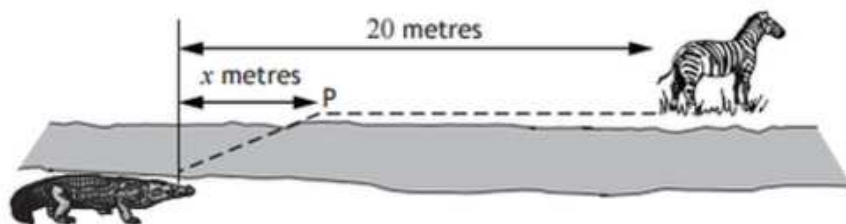
Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα προβλήματα και οι λύσεις και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα.

P.R.Halmos





71. (Θέμα εισαγωγικών εξετάσεων από Σκωτία) Ένας κροκόδειλος-ο Σήφης-καρδαοκέι μια ζέβρα. Βρίσκεται στην αντίπερα όχθη του ποταμού από την ζέβρα και αν διασχίσει κάθετα τον ποταμό και βρεθεί στην ίδια οχθη με την ζέβρα θα απέχει από το θύμα του 20 μέτρα. Είναι γνωστό ότι ο κροκόδειλος κολυμπά στο νερό ή σέρνεται στο έδαφος με διαφορετική σταθερή ταχύτητα. Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν αυτή παραμείνει στο ίδιο σημείο ελαχιστοποιείται αν κολυμπήσει μέχρι ένα σημείο P στην αντίπερα όχθη και κατόπιν συρθεί στο έδαφος μέχρι την ζέβρα. Το P απέχει x μέτρα από το σημείο που ο κροκόδειλος θα έφτανε αν κολυπούσε κάθετα στο ποτάμι.



Ο χρόνος T μετριέται σε δέκατα του δευτερολέπτου (!) και δίνεται από την συνάρτηση:

$$T(x) = 5\sqrt{36 + x^2} + 4(20 - x)$$

- Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν δεν κινηθεί καθόλου στην ξηρά.
- Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν κολυμπήσει την λιγότερη δυνατή απόσταση.
- Να βρείτε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα.

Λύση

- Ο χρόνος που απαιτείται να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν δεν κινηθεί καθόλου στην ξηρά προκύπτει από τον τύπο της συνάρτησης για $x = 20$:

$$T(20) = 5\sqrt{36 + 20^2} + 4(20 - 20) = 5\sqrt{436} \quad \text{δέκατα του δευτερολέπτου ή } 10,4$$

δευτερόλεπτα

- Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν διανύσει την ελάχιστη απόσταση κολυμπώντας-δηλαδή κάθετα στον ποταμό-και κατόπιν συρθεί κατά μήκος της όχθης προκύπτει από τον τύπο της συνάρτησης για $x = 0$:

$$T(0) = 5\sqrt{36 + 0^2} + 4(20 - 0) = 5\sqrt{36} + 80 = 110 \quad \text{δέκατα του δευτερολέπτου ή } 11$$

δευτερόλεπτα.

- Για $x > 0$. Θα βρούμε το ακρότατο της συνάρτησης T. Παραγωγίζουμε την $T(x)$

$$T'(x) = \left(5\sqrt{36 + x^2} + 4(20 - x) \right)' = 5 \frac{(36 + x^2)'}{2\sqrt{36 + x^2}} + (80 - 4x)' = 5 \frac{2x}{2\sqrt{36 + x^2}} - 4 = \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} - 4$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} - 4 \Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} = 4 \Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{36 + x^2} \quad (x > 0)$$

$$5x = 4\sqrt{36 + x^2} \Leftrightarrow 25x^2 = 16(36 + x^2) \Leftrightarrow 25x^2 = 16 \cdot 36 + 16x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 = 16 \cdot 36 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16 \cdot 36}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4 \cdot 6}{3} \Leftrightarrow x = \pm 8$$

Όμως $0 < x < 20$ άρα $x = 8$. $T'(8) = 0$



- $T'(x) < 0$ όταν $x < 8$
- $T'(x) > 0$ όταν $x > 8$

Οπότε η ελάχιστη απόσταση που μπορεί να κάνει ο κροκόδειλος για να φτάσει την ζέβρα είναι 8 μέτρα και ο ελάχιστος χρόνος που θα απαιτηθεί

$$T(8) = 5\sqrt{36+8^2} + 4(20-8) = 5\sqrt{36+64} + 4(12) = 5\sqrt{100} + 4(12) = 50 + 48 = 98 \text{ δεκάτα του δευτερολέπτου ή } 9.8 \text{ δευτερόλεπτα.}$$

72. Η τιμή $f(t)$ του σαμπουάν μάρκας Maloplin συναρτήσει του χρόνου $t \in [0, 3]$ είναι ίση με το διπλάσιο του ρυθμού μεταβολής της ως προς το χρόνο. Αν η αρχική τιμή του σαμπουάν είναι 5 € τότε:

α) Να βρεθεί ο τύπος της f .

β) Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του σαμπουάν θα τριπλασιαστεί σε σχέση με την αρχική τιμή.

γ) Δείξτε ότι σε κάποια χρονική στιγμή η αξία του σαμπουάν θα είναι 11 €. (δίνεται $e \approx 2,7$).

Λύση

α) Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $f(t) = 2f'(t) \Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{2}$ [η τιμή του σαμπουάν είναι

$$f(t) \neq 0] \text{ άρα } [\ln f(t)]' = \left(\frac{1}{2} \cdot t\right)' \Leftrightarrow \ln f(t) = \frac{1}{2}t + c \Leftrightarrow f(t) = e^{\frac{1}{2}t+c} \quad (1) \text{ με } c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$

Αλλά η αρχική τιμή του σαμπουάν είναι 5 δηλαδή $f(0) = 5$ και από (1):

$$f(0) = 5 = e^{\frac{1}{2} \cdot 0 + c} \Leftrightarrow e^c = 5, \text{ οπότε } f(t) \stackrel{(1)}{=} e^c \cdot e^{\frac{1}{2}t} \Leftrightarrow f(t) = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}t}, t \in [0, 3].$$

β) Η τιμή του προϊόντος θα τριπλασιαστεί τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία

$$f(t_0) = 3f(0) \Leftrightarrow 5 \cdot e^{\frac{t_0}{2}} = 3 \cdot 5 \Leftrightarrow e^{\frac{t_0}{2}} = 3 \Leftrightarrow \ln e^{\frac{t_0}{2}} = \ln 3 \Leftrightarrow \frac{t_0}{2} = \ln 3 \Leftrightarrow t_0 = 2 \ln 3.$$

γ) Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ ως σύνθεση των συνεχών $\frac{t}{2}$ με την $5e^t$. Επειδή

$$f(0) = 5 \text{ και } f(3) = 5 \cdot e^{\frac{3}{2}} \text{ είναι } f(0) \neq f(3) \text{ άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών η } f \text{ θα}$$

παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ $f(0) = 5$ και $f(3) = 5 \cdot e^{\frac{3}{2}} = 5 \cdot \sqrt{e^3} = 5e\sqrt{e}$.

Αλλά $5e\sqrt{e} \approx 5 \cdot 2,7 \cdot \sqrt{2,7} > 11$. Δηλαδή υπάρχει $t_1 \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f(t_1) = 11$ €.

73. Ένα έντομο της οικογένειας των *Catsaridus-Politicus* κινείται στον άξονα x με ταχύτητα $u(t)$ που δίνεται από τον τύπο $u(t) = 3t^2 - 4t + 1$ μέτρα ανά λεπτό. Αν την χρονική στιγμή t_0 που αρχίζει να κινείται βρίσκεται σε απόσταση 3 m από το σημείο Ο του ημιάξονα Ox να βρείτε:

i) Την θέση του εντόμου στον άξονα μετά από 2 λεπτά.

ii) Να υπολογίσετε το διάστημα που διένυσε το έντομο στο χρονικό διάστημα των δυο αυτών λεπτών.

iii) Να εντοπίσετε την διαφορά των δυο παραπάνω αποτελεσμάτων περιγράφοντας την κίνηση του εντόμου.



Λύση

i) Από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε:



$$\int_{t_0}^{t_1} u(t) dt = x(t_1) - x(t_0) \quad (1)$$

Είναι $t_0 = 0$, $x_{t_0} = 3$, $t_1 = 2$ και ζητούμενη η απόσταση x την χρονική στιγμή t_1 το x_{t_1} .

Από (1) παίρνουμε

$$\int_0^2 (3t^2 - 4t + 1) dt + x_0 = x_{t_1} \Leftrightarrow \left[3 \frac{t^3}{3} - 4 \frac{t^2}{2} + t \right]_0^2 + 3 = x_{t_1} \Leftrightarrow [t^3 - 2t^2 + t]_0^2 + 3 = x_{t_1} \Leftrightarrow 8 - 8 + 2 + 3 = x_{t_1} \Leftrightarrow x_{t_1} = 5$$

Που σημαίνει ότι μετά από δυο λεπτά το έντομο απέχει από την αρχή του άξονα 5 m.

ii) Η απόσταση S που ζητάμε είναι $\int_0^2 |u(t)| dt = \int_0^2 |3t^2 - 4t + 1| dt$

Αλλά $3t^2 - 4t + 1 \leq 0$ για κάθε $t \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right]$ και $3t^2 - 4t + 1 \geq 0$ για κάθε $t \in \left(-\infty, \frac{1}{3} \right] \cup [1, +\infty)$ οπότε

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{3}} (3t^2 - 4t + 1) dt - \int_{\frac{1}{3}}^1 (3t^2 - 4t + 1) dt + \int_1^2 (3t^2 - 4t + 1) dt = \\ &= \left[t^3 - 2t^2 + t \right]_0^{\frac{1}{3}} - \left[t^3 - 2t^2 + t \right]_{\frac{1}{3}}^1 + \left[t^3 - 2t^2 + t \right]_1^2 = \dots = \frac{62}{27} \approx 2,3 \text{ m} \end{aligned}$$

Το ότι το έντομο μετά από 2 λεπτά απέχει 2 μέτρα από το σημείο από όπου ξεκίνησε όπως βρήκαμε στο 1^ο ερώτημα, ενώ σε δυο λεπτά έχει διανύσει συνολική απόσταση 2,3 μέτρων οφείλεται στο γεγονός ότι δεν κινείται συνεχώς προς την ίδια κατεύθυνση αφού ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η απόσταση του δηλαδή το $u(t)$ παίρνει αρνητικές τιμές από $t = \frac{1}{3} \text{ min}$ και $t = 1 \text{ min}$ που σημαίνει ότι από την αρχή έως $t = \frac{1}{3} \text{ min} = 20 \text{ sec}$

απομακρύνεται από το O , από το 20^ο δευτερόλεπτο στο $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ sec}$ κινείται προς τα πίσω προς το O και μετά το 1^ο λεπτό αρχίζει να απομακρύνεται πάλι από το O , για να διανύσει μετά από 2 λεπτά συνολική απόσταση 2,3 m.

74. Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές $\beta = 12 \text{ cm}$ και $\gamma = 32 \text{ cm}$. Αν η πλευρά β αυξάνεται με ρυθμό 6 cm/sec και η πλευρά γ ελαττώνεται με ρυθμό 4 cm/sec , να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης ή ελάττωσης του εμβαδού ύστερα από 3 sec.

Λύση

Μετά από 3 sec η πλευρά β θα αυξηθεί κατά $3 \cdot 6 \text{ cm}$ γιατί κάθε δευτερόλεπτο αυξάνει κατά 6 cm . Συνεπώς μετά από 3 sec το μήκος της θα είναι $12 + 3 \cdot 6 = 30 \text{ cm}$.

Ομοια το μήκος της πλευράς γ θα είναι $32 - 3 \cdot 4 = 20 \text{ cm}$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του

χρόνου t είναι $E(t) = \frac{1}{2} \beta(t) \cdot \gamma(t)$.

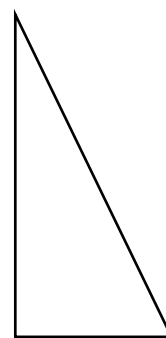
Ο ρυθμός μεταβολής του είναι η παράγωγός του. Έχουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2} (\beta'(t) \cdot \gamma(t) + \gamma'(t) \cdot \beta(t)).$$

Οι $\beta'(t)$ και $\gamma'(t)$ είναι οι σταθεροί ρυθμοί μεταβολής των πλευρών $\beta'(t) = 6$ γιατί μεγαλώνει και $\gamma'(t) = -4$ γιατί μικραίνει.

Έτσι για $t = 3 \text{ sec}$ ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι:

$$E'(3) = \frac{1}{2} (\beta'(3) \cdot \gamma(3) + \gamma'(3) \cdot \beta(3)) = \frac{1}{2} (6 \cdot 20 - 4 \cdot 30) = 0, \text{ ούτε αύξηση ούτε ελάττωση.}$$





75. Κόβουμε ένα σύρμα μήκους 10 cm και φτιάχνουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο πλευράς x . Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής. Πόσα cm πρέπει να είναι το κάθε κομμάτι έτσι ώστε το άθροισμα των δυο εμβαδών να είναι ελάχιστο.

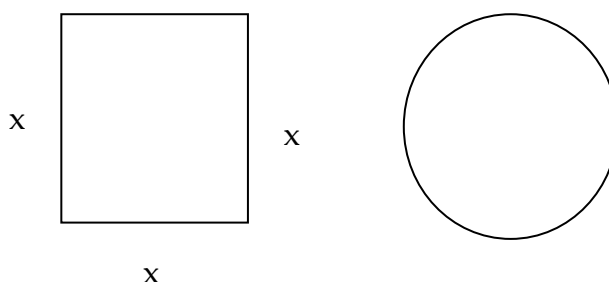
Λύση

Κατασκευάζουμε τα δυο σχήματα. Είναι προφανές ότι αν κόψουμε το σύρμα σε δυο κομμάτια για να δημιουργηθεί το τετράγωνο πρέπει το ένα κομμάτι να έχει μήκος $4x$ cm (η περίμετρος του τετραγώνου) το δεύτερο κομμάτι θα έχει μήκος $10 - 4x$ cm. Οπότε η περίμετρος του κύκλου θα είναι : $Περ = 2\pi\rho \Rightarrow 10 - 4x = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{5-2x}{\pi}$ cm. Το

$$\text{εμβαδό του κυκλικού δίσκου είναι } E = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{5-2x}{\pi}\right)^2 = \pi\frac{(5-2x)^2}{\pi^2} = \frac{(5-2x)^2}{\pi} \text{ cm}^2$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E_{\text{ολ}}(x) = x^2 + \frac{(5-2x)^2}{\pi}$$



Για το πεδίο ορισμού έχουμε:

Το μήκος του αρχικού σύρματος είναι 10 εφόσον το κόβουμε για να δημιουργήσουμε τα δυο σύρματα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} 0 < x < 10 \\ 0 < 10 - 4x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 10 \\ 0 < x < \frac{10}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2.5, A = [0, 2.5]$$

Έτσι, $E(x) = x^2 + \frac{(5-2x)^2}{\pi}, 0 < x < 2.5$, Η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη

$$\begin{aligned} E'(x) &= \left(x^2 + \frac{(5-2x)^2}{\pi} \right)' = 2x + \frac{2(5-2x)(5-2x)'}{\pi} = 2x + \frac{-4(5-2x)}{\pi} = \frac{2x\pi - 4(5-2x)}{\pi} = \\ &= \frac{2x\pi - 20 + 8x}{\pi} = \frac{(2\pi + 8)x - 20}{\pi} \end{aligned}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(2\pi + 8)x - 20}{\pi} = 0 \Leftrightarrow (2\pi + 8)x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20}{2\pi + 8} \Leftrightarrow x = \frac{10}{\pi + 4}$$

Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο

$$\text{όταν } x = \frac{10}{\pi + 4} \text{ cm}$$

x	0	$\frac{10}{\pi + 4}$	2,5
$E'(x)$		+	-
$E(x)$		↘	↗

Ελάχιστο

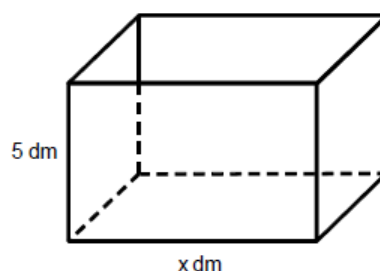


76.Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω.

Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm. Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο και μια πλευρά της είναι x dm με $0 < x < 10$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι:

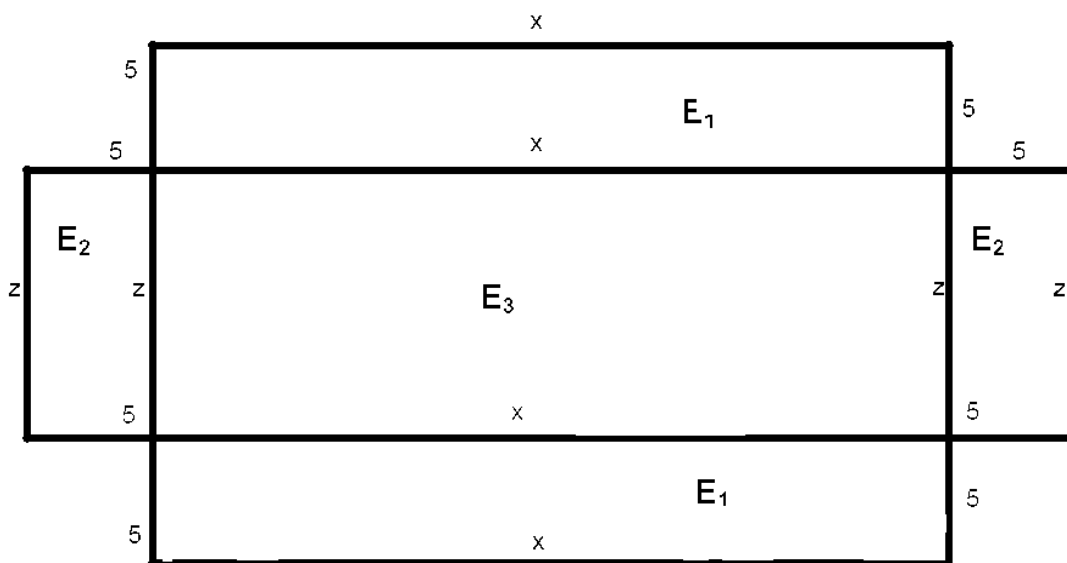
$$E(x) = -x^2 + 10x + 100, x \in (0, 10)$$



ii. Για ποια τιμή του x έχουμε μέγιστο εμβαδό;

Λύση

i. Αν «ανοίξουμε» το κουτί, τότε διαπιστώνουμε:



Περίμετρος βάσης=20, οπότε $2x + 2z = 20 \Leftrightarrow x + z = 10 \Leftrightarrow z = 10 - x, 0 < x < 10$

$$E(x) = E_1 + 2E_2 + E_3 \Leftrightarrow E(x) = 2(5x) + 2(5z) + xz \Leftrightarrow$$

$$E(x) = 2(5x) + 2 \cdot 5(10 - x) + x(10 - x) \Leftrightarrow$$

$$E(x) = 10x + 100 - 10x + 10x - x^2 \Leftrightarrow E(x) = -x^2 + 10x + 100, x \in (0, 10)$$

$$\text{ii. } E'(x) = (-x^2 + 10x + 100)' = -2x + 10, x \in (0, 10)$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

x	1	5	10
E'(x)	+	-	
E(x)	↗		↘

Μέγιστο

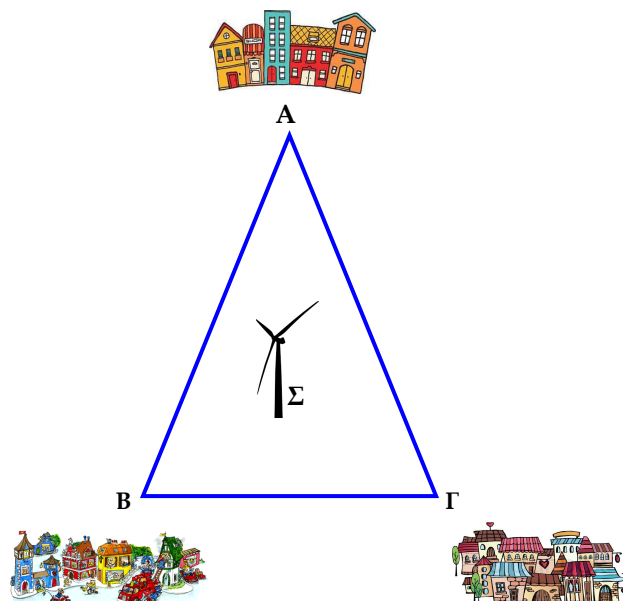
$$E(5) = 100$$



77. Τρία χωριά Α,Β,Γ στο χάρτη σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Σε κάποιο σημείο Σ εσωτερικό του τριγώνου

η εταιρεία Ηλεκτρικού σκοπεύει να κατασκευάσει μια ανεμογεννήτρια η οποία θα τροφοδοτεί με ρεύμα τα τρία χωριά αλλά θα πρέπει να ισαπέχει από τα χωριά Β και Γ.

Να προσδιορίσετε το σημείο Σ έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί το μικρότερο δυνατό μήκος καλωδιώσεων που θα συνδέει με τα τρία χωριά. (SAT)



Λύση

Το ζητούμενο σημείο Σ θα ισαπέχει από τις κορυφές Β και Γ, θα βρίσκεται δηλαδή στην μεσοκάθετο του ΒΓ ή επειδή πρόκειται για ισοσκελές τρίγωνο στο ύψος ΑΔ.

Έστω ΚΔ=χ. Αν ΑΔ=ν και ΒΓ=α τότε έχουμε

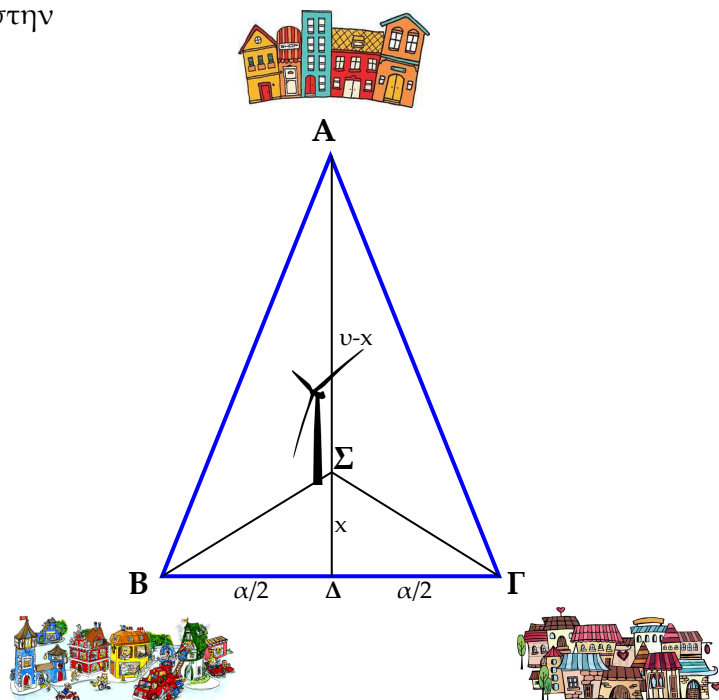
$$\Sigma\text{Α} + \Sigma\text{Β} + \Sigma\text{Γ} = \nu - x + 2\sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

Η συνάρτηση

$$f(x) = \nu - x + 2\sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}, x \in (0, \nu)$$

Έχει παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\nu - x + 2\sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \right)' = \\ &= -1 + 2 \frac{\left(x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \right)'}{2\sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}} = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}} = \\ &= \frac{-\sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} + 2x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$





$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} + 2x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}} = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$4x^2 = x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{\alpha^2}{12} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$$

x	0	$\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$	υ
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

ΕΛΑΧ

Άρα το άθροισμα ΣΑ+ΣΒ+ΣΓ γίνεται ελάχιστο όταν η απόσταση του σημείου Σ από την βάση ΒΓ είναι $x = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$ (όπου α το μήκος της βάσης)

Οι δάσκαλοι και οι συγγραφείς διδακτικών βιβλίων δεν πρέπει να ξεχνούν πως ο ευφυής μαθητής και ο ευφυής αναγνώστης δεν ικανοποιούνται επαληθεύοντας ότι τα βήματα ενός συλλογισμού είναι ορθά, αλλά θέλουν επίσης να ξέρουν το κίνητρο και τον σκοπό των διαφόρων βημάτων ... Τα μαθηματικά είναι ενδιαφέροντα όταν απασχολούν την λογική μας και τις εφευρετικές μας δυνάμεις.



G. Polya



78. Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, $0 < x < 3$ και στην συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Α. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι:

$$f(x) = 4x(3-x)^2, x \in (0,3)$$

(δίνεται ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι $V = \alpha\beta\gamma$).

Β. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{99}{4}x + 2018$

Δ. Υλικό σημείο $M(x,y)$ κινείται επί της ε και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία OM με τον άξονα x' , την χρονική στιγμή που το M έχει συντεταγμένες $(1, 209/8)$.

Λύση

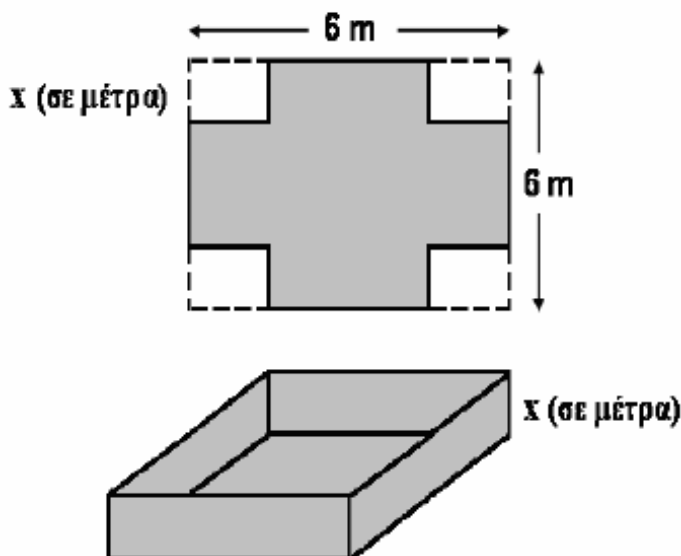
Α. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$\alpha = 6 - 2x, \beta = 6 - 2x, \gamma = x. \begin{cases} 6 - 2x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

Κατά συνέπεια ο όγκος της δεξαμενής είναι:

$$f(x) = (6 - 2x)(6 - 2x)x = 2(3 - x)2(3 - x)x = 4(3 - x)^2 x, x \in (0,3),$$

ΒΗ f ως πολυωνμική είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $x \in (0,3)$





$$f'(x) = (4x(3-x)^2)' = 4(3-x)^2 - 4x2(3-x) = 4(3-x)((3-x)-2x) =$$

$$= 4(3-x)(3-3x) = 12(3-x)(1-x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(3-x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad x \in (0,1)$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών

Η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο όταν $x=1$ m.

Γ. Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτόμενης με την Cf τότε θα ισχύει

x	0	1	3
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

$$f'(x_0) = \frac{99}{4} \Leftrightarrow 12(3-x)(1-x) = \frac{99}{4} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = 4\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - f\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(\frac{1}{4}\right)(x - \frac{1}{4}) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{121}{16} = \frac{99}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y - \frac{121}{16} = \frac{99}{4}x - \frac{99}{16} \Leftrightarrow y = \frac{99}{4}x + \frac{22}{16} \Leftrightarrow y = \frac{99}{4}x + \frac{11}{8}$$

Δ. Οι συντεταγμένες του M μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου, οπότε οι συντεταγμένες του M είναι

$$(x(t), y(t)), \quad x'(t) = 1 \text{ cm/sec}$$

Έτσι

$$\varepsilon\phi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\frac{99}{4}x(t) + \frac{11}{8}}{x(t)} = \frac{99}{4} + \frac{11}{8x(t)}$$

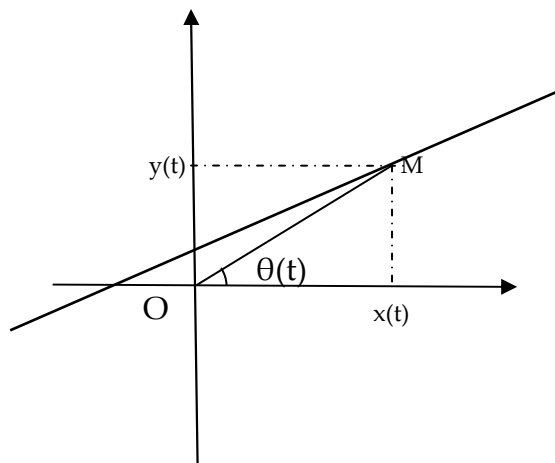
Και

$$(\varepsilon\phi\theta(t))' = \left(\frac{99}{4} + \frac{11}{8x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{\theta'(t)}{\sin^2\theta(t)} = -\frac{11x'(t)}{8x^2(t)}$$

$$\Leftrightarrow \theta'(t) = -\frac{11x'(t)\sin^2\theta(t)}{8x^2(t)}$$

Αν το είναι η χρονική στιγμή που το M έχει συντεταγμένες $(1, 55/8)$, τότε

$$x(t_0) = 1, \quad y(t_0) = \frac{209}{8},$$





$$(OM)(t_0) = \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)} = \sqrt{1 + \left(\frac{209}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{43689}{64}} = \frac{\sqrt{43689}}{8}$$

Φτιάξε ρε, λίγο τα
νούμερα....

$$\sigma\upsilon\nu\theta(t_0) = \frac{x(t_0)}{OM(t_0)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{43689}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{43689}}$$

$$\text{Τελικά } \theta'(t_0) = -\frac{11x'(t_0)\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}{8x^2(t_0)} = -\frac{11 \cdot \frac{64}{43689}}{8} = \dots$$



79. Ένα κράτος έχει την δυνατότητα βάσει των πόρων που διαθέτει να συντηρήσει ένα μέγιστο πληθυσμό M . Είναι γνωστό ότι, κάθε χρονική στιγμή t ο πληθυσμός N του συγκεκριμένου κράτους αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο του υπάρχοντος πληθυσμού την συγκεκριμένη χρονική στιγμή και ταυτόχρονα είναι ανάλογος με την απόλυτη διαφορά του από τον μέγιστο πληθυσμό M . Την χρονική στιγμή t_0 , ο πληθυσμός του κράτους είναι ίσος με το μισό του μεγίστου πληθυσμού M .

Να δείξετε ότι

$$N(t) = \frac{M}{1 + e^{-\lambda(t-t_0)}} \text{, } \lambda \text{ θετική σταθερά} \quad (\text{Tom Apostol})$$

Λύση

Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού $N(t)$ κάθε χρονική στιγμή t είναι σύμφωνα με την υπόθεση

$$N'(t) = \kappa \cdot N(t) \cdot (M - N(t)) \quad \text{όπου } \kappa \text{ μια θετική σταθερά}$$

$$N'(t) = \kappa \cdot N(t) \cdot (M - N(t)) \Leftrightarrow \frac{N'(t)}{N(t)(M - N(t))} = \kappa \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{M \cdot N'(t)}{N(t)(M - N(t))} = \kappa \cdot M \Leftrightarrow \frac{M}{N(t)(M - N(t))} N'(t) = \kappa \cdot M \Leftrightarrow$$

$$\frac{N(t) + M - N(t)}{N(t)(M - N(t))} N'(t) = \kappa \cdot M \Leftrightarrow \left(\frac{N(t)}{N(t)(M - N(t))} + \frac{M - N(t)}{N(t)(M - N(t))} \right) N'(t) = \kappa \cdot M \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{M - N(t)} + \frac{1}{N(t)} \right) N'(t) = \kappa \cdot M \Leftrightarrow \frac{N'(t)}{M - N(t)} + \frac{N'(t)}{N(t)} = \kappa \cdot M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(M - N(t))'}{M - N(t)} + \frac{N'(t)}{N(t)} = \kappa \cdot M \stackrel{M - N(t) > 0}{\Leftrightarrow} (-\ln(M - N(t)) + \ln N(t))' = (\kappa \cdot M t)' \Leftrightarrow$$

Από το θεώρημα των ίσων παραγώγων

$$\ln N(t) - \ln(M - N(t)) = \kappa \cdot M t + c, \text{ } c \text{ σταθερά} \quad (1) \quad \text{ισχύει } N(t_0) = \frac{M}{2}$$

Για $t=t_0$ η (1):

$$\ln N(t_0) - \ln(M - N(t_0)) = \kappa \cdot M t_0 + c \Leftrightarrow \ln \frac{M}{2} - \ln\left(M - \frac{M}{2}\right) = \kappa \cdot M t_0 + c \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{M}{2} - \ln\left(\frac{M}{2}\right) = \kappa \cdot M t_0 + c \Leftrightarrow \kappa \cdot M t_0 + c = 0 \Leftrightarrow c = -\kappa \cdot M t_0$$



H (1):

$$\begin{aligned} \ln N(t) - \ln(M - N(t)) &= \kappa \cdot M t - \kappa \cdot M t_0 \Leftrightarrow \ln \frac{N(t)}{M - N(t)} = \kappa \cdot M (t - t_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{N(t)}{M - N(t)} &= e^{\kappa \cdot M (t - t_0)} \Leftrightarrow N(t) = e^{\kappa \cdot M (t - t_0)} (M - N(t)) \Leftrightarrow N(t) = M e^{\kappa \cdot M (t - t_0)} - N(t) e^{\kappa \cdot M (t - t_0)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N(t) + N(t) e^{\kappa \cdot M (t - t_0)} &= M e^{\kappa \cdot M (t - t_0)} \Leftrightarrow N(t) (1 + e^{\kappa \cdot M (t - t_0)}) = M e^{\kappa \cdot M (t - t_0)} \Leftrightarrow N(t) = \frac{M e^{\kappa \cdot M (t - t_0)}}{1 + e^{\kappa \cdot M (t - t_0)}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N(t) &= \frac{M e^{\kappa \cdot M (t - t_0)}}{\frac{e^{\kappa \cdot M (t - t_0)}}{1 + e^{\kappa \cdot M (t - t_0)}}} \Leftrightarrow N(t) = \frac{M}{\frac{1}{e^{\kappa \cdot M (t - t_0)}} + 1} \Leftrightarrow N(t) = \frac{M}{\frac{1}{e^{\kappa \cdot M (t - t_0)}} + 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N(t) &= \frac{M}{e^{-\kappa \cdot M (t - t_0)} + 1} \stackrel{\kappa \cdot M = \alpha > 0}{\Leftrightarrow} N(t) = \frac{M}{1 + e^{-\alpha (t - t_0)}} \end{aligned}$$

80. Μια αυτοκινητοβιομηχανία πουλάει σε ένα μήνα α εκατοντάδες αυτοκίνητα μοντέλο A, από την πώληση αυτών έχει έσοδα $\alpha^3 + 5\alpha$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ, κόστος παραγωγής $3\alpha^2$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ, και κέρδη 100000 ευρώ. Η ίδια εταιρεία πουλάει β εκατοντάδες αυτοκίνητα μοντέλο B, έχει από την πώληση έσοδα $\beta^3 + 5\beta$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ, κόστος παραγωγής για το προϊόν αυτό $3\beta^2$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ και κέρδος 500000 ευρώ.

A. Να θεωρήσετε την συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$. Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι περιττή.

ii) η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) η f είναι 1-1.

iv) $f(\alpha - 1) + f(\beta - 1) = 0$



B. Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα συνολικά από τα μοντέλα A και B πουλάει η αυτοκινητοβιομηχανία και πόσα είναι τα συνολικά κέρδη.

Λύση

A.i) $D_f = \mathbb{R}$ και $f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -(x^3 + 2x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η f είναι περιττή.

ii) Είναι $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $x \in \mathbb{R}$.

iii) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και 1-1.

iv) Το κέρδος που προκύπτει, αν από τα έσοδα αφαιρέσουμε το κόστος, από υπόθεση

ισχύει: $\alpha^3 + 5\alpha - 3\alpha^2 = 1$ (1)

$\beta^3 + 5\beta - 3\beta^2 = 5$ (2)

Άρα:

$$\begin{aligned} f(\alpha - 1) + f(\beta - 1) &= (\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1) + (\beta - 1)^3 + 2(\beta - 1) = \dots = (\alpha^3 + 5\alpha - 3\alpha^2 - 3) + (\beta^3 + 5\beta - 3\beta^2 - 3) = \\ &= (1 - 3) + (5 - 3) = 0 \end{aligned}$$

B. Θα υπολογίσουμε τον αριθμό $\alpha + \beta$. Είναι:

$$f(\alpha - 1) + f(\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha - 1) = -f(\beta - 1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} f(\alpha - 1) = f(1 - \beta) \Leftrightarrow \alpha - 1 = 1 - \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2$$

Άρα, η εταιρεία πούλησε 2 εκατοντάδες συνολικά, 200 αυτοκίνητα.



81. Το συνολικό κόστος x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = 30x^2 - 1000x - 50$ και η συνολική είσπραξη $E(x) = 2x^3 - 60x^2 + 200x + 100$ σε χιλιάδες ευρώ. Να βρεθεί ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος που πρέπει να παραχθεί ώστε να έχουμε θετικό ρυθμό μεταβολής του κέρδους (κερδοφόρα επιχείρηση).

Λύση

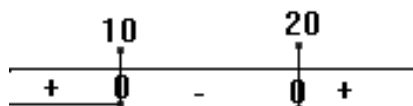
Το κέρδος δίνεται από τη σχέση $P(x) = E(x) - K(x)$.

$$P(x) = 2x^3 - 60x^2 + 200x + 100 - 30x^2 + 1000x + 50 = 2x^3 - 90x^2 + 1200x + 150.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι η παράγωγος $P'(x)$.

$$P'(x) = 6x^2 - 180x + 1200 = 6(x^2 - 30x + 200).$$

Πρόσημο του $P'(x)$:



Όπως φαίνεται για $x < 10$ ή $x > 20$ ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει «τάση» για αύξηση των κερδών.

82. Αν $K(x)$, $E(x)$, $P(x)$ και $K_{\mu}(x)$ είναι για x μονάδες ενός προϊόντος το κόστος, η

είσπραξη, το κέρδος και το μέσο κόστος $\left(\frac{K(x)}{x}\right)$ αντίστοιχα ναδειχτεί ότι:

i. Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι μηδέν όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους ισούται με το μέσο κόστος.

ii. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι μηδέν όταν οι ρυθμοί μεταβολής είσπραξης και κόστους γίνουν ίσοι.

Λύση

i. Το μέσο κόστος είναι $K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x}$. Με παραγωγή έχουμε: $K'_{\mu}(x) = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}$. Για να

είναι $K'_{\mu}(x) = 0$ πρέπει $K'(x)x - K(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x)x = K(x) \Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} = K_{\mu}(x)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του κόστους ισούται με το μέσο κόστος.

ii. Το κέρδος είναι $P(x) = E(x) - K(x)$. Με παραγωγή έχουμε: $P'(x) = E'(x) - K'(x)$. Για να είναι $P'(x) = 0$ πρέπει $E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x)$, δηλαδή οι ρυθμοί μεταβολής είσπραξης και κέρδους να είναι ίσοι.

Πράγματι, για να λυθεί ένα μεγάλο πρόβλημα χρειάζεται μια μεγάλη ανακάλυψη. Ωστόσο, οι σπόροι της ανακάλυψης εννύαρχουν στην λύση κάθε προβλήματος. Το πρόβλημα μπορεί να είναι τετριμμένο, αν όμως τράβηξε την περιέργειά σας και ενεργοποίησε την επινοητικότητα σας ταλέντο, και εφόσον το λύσατε με τις δικές σας δυνάμεις, τότε σίγουρα θα νιώσατε την υπερένταση και θα απολαύσατε τον θρίαμβο της ανακάλυψης.



G. Polya



83. Πάρτα Λίζα και κάντα κορνίζα

Ένας πίνακας ζωγραφικής ορθογωνίου σχήματος -διαστάσεων α, β cm-στα πλαίσια μιας εικαστικής παρέμβασης τοποθετείται σε μια κίτρινη ορθογώνια κορνίζα υπό κλίση γωνίας ϕ με τις κορυφές του πίνακα να είναι σημεία των πλευρών της κορνίζας. (σχήμα)

i. Να δείξετε ότι η συνολική επιφάνεια της κίτρινης κορνίζας (ορθογώνιο ΑΒΓΔ) δίνεται από την συνάρτηση

$$E(\phi) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\eta\mu 2\phi + \alpha\beta, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

ii. Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδό που μπορεί να έχει η κορνίζα;

iii. Η αξία του πίνακα αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου με ρυθμό

$$P'(t) = \kappa P(t) \quad \text{όπου } \kappa > 0$$

με t τα χρόνια από την στιγμή που πουλήθηκε για πρώτη φορά ο πίνακας ενώ $P(t)$ η αξία σε εκατομμύρια ευρώ.

Αν ο πίνακας πουλήθηκε για πρώτη φορά το

2018 στην τιμή των 8 εκατομμυρίων ευρώ και μετά από δυο χρόνια μεταπωλήθηκε στην τιμή των 10 εκατομμυρίων ευρώ στο συλλέκτη Κώστα Νταλί, να δείξετε ότι η αξία του πίνακα συναρτήσει του χρόνου είναι

$$P(t) = 8 \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{t}{2}}, \quad t \geq 0$$

iv. Αν ο Κώστας Νταλί θέλει να πουλήσει τον πίνακα όταν η τιμή του θα έχει διπλασιαστεί, μετά από πόσα χρόνια πρέπει να πουλήσει τον πίνακα; (Δίνεται: $\ln 2 \approx 0,69$ και $\ln 5 \approx 1,61$)

Λύση

i. Ισχύει $\angle \text{ANK} = \angle \text{KLB} = \angle \text{MAG} = \angle \text{NMD} = \phi$ ως οξείες γωνίες με τις πλευρές κάθετες

Παρατηρούμε ότι $AB = AK + KB$.

Από τα ορθογώνια τρίγωνα AKN, KLB ισχύει:

$$\eta\mu\phi = \frac{AK}{\alpha} \Leftrightarrow AK = \alpha\eta\mu\phi$$

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{KB}{\beta} \Leftrightarrow KB = \beta\sigma\upsilon\nu\phi$$

$$\text{Άρα } AB = AK + KB = \alpha\eta\mu\phi + \beta\sigma\upsilon\nu\phi \quad (1)$$

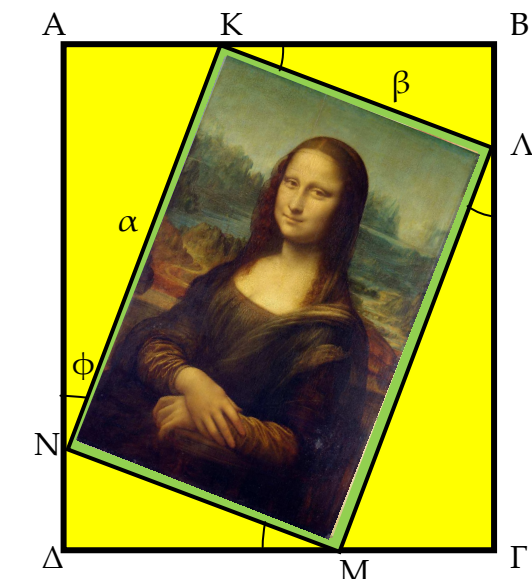
Ισχύει $AD = AN + ND$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα AKN, NDM ισχύει:

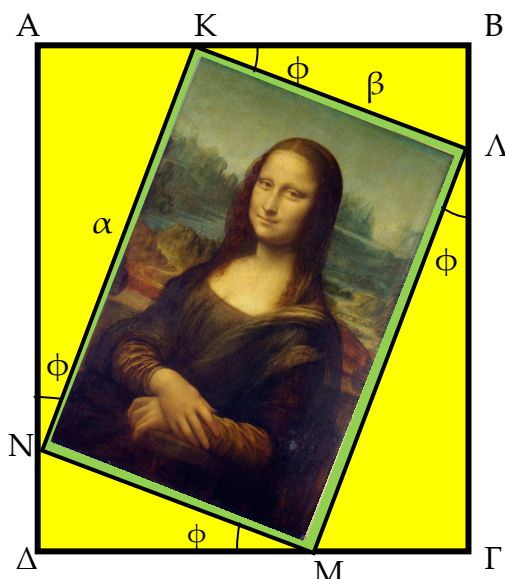
$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{AN}{\alpha} \Leftrightarrow AN = \alpha\sigma\upsilon\nu\phi$$

$$\eta\mu\phi = \frac{ND}{\beta} \Leftrightarrow ND = \beta\eta\mu\phi$$

Άρα



Β Λυκείου;;;





$$A\Delta = AN + N\Delta$$

$$A\Delta = AN + N\Delta = \beta \eta \mu \phi + \alpha \sigma \upsilon \nu \phi \quad (2)$$

Το εμβαδό του ορθογώνιου ΑΒΓΔ είναι

$$E = AB \cdot A\Delta = (\alpha \eta \mu \phi + \beta \sigma \upsilon \nu \phi)(\beta \eta \mu \phi + \alpha \sigma \upsilon \nu \phi) =$$

$$= \alpha \beta \eta \mu^2 \phi + \alpha^2 \eta \mu \phi \sigma \upsilon \nu \phi + \beta^2 \eta \mu \phi \sigma \upsilon \nu \phi + \alpha \beta \sigma \upsilon \nu^2 \phi =$$

$$= \alpha \beta \eta \mu^2 \phi + \alpha \beta \sigma \upsilon \nu^2 \phi + \alpha^2 \eta \mu \phi \sigma \upsilon \nu \phi + \beta^2 \eta \mu \phi \sigma \upsilon \nu \phi =$$

$$= \alpha \beta (\eta \mu^2 \phi + \sigma \upsilon \nu^2 \phi) + \eta \mu \phi \sigma \upsilon \nu \phi (\alpha^2 + \beta^2) \quad \eta \mu^2 \phi + \sigma \upsilon \nu^2 \phi = 1 =$$

$$= \alpha \beta + \eta \mu \phi \sigma \upsilon \nu \phi (\alpha^2 + \beta^2) = \alpha \beta + \frac{1}{2} 2 \eta \mu \phi \sigma \upsilon \nu \phi (\alpha^2 + \beta^2) \quad 2 \eta \mu \phi \sigma \upsilon \nu \phi = \eta \mu 2 \phi =$$

$$= \alpha \beta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \eta \mu 2 \phi$$

$$\text{Άρα } E(\phi) = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \eta \mu 2 \phi + \alpha \beta, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

ii. Η συνάρτηση $E(\phi)$ μεγιστοποιείται όταν $\eta \mu 2 \phi = 1$, άρα,

$$\eta \mu 2 \phi = 1 \Leftrightarrow \eta \mu 2 \phi = \eta \mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\phi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\phi = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$2\phi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \phi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Το μέγιστο εμβαδό είναι το

$$E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \eta \mu \left(2 \frac{\pi}{4}\right) + \alpha \beta = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha \beta$$

Για να κατασκευαστεί η κορνίζα με το μέγιστο εμβαδό, αρκεί στο εξωτερικό του πίνακα να κατασκευάσουμε ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα.

iii. Η δοθείσα σχέση γίνεται

$$P'(t) = \lambda P(t) \Leftrightarrow \frac{P'(t)}{P(t)} = \lambda \Leftrightarrow (\ln(P(t)))' = (\lambda t)'$$

Από το θεώρημα των ίσων παραγώγων

$$\ln P(t) = \lambda t + c, t \geq 0, c \text{ σταθερός πραγματικός αριθμός ή}$$

$$P(t) = e^{\lambda t + c}, t \geq 0$$

$$\text{Από υπόθεση } P(0) = 8 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow e^c = 8. \text{ Άρα } P(t) = e^{\lambda t + c} = e^{\lambda t} e^c = 8e^{\lambda t}, t \geq 0$$

Από υπόθεση επίσης

$$P(2) = 10 \Leftrightarrow 8e^{2\lambda} = 10 \Leftrightarrow e^{2\lambda} = \frac{10}{8} \Leftrightarrow e^{2\lambda} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow e^{\lambda} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$P(t) = 8e^{\lambda t} = 8(e^{\lambda})^t = 8\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{t}{2}}, t \geq 0$$

iv. Πρέπει να ισχύει $P(t) = 2 \cdot P(2)$. Έτσι:



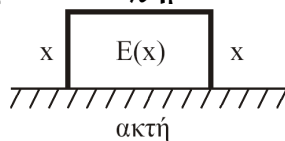
$$P(t) = 2 \cdot P(2) \Leftrightarrow 8 \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{t}{2}} = 20 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{t}{2}} = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{t}{2}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{t}{2}} = \ln \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{2} \ln \left(\frac{5}{4} \right) = \ln \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{\ln 5 - \ln 2}{\ln 5 - 2 \ln 2} \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{2(\ln 5 - \ln 2)}{\ln 5 - 2 \ln 2} = \frac{2(1,61 - 0,69)}{1,61 - 2 \cdot 0,69} = 8$$

Άρα, πρέπει να το πουλήσει σε 8 χρόνια, το 2026.

84.(Εσπερινά 2000) Ένας ιχθυοκαλλιεργητής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μία θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις από τις τέσσερις πλευρές πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ της θαλάσσιας περιοχής που θα χρησιμοποιηθεί δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -2x^2 + 600x$$

(υποθέτουμε ότι $0 < x < 300$).

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ της περιοχής να γίνει μέγιστο.

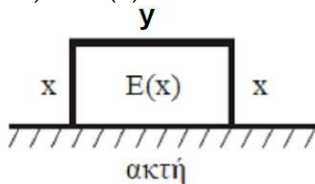
γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.

Λύση

$$\alpha) 2x + y = 600 \Leftrightarrow y = 600 - 2x \quad (1)$$

Εμβαδόν = βάση · ύψος

$$\text{Εμβαδόν} = x \cdot y \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = x \cdot (600 - 2x) \Leftrightarrow E(x) = 600x - 2x^2 \quad \text{ή} \quad E(x) = -2x^2 + 600x, \quad 0 < x < 300.$$



$$\beta) E'(x) = (-2x^2 + 600x)' = -4x + 600, \quad 0 < x < 300.$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 600 = 0 \Leftrightarrow -4x = -600 \Leftrightarrow x = 150$$

x	0	150	300
f'(x)		+	-
f(x)		↗	↘

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $x = 150\text{m}$.

$$\gamma) \text{Μέγιστο εμβαδόν: } E_{\max} = E(150) = -2(150)^2 + 600 \cdot 150 = -45000 + 90000 = 45000\text{m}^2.$$



85.(Εσπερινά 2000) Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 10, \quad 1 < x < 5$$

α. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση, καθώς επίσης και πόση είναι η κατανάλωση αυτή.

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης του αυτοκινήτου για $x_1 = 2$ και για $x_2 = 4$ (δηλαδή για 2.000 στροφές ανά λεπτό και 4.000 στροφές ανά λεπτό αντίστοιχα).

Λύση

$$\alpha. f'(x) = \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 10 \right)' = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1, \quad 1 < x < 5$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -1$$

x	1	3	5
f'(x)	-	○	+
f(x)			

Η κατανάλωση γίνεται ελάχιστη όταν $x = 3$.

$$\text{Ελάχιστη κατανάλωση: } f_{\min} = f(3) = \frac{1}{9}3^3 - \frac{1}{3}3^2 - 3 + 10 = 7.$$

$$\beta. f'(2) = \frac{1}{3}2^2 - \frac{2}{3}2 - 1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - 1 = -1$$

$$f'(4) = \frac{1}{3}4^2 - \frac{2}{3}4 - 1 = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} - 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

86.(Εσπερινά 2001) Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα. Τα καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το

λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $\left(5,5 + \frac{x^2}{200} \right)$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι

2000 δραχμές την ώρα.

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι:

$$K(x) = \frac{1800000}{x} + 500x, \quad 0 < x \leq 90.$$

β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

Λύση

$$\alpha) \text{ χρόνος } t = \frac{625}{x}, \quad 0 < x \leq 90.$$



κόστος = κόστος καυσίμων + αμοιβή οδηγού = ωριαία κατανάλωση · χρόνος · 160 + χρόνος · 2000

$$K(x) = \left(5,5 + \frac{x^2}{200} \right) \cdot \frac{625}{x} \cdot 160 + \frac{625}{x} \cdot 2000 = \frac{625}{x} \cdot \left[\left(5,5 + \frac{x^2}{200} \right) \cdot 160 + 2000 \right] =$$

$$= \frac{625}{x} \cdot \left(880 + \frac{4x^2}{5} + 2000 \right) = \frac{625}{x} \cdot \left(\frac{4x^2}{5} + 2880 \right) = 500x + \frac{1800000}{x}, 0 < x \leq 90.$$

$$\beta) K'(x) = \left(500x + \frac{1800000}{x} \right)' = 500 - \frac{1800000}{x^2}, 0 < x \leq 90$$

$$\text{ή } K'(x) = \frac{500x^2 - 1800000}{x^2}, 0 < x \leq 90$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{500x^2 - 1800000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 500x^2 - 1800000 = 0 \Leftrightarrow 500x^2 = 1800000 \Leftrightarrow x^2 = 3600 \stackrel{0 < x \leq 90}{\Leftrightarrow} x = 60$$

x	0	60	90
f'(x)		-	+
f(x)			

Η κατανάλωση γίνεται ελάχιστη όταν η ταχύτητα είναι $x = 60 \text{ Km/h}$.

87. Ο πληθυσμός των Αρειανών σε δισεκατομμύρια άτομα μετά από t χρόνια από σήμερα, περιγράφεται από τον τύπο

$$P(t) = \frac{100}{1 + 9e^{kt}}, \quad -1 < k < 0$$

i. Ποιος είναι ο πληθυσμός του Άρη σήμερα;

ii. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού του Άρη μετά από 10 χρόνια;

iii. Γιατί ο πληθυσμός του Άρη θα αυξάνεται συνέχεια, χωρίς όμως να ξεπεράσει ποτέ τα 100 δισεκατομμύρια άτομα;

iv. Ενώ ο πληθυσμός του Άρη αυξάνεται από χρόνο σε χρόνο, τι θα συμβαίνει με τον ρυθμό μεταβολής του (πότε αυξάνεται, πότε μειώνεται;)

Λύση

$$i. P(0) = \frac{100}{1 + 9e^0} = \frac{100}{10} = 10 \text{ δισεκατομμύρια}$$

ii. Για κάθε $t > 0$

$$P'(t) = \left(\frac{100}{1 + 9e^{kt}} \right)' = - \frac{100(1 + 9e^{kt})'}{(1 + 9e^{kt})^2} = - \frac{100 \cdot 9e^{kt}(kt)'}{(1 + 9e^{kt})^2} = - \frac{900ke^{kt}}{(1 + 9e^{kt})^2} > 0, (-1 < k < 0)$$

$$\text{Άρα ο ρυθμός μεταβολής 10 χρόνια μετά θα είναι } P'(10) = - \frac{900ke^{10k}}{(1 + 9e^{10k})^2}$$

iii. Για κάθε $t > 0$, ισχύει, $P'(t) > 0$ άρα η $P(t)$ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, από χρόνο σε χρόνο, ο πληθυσμός του Άρη θα αυξάνεται.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΜΗΤΑΛΑΣ Γ., ΔΡΟΥΤΑΣ Α., ΧΑΔΟΣ Χ., ΓΕΡΜΑΝΟΣ Ξ., ΠΑΤΣΗΣ Σ.





$$\text{Είναι } \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{100}{1+9e^{kt}} \stackrel{-1 < k < 0}{=} \frac{100}{1+9 \cdot 0} = 10$$

Συνεπώς, ο πληθυσμός του Άρη δεν πρόκειται να ξεπεράσει τα 10 δισεκατομμύρια
iv. Για κάθε $t > 0$, ισχύει

$$\begin{aligned} P''(t) &= \left(-\frac{900ke^{kt}}{(1+9e^{kt})^2} \right)' = -\frac{(900ke^{kt})'(1+9e^{kt})^2 - (900ke^{kt})((1+9e^{kt})^2)'}{(1+9e^{kt})^4} = \\ &= -\frac{900k^2e^{kt}(1+9e^{kt})^2 - (900ke^{kt})2 \cdot 9e^{kt}(1+9e^{kt})}{(1+9e^{kt})^4} = -\frac{900k^2e^{kt}(1+9e^{kt})^2 - (900ke^{kt})18e^{kt}(1+9e^{kt})}{(1+9e^{kt})^4} = \\ &= -\frac{900k^2e^{kt}(1+9e^{kt})(1+9e^{kt}-18e^{kt})}{(1+9e^{kt})^4} = -\frac{900k^2e^{kt}(1+9e^{kt})(1-9e^{kt})}{(1+9e^{kt})^4} = -\frac{900k^2e^{kt}(1-9e^{kt})}{(1+9e^{kt})^3} \end{aligned}$$

Έχουμε

$$P''(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{900k^2e^{kt}(1-9e^{kt})}{(1+9e^{kt})^3} = 0 \Leftrightarrow 1-9e^{kt} = 0 \Leftrightarrow 9e^{kt} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{kt} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-kt}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow -kt = \ln \frac{1}{9} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 9}{k}$$

$$P''(t) > 0 \Leftrightarrow -\frac{900k^2e^{kt}(1-9e^{kt})}{(1+9e^{kt})^3} > 0 \Leftrightarrow 1-9e^{kt} < 0 \Leftrightarrow 9e^{kt} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{kt} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-kt}} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow e^{-kt} < 9 \stackrel{k < 0}{\Leftrightarrow} -kt < \ln 9 \stackrel{k < 0}{\Leftrightarrow} t < -\frac{\ln 9}{k}$$

$$P''(t) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t > -\frac{\ln 9}{k}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του

πληθυσμού αυξάνεται στο $\left(0, -\frac{\ln 9}{k}\right]$ και

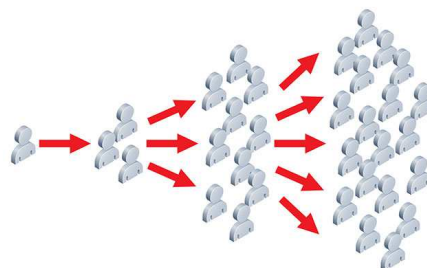
μειώνεται στο $\left[-\frac{\ln 9}{k}, +\infty\right)$.

t	0	$-\frac{\ln 9}{k}$	$+\infty$
$P''(t)$		+	-
$P'(t)$		↗	↘

88. Ο πληθυσμός της πρωτεύουσας του Κουτσομπολιστάν είναι 100000 κάτοικοι. Μια είδηση-ότι φέτος θα τεθεί πρόβλημα στις πανελλήνιες εξετάσεις-διαδίδεται στην πόλη με ρυθμό ανάλογο του αριθμού των κατοίκων που δεν γνωρίζουν την είδηση. Η είδηση άρχισε να μεταδίδεται στις 6 π.μ της δευτέρας από ένα συγκεκριμένο άτομο (την κυρά Λέλα την Σμυρνια). Στις 10 το πρωί της ίδιας μέρας η είδηση ήταν ήδη γνώστη σε 1000 κατοίκους της πόλης. Να υπολογίσετε τον αριθμό των κατοίκων της πόλης που θα γνωρίζουν την είδηση στις 2 το μεσημέρι της Τρίτης.

$$\left(\text{Δίνεται } \frac{99000^8}{99999^7} \approx 91999\right)$$

Λύση





Έστω $E(t)$ ο αριθμός των κατοίκων της πόλης που γνωρίζουν την είδηση σε t ώρες ($t \geq 0$) από την στιγμή που άρχισε να διαδίδεται η είδηση.

Την χρονική στιγμή $t=0$, δηλαδή στις 6 π.μ., έχουμε $E(0)=1$, αφού ένα άτομο γνώριζε αρχικά την είδηση.

Στις 10 το πρωί της ίδιας μέρας, δηλαδή την χρονική στιγμή $t=4$, έχουμε $E(4)=1000$.

Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού $E(t)$ έχει την μορφή

$$E'(t) = \lambda(100000 - E(t)) \quad (\text{όπου } \lambda \text{ μια θετική σταθερά})$$

Επειδή,

$$E'(t) = \lambda(100000 - E(t)) \Leftrightarrow \frac{E'(t)}{100000 - E(t)} = \lambda \Leftrightarrow (\ln(100000 - E(t)))' = (\lambda t)'$$

Από το θεώρημα των ίσων παραγώγων προκύπτει:

$$\ln(100000 - E(t)) = \lambda t + c \quad (c \in \mathbb{R}, \text{ σταθερά}) \quad \text{ή}$$

$$100000 - E(t) = e^{\lambda t + c} \Leftrightarrow E(t) = 100000 - e^{\lambda t + c} \quad (1)$$

Στις 2 το μεσημέρι της Τρίτης, δηλαδή την χρονική στιγμή $t=32$, έχουμε

$$E(32) = 100000 - e^{32\lambda + c} \quad (2)$$

$$\text{Η (1) δίνει } E(0) = 100000 - e^c, E(4) = 100000 - e^{-4\lambda + c}$$

Επομένως

$$\bullet \quad 100000 - e^c = 1 \Leftrightarrow e^c = 99999$$

$$100000 - e^{-4\lambda + c} = 1000 \Leftrightarrow 100000 - e^{-4\lambda} e^c = 1000 \Leftrightarrow$$

$$\bullet \quad e^{-4\lambda} e^c = 99000 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = \frac{99000}{e^c} \stackrel{e^c = 99999}{\Leftrightarrow} e^{-4\lambda} = \frac{99000}{99999}$$

Η (2) τώρα δίνει

$$\begin{aligned} E(32) &= 100000 - (e^{-4\lambda})^8 \cdot e^c \approx 100000 - \left(\frac{99000}{99999}\right)^8 \cdot 99999 = \\ &= 100000 - \frac{99000^8}{99999^7} = 100000 - 91999 = 8001 \text{ κάτοικοι} \end{aligned}$$

89. Ο Βιομήχανος Κοπέογλου έχει το μονοπώλιο κατασκευής και πώλησης καναπέδων για παπαγάλους. Το οικονομικό του επιτελείο έχει διαπιστώσει ότι πουλώντας μηνιαίως (κατά μέσο όρο) x καναπέδες παπαγάλων, μπορεί να τους

πουλήσει στην τιμή των $\alpha = \frac{1}{50}(5000 - x)$ ευρώ τον έναν.

Ταυτόχρονα είναι γνωστό ότι το συνολικό κόστος παράγωγης x καναπέδων κατά μέσο όρο το μήνα είναι ίσο με $25x + 2000$ ευρώ.

Η φορολογία καθορίζεται από τον εφοριακό Τσιμπίδα στα β ευρώ ανά τεμάχιο ($\beta \neq 0$).

i. Να δείξετε ότι το μηνιαίο κέρδος της επιχείρησης ανά x καναπέδες είναι

$$Κερ(x) = -\frac{1}{50}x^2 + (75 - \beta)x - 2000 \text{ ευρώ}$$

ii. Να βρείτε την ποσότητα x καναπέδων (συναρτήσει του β) για την οποία ο Κοπέογλου έχει το μέγιστο μηνιαίο κέρδος.

iii. Να βρεθεί ο φόρος β ανά τεμάχιο που πρέπει να επιβληθεί από τον εφοριακό Τσιμπίδα στο μέγιστο μηνιαίο κέρδος του βιομήχανου για να μεγιστοποιηθεί ο συνολικός φόρος που θα





καταβάλει (μηνιαίως) ο Κοπέογλου.

Λύση

i. Αν ο βιομήχανος πουλήσει x τεμάχια εισπράττει $\alpha x = \frac{1}{50}x(5000 - x)$ ευρώ

ο φόρος που θα πληρώσει είναι βx ευρώ ενώ το κόστος παραγωγής είναι $25x + 2000$ ευρώ.

Άρα το κέρδος είναι

$$\begin{aligned} \text{Κερ}(x) &= \frac{1}{50}x(5000 - x) - \beta x - (25x + 2000) = \\ &= 100x - \frac{1}{50}x^2 - \beta x - 25x - 2000 = -\frac{1}{50}x^2 + (75 - \beta)x - 2000 \end{aligned}$$

$$\text{ii. } \text{Κερ}(x) = -\frac{1}{50}x^2 + (75 - \beta)x - 2000, x \geq 0$$

Η $\text{Κερ}(x)$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής όταν $[0, +\infty)$,

$$\text{Κερ}'(x) = \left(-\frac{1}{50}x^2 + (75 - \beta)x - 2000 \right)' = -\frac{2}{50}x + (75 - \beta)$$

$$\text{Κερ}'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{50}x + (75 - \beta) = 0 \Leftrightarrow -2x + 50(75 - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 50(75 - \beta) \Leftrightarrow x = 25(75 - \beta)$$

Το κέρδος $\text{Κερ}(x)$ μεγιστοποιείται όταν πωλούνται $25(75 - \beta)$ καναπέδες

x	0	$25(75 - \beta)$	$+\infty$
$\text{Κερ}'(x)$		+	-
$\text{Κερ}(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

ii. Ο συνολικός φόρος που θα εισπράξει η εφορία για το πλήθος τεμαχίων με το μέγιστο κέρδος για τον βιομήχανο είναι

$$25(75 - \beta)\beta = 25(75\beta - \beta^2)$$

Ισχύει:

$$\begin{cases} 25(75 - \beta) > 0 \\ \beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75 - \beta > 0 \\ \beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75 > \beta \\ \beta > 0 \end{cases} \text{ άρα } \beta \in (0, 75)$$

Άρα, αρκεί να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης

$$\varphi(\beta) = 25(75\beta - \beta^2), \beta \in (0, 75)$$

$$\varphi'(\beta) = (25(75\beta - \beta^2))' = 25(75 - 2\beta)$$

$$\varphi'(\beta) = 0 \Leftrightarrow 25(75 - 2\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{75}{2} = 37,5 \text{ ευρώ}$$

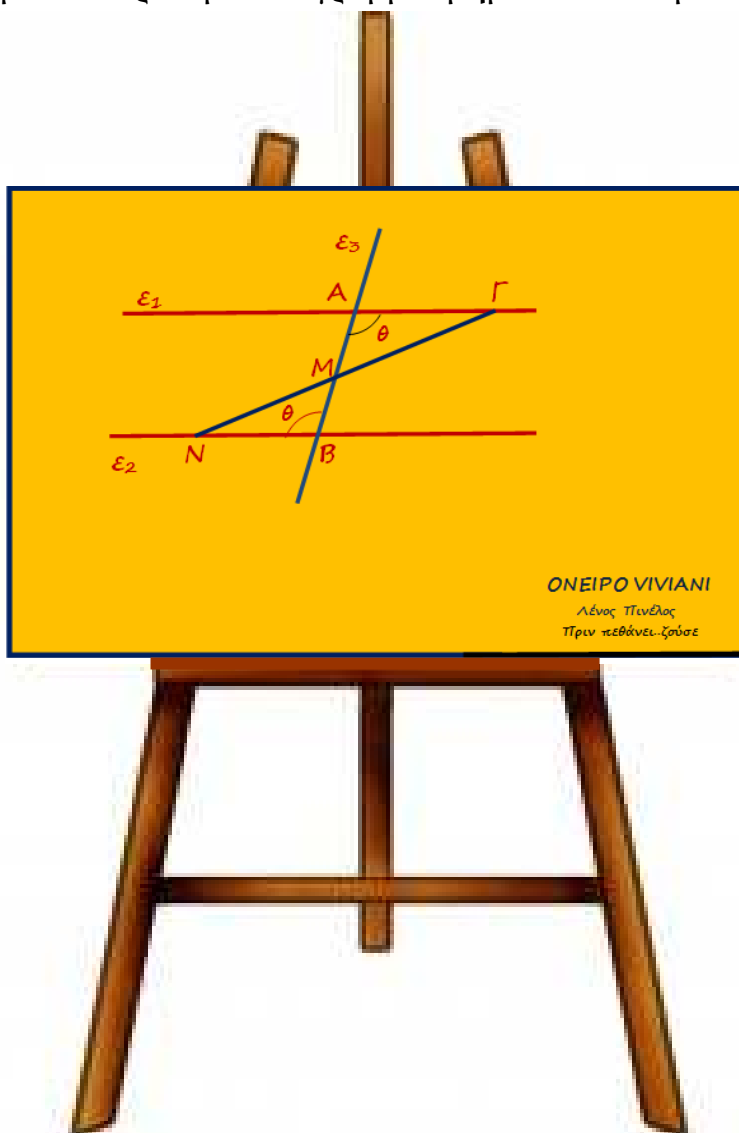
β	0	37,5	75
$\varphi'(\beta)$		+	-
$\varphi(\beta)$		$\nearrow$	$\searrow$

Συνεπώς, ο συνολικός φόρος είναι μέγιστος όταν

ο έφορος επιβάλλει 37,5 ευρώ ανά τεμάχιο την ίδια εκείνη στιγμή που ο βιομήχανος παράγει μεγιστοποιώντας το κέρδος του $25(75 - 37,5) \approx 938$ καναπέδες για παπαγάλους!!



90. Στον πίνακα ζωγραφικής «Το όνειρο του Viviani» του μεταμοντέρνου ζωγράφου Λένου Πινέλου απεικονίζονται δυο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και μια τρίτη ευθεία ε_3 που τις τέμνει στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ θεωρείται γνωστό και ίσο με α cm. Σε σταθερή απόσταση β cm από το σημείο Α παίρνουμε το σημείο Γ. Φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΓΝ που τέμνει το ΑΒ στο σημείο Μ.



Αν $AM=x$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΑΓΜ και ΒΝΜ δίνεται από την συνάρτηση

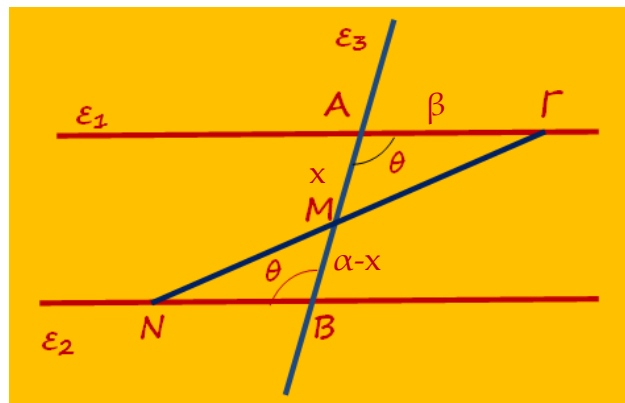
$$E(x) = \frac{1}{2} \eta \mu \theta \left(\beta x + \frac{\beta(\alpha - x)^2}{x} \right), x \in (0, \alpha)$$

όπου θ η αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τις ε_3

ii. Να προσδιορίσετε την θέση του σημείου Μ όταν το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΑΓΜ και ΒΝΜ γίνεται ελάχιστο.



Λύση

i. Αν $AM=x$ τότε $BM=\alpha-x$ Τα τρίγωνα $MA\Gamma, NMB$ είναι όμοια και προκύπτουν οι λόγοι ομοιότητας

$$\frac{MA}{MB} = \frac{A\Gamma}{BN} \Leftrightarrow BN = \frac{MB \cdot A\Gamma}{MA} = \frac{(\alpha-x)\beta}{x}$$

Το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $A\Gamma M$ και BNM ισούται με:

$$\begin{aligned} E &= E_{MA\Gamma} + E_{MBN} = \frac{1}{2} AM \cdot A\Gamma \eta\mu\theta + \frac{1}{2} BM \cdot BN \eta\mu\theta = \\ &= \frac{1}{2} \eta\mu\theta (x\beta + (\alpha-x) \frac{(\alpha-x)\beta}{x}) \end{aligned}$$

Άρα,

$$E(x) = \frac{1}{2} \eta\mu\theta \left(\beta x + \frac{\beta(\alpha-x)^2}{x} \right), x \in (0, \alpha)$$

ii. Για $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ο αριθμός $\frac{1}{2} \eta\mu\theta$ είναι θετικός και σταθερός. Επομένως, το E γίνεταιελάχιστο όταν η συνάρτηση $g(x) = \beta x + \frac{\beta(\alpha-x)^2}{x}, x \in (0, \alpha)$ γίνεται ελάχιστη.

Η συνάρτηση έχει παράγωγο

$$g'(x) = \left(\beta x + \frac{\beta(\alpha-x)^2}{x} \right)' = \dots = \frac{\beta(2x^2 - \alpha^2)}{x^2}$$

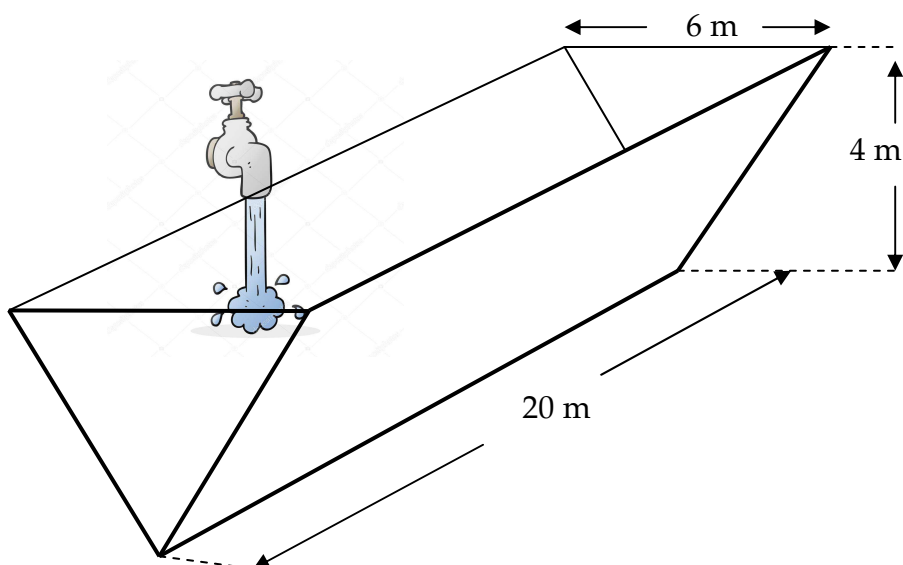
Η $f(x)$ γίνεται ελάχιστη όταν $x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ Και ο προσδιορισμός του M είναι προφανής.

x	0	$\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$	α
g'	-	0	+
g	↘		↗

Ελαχ



91. Μια δεξαμενή μήκους 20 m έχει κάθετη διατομή ισοσκελές τρίγωνο με την κορυφή προς τα κάτω με βάση 6 m και ύψος 4 m. Η παροχή νερού έχει ρυθμό $6 \text{ m}^3 / \text{min}$. Να βρεθεί πόσο γρήγορα ανεβαίνει η στάθμη του νερού τη χρονική στιγμή που το βάθος του είναι 2 m.



Λύση

Η δεξαμενή έχει σχήμα τριγωνικού ορθού πρίσματος με βάση το ισοσκελές τρίγωνο (κάθετη διατομή). Αν h είναι το βάθος του νερού και 2α το πλάτος της επιφάνειάς του, τότε ο όγκος του είναι

$$V = (\beta \cdot \nu) = \frac{1}{2} 2\alpha \cdot h \cdot 20 = 20\alpha \cdot h \quad (1).$$

Από τα όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και AMN

$$\text{έχουμε: } \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{B\Gamma}, \frac{h}{4} = \frac{\alpha}{3}, \alpha = \frac{3h}{4}.$$

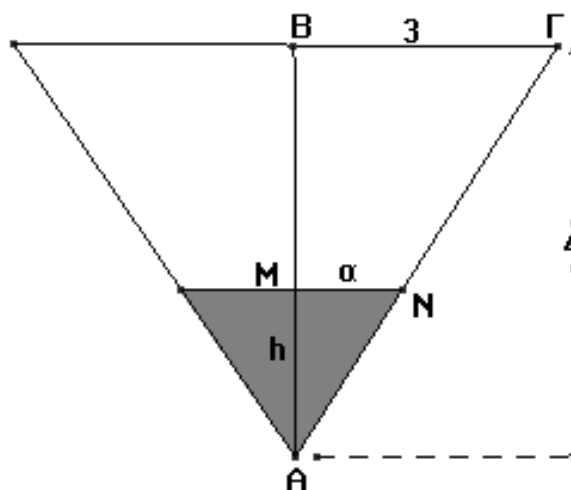
Η σχέση (1) γίνεται:

$$V = 15h^2 \text{ ή } V(t) = 15h^2(t). \text{ Με}$$

παραγωγή έχουμε: $V'(t) = 30h(t) \cdot h'(t)$

και με αντικατάσταση $6 = 30 \cdot 2h'(t)$ και

τελικά ο ρυθμός αύξησης της στάθμης είναι $h'(t) = 0,1 \text{ m/min}$.





Ο ΕΠΤΑΛΟΓΟΣ ΤΟΥ ΕΜΠΕΙΡΟΥ ΛΥΤΗ

1. Διάβαζε προσεκτικά το πρόβλημα, πολλές φορές αν είναι αναγκαίο, μέχρι να το κατανοήσεις. Αυτό σημαίνει να καταλάβεις τι πρέπει να βρεις (τα ζητούμενα) και τι σου δίνονται (τα γνωστά).
2. Κανε ένα σχήμα ή ένα διάγραμμα και σημείωσε επάνω τα άγνωστα και τα γνωστά στοιχεία.
3. Σκέψου για τύπους, νόμους, σχέσεις κ.λ.π που συνδέουν τις γνωστές με τις άγνωστες ποσότητες.
4. Επέλεξε μια από τις άγνωστες ποσότητες, συμβόλισε την με μια μεταβλητή, έστω, x , και προσπάθησε να εκφράσεις όλες τις άλλες άγνωστες ποσότητες συναρτήσει της x . Αυτό είναι σημαντικό βήμα και πρέπει να γίνει με προσοχή και ως προς την επιλογή της μεταβλητής, άλλα και ως προς τη μετάφραση των λέξεων και φράσεων σε σχέσεις.
5. Σχημάτισε εξίσωση ή την ανίσωση (εξισώσεις ή ανισώσεις) που να συνδέουν τις άγνωστες με τις γνωστές ποσότητες.
6. Λυσε την εξίσωση ή την ανίσωση και γράψε τις απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα του προβλήματος.
7. Ελεγχξε και ερμήνευσε όλες τις λύσεις σε όρους του αρχικού προβλήματος και όχι μόνο αν επαληθεύουν την εξίσωση ή τις εξισώσεις του 5ου βήματος, γιατί πιθανόν να είναι λάθος η εξίσωση (ή οι εξισώσεις) που έφτιαξες.

(από το έγκυρο διεβδομαδιαίο έντυπο ποικίλης ύλης «Νέα του ψαροντούφεκου»)

