ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΜΑΔΕΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ :
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σε κάθε ενότητα αυτού του βιβλίου θα βρείτε :

- Βασική θεωρία με τη μορφή ερωτήσεων - απαντήσεων
- Παρατηρήσεις και σχόλια στη θεωρία
- Μεθοδολογίες για τη λύση ασκήσεων
- Λυμένα παραδείγματα σε κάθε μεθοδολογία
- Ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας
- Επιλεγμένες ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο
- Επαναληπτικά θέματα από το study4exams
- Ερωτήσεις σωστού – λάθους
- Ισχυρισμούς & αντιπαραδείγματα βασισμένα στο σχολικό βιβλίο
- Θέματα πανελληνίων εξετάσεων

Καλή μελέτη
Παύλος Παλαιολόγου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.....1
1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.....1
1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....31
1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$ 67
1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ.....71
1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$ 96
1.7 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ.....108
1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....128
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 1^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....171
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ 1^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....176
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....180

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ.....183
2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....199
2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ.....201
2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ.....238
2.5 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.....250
2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ.....285
2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....319
2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....357
2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL.....372
2.10 ΜΕΛΕΤΗ & ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....382
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....386
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ 2^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....392
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....397

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....402
3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ.....411
3.5 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ.....413
3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ.....447
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 3^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....465
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ 3^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....468

1 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathfrak{R}$. Τι ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α ;**

Απάντηση : **(2005 ΕΣΠ. Β΄, 2018Β, 2019)**

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathfrak{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) *f* , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in \mathrm{A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό *y*. Το *y* ονομάζεται **τιμή της *f* στο *x*** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

Σχόλια :

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε: $f:\mathrm{A}\to\mathfrak{R}$, $x\to f(x)$.

- Το γράμμα *x*, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του *A* λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα *y*, που παριστάνει την τιμή της *f* στο *x*, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης *f* συνήθως συμβολίζεται με $\boldsymbol{D_f}$.
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της *f* σε όλα τα $x \in \mathrm{A}$, λέγεται **σύνολο τιμών** της *f* και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$. Είναι δηλαδή:

$$f(A)=\{y \mid y=f(x) \text{ για κάποιο } x\in A\}.$$

2. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

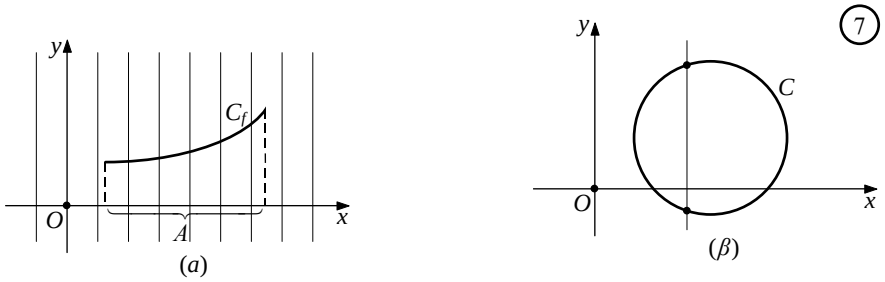
Απάντηση :

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων M(x,y) για τα οποία ισχύει y = f(x), δηλαδή το σύνολο των σημείων M(x,f(x)), με $x \in A$.

Σχόλια :

- Η γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.
- Η εξίσωση, λοιπόν, y = f(x) επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η y = f(x) είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.
- Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathfrak{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της *f* με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της *f* το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).

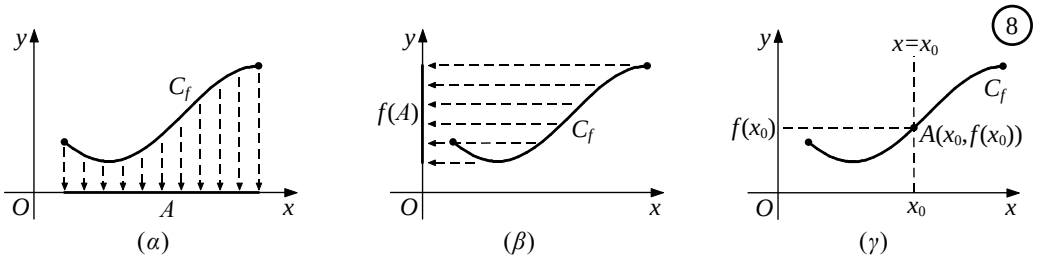


- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε :

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της C_f.

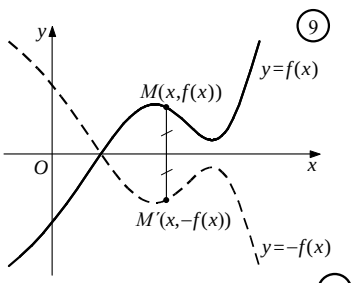
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

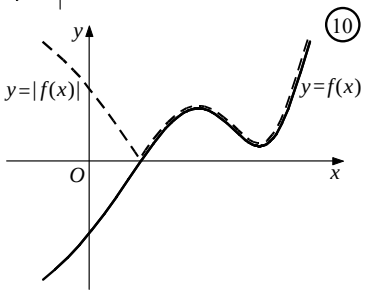


- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x,f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).



β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(-x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$.

3. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων

α) $f(x)=\alpha x+\beta$ β) $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$ γ) $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$

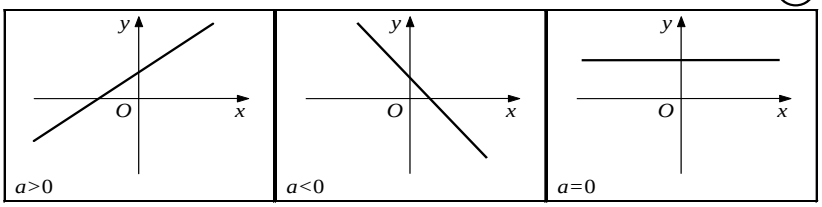
δ) $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$ ε) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.

Απάντηση :

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

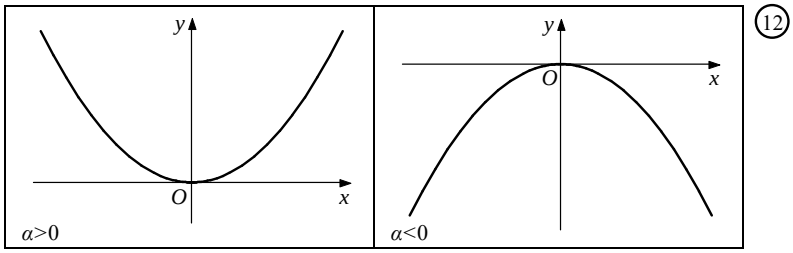
α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

11



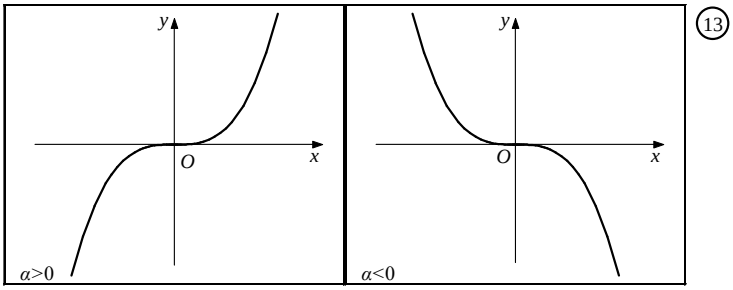
β)Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2,\quad \alpha\neq 0$.

12



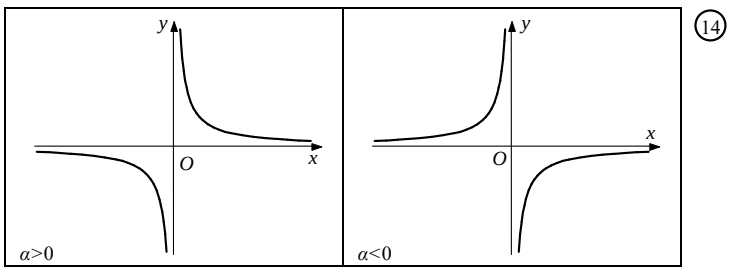
γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3,\quad \alpha\neq 0$.

13

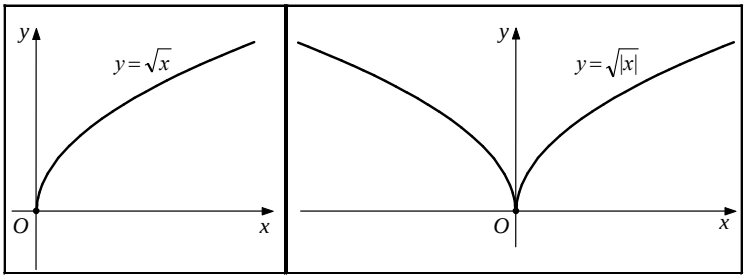


δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x},\quad \alpha\neq 0$.

14



ε) Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$.



(15)

4. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

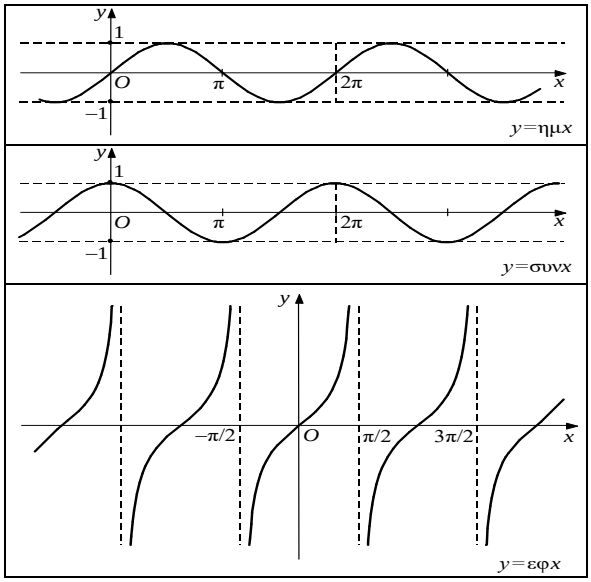
α) f(x) = ημx , f(x) = συνx , f(x) = εφx

β) $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$ γ) $f(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$

Απάντηση :

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

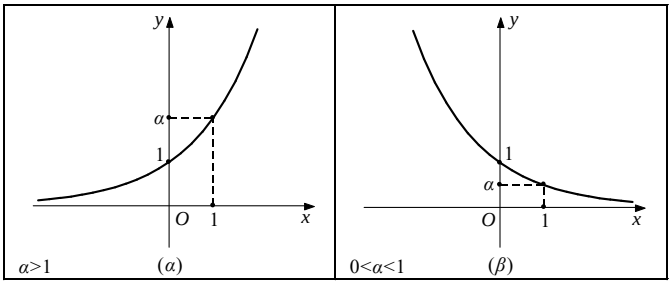
α) Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\phi x$



(16)

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $\mathrm{T}=2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $\mathrm{T}=\pi$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$.



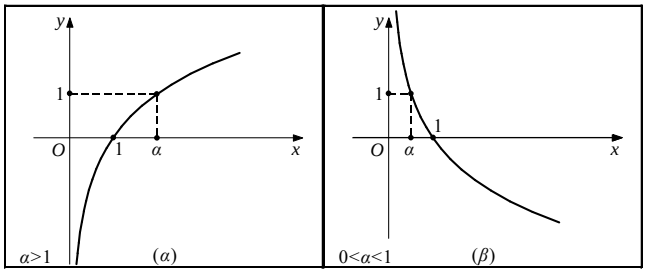
(17)

Ιδιότητες :

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $\alpha > 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$



(18)

Ιδιότητες :

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = \kappa \log_\alpha x_1$

7)Αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ αν $0 < \alpha < 1$, $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

8) $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln \alpha}$.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;

Απάντηση : (2007, 2008 ΟΜΟΓ, 2012 Β΄, 2016)

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Σχόλια :

- Έστω οι συναρτήσεις $f : A \to \Re$ και $g : B \to \Re$ και Γ ένα υποσύνολο του $A \cap B$. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ είναι $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ.
- Για να εξετάσουμε αν δυο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και ύστερα να ελέγξουμε αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.
- Οι ίσες συναρτήσεις έχουν την ίδια γραφική παράσταση.
- Είναι λάθος να πούμε ότι «δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες, αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο». Π.χ. οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$, $x \in A = \{-1,1\}$ είναι ίσες, χωρίς να έχουν τον ίδιο τύπο.

6. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης , αφαίρεσης , γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f,g;

Απάντηση :

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(fg)(x)=f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

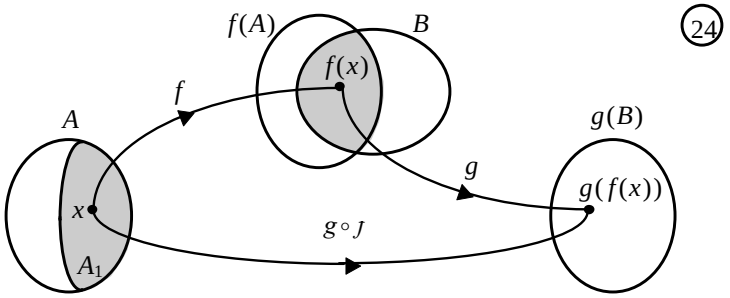
Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού Α και Β των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο :

$\{x\,|\,x\in A$ και $x\in B$, με $g(x)\neq 0\}$.

7. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g;

Απάντηση :

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(x)=g(f(x))$.



24

Σχόλια :

α) Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=\{x\in A\,|\,f(x)\in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται ,αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) • Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές **δεν είναι υποχρεωτικά** ίσες.

• Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$. Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt[\nu]{P(x)}$	$P(x)\geq 0$
$f(x)=\ln(P(x))$	$P(x)>0$
$f(x)=(P(x))^{Q(x)}$	$P(x)>0$
$f(x)=\varepsilon\phi(P(x))$	$P(x)\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$
$f(x)=\sigma\phi(P(x))$	$P(x)\neq \kappa\pi,\ \kappa\in Z$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (Άσκηση 1 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

ii. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

iii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

iv. $f(x)=\ln(1-e^x)$

v. $f(x)=(2-x)^{\sqrt{x-1}}$

vi. $f(x)=\ln(\pi^2-x^2)-\varepsilon\phi x+x^{2016}$

Λύση :

i. Πρέπει : $x^2-3x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1\ \&\ x\neq 2$. Άρα $D_f=\Re-\{1,2\}$

ii. Πρέπει : $\begin{cases}x-1\geq 0\\2-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1,2]$. Άρα $D_f=[1,2]$

iii. Πρέπει : $x\neq 0\,(1)$ και $1-x^2\geq 0$ (2)
Έχω $1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2\geq 0\Leftrightarrow x\in[-1,1]$ (2)
Από (1) & (2) $D_f=[-1,0)\cup(0,1]$.

iv. Πρέπει : $1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow x<0$. Άρα $D_f=(-\infty,0)$

v. Πρέπει : $\begin{cases}2-x>0\\x-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1,2)$ Άρα $D_f=[1,2)$

vi. Πρέπει :

- $\pi^2 - x^2 > 0$, είναι $\pi^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\pi$

x	$-\infty$	$-\pi$		π	$+\infty$
$\pi^2 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi, \pi)$

- $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$

Συναληθεύοντας τους παραπάνω περιορισμούς έχω :

$$x \in (-\pi, \pi) \Leftrightarrow -\pi < x < \pi \Leftrightarrow -\pi < \kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} < \kappa\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < \kappa < \frac{1}{2}$$

Όμως $\kappa \in Z$ άρα $\kappa = -1 \quad ή \quad \kappa = 0$

Για $\kappa = -1$ είναι $x \neq -\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2}$

Για $\kappa = 0$ είναι $x \neq \frac{\pi}{2}$

Άρα $D_f = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$

ii. $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-5x+6}$

iii. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-2} + \frac{1}{x-3}$

iv. $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-8} + \frac{1}{x^3+1}$

v. $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$

vi. $f(x) = \frac{e^x + x^5}{5-e^x}$

vii. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

viii. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

ix. $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

x. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{x-1}}$

xi. $f(x) = \sqrt{1-e^x}$

xii. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

3) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\ln(2-x^2)$

ii. $f(x)=\ln(-x^2+3x+10)$

iii. $f(x)=\ln(4-x^2)$

iv. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)$

v. $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

vi. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{1-|x|}$

vii. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sigma\upsilon\nu 2x-1}$

viii. $f(x)=\dfrac{7-x}{|2x-1|-5}$

ix. $f(x)=\dfrac{x}{|x-3|-2}+\dfrac{3}{|7-2x|-1}$

x. $f(x)=\sqrt{|x-3|-5}+\sqrt{7-|x-4|}$

4) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=(x^2-25)^{x^2+e^x}$

ii. $f(x)=(16-x^2)^{3x^5+\ln x}$

iii. $f(x)=(e^x-1)^{x^{2015}+\sqrt{2-x}}$

iv. $f(x)=(9-x^2)^{\sqrt{|x|-1}}$

v. $f(x)=\sqrt{\pi^2-x^2}+\varepsilon\phi x$

vi. $f(x)=\ln(2\pi x-x^2)-\varepsilon\phi x$

5) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$

ii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-3}}{x^2+4}$

iii. $f(x)=\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt{2-x}}$

iv. $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln^2 x-\ln x}$

v. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln(x-1)}$

vi. $f(x)=\dfrac{\ln(x+5)}{x^2-3x-4}$

vii. $f(x)=\dfrac{\ln(4-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

viii. $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{16-x^2}}$

ix. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-9)}{x-7}$

x. $f(x)=\dfrac{x^2-3}{\ln(x+2)}$

xi. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-4}$

xii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\ln(x+3)}$

xiii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{\ln(e^x-1)}+\ln(x^2+1)-\dfrac{\eta\mu x}{e^x+2017}$

xiv. $f(x)=\sqrt{\ln x-1}+\dfrac{x^2}{e^x+1}$

6) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

7) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)$.

8) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x, & \alpha\nu-5\le x\le -2\\ |x|+\beta, & \alpha\nu-2<x<6\end{cases}$ για την οποία ισχύει : $f(-4)=8$ και $f(-1)=0$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να βρείτε τους αριθμούς α,β
iii. Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$ και $f\left(f(-3)\right)$
iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$.

9) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}x+\alpha, & \alpha\nu-6\le x<-1\\ x^2+\beta, & \alpha\nu-1\le x<7\end{cases}$ για την οποία ισχύει : $f(-2)=5$ και $f(5)=24$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να βρείτε τους αριθμούς α,β
iii. Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f\left(f(-3)\right)$
iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$.

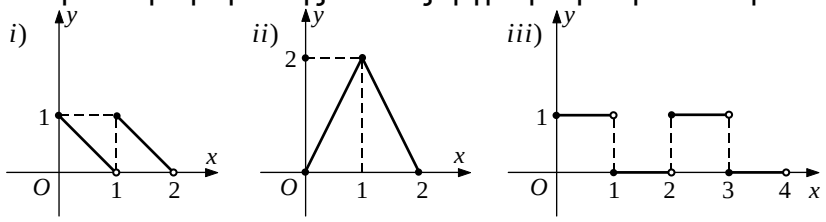
10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+1}{x-1}, x\ne 1\\ \alpha^2-3, x=1\end{cases}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να υπολογίσετε το α ώστε $f(-1)=f(1)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

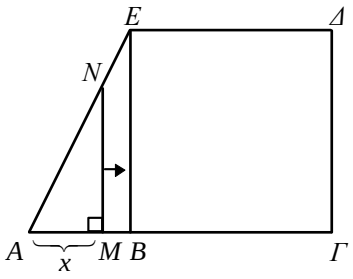
11) Σύρμα μήκους $\ell = 20$cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη *x* cm και $(20-x)$ cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του *x*.

12) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση *f* της οποίας η γραφική παράσταση είναι:

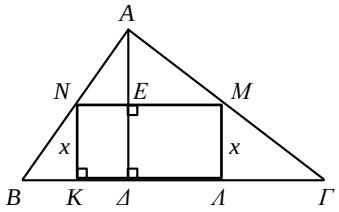


13) Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης *x* cm και όγκο 628 cm^3. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4€. ανά cm^2, ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25€. ανά cm^2. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του *x*. Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm, και ύψος 8 cm;

14) Στο διπλανό σχήμα είναι $\text{AB} = 1$, $\text{A}\Gamma = 3$ και $\Gamma\Delta = 2$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = \text{AM}$, όταν το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.



15) Ένα ορθογώνιο *ΚΛΜΝ* ύψους *x* cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο *ΑΒΓ* βάσης $B\Gamma = 10$ cm και ύψους $A\Delta = 5$cm. Να εκφράσετε το εμβαδό *E* και την περίμετρο *P* του ορθογωνίου ως συνάρτηση του *x*.



16) Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός *P* της πόλης είναι *x* εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N = 10\sqrt{2(x^2+x)}$ χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε *t* έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t+4}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

i. Να εκφράσετε τον αριθμό *N* των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του *t*.
ii. Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα ;

17) Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$\text{E}(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8).$$

(Θέμα Γ1. 2018)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:\mathrm{A}\to\Re$ και $g:\mathrm{B}\to\Re$. Αν είναι $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\varnothing$, τότε με πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις :

- **Άθροισμα**, με $D_{f+g}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ και τύπο $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- **Διαφορά**, με $D_{f-g}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ και τύπο $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- **Γινόμενο**, με $D_{f\cdot g}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ και τύπο $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- Τέλος με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}-\{x/g(x)=0\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση **Πηλίκο**, με $D_{\frac{f}{g}}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}-\{x/g(x)=0\}$ και τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

18)Αν $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\ln(2-x)$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\quad f-g,\quad f\cdot g,\quad \frac{f}{g},\quad \frac{1}{f}$.

Λύση :

Αρχικά πρέπει να βρούμε τα πεδία ορισμού των f,g.

Για την $f(x)=\sqrt{x-1}$ πρέπει $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ άρα $D_f=[1,+\infty)$

Για τη $g(x)=\ln(2-x)$ πρέπει $2-x>0\Leftrightarrow x<2$ άρα $D_g=(-\infty,2)$

- $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[1,2)$ και $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x-1}+\ln(2-x)$
- $D_{f-g}=D_f\cap D_g=[1,2)$ και $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-1}-\ln(2-x)$
- $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=[1,2)$ και $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\ln(2-x)$
- Για την $\frac{f}{g}$ πρέπει επιπλέον $g(x)\neq 0\Leftrightarrow \ln(2-x)\neq 0\Leftrightarrow \ln(2-x)\neq \ln 1\Leftrightarrow 2-x\neq 1\Leftrightarrow x\neq 1$

  Άρα $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x/g(x)=0\}=(1,2)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-1}}{\ln(2-x)}$.
- Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f}$ είναι το σύνολο $D_{\frac{1}{f}}=\{x\in D_f\quad \kappa\alpha\iota\quad f(x)\neq 0\}$

  Δηλαδή $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ και
  $f(x)\neq 0\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\neq 0\Leftrightarrow x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

  Άρα $D_{\frac{1}{f}}=\{x\in D_f\quad \kappa\alpha\iota\quad f(x)\neq 0\}=(1,+\infty)$ και ο τύπος της είναι $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19)Αν $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$.

20)Αν $f(x)=\ln(x^2-1)$ και $g(x)=\ln x$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$.

21)Αν $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{\sqrt{4-x}}$ και $g(x)=\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{4-x}}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$.

22)Αν $f(x)=\begin{cases}x-4, & \alpha\nu\ \ x\le 2\\ 3x-2, & \alpha\nu\ \ x>2\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}2-x, & \alpha\nu\ \ x\le -1\\ x+1, & \alpha\nu\ \ x>-1\end{cases}$. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$.

23)Αν $f(x)=\begin{cases}x^2, & \alpha\nu\ \ x<1\\ 2x, & \alpha\nu\ \ x\ge 1\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x-1, & \alpha\nu\ \ x\le 2\\ -x^2, & \alpha\nu\ \ x>2\end{cases}$. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$.

24)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x-1$ και $g(x)=e^x-1$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων $f, g, f\cdot g, \frac{f}{g}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $(f\cdot g)(x)=0$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{f}{g}\right)(x)>0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f (συμβ. C_f) ισχύουν τα παρακάτω :

- Για όλα τα σημεία $M(x,y)$ που ανήκουν στη C_f ισχύει $y=f(x)$. Δηλ. $M(x,f(x))$. Πιο συγκεκριμένα το σημείο $M(x_0,y_0)$ ανήκει στη C_f, αν και μόνο αν $f(x_0)=y_0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x)>0$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x)<0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x)>g(x)$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x)<g(x)$
- ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ
  - Η C_f τέμνει τον x΄x σε σημεία της της μορφής $M(x_0,0)$, οπότε για να τα βρούμε λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)=0$
  - Η C_f τέμνει τον y΄y σε σημεία της της μορφής $M(0,y_0)$, οπότε για να τα βρούμε, βάζουμε όπου x το 0 δηλ. υπολογίζουμε το $f(0)$
- Για να βρούμε κοινά σημεία C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.
- Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης :
  Αν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης :
  - $g(x)=f(x)+c$ ή $g(x)=f(x)-c$, $c>0$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατακόρυφα κατά c μονάδες προς τα πάνω ή προς τα κάτω αντίστοιχα.
  - $g(x)=f(x-c)$ ή $g(x)=f(x+c)$, $c>0$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f οριζόντια κατά c μονάδες προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά αντίστοιχα.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(-x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

25) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=x^2+\alpha x+\alpha-4$, με $\alpha\in\Re$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3,5)$, να βρείτε :

i. τον αριθμό α
ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iii. τα σημεία όπου η C_f βρίσκεται κάτω από το άξονα x΄x
iv. τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=-4x+1$.
v. τη σχετική θέση των C_f και C_h όπου $h(x)=\dfrac{2x^2-|x-3|}{2}$.

Λύση :

i. $f(x)=x^2+\alpha x+\alpha-4$, με $A_f=\Re$.
Η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3,5)$ άρα $f(-3)=5\Leftrightarrow 9-3\alpha+\alpha-4=5\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$, δηλ. $f(x)=x^2-4$.

ii. Η C_f τέμνει τον x΄x για $y=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$ άρα στα σημεία $A(2,0)$ $και$ $B(-2,0)$
Η C_f τέμνει τον y΄y για $x=0$ άρα $f(0)=-4$ δηλ. στο σημείο $\Gamma(0,-4)$.

iii. Η C_f βρίσκεται κάτω από το άξονα x΄x άρα $f(x)<0\Leftrightarrow x^2-4<0$
Είναι : $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-4<0\Leftrightarrow x\in(-2,2)$

iv. Για να βρω τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=-4x+1$ (δηλ. τη συνάρτηση $g(x)=-4x+1$), θα λύσω την εξίσωση : $f(x)=y\Leftrightarrow f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4=-4x+1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0\Leftrightarrow x=1$ $ή$ $x=-5$, άρα στα σημεία $\Delta(1,f(1))\to\Delta(1,-3)$ και $E(-5,f(-5))\to E(-5,21)$.

v. Για να βρω τη σχετική θέση των C_f και C_h, θεωρώ τη συνάρτηση : $\phi(x)=f(x)-h(x)=x^2-4-\dfrac{2x^2-|x-3|}{2}$, $A_h=\Re$.
Η C_f τέμνει τη C_h όταν :

- $\phi(x)=0\Leftrightarrow f(x)=h(x)=x^2-4=\dfrac{2x^2-|x-3|}{2}\Leftrightarrow 2x^2-8=2x^2-|x-3|\Leftrightarrow|x-3|=8\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=8\Leftrightarrow x=11\\ ή\\ x-3=-8\Leftrightarrow x=-5\end{cases}$$ δηλ. στα σημεία : $Z(11,f(11))$ $ή$ $Z(11,117)$ και $E(-5,f(-5))$ $ή$ $E(-5,21)$

- Η C_f είναι πάνω από τη C_h, όταν :

$$f(x) > h(x) \Leftrightarrow \phi(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > \frac{2x^2 - |x-3|}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8 > 2x^2 - |x-3| \Leftrightarrow |x-3| > 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 8 \Leftrightarrow x > 11 \\ \acute{\eta} \\ x-3 < -8 \Leftrightarrow x < -5 \end{cases}$$ δηλ. $x \in (-\infty,-5) \cup (11,+\infty)$.

- Η C_f είναι κάτω από τη C_h, όταν :

$$f(x) < h(x) \Leftrightarrow \phi(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < \frac{2x^2 - |x-3|}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8 < 2x^2 - |x-3| \Leftrightarrow |x-3| < 8 \Leftrightarrow -8 < x-3 < 8 \Leftrightarrow -5 < x < 11 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-5) \cup (11,+\infty).$$

26)(Άσκηση 2 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Για ποιες τιμές του $x \in \Re$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x όταν :

i. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ii. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ iii. $f(x) = e^x - 1$

Λύση :

i. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$

Έχω $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \acute{\eta}, x = 3$

x	-∞	1		3	+∞
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 > 0$ τότε $x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$

ii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0$

Έχω $(1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	-∞	−1		1	+∞
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $(1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$

iii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow$

$e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ άρα $x \in (0,+\infty)$

27)(Άσκηση 3 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Για ποιες τιμές του $x \in \Re$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, όταν :

i. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ και $g(x) = x + 1$ ii. $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

Λύση :

i.Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x > 0$

Έχω $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + 1 = 0$ αδύνατη

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
x^2+1	+		+
Γινόμενο	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3+x>0 \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$

ii.Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x)>g(x) \Leftrightarrow x^3+x-2>x^2+x-2 \Leftrightarrow x^3-x^2>0$

Έχω $x^3-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0, ή, x=1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2	+	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+
Γινόμενο	-	0	-	0	+

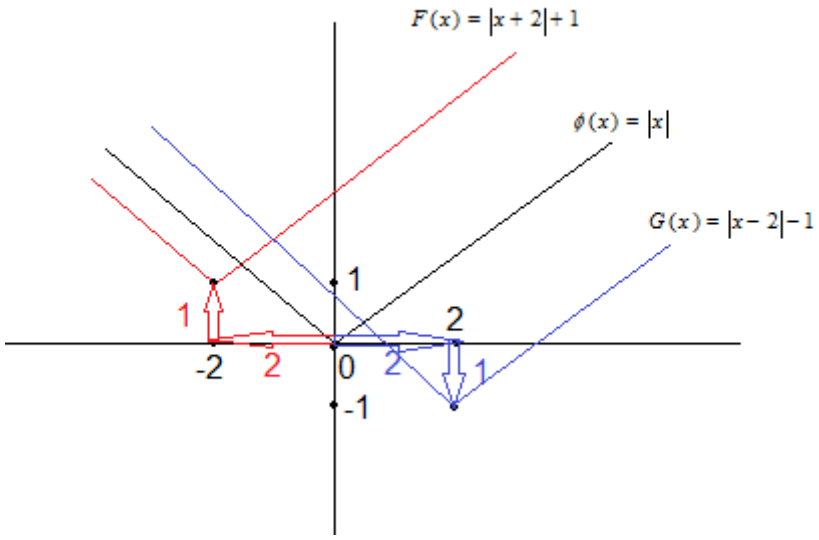
Άρα επειδή θέλω $x^3-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$

28) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\phi(x)=|x|, \qquad F(x)=|x+2|+1, \qquad G(x)=|x-2|-1$$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=|x+2|+1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $G(x)=|x-2|-1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

29) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \Re$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ να διέρχεται από τα σημεία Α(-1,3) και Β(1,7).

30) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία Α(0,3), Β(-1,0) και Γ(-2,-1).

31) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

i. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3x+9}$

ii. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

iii. $f(x) = 2\eta\mu x - \sqrt{3}$, $x \in [0, 2\pi]$

iv. $f(x) = e^x - 1$

32) Να βρεθεί για ποιες τιμές του x, η C_f βρίσκεται πάνω από τον x'x.

i. $f(x) = e^{x^2-5x+6} - 1$

ii. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

iii. $f(x) = \ln\dfrac{x-1}{x+1}$

33) Να βρεθεί για ποιες τιμές του x, η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

i. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 10$ και $g(x) = x^2 + 3x + 4$

ii. $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = x - 5$

iii. $f(x) = e^{x^2-4x+8}$ και $g(x) = e^{x+2}$

34) Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις και στη συνέχεια από τη γραφική παράσταση να βρείτε το σύνολο τιμών :

i. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

ii. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

iii. $f(x) = \ln(x+1) - 1$

iv. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$

v. $f(x) = \begin{cases} x^2 \ \ \alpha\nu & -2 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} \ \ \alpha\nu & x > 1 \end{cases}$

vi. $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x < 0 \\ \ln(x+1) & x \ge 0 \end{cases}$

vii. $f(x)=e^{-x}+2$ και $g(x)=-\ln(x-2)$ (στο ίδιο σύστημα αξόνων) *(Θέμα Β 2019)*

viii. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}+1$

ix. $f(x)=x|x|$

x. $f(x)=|\ln x|$

xi. $f(x)=\dfrac{|x+1|+|x-1|}{2}$

xii. $f(x)=\dfrac{\eta\mu x+|\eta\mu x|}{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

35)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-x+2$ και η ευθεία $(\varepsilon):6x-y-4=0$.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της (ε)

ii. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και (ε)

36)Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)=\kappa\ln(x+1)+\lambda$, για την οποία ισχύει ότι η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο e^2-1 και τον άξονα y΄y στο 2.

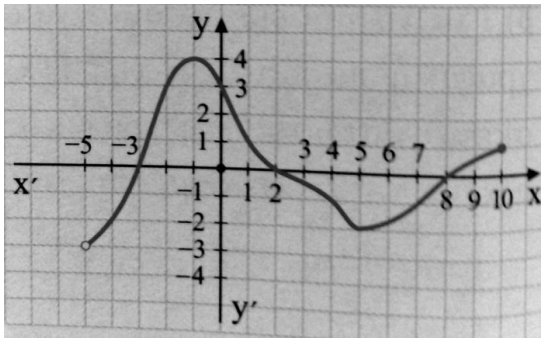
i. Να βρείτε τα κ,λ

ii. Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη 3.

37)Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

i. $f(x)=\ln(x-1)+2$ ii. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

38)Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$ και $f\big(f(-1)\big)$.

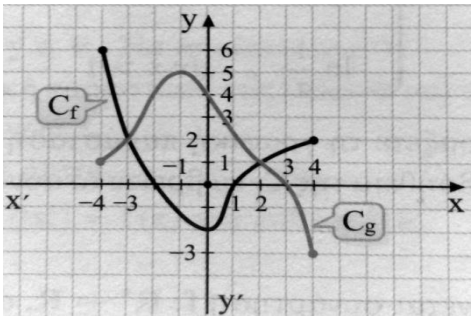
iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2$

v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<3$

vi. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\Re$.

39) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των f, g
ii. Να βρείτε τις τιμές $f(g(0))$ και $g(f(0))$.
iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$
v. Να λύσετε την ανίσωση $g(x) \le 0$

40) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x + 2xe^x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
ii. Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iii. Τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον x'x.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

Έστω $f : A \to \Re$ μια συνάρτηση. Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f :
1) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
2) Θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x, βάζοντας κατάλληλους περιορισμούς για το y.
3) Η συναλήθευση των περιορισμών για το y μας δίνει το σύνολο τιμών της f.

Αν ένας αριθμός α ανήκει στο σύνολο τιμών της f, τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

41) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Λύση :

$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, πρέπει $e^x + 1 \ne 0 \Leftrightarrow e^x \ne -1 \Leftrightarrow x \in \Re$ άρα $D_f = \Re$.

Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x - e^x = -y - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x - ye^x = y + 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow e^x(1 - y) = y + 1 \overset{\Gamma\iota\alpha\ y \ne 1 (1)}{\Longleftrightarrow} e^x = \dfrac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow$

(επίσης πρέπει : $\frac{y+1}{1-y}>0 \Leftrightarrow (y+1)(1-y)>0 \Leftrightarrow 1-y^2>0 \Leftrightarrow y\in(-1,1)$ (2))

$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln\frac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow x=\ln\frac{y+1}{1-y}$, επίσης $x\in\Re \Leftrightarrow \ln\frac{y+1}{1-y}\in\Re$ για κάθε $y\in(-1,1)$.

Τελικά από (1) και (2) ισχύει ότι πρέπει $y\in(-1,1)$, άρα $f(\Delta)=(-1,1)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

42) Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{x-2}{x-3}$

ii. $f(x)=e^{x-2}+3$

iii. $f(x)=\ln(x-2)$

43) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-3}+1$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2016$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ρίζα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες, όταν :

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α,
- για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $f(x)=g(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

45) (Άσκηση 7 σελ. 146 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f\neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\Re$ στο οποίο να ισχύει $f(x)=g(x)$.

i. $f(x)=\sqrt{x^2}$ και $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

ii. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+|x|}$ και $g(x)=1-\frac{1}{|x|}$

iii. $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x)=\sqrt{x}+1$

Λύση :

i. $f(x)=\sqrt{x^2}$ πρέπει $x^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\Re$, άρα $D_f=\Re$

$g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$ πρέπει $x\geq 0$ άρα $D_g=[0,+\infty)$. Δηλ. $D_f\neq D_g$ άρα και $f\neq g$.

Αν όμως $x\in[0,+\infty)$ τότε :

$f(x)=\sqrt{x^2}=|x| \overset{x\geq 0}{=\!=} x$ επίσης : $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ άρα αν $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

ii. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+|x|}$ πρέπει $x^2+|x|\neq 0\Leftrightarrow |x|^2+|x|\neq 0\Leftrightarrow |x|(|x|+1)\neq 0\Leftrightarrow |x|\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$

και $|x|+1\neq 0\Leftrightarrow |x|\neq -1\Leftrightarrow x\in\Re$. Άρα $D_f=\Re-\{0\}$

$g(x)=1-\dfrac{1}{|x|}$ πρέπει $|x|\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$. Άρα $D_g=\Re-\{0\}$. Δηλ. $D_f=D_g$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+|x|}=\frac{|x|^2-1}{|x|^2+|x|}=\frac{(|x|-1)(|x|+1)}{|x|(|x|+1)}=\frac{|x|-1}{|x|}=1-\frac{1}{|x|}=g(x).$$

Άρα ισχύει $f(x)=g(x)$

iii. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ πρέπει $\begin{cases}x\geq 0\\ \kappa\alpha\iota\\ \sqrt{x}-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ \kappa\alpha\iota\\ \sqrt{x}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ \kappa\alpha\iota\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

Άρα $D_f=[0,1)\cup(1,+\infty)$

$g(x)=\sqrt{x}+1$ πρέπει $x\geq 0$ άρα $D_g=[0,+\infty)$. Δηλ. $D_f\neq D_g$ άρα και $f\neq g$.

Αν όμως $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$ τότε :

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\sqrt{x}+1=g(x)$$

Άρα αν $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

46)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$ και $g(x)=\sqrt[3]{x^4}$.

i. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες.

ii. Αν $f\neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\Re$ στο οποίο να ισχύει $f(x)=g(x)$.

iii. Να γράψετε τη συνάρτηση g στη μορφή δύναμης.

Προσοχή : Για τη συνάρτηση $h(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\Re-Z$ ισχύει ότι :

- Αν $\alpha>0$, $A_f=[0,+\infty)$
- Αν $\alpha<0$, $A_f=(0,+\infty)$

Λύση :

i. Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι : $x\geq 0$, δηλαδή $A_f=[0,+\infty)$.

Για τη συνάρτηση g ισχύει ότι : $x^4\geq 0$, δηλαδή $A_g=\Re$.

Επειδή $A_f\neq A_g$ άρα και $f\neq g$.

ii. Αν όμως $x\in\Gamma=[0,+\infty)$ τότε : $f(x)=x^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{x^4}=g(x)$.

iii. Είναι : $g(x)=\sqrt[3]{x^4}=|x|^{\frac{4}{3}}=\begin{cases}x^{\frac{4}{3}}, & x\geq 0\\ (-x)^{\frac{4}{3}}, & x<0\end{cases}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

47) Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις f , g είναι ίσες. Αν δεν είναι να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο Γ του R στο οποίο f=g.

i. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ και $g(x)=|x-1|$

ii. $f(x)=\ln x^2$ και $g(x)=2\ln x$

iii. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}$ και $g(x)=|x|+2$

iv. $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ και $h(x)=e^{\frac{2}{3}\ln x}$

v. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$ και $g(x)=\dfrac{x+4}{x-1}$

48) Να αποδειχθεί η ισότητα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sqrt{x}-2$ και $g(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$

ii. $f(x)=\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ και $g(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2+2)$

49) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει :
$f^2(x)+g^2(x)+8x^2\le 4x\big(f(x)+g(x)\big)$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι $f=g$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για να προσδιορίσουμε την $(f\circ g)(x)$ δηλ. την $f\big(g(x)\big)$

1) Βρίσκω το D_f και D_g

2) Για να ορίζεται η $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$ πρέπει $x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$

3) Για να βρω τον τύπο της $(f\circ g)(x)$ δηλ. της $f\big(g(x)\big)$ πάω στην $f(x)$ και βάζω όπου x το $g(x)$. (Ομοίως ορίζεται και $g\circ f$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

50) (Άσκηση 11 σελ. 146 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$.

Λύση :

- $g\circ f$

$D_f=\Re$, $D_g=[2,+\infty)$

Για να ορίζεται η $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)$ πρέπει : $\begin{cases}x\in D_f\\ \kappa\alpha\iota\\ f(x)\in D_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\Re\\ \kappa\alpha\iota\\ x^2+1\in[2,+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \Re \\ \kappa\alpha\iota \\ x^2+1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \Re \\ \kappa\alpha\iota \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \in \Re \\ \kappa\alpha\iota \\ x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow D_{g\circ f} = (-\infty.-1] \cup [1,+\infty)$$

* $x^2-1 \geq 0$, έχω $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
x^2-1	+	0	-	0	+

Άρα $D_{g\circ f} = (-\infty.-1] \cup [1,+\infty)$ και $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{x^2+1-2} = \sqrt{x^2-1}$

- $f \circ g$

$D_f = \Re$, $D_g = [2,+\infty)$

Για να ορίζεται η $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ πρέπει : $\begin{cases} x \in D_g \\ \kappa\alpha\iota \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2,+\infty) \\ \kappa\alpha\iota \\ \sqrt{x-2} \in \Re \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2,+\infty) \\ \kappa\alpha\iota \\ x \in \Re \end{cases} \Leftrightarrow D_{f\circ g} = [2,+\infty) \text{ και } (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{x-2}^2 + 1 = x-2+1 = x-1$$

51)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(***Θέμα Β1 2017)***

Λύση :

$f(x) = \ln x$ με $A_f = (0,+\infty)$ και $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$ με $A_g = \Re - \{1\}$

Για να ορίζεται η $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in (0,1) \end{cases}$$. Δηλ. $A_{f\circ g} = (0,1)$.

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \ln\dfrac{x}{1-x}$ με $x \in (0,1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

52)Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$ και $g(x) = x^2 - x + 2$

ii. $f(x) = \sqrt{8+2x-x^2}$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

53)Αν $f(x) = x^2 + 5$ και $g(x) = \sqrt{x-9}$ να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$.

54)Αν $f(x) = \ln(x-3)$ και $g(x) = \sqrt{x}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

55) Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις : i. $f\circ\dfrac{1}{g}$ ii. $f\circ\dfrac{1}{f}$.

56) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g\circ f$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ και $g(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$

ii. $f(x)=x^2+x+2$ και $g(x)=\sqrt{1-|x-3|}$

iii. $f(x)=\begin{cases}x-2, & \alpha\nu\ \ 1\le x\le 4\\ 5-x, & \alpha\nu\ \ 4<x<8\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x-3, & \alpha\nu\ \ 0<x<3\\ 4-x, & \alpha\nu\ \ 3\le x<6\end{cases}$

57) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,1]\to\Re$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $g(x)=f(x-2)+f(\ln x)$.

58) Αν $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x-3}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $g\circ f$, $f\circ g$ και $f\circ f$

59) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x+1$ και $g(x)=x+3$. Να λυθεί $(g\circ f\circ f)(x)=(f\circ g\circ g)(x)$.

60) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+1$ και $g(x)=\alpha x+2$. Για ποια τιμή του $\alpha\in\Re$ ισχύει $fog=gof$.

61) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}$, με $\beta\neq-\alpha^2$ και $g(x)=x-2\sqrt{x}+1$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(f(x))=x$, για κάθε $x\in\Re-\{\alpha\}$ και

ii. $g(g(x))=x$, για κάθε $x\in[0,1]$.

62) Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν :

i. $f(x)=\eta\mu(x^2+1)$

ii. $f(x)=2\eta\mu^2 3x+1$

iii. $f(x)=\ln(e^{2x}-1)$

iv. $f(x)=\eta\mu^2(3x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α) Όταν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $(f\circ g)(x)$ και $g(x)$, τότε για να βρούμε τη συνάρτηση $f(x)$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) Θέτουμε $g(x)=u$

2) Λύνουμε την παραπάνω σχέση ως προς x

3) Αντικαθιστούμε το x που βρήκαμε στον τύπο $f\big(g(x)\big)$

Β) Όταν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $(f\circ g)(x)$ και $f(x)$, τότε για να βρούμε τη συνάρτηση $g(x)$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) Θέτουμε όπου x το $g(x)$ στον τύπο της $f(x)$

2) Έχουμε τη συνάρτηση $f\big(g(x)\big)$ με δυο μορφές (μια αυτή που βρήκαμε και μια από τα δεδομένα). Εξισώνουμε τις δυο αυτές μορφές και βρίσκουμε τη $g(x)$.

(Αν η σύνθετη συνάρτηση και η συνάρτηση που μου δίνεται ξεκινούν με διαφορετικό γράμμα, κάνω το Α, αν ξεκινούν με το ίδιο κάνω το Β)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63)(Άσκηση 6 σελ. 148 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει :

i. $(f\circ g)(x)=x^2+2x+2$ και $g(x)=x+1$

ii. $(f\circ g)(x)=\sqrt{1+x^2}$ και $g(x)=-x^2$

iii. $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

Λύση :

i. **Α)** Θέτω $g(x)=u\Leftrightarrow x+1=u\Leftrightarrow x=u-1$

$(f\circ g)(x)=x^2+2x+2\Leftrightarrow f\big(g(x)\big)=x^2+2x+2\Leftrightarrow f(u)=(u-1)^2+2(u-1)+2\Leftrightarrow$

$f(u)=u^2-2u+1+2u-2+2\Leftrightarrow f(u)=u^2+1$ άρα $f(x)=x^2+1$.

ii. **Α)** Θέτω $g(x)=u\Leftrightarrow -x^2=u\Leftrightarrow x^2=-u$, με $x^2\geq 0\Leftrightarrow -u\geq 0\Leftrightarrow u\leq 0$

$(f\circ g)(x)=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow f\big(g(x)\big)=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow f(u)=\sqrt{1-u}$ δηλαδή

$f(x)=\sqrt{1-x}$, $\mathrm{A}_f=(-\infty,0]$

iii. **Β)** $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|\Leftrightarrow g\big(f(x)\big)=|\sigma\upsilon\nu x|\Leftrightarrow\sqrt{1-f^2(x)}=|\sigma\upsilon\nu x|\Leftrightarrow 1-f^2(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x\Leftrightarrow$

$f^2(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2 x\Leftrightarrow f^2(x)=\eta\mu^2 x\Leftrightarrow |f(x)|=|\eta\mu x|$. Δυο τέτοιες συναρτήσεις είναι π.χ. $f(x)=\eta\mu x$ ή $f(x)=-\eta\mu x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

64)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν :

i. $(f\circ g)(x)=4x^2+6x-10$ και $g(x)=2x-1$

ii. $(f\circ g)(x)=2x-1$ και $g(x)=\dfrac{3-2x}{x+1}$

iii. $(g\circ f)(x)=3x-4$ και $g(x)=x+2$

iv. $(g\circ f)(x)=9x^2-\eta\mu x+1$ και $g(x)=3x-1$

65) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(2x-1)=4x^2-14x+12$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

66) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(5-3x)=9x^2-30x+21$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

67) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(\ln x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

68) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(1-e^x)=\ln x+x$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

69) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g, αν :

i. $(f\circ g)(x)=3x^2-6x+10$ και $f(x)=3x+1$

ii. $(g\circ f)(x)=4x^2+4$ και $f(x)=2x-1$

70) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ με $g(x)=3x-2$ και $(g\circ f)(x)=3x^2-6x+10$. Να βρείτε :

i. τη συνάρτηση f,

ii. τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g.

71) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ με $g(x)=2x-3$ και $(g\circ f)(x)=2e^x(e^x+1)-15$. Να βρείτε :

i. τη συνάρτηση f,

ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΑΡΤΙΕΣ – ΠΕΡΙΤΤΕΣ – ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Για να δείξω ότι μια συνάρτηση $f:A\to\Re$ λέγεται άρτια αν για $x\in A$ και $-x\in A$ τότε ισχύει $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in A$. Ενώ λέγεται περιττή αν για $x\in A$ και $-x\in A$ τότε ισχύει $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in A$. Τέλος η f λέγεται περιοδική όταν υπάρχει $T\neq 0$ με : $f(x+T)=f(x)$ και $f(x-T)=f(x)$ για κάθε $x\in A$. **Προσοχή** :

- Μια συνάρτηση μπορεί να μην είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y'y (και αντίστροφα)
- Αν η f είναι περιττή τότε η C_f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
- Για να είναι μια συνάρτηση f άρτια ή περιττή, πρέπει οπωσδήποτε το πεδίο ορισμού να είναι σύνολο συμμετρικό ως προς το 0, δηλαδή να ισχύει $x,-x\in D_f$ για κάθε $x\in D_f$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

72)Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές :

i. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ ii. $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

Λύση :

i. Πρέπει : $\sqrt{x^2+1}+x>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>-x$ (1)

1ος τρόπος :

- Αν $-x>0\Leftrightarrow x<0$, τότε :

  $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>-x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}^2>(-x)^2\Leftrightarrow x^2+1>x^2\Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει.
- Αν $-x<0\Leftrightarrow x>0$, τότε η (1) προφανώς ισχύει.

Οπότε η ανισότητα (1) ισχύει, για κάθε $x\in\Re$. Τελικά $A_f=\Re$

2ος τρόπος :

Για κάθε $x\in\Re$ ισχύει : $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>-x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}+x>0$ για κάθε $x\in\Re$. Τελικά $A_f=\Re$.

Άρα $A_f=\Re$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x\in\Re$ και $-x\in\Re$. Επίσης :

$$f(-x)=\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln 1-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

ii. Πρέπει :

- $1+x\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$
- $\dfrac{1-x}{1+x}>0\Leftrightarrow(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\overset{*}{\Leftrightarrow}x\in(-1,1)$

*

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2>0$ τότε $x\in(-1,1)$

Τελικά $A_f=(-1,1)$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x\in\Re$ και $-x\in\Re$. Επίσης :

$f(-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$. Άρα η f είναι περιττή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

73)Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές :

i. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ ii. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ iii. $f(x)=x^2+x\eta\mu x$

iv. $f(x)=x^4+3x^2+1$ v. $f(x)=x^4+3x^2+1$ όταν $x\in[-1,+\infty)$

vi. $f(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$ vii. $f(x)=x\eta\mu\dfrac{1}{x}$

74) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{\alpha-x}{x+3}$, με $\alpha\in\Re$. Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο Α(-5,-4).

i. Να βρείτε τον αριθμό α
ii. Να ορίσετε τη $(f\circ g)(x)$
iii. Να αποδείξετε ότι η $(f\circ g)(x)$ είναι περιττή.

75) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το το A=R
ii. Η f είναι περιττή
iii. Η C_f έχει με τον x'x μόνο ένα κοινό σημείο.

76) **Αν $f,g:\Re\to\Re$ είναι συνθέσιμες συναρτήσεις τότε :

i. Να δείξετε ότι αν η g είναι άρτια, τότε και η $f\circ g$ είναι άρτια.
ii. Να δείξετε ότι αν η f, g είναι περιττές, τότε και η $f\circ g$ είναι περιττή.
iii. Να δείξετε ότι αν η f είναι άρτια και η g είναι περιττή, τότε και η $f\circ g$ είναι άρτια.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Σε κάποιες ασκήσεις δεν μας δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, αλλά κάποια σχέση ή γενική ιδιότητα που έχουν οι τιμές της. Π.χ $f(x+y)=xf(y)+yf(x)$ για κάθε $x\in\Re$. Επειδή η σχέση ισχύει για κάθε τιμή των x,y, συνήθως επιλέγουμε κατάλληλες τιμές που μας βολεύουν όπως : x=y=0, ή x=y=1 ή x=y ή x=0 ή y=-x κλπ.

- Αν προκύψει σχέση της μορφής $f(x)\cdot g(x)=0$ είναι λάθος να συμπεράνω ότι : $f(x)=0$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in\Re$.

  Για παράδειγμα έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x-|x|$, $x\in\Re$ και $g(x)=x+|x|$, $x\in\Re$.

  Έχουμε λοιπόν ότι : $f(x)\cdot g(x)=(x-|x|)\cdot(x+|x|)=x^2-|x|^2=x^2-x^2=0$.
- Για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί κάποια ιδιότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση και με κατάλληλη επιλογή τιμών για τις μεταβλητές οδηγούμε σε άτοπο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

77) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα : $3f(x+1)-2f(2-x)=x^2+14x-5$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

Λύση :

$3f(x+1)-2f(2-x)=x^2+14x-5$ (1)

Στην (1) έστω $x+1=y\Leftrightarrow x=y-1$ και έχω

$3f(y-1+1)-2f[2-(y-1)]=(y-1)^2+14(y-1)-5\Leftrightarrow$

$3f(y)-2f(2-y+1)=y^2-2y+1+14y-14-5\Leftrightarrow 3f(y)-2f(3-y)=y^2+12y-18$ ή

$\boxed{3f(x)-2f(3-x)=x^2+12x-18}$ (2)

Επίσης στην (1) έστω $2-x=y \Leftrightarrow x=2-y$ και έχω :

$3f(2-y+1)-2f[2-(2-y)]=(2-y)^2+14(2-y)-5 \Leftrightarrow 3f(3-y)-2f(y)=4-4y+y^2+28-14y-5 \Leftrightarrow$

$3f(3-y)-2f(y)=y^2-18y+27$ ή $\boxed{3f(3-x)-2f(x)=x^2-18x+27}$ (3).

Τις (2) και (3) τις κάνω σύστημα και έχω :

$\begin{cases} 3f(x)-2f(3-x)=x^2+12x-18\cdot(3) \\ -2f(x)+3f(3-x)=x^2-18x+27\cdot(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9f(x)-6f(3-x)=3x^2+36x-54 \\ -4f(x)+6f(3-x)=2x^2-36x+54 \end{cases}$ προσθέτω

κατά μέλη και έχω : $5f(x)=5x^2 \Leftrightarrow f(x)=x^2,\ x\in\Re$.

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

78) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα : $f(x^2+6)+f(5x)=0$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες.

Λύση :

[Είναι $x^2+6=5x \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \quad ή \quad x=3$]

Η σχέση $f(x^2+6)+f(5x)=0$ (1) για :

- $x=2$ γίνεται $f(4+6)+f(10)=0 \Leftrightarrow 2f(10)=0 \Leftrightarrow f(10)=0$, άρα η $x=10$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

- $x=3$ γίνεται $f(9+6)+f(15)=0 \Leftrightarrow 2f(15)=0 \Leftrightarrow f(15)=0$, άρα η $x=15$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες.

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

79) Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f\big(f(x)\big)=2x-1$ (1) για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι $f(2x-1)=2f(x)-1,\ x\in\Re$.

Λύση :

Στη σχέση (1), θέτω όπου x το $f(x)$ και έχω :

$f\big(f\big(f(x)\big)\big)=2f(x)-1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(2x-1)=2f(x)-1,\ x\in\Re$.

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4

80) Μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ (1) για κάθε $x,y>0$. Να δείξετε ότι :

i. $f(1)=0$

ii. $f(y)=-f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ για κάθε $y>0$.

iii. $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y>0$.

Λύση :

i. Στη σχέση (1), θέτω $x=y=1$ και έχουμε : $f(1)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$

ii. Στη σχέση (1), θέτω $x=\dfrac{1}{y}$ και έχουμε :

$$f\left(\frac{1}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)\Leftrightarrow f(1)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)\Leftrightarrow f(y)=-f\left(\frac{1}{y}\right)$$

iii. Έχουμε : $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)\overset{(1)}{=}f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)\overset{ii.}{=}f(x)-f(y)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

81) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα : $f(x-2)+2f(3-x)=11-2x$ για κάθε $x\in\Re$.
- i. Να αποδειχθεί ότι $f(x)+2f(1-x)=7-2x$
- ii. Να αποδειχθεί ότι $f(1-x)+2f(x)=5+2x$
- iii. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$

82) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(x^2)+f(2x)=x^4-8x$, για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες.

83) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(x^2+2)+f(3x)=0$, για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε δυο τουλάχιστον σημεία.

84) Έστω μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f\left(f(x)\right)=2x-1$, (1) για κάθε $x\in\Re$.
- i. Να δείξετε ότι $f(2x-1)=2f(x)-1$, $x\in\Re$.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

85) Έστω μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f\left(f(x)\right)=3x-2$, (1) για κάθε $x\in\Re$.
- i. Να δείξετε ότι $f(3x-2)=3f(x)-2$, $x\in\Re$.
- ii. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία y=1 σε ένα τουλάχιστον σημείο.

86)**Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα : $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$. Να δείξετε ότι :
- i. $f(0)=0$. ii. Η f είναι περιττή iii. $f(x-y)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$.

87)** Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία για κάθε $x\in\Re$ ικανοποιεί τη σχέση : $f(x)+x\le x^2\le f(x+1)-x$.
- i. Να δείξετε ότι $f(x)\ge x^2-x$
- ii. Να βρείτε την f
- iii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f
- iv. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

88)**Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα : $x^3\left[f(x)+f(-x)+6\right]=3f(-x)$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή και στη συνεχεία να βρείτε τον τύπο της.

1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση : **(2007 ΟΜΟΓ., 2007 ΕΣΠ., 2010 ΕΣΠ.,)**

- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$
- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Αν μια συνάρτηση *f* είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η *f* είναι **γνησίως μονότονη στο Δ.** Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της *f* είναι ένα διάστημα *Δ* και η *f* είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η *f* είναι γνησίως μονότονη.

- ***αύξουσα*** *σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε* $x_1, x_2 \in \Delta$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει* $f(x_1) \le f(x_2)$.
- ***φθίνουσα*** *σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε* $x_1, x_2 \in \Delta$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει* $f(x_1) \ge f(x_2)$.

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση : **(2004 ΟΜΟΓ., 2010 Β΄, 2014 ΕΣΠ.)**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι:
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Κάποιες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης *f* λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της *f*.

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1-1$;

Απάντηση : **(2003 ΟΜΟΓ., 2005 Β΄, 2012 ΟΜΟΓ., 2015 Β΄)**

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται συνάρτηση **1 – 1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 \ne x_2$, τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Σχόλια :

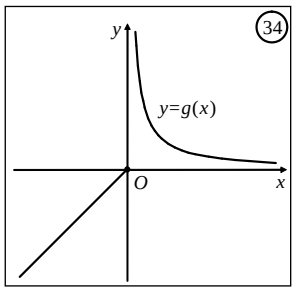
α) Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι συνάρτηση **1 – 1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:
- **Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.**
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι **κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο**.

- **Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση** $"1-1"$**. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.** Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Παράδειγμα (Πανελλήνιες 2018)

Η συνάρτηση η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$ (Σχ. 34).είναι $1-1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



Παρατηρήσεις :

- Αν γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε : $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$. Την ισοδυναμία αυτή τη χρησιμοποιούμε για επίλυση εξισώσεων. Επίσης ισχύει : $f(x_1)\neq f(x_2)\Leftrightarrow x_1\neq x_2$.
- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 αρκεί : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.
- Αν η f δεν είναι 1-1, τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ τ.ω. $x_1\neq x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$.
- $\mu ονοτονία\Rightarrow 1-1$ όμως $1-1\not\Rightarrow \mu ονοτονία$
- $όχι\ \mu ονοτονία\not\Rightarrow όχι\ 1-1$ όμως $όχι\ 1-1\Rightarrow όχι\ \mu ονοτονία$

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ; (2019)

Απάντηση :

Μια συνάρτηση $f:A\to R$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι $1-1$.Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση : $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

Σχόλια :

α) Ισχύει ότι : $f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y,\ y\in f(A)$.

β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f, και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f.

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ με πεδίο ορισμού το $\Re$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

– έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

– έχει σύνολο τιμών το $\Re$ και

– αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0,+\infty)$ στο μοναδικό $x \in \Re$ για το οποίο ισχύει $\alpha^x = y$. Επειδή όμως $\alpha^x = y \Leftrightarrow x = \log_\alpha y$

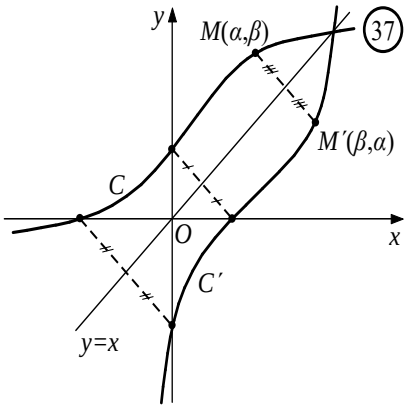
θα είναι $f^{-1}(y) = \log_\alpha y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$.

Συνεπώς $\boldsymbol{\log_\alpha \alpha^x = x,\ x \in \Re}$ και $\boldsymbol{\alpha^{\log_\alpha x} = x,\ x \in (0,+\infty)}$.

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Απόδειξη :

Ας πάρουμε μια $1-1$ συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ.37). Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



Παρατηρήσεις :

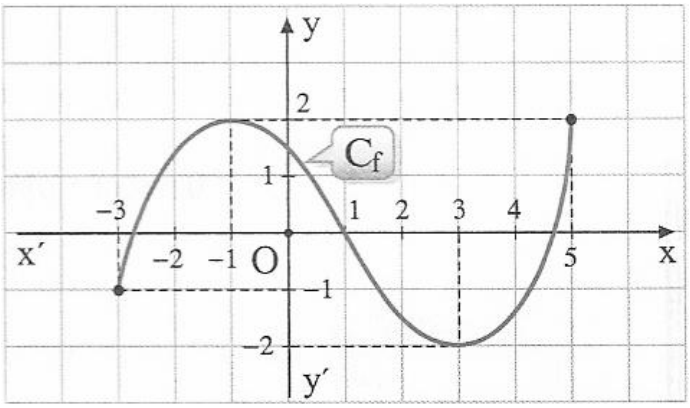
- $f : 1-1 \Leftrightarrow f : \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho\acute{\varepsilon}\psi\iota\mu\eta$,
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$
- Αν f γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ, τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας : π.χ. αν $f \uparrow \sigma\tau o$ A τότε έστω $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} = f(\mathrm{A})$ με $y_1 < y_2$, τότε :

$$f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$ άρα $f^{-1} \uparrow$ στο $D_{f^{-1}} = f(\mathrm{A})$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Α : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΑΠΟ ΣΧΗΜΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

77) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Λύση :

Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, η συνάρτηση f είναι :

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-3,-1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,3]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,5]$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Β : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΕ ΟΡΙΣΜΟ

Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ακολουθούμε τα εξής βήματα :

- Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
- Με κατάλληλες πράξεις κατασκευάζουμε την ανισότητα μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) > f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Χρήσιμες είναι οι παρακάτω **ιδιότητες της διάταξης** :

i. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$

ii. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

iii. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

iv. Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

v. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και ν φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :

vi. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$

(Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^\nu < \beta^\nu, \alpha\nu\_\nu\_\pi\varepsilon\rho\rho\iota\acute{\omega}\varsigma \\ \alpha^\nu > \beta^\nu, \alpha\nu\_\nu\_\acute{\alpha}\rho\tau\iota\omega\varsigma \end{cases}$)

vii. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$

viii. Αν οι αριθμοί α και β είναι **ομόσημοι**, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

78)Να βρείτε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=4x-7$ ii. $f(x)=-4x-7$

Λύση :

i. $f(x)=4x-7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f=\Re$

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$ με $x_1<x_2$, τότε έχουμε :

$x_1<x_2\Rightarrow 4x_1<4x_2\Rightarrow 4x_1-7<4x_2-7\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\Re$

ii. $f(x)=-4x-7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f=\Re$

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$ με $x_1<x_2$, τότε έχουμε :

$x_1<x_2\Rightarrow -4x_1>-4x_2\Rightarrow -4x_1-7>-4x_2-7\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f=\Re$

(**Γενικά** γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$ είναι μια ευθεία. Για τη μονοτονία της συνάρτησης αυτής ισχύει ότι :

- Αν $\alpha>0$ η $f(x)=\alpha x+\beta$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$
- Αν $\alpha<0$ η $f(x)=\alpha x+\beta$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$
- Αν $\alpha=0$ η $f(x)=0x+\beta\Leftrightarrow f(x)=\beta$ είναι σταθερή στο $\Re$)

79)(Άσκηση 1 σελ. 156 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες;

i. $f(x)=\sqrt{1-x}$

ii. $f(x)=2\ln(x-2)-1$

iii. $f(x)=3e^{1-x}+1$

iv. $f(x)=(x-1)^2-1,\ \ x\le 1.$

Λύση :

i. Πρέπει : $1-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$. Άρα $D_f=(-\infty,1]$

Έστω $x_1,x_2\in D_f=(-\infty,1]$, με

$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 1-x_1>1-x_2\Rightarrow \sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f=(-\infty,1]$.

ii. Πρέπει : $x-2>0\Leftrightarrow x>2$. Άρα $D_f=(2,+\infty)$

Έστω $x_1,x_2\in D_f=(2,+\infty)$, με $x_1<x_2\Rightarrow x_1-2<x_2-2\Rightarrow \ln(x_1-2)<\ln(x_2-2)\Rightarrow$

$2\ln(x_1-2)<2\ln(x_2-2)\Rightarrow 2\ln(x_1-2)-1<2\ln(x_2-2)-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=(2,+\infty)$.

iii. $D_f=\Re$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με

$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 1-x_1>1-x_2\Rightarrow e^{1-x_1}>e^{1-x_2}\Rightarrow 3e^{1-x_1}>3e^{1-x_2}\Rightarrow$

$3e^{1-x_1}+1>3e^{1-x_2}+1\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f=\Re$.

iv. $D_f=(-\infty,1]$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=(-\infty,1]$, με

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\underset{x_1-1\le 0,\&\ x_2-1\le 0}{\overset{\text{Επειδή},x\le 1}{\Longrightarrow}}(x_1-1)^2>(x_2-1)^2\Rightarrow$ (Όταν υψώνω στο τετράγωνο αρνητικούς αριθμούς, αλλάζει η φορά της ανίσωσης)

$\Rightarrow(x_1-1)^2-1>(x_2-1)^2-1\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f=(-\infty,1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

80)Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=6-2x$

ii. $f(x)=2x^3-1$

iii. $f(x)=\sqrt{6-2x}+3$

iv. $f(x)=x^2+\sqrt{x-1}$

v. $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{3-x}}$

vi. $f(x)=e^x+x^3+1$

vii. $f(x)=\dfrac{2}{x}-\ln(x-5)$

viii. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-4x^3+2016$

ix. $f(x)=\dfrac{3}{x}-6x^4-\sqrt{x}$

x. $f(x)=x^3-\sqrt{2-x}+5x$

xi. $f(x)=\dfrac{e^x-3}{e^x+2}$

xii. $f(x)=\dfrac{e^x}{2+e^x}$

xiii. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

xiv. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

81)Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-3x+\dfrac{1}{x}$ στο διάστημα $\Delta=(-\infty,0)$ ii. $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, στο $(-\infty,1)$.

82)Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ η συνάρτηση : $f(x)=(\lambda^2-2\lambda-15)x-2018$ είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x)=(|2\lambda-1|-|\lambda+2|)x+2019$ είναι γνησίως αύξουσα.

83)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. Αν οι f,g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η συνάρτηση f+g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Αν οι f,g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η συνάρτηση f+g είναι γνησίως φθίνουσα.

84)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε και η συνάρτηση f-g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε και η συνάρτηση g-f είναι γνησίως φθίνουσα.

85)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to(0,+\infty)$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

86)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. Αν f,g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Αν f,g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσες.

87)Έστω δυο συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα , να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=f(-2x+3)$.

88)Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2x+3f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

89)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2-\sqrt{x}+\frac{\alpha+6}{x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(4,-33)$ να δείξετε ότι $\alpha=-2$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

90)**Δίνεται περιττή συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty,0)$.

91)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,\ \alpha\nu\ \ x\geq 0\\ x+1, & \alpha\nu\ \ x<0\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}e^x-x^2 & ,\ \alpha\nu\ \ x\leq -1\\ 3-\ln(x+1), & \alpha\nu\ \ x>-1\end{cases}$

iii. $f(x)=\begin{cases}x+1 & ,\ \alpha\nu\ \ x\leq 1\\ x^2-2x+3, & \alpha\nu\ \ x>1\end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η C_f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ μια φορά. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=0$, αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=\alpha$ με $\alpha\in\Re$, έχει το πολύ μια ρίζα.

Για να επιλύσουμε μια εξίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
3) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
4) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα που είναι η προφανής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

92) Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{10-x}=3+\ln x$.

Λύση : Έχω : $\sqrt{10-x}-3-\ln x=0$, έστω $f(x)=\sqrt{10-x}-3-\ln x$. Πρέπει $\begin{cases}10-x\geq 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x\leq 10\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0,10]$, δηλ. $D_f=(0,10]$. Έχω να λύσω την εξίσωση $\sqrt{10-x}-3-\ln x=0\Leftrightarrow f(x)=0$. Με δοκιμές παρατηρώ ότι για $x=1$ έχω : $\sqrt{10-1}-3-\ln 1=0\Leftrightarrow 3-3=0\Leftrightarrow f(1)=0$. Άρα η $x=1$ είναι ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$. Για να δείξω ότι είναι και μοναδική, αρκεί να δείξω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1,x_2\in D_f=(0,10]$, με $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 10-x_1>10-x_2\Rightarrow\sqrt{10-x_1}>\sqrt{10-x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1<x_2\Rightarrow\ln x_1<\ln x_2\Rightarrow-\ln x_1>-\ln x_2\Rightarrow-3-\ln x_1>-3-\ln x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $\sqrt{10-x_1}-3-\ln x_1>\sqrt{10-x_2}-3-\ln x_2\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και η ρίζα $x=1$ της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

93)Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^3=1-\ln x$ ii. $e^x+x=1$ iii. $\ln x=\frac{1}{x}-1$ iv. $2\sqrt{x-1}=1+\frac{8}{x^3}$

v. $x+\ln x=1$ vi. $x^2+\ln x-1=0$ vii. $1-e^x=x+\eta\mu x$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

94)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}+\frac{\alpha}{x}$, με $\alpha\in\Re$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(6,1)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha=-6$.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-2}=\frac{6}{x}-1$

95)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{8}{x^3}-3\sqrt{x-1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $8+2x^3=3x^3\sqrt{x-1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή $f(x)<0$ ή $f(x)>0$
3) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
4) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έτσι η ανίσωση γίνεται $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(\rho)$
5) εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της f για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε : $\alpha<\beta \Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)$ και $\alpha\le\beta \Leftrightarrow f(\alpha)\le f(\beta)$
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε : $\alpha<\beta \Leftrightarrow f(\alpha)>f(\beta)$ και $\alpha\le\beta \Leftrightarrow f(\alpha)\ge f(\beta)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

96)Να λυθεί η ανίσωση : $x^3+x<2-\ln x$.

Λύση : Έχω : $x^3+x+\ln x-2<0$ η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Έστω $h(x)=x^3+x+\ln x-2$, με $A_h=(0,+\infty)$, έχω να λύσω την ανίσωση : $h(x)<0$ (1)

Παρατηρώ ότι $h(1)=0$ άρα η $x=1$ άρα η ανίσωση (1) γίνεται : $h(x)<h(1)$.

Αρκεί τώρα να βρω τη μονοτονία της h :

Έστω $x_1,x_2\in A_h$ με :

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$ (2)

$x_1<x_2$ (3)

$x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \Rightarrow \ln x_1-2<\ln x_2-2$ (4)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2),(3) και (4) και έχω :

$x_1^3+x_1+\ln x_1-2<x_2^3+x_2+\ln x_2-2 \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$

Άρα η $h\uparrow$ για κάθε $x\in A_h=(0,+\infty)$, οπότε $h(x)<h(1)\Leftrightarrow x<1$ ή $x\in(0,1)$.

97) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+3x$, αφού βρείτε τη μονοτονία της, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2-x+3)<f(3x+x^2)$

Λύση : Έχω : $D_f=\Re$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1}+3x_1<e^{x_2}+3x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε $f(2x^2-x+3)<f(3x+x^2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}2x^2-x+3<3x+x^2\Leftrightarrow x^2-4x+3<0$.

Έχω $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x=3\end{cases}$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
x^2-4x+3	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-4x+3<0\Leftrightarrow x\in(1,3)$.

98)Αν η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η ανίσωση : $2\left(x^2-3x+2\right)>\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$.

Λύση :

$2\left(x^2-3x+2\right)>\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow 2x^2-6x+4>\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+\ln\left(x^4+1\right)>6x-4+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow 2x^2+\ln\left(x^4+1\right)>2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2)>f(3x-2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x^2>3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

99)Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,6)$ και $B(2,3)$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(x^2-17)-4\right)<3$.

Λύση :

i. Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1,6)$, άρα ισχύει $f(-1)=6$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $B(2,3)$, άρα ισχύει $f(2)=3$. Αν $x_1=-1$ και $x_2=2$ τότε $-1<2\Rightarrow x_1<x_2$. Επίσης $f(-1)=6\Leftrightarrow f(x_1)=6$ και $f(2)=3\Leftrightarrow f(x_2)=3$.

Έχουμε δηλ. $x_1<x_2$ με $f(x_1)>f(x_2)$, επομένως η f αποκλείεται να είναι γνησίως αύξουσα και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. $f\left(f(x^2-17)-4\right)<3\overset{f(2)=3}{\Leftrightarrow}f\left(f(x^2-17)-4\right)<f(2)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x^2-17)-4>2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2-17)>6\overset{f(-1)=6}{\Leftrightarrow}f(x^2-17)>f(-1)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}x^2-17<-1\Leftrightarrow x^2-16<0\Leftrightarrow x\in(-4,4)$.

100) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-x-1$

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων : $g(x)=\ln f(x)$ και $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

iv. Να δείξετε ότι $xf(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$.

v. Να δείξετε ότι : $f(x)+f(x+5)>f(x+3)+f(x+7)$ για κάθε $x\in\Re$.

vi. Να δείξετε ότι : $f(x)+f(7x)>f(3x)+f(10x)$ για κάθε $x>0$.

vii. Να δείξετε ότι : $f(x)>f(x^2)$ για κάθε $x>1$.

viii. Να δείξετε ότι : $f(x^3)>f(x^2)$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Λύση :

i. $A_f = \Re$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \Re$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{-x_1} - x_1 - 1 > e^{-x_2} - x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_f = \Re$.

ii. Ρίζες : $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - x - 1 = 0$. Παρατηρούμε ότι : $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$, άρα το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης : $f(x) = 0$ και επειδή η $f \downarrow \Re$, είναι και μοναδική.

Πρόσημο :

- $x > 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- $x < 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

iii. Για τη $g(x) = \ln f(x)$ πρέπει : $x \in A_f = \Re$ και $f(x) > 0 \overset{ii.}{\Leftrightarrow} x < 0$, άρα $A_g = (-\infty, 0)$.

Για την $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ πρέπει : $x \in A_f = \Re$ και $f(x) \neq 0 \overset{ii.}{\Leftrightarrow} x \neq 0$, άρα $A_h = \Re^*$.

iv. Αν $x > 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} xf(x) < 0$

Αν $x < 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} xf(x) < 0$

Άρα σε κάθε περίπτωση : $xf(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.

v. Για κάθε $x \in \Re$ ισχύει ότι :

- $x < x+3 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x+3)$ (1)
- $x+5 < x+7 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x+5) > f(x+7)$ (1)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε : $f(x) + f(x+5) > f(x+3) + f(x+7)$.

vi. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$1 < 3 \Leftrightarrow x < 3x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(3x)$ (3)

$7 < 10 \Leftrightarrow 7x < 10x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(7x) > f(10x)$ (4)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) έχουμε : $f(x) + f(7x) > f(3x) + f(10x)$ για κάθε $x > 0$.

vii. Για κάθε $x > 1$, έχουμε : $x > 1 \overset{\cdot x}{\Leftrightarrow} x^2 > x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x^2) < f(x) \Leftrightarrow f(x) > f(x^2)$

viii. Για κάθε $x \in (0,1)$, έχουμε : $x^2 > x^3 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x^2) < f(x^3) \Leftrightarrow f(x^3) > f(x^2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

101) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να δείξετε ότι αν $x>e$, τότε $\ln x-\frac{1}{x}+x>1-\frac{1}{e}+e$

iii. Να δείξετε ότι αν $x>1$, τότε $x\ln x+x^2>1$

iv. Να δείξετε ότι αν $\alpha,\beta>0$ και $\alpha<\beta$, τότε $\ln\frac{\alpha}{\beta}<\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\beta-\alpha$

v. Να δείξετε ότι για κάθε $x\geq 1$, $xe^{x-\frac{1}{x}}\geq 1$

vi. Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x^2-1}\cdot x^x<1$

vii. Να λύσετε την ανίσωση : $x^2-x-6<\ln\frac{x+7}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x+7}$.

102) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln x+e^x-1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να δείξετε ότι αν $x>1$, τότε $e^x+\ln x>e$

iii. Να δείξετε ότι αν $\alpha,\beta>0$ και $\alpha<\beta$, τότε $\ln\frac{\alpha}{\beta}<e^\beta-e^\alpha$

iv. Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$, $f(x+1)-f(x)>0$

v. Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$, $f(x)<f(2x)$

vi. Να δείξετε ότι για κάθε $x>1$, $f(x)<f(x^2)$

103) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2008)<f(2004)$.

i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(5-3x)\leq f(x^2+x)$.

104) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2007)<f(2000)$.

i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(3x-2)\geq f(x^2)$.

105) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $9-x^3<e^{x-2}$ ii. $e^{x-1}+x<2$ iii. $1+\ln x<\frac{1}{x}$

106) Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,5) και Β(-2,7).

i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f\left(f\left(|x|-4\right)-6\right)-5<0$.

107) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει : $g(x)=f(2x-5)-f(4-x)$ για κάθε $x\in\Re$. Επίσης η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

i. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $g(e^x-2)>0$

108) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\frac{4}{x}-\sqrt{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{x^2}{\sqrt{x}}-x<4$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{4}{x^2+1}-\frac{4}{x^2+2x+5}<\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2x+5}$.

109) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{x}+x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\sqrt{|x|+5}-\sqrt{3|x|+1}<2|x|-4$.

110) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{1}{x^2+5}-\frac{1}{2x^2+1}<\ln\frac{x^2+5}{2x^2+1}$

111) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=-2x^3-3x+5$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις : α) $f(x-4)<f(3x)$ β) $f(|x|)>0$ γ) $f(x^2-5)-f(3-2x)>0$.

112) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=8e^{2-x}-2x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<4$

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $8\left(e^{2-x^2}-e^{2-x}\right)>-2x(1-x)$

113) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$, να δείξετε ότι $f(a^2+1)\geq f(2a)$.

114) Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\Re\to\Re$ τέμνει τον άξονα y΄y στο 2.
Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2-1\right)<2$.

i. αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

ii. αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

115) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=3x^{2019}+2x^{2017}+1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(x)\right)<6$.

iii. Να αποδείξετε ότι : $f(13)-f(12)<f(14)-f(11)$.

116) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

i. $f(x)+f(5x)<f(3x)+f(6x)$, για κάθε $x>0$.

ii. $f(x)+f(x^3)<f(x^2)+f(x^5)$, για κάθε $x\in(0,1)$.

117) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x+1}$ με $\alpha,\beta\in\Re$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $M(-2,5)$ και $N(-4,3)$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha=2$, $\beta=-1$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

iii. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f παίρνει τη μορφή $f(x)=2-\dfrac{3}{x+1}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$.

v. Να αποδείξετε ότι : $f(3)-f(2)<f(4)-f(1)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

118) Δίνεται η συνάρτηση : $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+e^{f(x)}+x-1=0$ (1) για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

Λύση :

1ος τρόπος :

Αρχικά η (1) γίνεται : $f^3(x)+e^{f(x)}=1-x$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x)=x^3+e^x$, $x\in\Re$

άρα η (1) γίνεται : $g\big(f(x)\big)=1-x\Leftrightarrow(g\circ f)(x)=1-x$, (2) $x\in\Re$

Επίσης η $g(x)=x^3+e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ καθώς :

για κάθε $x_1,x_2\in\Re$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3$

$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχω $x_1^3+e^{x_1}<x_2^3+e^{x_2}\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Άρα τελικά : για κάθε $x_1,x_2\in\Re$ είναι :

$$x_1<x_2\Rightarrow 1-x_1>1-x_2\overset{(2)}{\Rightarrow}(g\circ f)(x_1)>(g\circ f)(x_2)\Rightarrow g\big(f(x_1)\big)>g\big(f(x_2)\big)\overset{g:\uparrow}{\Rightarrow}f(x_1)>f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

2ος τρόπος :

Αρχικά η (1) γίνεται : $f^3(x)+e^{f(x)}=1-x$

Για να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\Re$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι $f(x_1)>f(x_2)$.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\Re$ με $x_1<x_2$ και ισχύει ότι $f(x_1)\le f(x_2)$ τότε :

$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)\le f^3(x_2)$ (2)

$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}\le e^{f(x_2)}$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2) και (3) και έχω :

$f^3(x_1)+e^{f(x_1)}\le f^3(x_2)+e^{f(x_2)}\overset{(1)}{\Rightarrow}1-x_1\le 1-x_2\Rightarrow x_1\ge x_2$ άτοπο καθώς $x_1<x_2$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

3ος τρόπος :

Αρχικά η (1) γίνεται : $f^3(x) + e^{f(x)} = 1 - x$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x) = x^3 + e^x$, $x \in \Re$

άρα η (1) γίνεται : $g(f(x)) = 1 - x \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = 1 - x$, $x \in \Re$

Άρα οι συναρτήσεις $(g \circ f)(x)$ και $1 - x$ είναι ίσες.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $h(x) = 1 - x$, $x \in \Re$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ (για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$) επομένως και η συνάρτηση $(g \circ f)(x)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ αφού είναι ισες. Επίσης η $g(x) = x^3 + e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ καθώς :

για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχω $x_1^3 + e^{x_1} < x_2^3 + e^{x_2} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

Άρα τελικά : για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$ είναι :

$$x_1 < x_2 \overset{g\circ f \downarrow}{\Rightarrow} (g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \overset{g:\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

119) Δίνεται η συνάρτηση : $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) - x + 2016 = 0$ (1) για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

120) Δίνεται η συνάρτηση : $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f^{2017}(x) + 3f(x) - e^{-x} = 1$ (1) για κάθε $x \in \Re$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά για να αποδείξω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο, προσπαθούμε να βρούμε ένα $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε : $f(x) \le f(x_0)$, αντίστοιχα ελάχιστο $f(x) \ge f(x_0)$.

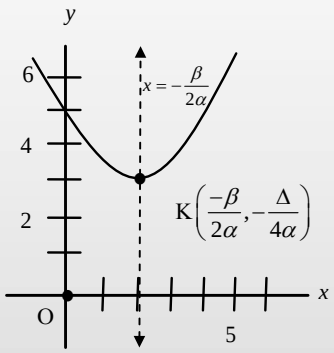
Για να βρω τα ακρότατα μιας συνάρτησης, είναι χρήσιμες οι παρακάτω διαδικασίες :

- Ακρότατα της συνάρτησης : $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

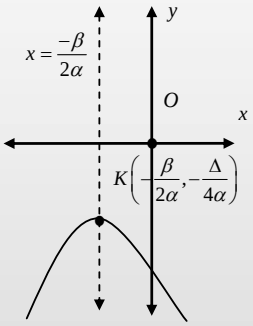
  Η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

  - Αν $\alpha > 0$ τότε : $f \downarrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \uparrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
  - Αν $\alpha < 0$ τότε : $f \uparrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \downarrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

Αν $\alpha > 0$



Αν $\alpha < 0$



- Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης σε κλειστό διάστημα τότε μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της π.χ
  - αν $f \uparrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α ελάχιστο το $f(\alpha)$ και στο β μέγιστο το $f(\beta)$
  - αν $f \downarrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α μέγιστο το $f(\alpha)$ και στο β ελάχιστο το $f(\beta)$

- Κατασκευάζω ανισοισότητες της μορφής $f(x) \ge m$ ή $f(x) \le M$ ή $m \le f(x) \le M$ και βρίσκω τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει το ¨=¨ λύνοντας την εξίσωση : $f(x) = m$ ή $f(x) = M$

  (Προσοχή : Χρήσιμες είναι οι ανισώσεις
  - $x^{2\nu} \ge 0$ για κάθε $x \in \Re$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 0$
  - $|x| \ge 0$ για κάθε $x \in \Re$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 0$
  - $x + \frac{1}{x} \ge 2$ για κάθε $x > 0$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 1$
  - $x + \frac{1}{x} \le -2$ για κάθε $x < 0$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = -1$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

121) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^2-4x+7$

ii. $f(x)=-x^2+2x+3$

iii. $f(x)=5-4|x-1|$

iv. $f(x)=-\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}$

v. $f(x)=x^2-2|x|+3$

vi. $f(x)=2\ln x+3,\ x\in[1,e]$

vii. $f(x)=2\ln(x-3)-5$

viii. $f(x)=\sqrt{4-2x}$

ix. $f(x)=3-5x,\ x\in[-2,5)$

Λύση :

i. $f(x)=x^2-4x+7$, είναι $A_f=\Re$.

Επειδή $\alpha=1>0$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{-4}{2}=2$

το $f(x_0)=f(2)=3$, άρα για κάθε $x\in\Re$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(2)\Leftrightarrow f(x)\geq 3$.

Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

ii. $f(x)=-x^2+2x+3$, είναι $A_f=\Re$.

Επειδή $\alpha=-1<0$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{2}{2\cdot(-1)}=1$

το $f(x_0)=f(1)=4$, άρα για κάθε $x\in\Re$ ισχύει ότι $f(x)\leq f(1)\Leftrightarrow f(x)\leq 4$.

iii. $f(x)=5-4|x-1|$, είναι $A_f=\Re$. Έχουμε για κάθε $x\in\Re$ έχουμε

$|x-1|\geq 0\Leftrightarrow -4|x-1|\leq 0\Leftrightarrow 5-4|x-1|\leq 5\Leftrightarrow f(x)\leq 5$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=5\Leftrightarrow 5-4|x-1|=5\Leftrightarrow -4|x-1|=0\Leftrightarrow x=1$, δηλ. $f(1)=5$ άρα η (1) γίνεται $f(x)\leq 5\Leftrightarrow f(x)\leq f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=5$.

iv. $f(x)=-\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}$, πρέπει

- $4-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 4$
- $2+\sqrt{4-x}\neq 0$, που ισχύει άρα,

είναι $A_f=(-\infty,4]$. Έχουμε για κάθε $x\in(-\infty,4]$ έχουμε

$\sqrt{4-x}\geq 0\Leftrightarrow 2+\sqrt{4-x}\geq 2\Leftrightarrow \dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}\geq-\dfrac{10}{2}\Leftrightarrow f(x)\geq -5$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=-5\Leftrightarrow -\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}=-5\Leftrightarrow 2+\sqrt{4-x}=2\Leftrightarrow x=4$, δηλ. $f(4)=-5$ άρα η (1) γίνεται $f(x)\geq -5\Leftrightarrow f(x)\geq f(4)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=4$ το $f(4)=-5$.

v. $f(x)=x^2-2|x|+3$, είναι $A_f=\Re$.

Παρατηρούμε ότι : $f(x)=x^2-2|x|+3 \Leftrightarrow f(x)=x^2-2|x|+1+2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)=|x|^2-2|x|+1+2 \Leftrightarrow f(x)=(|x|-1)^2+2$. Έχουμε για κάθε $x\in\Re$ έχουμε $(|x|-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2+2\geq 2 \Leftrightarrow f(x)\geq 2$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=2 \Leftrightarrow (|x|-1)^2+2=2 \Leftrightarrow (|x|-1)^2=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$, δηλ. $f(1)=2$ και $f(-1)=2$ άρα η (1) γίνεται : $f(x)\geq 2 \Leftrightarrow \big(f(x)\geq f(1)\ \kappa\alpha\iota\ f(x)\geq f(-1)\big)$.
Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=-1$ και στο $x_2=1$ το $f(-1)=f(1)=2$.

vi. $f(x)=2\ln x+3$, είναι $A_f=[1,e]$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\uparrow[1,e]$ άρα η f παρουσιάζει :

- ελάχιστο στο $x_1=1$ το $f(1)=2\ln 1+3=3$ δηλ. για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 3$.
- Μέγιστο στο $x_2=e$ το $f(e)=2\ln e+3=5$ δηλ. για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει ότι $f(x)\leq f(1) \Leftrightarrow f(x)\leq 3$.

vii. $f(x)=2\ln(x-3)-5$, είναι $A_f=(3,+\infty)$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\uparrow(3,+\infty)$ άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

viii. $f(x)=\sqrt{4-2x}$, είναι $A_f=(-\infty,2]$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\downarrow(-\infty,2]$ άρα η f παρουσιάζει :

- ελάχιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=\sqrt{4-2\cdot 2}=0$ δηλ. για κάθε $x\in(-\infty,2]$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$. Η f δεν παρουσιάζει μέγιστο.

ix. $f(x)=3-5x$, είναι $A_f=[-2,5)$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\downarrow[-2,5)$ άρα η f παρουσιάζει :

- Μέγιστο στο $x_0=-2$ το $f(-2)=3-5\cdot(-2)=13$ δηλ. για κάθε $x\in[-2,5)$ ισχύει ότι $f(x)\leq f(-2) \Leftrightarrow f(x)\leq 13$. Η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

122) Να βρεθούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^2-5x+6$
ii. $f(x)=x^2+2x+2$
iii. $f(x)=x^4-2x^2+3$
iv. $f(x)=(\ln x-2)^2-4$
v. $f(x)=3+|x-2|$
vi. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
vii. $f(x)=2e^{1-x}-3,\ x\in[0,1]$
viii. $f(x)=1-2\ln(x-1),\ x\in[2,3]$

123) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i. $f(x)=3|x-1|-2$

ii. $f(x)=5-(x+2)^4$

iii. $f(x)=2\sqrt{x}-5$

iv. $f(x)=7-3\sqrt{x-1}$

v. $f(x)=7-\dfrac{4}{|x+3|+2}$

vi. $f(x)=\sqrt{6-2x}-3x$

vii. $f(x)=\sqrt{7-x}-\sqrt{x+2}$

viii. $f(x)=-x^2+4|x|-1$

ix. $f(x)=x-6\sqrt{x}+12$

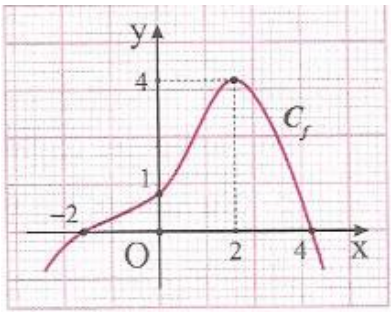
124) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\sqrt{x^2+1}+4$ και $g(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x^2+4}}$.

i. Να βρείτε το ελάχιστο της f .

ii. Να βρείτε το μέγιστο της g .

iii. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\alpha,\beta\in\Re$ ισχύει ότι : $7f(\alpha)-5g(\beta)\geq 20$

125) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ του παρακάτω σχήματος.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας.

iv. Να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)\geq 0$.

v. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

vi. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

vii. Να δείξετε ότι : $f(x)\leq 4$ για κάθε $x\in\Re$.

viii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=4$ και την ανίσωση : $f(x)<4$.

ix. Να λύσετε την εξίσωση : $4+(x-2)^2=f(x)$

x. Να λύσετε την εξίσωση : $f(\alpha)+f(e^{\beta})=8$.

126) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f^3(x)+e^{f(x)}-x^2+1=0$, για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ «1-1» ΟΡΙΣΜΟΣ

- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ είναι «1-1», θεωρούμε $x_1,x_2\in\mathrm{A}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ και προσπαθούμε να δείξουμε ότι $x_1=x_2$. (δηλ. αν $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$)
- Για να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι «1-1», προσπαθούμε να εντοπίσουμε δυο $x_1,x_2\in\mathrm{A}$ με $x_1\neq x_2$ που δίνουν όμως $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν δίνεται η C_f και παρατηρούμε ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x΄x τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο, τότε η f είναι «1-1». Διαφορετικά δεν είναι.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και «1-1». Τονίζουμε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. (Δηλ. $\mu ονοτονια \Rightarrow$"1−1")

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

127) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι :

i. $f(x)=1+\ln\sqrt{1+e^{x-1}}$

ii. $f(x)=2x^2+3$

iii. $f(x)=1-4x-3e^{2x-1}$

Λύση :

i. $f(x)=1+\ln\sqrt{1+e^{x-1}}$, πρέπει : $\begin{cases}\sqrt{1+e^{x-1}}>0\\ 1+e^{x-1}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\Re$. Άρα $D_f=\Re$.

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1=x_2$.

Έχω : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1+\ln\sqrt{1+e^{x_1-1}}=1+\ln\sqrt{1+e^{x_2-1}}\Rightarrow \ln\sqrt{1+e^{x_1-1}}=\ln\sqrt{1+e^{x_2-1}}\Rightarrow$ $\sqrt{1+e^{x_1-1}}=\sqrt{1+e^{x_2-1}}\Rightarrow 1+e^{x_1-1}=1+e^{x_2-1}\Rightarrow e^{x_1-1}=e^{x_2-1}\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα η $f(x)$ είναι «1-1».

ii. $f(x)=2x^2+3$, $D_f=\Re$. Η $f(x)$ δεν είναι «1-1» γιατί υπάρχουν :

$x_1=-1,x_2=1\in D_f=\Re$ με $x_1\neq x_2$

Όμως $f(x_1)=f(-1)=2(-1)^2+3=5$, $f(x_2)=f(1)=2\cdot 1^2+3=5$. Δηλ. $f(x_1)=f(x_2)$.

Άρα εντοπίσαμε δυο $x_1,x_2\in D_f$ με $x_1\neq x_2$ που δίνουν όμως $f(x_1)=f(x_2)$. Άρα η f δεν είναι «1-1».

iii. $f(x)=1-4x-3e^{2x-1}$ με τον ορισμό δεν μπορώ να εξετάσω αν η $f(x)$ είναι «1-1». Γι' αυτό θα εξετάσω αν είναι γνησίως μονότονη.

Έχω : $D_f=\Re$,

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $x_1<x_2\Rightarrow -4x_1>-4x_2\Rightarrow 1-4x_1>1-4x_2$ (1). Επίσης :

$x_1<x_2\Rightarrow 2x_1<2x_2\Rightarrow 2x_1-1<2x_2-1\Rightarrow e^{2x_1-1}<e^{2x_2-1}\Rightarrow -3e^{2x_1-1}>-3e^{2x_2-1}$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $1-4x_1-3e^{2x_1-1}>1-4x_2-e^{x_2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα η f είναι και «1-1».

128) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-2f(x)=3e^{2-x}-5$ (1) για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι είναι «1-1».

Λύση :

1ος τρόπος :

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1=x_2$.

Έχω : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (2)

Επίσης : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow -2f(x_1)=-2f(x_2)$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2) και (3) και έχω : $f^3(x_1)-2f(x_1)=f^3(x_2)-2f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 3e^{2-x_1}-5=3e^{2-x_2}-5\Rightarrow 3e^{2-x_1}=3e^{2-x_2}\Rightarrow e^{2-x_1}=e^{2-x_2}\Rightarrow 2-x_1=2-x_2\Rightarrow -x_1=-x_2\Rightarrow$

$x_1=x_2$ άρα η f είναι και «1-1».

2ος τρόπος :

Είναι : $f^3(x)-2f(x)=3e^{2-x}-5$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x)=x^3-2x$, $x\in\Re$

άρα η (1) γίνεται : $g\big(f(x)\big)=3e^{2-x}-5\Leftrightarrow (g\circ f)(x)=3e^{2-x}-5$ (2), $x\in\Re$

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1=x_2$.

Έχω : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)\Rightarrow (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\overset{(2)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 3e^{2-x_1}-5=3e^{2-x_2}-5\Rightarrow 3e^{2-x_1}=3e^{2-x_2}\Rightarrow e^{2-x_1}=e^{2-x_2}\Rightarrow 2-x_1=2-x_2\Rightarrow -x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2$

άρα η f είναι και «1-1».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

129) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι

i. $f(x)=3e^{2x-3}+2$

ii. $f(x)=1+3e^{1+\sqrt{1-x}}$

iii. $f(x)=e^{x-1}+2x-5$

iv. $f(x)=3\ln(x-2)+3x+3$

v. $f(x)=3x^2+2$

vi. $f(x)=x^2-5x+6$

vii. $f(x)=|x-2|$

130) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+2f(x)=4x^3-2$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι είναι «1-1».

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ «1-1» & ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- Όταν μια συνάρτηση είναι «1-1», τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(g(x))=f(h(x))\Leftrightarrow g(x)=h(x)$
- Αν μια συνάρτηση είναι «1-1», τότε η εξίσωση $f(x)=0$, αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=\alpha$ με $\alpha\in\Re$, έχει το πολύ μια ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

131) Αν η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση : $(f\circ f)(x^2-2x)=(f\circ f)(3x-6)$.

Λύση :

$f\big(f(x^2-2x)\big)=f\big(f(3x-6)\big)\overset{f\downarrow\Rightarrow f\text{ "1–1"}}{\Longleftrightarrow} f(x^2-2x)=f(3x-6)\overset{f\text{ "1–1"}}{\Leftrightarrow} x^2-2x=3x-6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2,\eta,x=3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

132) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}-\sqrt{x}$, με $\alpha\in\Re$, για την οποία ισχύει $f(1)+f(4)=12$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha=12$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{12}{|2x-1|+1}-\dfrac{12}{|x+4|+1}=\sqrt{|2x-1|+1}-\sqrt{|x+4|+1}$.

133) Αν η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση : $(f\circ f)(x^2+4x)=(f\circ f)(x+4)$.

134) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f\big(f(x)\big)=2x+3$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3+x)-f(4-x)=0$.

135) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x)-f(x)=2x-4$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».

ii. Να βρείτε την τιμή f(2)

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f\big(4-f(x^2+x)\big)-2=0$.

136) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα : $f(3-x)+f(x+5)=0$ για κάθε $x\in\Re$ και είναι γνησίως φθίνουσα .

i. Να λυθεί η ανίσωση : $f(x^2+2x-4)<0$. ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x)=0$.

137) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+3e^{x-2}$, καθώς και συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει: $(g\circ f)(x)=8-3e^{x-2}$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδειχθεί ότι η g είναι «1-1».

ii. Να βρείτε την τιμή f(2)

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f\big(e^x-1+f(|x|-3)\big)-f(e^x+1)=0$.

138) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re^*$ για την οποία ισχύει : $(f\circ f)(x)=(x-2)f(x)$ για κάθε $x\in\Re$

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
ii. Να βρείτε την τιμή f(3)
iii. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x+1-f(|x|-1)\right)-f(x-2)=0$.

139) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $e^x=1-x^7$ ii. $\ln(x-1)=2-x$

140) Αν η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η εξίσωση :

$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$. *(Θέμα Γ 2010)*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8Α : ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f^{-1}(x)$

Έστω $f:A\to\Re$ μια συνάρτηση. Για να βρούμε την αντίστροφη της f :

1) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
2) Δείχνουμε ότι η f είναι «1-1»
3) Θέτουμε $y=f(x)$ (οπότε $f^{-1}(y)=x$) και λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x, βάζοντας κατάλληλους περιορισμούς για το y.
4) Η συναλήθευση των περιορισμών για το y μας δίνει το σύνολο τιμών της f που είναι το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.
5) Αν η λύση της εξίσωσης $y=f(x)$ ως προς x είναι $x=g(y)$, τότε έχουμε $f^{-1}(y)=g(y)$. Θέτουμε όπου y το x και έχουμε τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

141) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=2e^{3x-2}+1$ είναι $1-1$ και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Λύση :

- Έστω $x_1,x_2\in\Re$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε ότι $x_1=x_2$. Πράγματι έχουμε διαδοχικά :

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2e^{3x_1-2}+1=2e^{3x_2-2}+1\Rightarrow e^{3x_1-2}=e^{3x_2-2}\Rightarrow 3x_1-2=3x_2-2\Rightarrow 3x_1=3x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

- Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε λοιπόν: $f(x)=y\Leftrightarrow 2e^{3x-2}+1=y\Leftrightarrow 2e^{3x-2}=y-1\Leftrightarrow e^{3x-2}=\dfrac{y-1}{2}\Leftrightarrow 3x-2=\ln\dfrac{y-1}{2}$, $y>1$

Άρα : $3x=\ln\dfrac{y-1}{2}+2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{2}{3}$, $y>1$.

Επομένως, $f^{-1}(y)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{2}{3}$, $y>1$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3},\quad x>1.$$

142) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη της συνάρτησης : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

(Άσκηση 2vii) σελ. 156 σχολικού βιβλίου Α΄ Ομάδας)

Λύση :

$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, πρέπει $e^x+1\neq 0\Leftrightarrow e^x\neq -1\Leftrightarrow x\in\Re$ άρα $D_f=\Re$.

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με ότι $x_1=x_2$

Έχω $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \dfrac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\dfrac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}\Rightarrow (e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)=(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{x_1}\cdot e^{x_2}+e^{x_1}-e^{x_2}-1=e^{x_1}\cdot e^{x_2}-e^{x_1}+e^{x_2}-1\Rightarrow 2e^{x_1}=2e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η $f(x)$ είναι και «1-1» και άρα η $f(x)$ είναι και αντιστρέψιμη.

Θέτω $y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\Leftrightarrow y(e^x+1)=e^x-1\Leftrightarrow ye^x+y=e^x-1\Leftrightarrow ye^x-e^x=-y-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x-ye^x=y+1\Leftrightarrow \Leftrightarrow e^x(1-y)=y+1 \overset{\text{Για } y\neq 1 (1)}{\Longleftrightarrow} e^x=\dfrac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow$

(επίσης πρέπει : $\dfrac{y+1}{1-y}>0\Leftrightarrow (y+1)(1-y)>0\Leftrightarrow 1-y^2>0\Leftrightarrow y\in(-1,1)$ (2))

$\Leftrightarrow \ln e^x=\ln\dfrac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{y+1}{1-y}$, επίσης $x\in\Re\Leftrightarrow \ln\dfrac{y+1}{1-y}\in\Re$ για κάθε $y\in(-1,1)$.

Τελικά από (1) και (2) ισχύει ότι πρέπει $y\in(-1,1)$, άρα $D_{f^{-1}}=(-1,1)=f(\Alpha)$.

Άρα : $x=\ln\dfrac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\dfrac{1+y}{1-y}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, με $D_{f^{-1}}=(-1,1)=f(\Alpha)$

143) Να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη της συνάρτησης $f:\Re\to\Re$ όταν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για κάθε $x\in\Re$ και γνωρίζουμε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\Re$.

i. $f^3(x)+2f(x)+2x-1=0$

ii. $(f\circ f)(x)+x=f(x)$ (να βρεθεί η $f^{-1}(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$)

Λύση :

i. $f^3(x)+2f(x)+2x-1=0\Leftrightarrow f^3(x)+2f(x)=1-2x$ (1)

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1=x_2$.

Έχω : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (2)

Επίσης : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2) και (3) και έχω : $f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 1-2x_1=1-2x_2\Rightarrow -2x_1=-2x_2\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι «1-1» και άρα f αντ/μη.

1ος Τρόπος Θέτω $y=f(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} y^3+2y=1-2x\Leftrightarrow 2x=1-y^3-2y\Leftrightarrow x=\dfrac{1-y^3-2y}{2}\Leftrightarrow$

$f^{-1}(y)=\dfrac{1-y^3-2y}{2}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{1-x^3-2x}{2}$

2ος Τρόπος *(Αν γνωρίζουμε από εκφώνηση ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\Re$ ή δίνει $f(\Re)=\Re$ τότε στη δοσμένη σχέση μπορώ να θέσω όπου x το $f^{-1}(x)$)*

Η (1) ισχύει για κάθε $x\in\Re$ και έχει σύνολο τιμών το $\Re$,, άρα αν όπου x βάλω το $f^{-1}(x)$ έχω :

$$\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)^3+2f\left(f^{-1}(x)\right)=1-2f^{-1}(x)\xLeftrightarrow{f\left(f^{-1}(x)\right)=x} x^3+2x=1-2f^{-1}(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1-x^3-2x}{2}.$$

ii. $(f\circ f)(x)+x=f(x)\Leftrightarrow f\left(f(x)\right)-f(x)=-x$ (1)

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1=x_2$.

Έχω $f(x_1)=f(x_2)$ άρα θα είναι και $f(f(x_1))=f(f(x_2))\Rightarrow(f\circ f)(x_1)=(f\circ f)(x_2)$ (2)

Επίσης $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow -f(x_1)=-f(x_2)$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω :

$(f\circ f)(x_1)-f(x_1)=(f\circ f)(x_2)-f(x_2)\xRightarrow{(1)}-x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι «1-1» και άρα η f είναι και αντιστρέψιμη.

1ος Τρόπος Θέτω $f(x)=y$ αρά $(1)\Leftrightarrow f\left(f(x)\right)-f(x)=-x\overset{f(x)=y}{\Leftrightarrow} f(y)-y=-x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=y-f(y)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=y-f(y)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x-f(x)$

2ος Τρόπος Η (1) ισχύει για κάθε $x\in\Re$ και έχει σύνολο τιμών το $\Re$, άρα αν όπου x βάλω το $f^{-1}(x)$ έχω :

$f\left(f(f^{-1}(x))\right)-f\left(f^{-1}(x)\right)=-f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)-x=-f^{-1}(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x-f(x)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

144) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη καθεμιάς των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x)=\ln x-3$

ii. $f(x)=e^{x-1}-2$

iii. $f(x)=\sqrt{x-5}-2$

iv. $f(x)=x^3$ *(ΘΕΜΑ Γ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2016)*

v. $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

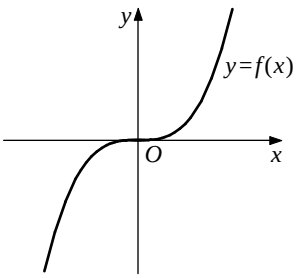
vi. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x>1$

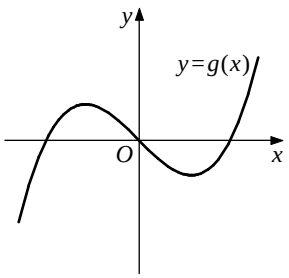
vii. $f(x)=x^2+6x+7$, αν $x\in[-3,+\infty)$.

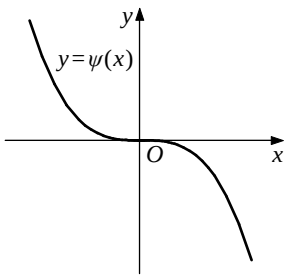
viii. $f(x)=\ln(1+e^x)-x$

ix. $f(x)=1+\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)$

145) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g,φ και ψ.







Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f,g,φ,ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

146) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη καθεμιάς των παρακάτω συναρτήσεων. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την C_f και $C_{f^{-1}}$.

i. $f(x)=2x+4$

ii. $f(x)=\ln(x-2)+1$

iii. $f(x)=e^{x+1}-2$

iv. $f(x)=\sqrt{x-3}-2$

147) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3f(x)+x-2=0$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨

ii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8Β : ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

- Αν μια συνάρτηση f δίνεται με πολλαπλό τύπο και στα επιμέρους διαστήματα είναι 1-1, τότε για να είναι 1-1 σε όλο το πεδίο ορισμού της αρκεί τα επί μέρους σύνολα τιμών να είναι ξένα μεταξύ τους.

- Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης που δίνεται με πολλαπλό τύπο, βρίσκουμε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$ για τον κάθε κλάδο της συνάρτησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

148) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, & x\le 1\\ 3-2x, & x>1\end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

149) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}\ln x-2, & x\in(0,1)\\ \sqrt{x-1}, & x\ge 1\end{cases}$. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

150) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\in(-2,0]\\ 3x-7, & x\in(0,3)\end{cases}$. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

151) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<2\\ \sqrt{x-2}+2, & x\ge 2\end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $f^{-1}(x)=x$ και $f^{-1}(x)=f(x)$

- Έστω $f:A\to\Re$ μια «1-1» συνάρτηση, οπότε ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1}(x)$. Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, προκύπτει ότι οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες :

$$\boxed{f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x}$$

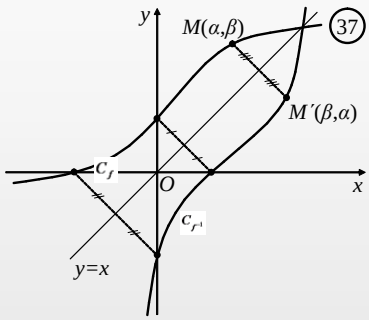
Η επίλυση των παραπάνω εξισώσεων μας επιτρέπει να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$

- Έστω $f:A\to\Re$ μια «1-1» συνάρτηση, οπότε ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

1ος Τρόπος : Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$, $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=f^{-1}(x) \\ \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x \end{array}}$$

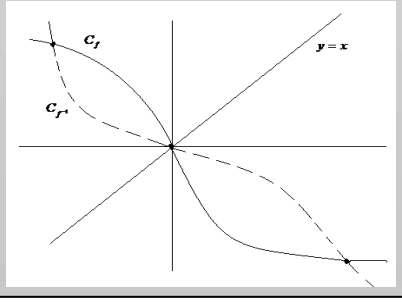
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι ίδια με τα σημεία τομής της C_f με την $y=x$ **(*απόδειξη*)** (ή της $C_{f^{-1}}$ με την $y=x$)



2ος Τρόπος : Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$, αρκεί να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ f(y)=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ f^{-1}(x)=y \end{cases}$

Με γνωστή f Με γνωστή f^{-1}

(Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ δεν είναι ισοδύναμες. Μπορεί δηλαδή να υπάρχουν σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ που δεν ανήκουν στην ευθεία y=x. Σε αυτή την περίπτωση τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος : $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f^{-1}(y) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}$ 2ος τρόπος)



(*απόδειξη*)

Έστω ότι υπάρχει ένα $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\boxed{f(x_0)=f^{-1}(x_0)}$ (στο x_0 έχω σημείο τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$) θα δείξω ότι $\boxed{f(x_0)=x_0}$ (δηλ. στο x_0 σημείο τομής της C_f και $y=x$)

Έστω $f(x_0)>x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_0))>f(x_0) \overset{f(x_0)=f^{-1}(x_0)}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x_0))>f(x_0) \Leftrightarrow x_0>f(x_0)$ άτοπο! Ομοίως καταλήγω σε άτοπο αν υποθέσω $f(x_0)<x_0$, άρα τελικά $\boxed{f(x_0)=x_0}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

152) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3-x+12$ με $f(\Re)=\Re$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x$

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}\left(f(|x|-1)+8\right)<1$

Λύση :

i. $D_f=\Re$, Έστω $x_1,x_2 \in D_f=\Re$, με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3 \Rightarrow -x_1^3>-x_2^3$ (1). Επίσης :

$x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow -x_1+12>-x_2+12$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $-x_1^3-x_1+12>-x_2^3-x_2+12 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η f είναι «1-1» και άρα η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ y=x \end{cases}$ από όπου προκύπτει $f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^3-x+12=x \Leftrightarrow x^3+2x-12=0$

1	0	2	-12		2
	2	4	12		
1	2	6	0		

Άρα $x^3+2x-12=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+6)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

ή $x^2+2x+6=0$ Αδύνατη

Άρα αφού $y=x \Leftrightarrow y=2$. Δηλ. η $C_{f^{-1}}$ με την $y=x$ τέμνονται στο σημείο Α(2,2).

iii. $f^{-1}\left(f(|x|-1)+8\right)<1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(f(|x|-1)+8\right)\right)>f(1) \Leftrightarrow f(|x|-1)+8>10 \Leftrightarrow f(|x|-1)>2 \Leftrightarrow$

$\overset{f(2)=2}{\Leftrightarrow} f(|x|-1)>f(2) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} |x|-1<2 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$ ή $x \in (-3,3)$

153) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^5+x+3$ με $f(\Re)=\Re$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}\left(f(x^2-3)-4\right)>0$

Λύση :

i. $D_f=\Re$, Έστω $x_1,x_2 \in D_f=\Re$, με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^5<x_2^5 \Rightarrow 3x_1^5<3x_2^5$ (1). Επίσης :

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1+3<x_2+3$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $3x_1^5+x_1+3<3x_2^5+x_2+3\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη.

ii.<u>1ος τρόπος</u> : Τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}$ από όπου προκύπτει $f(x)=f^{-1}(x)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x\Leftrightarrow$ *(θέλει απόδειξη)*

$\Leftrightarrow 3x^5+x+3=x\Leftrightarrow 3x^5+3=0\Leftrightarrow x^5+1=0\Leftrightarrow x^5=-1\Leftrightarrow x=-1$

Άρα αφού $y=x\Leftrightarrow y=-1$. Δηλ. η C_f με την $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο σημείο $\mathrm{A}(-1,-1)$.

<u>2ος τρόπος</u> : Τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=f(x) \\ f(y)=x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=3x^5+x+3 \\ 3y^5+y+3=x \end{cases}$. Το σύστημα που προκύπτει είναι φανερό ότι είναι πολύ δύσκολο να λυθεί. Έτσι στο σύστημα : $\begin{cases} y=f(x) \\ f(y)=x \end{cases}$ προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε : $y+f(y)=f(x)+x$ (3). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$, έτσι η (3) γίνεται : $g(x)=g(y)$ (4). Για κάθε $x_1,x_2\in D_g=\Re$ με $x_1<x_2\overset{f\uparrow\Re}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)$

$$x_1<x_2 \quad +$$
$$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Οπότε η $g\uparrow\Re\Rightarrow g$ "1−1", έτσι έχουμε : (4) $\Leftrightarrow g(x)=g(y)\Leftrightarrow x=y\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x^5+x+3=x\Leftrightarrow x=-1$. Άρα και $y=-1$. Δηλ. η C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο $\mathrm{A}(-1,-1)$.

iii. $f^{-1}\left(f(x^2-3)-4\right)>0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(f(x^2-3)-4\right)\right)>f(0)\Leftrightarrow f\left(x^2-3\right)-4>3\Leftrightarrow f\left(x^2-3\right)>7\Leftrightarrow$

$\overset{f(1)=7}{\Leftrightarrow} f\left(x^2-3\right)>f(1)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2-3>1\Leftrightarrow x^2-4>0$, έχω $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω : $x^2-4>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

154) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3$. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

<u>Λύση :</u> $D_f=\Re$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\Rightarrow -x_1^3>-x_2^3\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη. Σε αυτή την περίπτωση τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-x^3 \quad (1) \\ x=-y^3 \quad (2) \end{cases}$. Η (2) λόγω της (1) γίνεται : $x=-\left(-x^3\right)^3\Leftrightarrow x=x^9\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(x^8-1)=0\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \ \ \& (1)\Leftrightarrow y=0 \ \acute{\alpha}\rho\alpha & \mathrm{A}(0,0) \\ x=1 \ \ \& (1)\Leftrightarrow y=-1 \ \acute{\alpha}\rho\alpha & \mathrm{B}(1,-1) \\ x=-1 \ \& (1)\Leftrightarrow y=1 \ \acute{\alpha}\rho\alpha & \Gamma(-1,1) \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

155) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 2x + 14$ με $f(\Re) = \Re$.
- i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$

156) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-3) + x - 1$ με σύνολο τιμών το με $\Re$.
- i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

157) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 1$ με $f(\Re) = \Re$.
- i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

158) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x - 4$ με $f(\Re) = \Re$.
- i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}\left(x^2 - 13\right) < 2$

159) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^9 + 4x + 4$ με $f(\Re) = \Re$.
- i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να υπολογίσετε το $f^{-1}(9)$
- iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}\left(x^2 - 3x + 11\right) = 1$

160) Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, η οποία έχει σύνολο τιμών το R και ικανοποιεί τη σχέση : $2f^3(x) + f(x) = x + 16$ για κάθε $x \in \Re$.
- i. Να δείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨
- ii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$
- iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

161) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα : $(f\circ f)(x)+3f(x)=x$ για κάθε $x\in\Re$.
   i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
   ii. Αν η f έχει σύνολο τιμών το R, να εκφραστεί η f^{-1} ως συνάρτηση της f.

162) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ γνησίως μονότονη. Να αποδείξετε ότι και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

163) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ με $f(\Re)=\Re$, για τις οποίες ισχύει : $(f\circ f)(x)+(g\circ f)(x)=2x-3$.
   i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
   ii. Να γράψετε τον τύπο της f^{-1} ως συνάρτηση της f και g.

164) Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$, όπου για την f ισχύει $(f\circ f)(x)=x+f(x)$, για κάθε $x\in\Re$.
   i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
   ii. Να βρείτε το $f(0)$
   iii. Αν ισχύει $f\left(g(e^x)-2x+3\right)=0$, $x\in\Re$, να βρείτε τη συνάρτηση g.

165) Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$, για τις οποίες ισχύει $(g\circ f)(x)=2x^5+e^{f(x)}+1$, $x\in\Re$.
   i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f(1-x^3)$

166) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $(f\circ f)(x)=x$, για κάθε $x\in\Re$ και η συνάρτηση $g(x)=e^x+e^{f(x)}$, $x\in\Re$ που είναι συνάρτηση 1-1.
   i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
   ii. Να δείξετε ότι $(g\circ f)(x)=g(x)$
   iii. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

167) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f\left(f(x)\right)=x^2-x+1$, για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι :
   i. $f(1)=1$
   ii. Η συνάρτηση $g(x)=x^2-xf(x)+1$, $x\in\Re$ δεν είναι συνάρτηση 1-1.

168) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-x$.
   i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
   ii. Να εξεταστεί αν ορίζεται η f^{-1}.
   iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=1-x$
   iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x)\le 1-x$

169) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα : $(f\circ f)(x)=-x$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδειχθεί ότι :
- i. η f είναι «1-1»
- ii. $f^{-1}=-f$
- iii. η f δεν είναι γνησίως μονότονη
- iv. η f είναι περιττή
- v. f(0)=0

170) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $(f\circ f)(x)-f(x)=-x+2$ για κάθε $x\in\Re$.
- i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη
- ii. Να βρείτε την τιμή f(2)
- iii. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα
- iv. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(4-f(|x|-1)\right)=2$.

171)
- i. Έστω $f,g:\Re\to\Re$ δυο συναρτήσεις, όπου η $g\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f^3(x)+e^{f(x)}-e^{-x}-1=0$ για κάθε $x\in\Re$. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

172) Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με σύνολο τιμών το $(1,+\infty)$ και για την οποία ισχύει : $f^2(x)+1=2f(x)+e^{2x}$ για κάθε $x\in\Re$.
- i. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$
- ii. Να δείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨
- iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

173) Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με σύνολο τιμών το $\Re$ για την οποία ισχύει : $f^5(x)+2f(x)-x=0$ για κάθε $x\in\Re$.
- i. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
- ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f^{-1}(x)=0$
- iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

174) Αν $f,g:\Re\to\Re$ και ισχύει $(f\circ g)(x)=x$ (1) για κάθε $x\in\Re$,
- i. να δείξετε ότι η g είναι «1-1»
- ii. να λύσετε την εξίσωση $g(x+1)=g(x^2+1)$.

175) Αν $f,g:\Re\to\Re$ τέτοιες ώστε η $(f\circ g)(x)$ να είναι «1-1».
- i. Να δείξετε ότι και η g είναι «1-1»
- ii. να λύσετε την εξίσωση $g(2x^2+1)=g(x^2+3x-1)$

176) Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+2f(x)=3-x$ για κάθε $x\in\Re$
- i. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=3$
- iii. Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\Re$
- iv. Αν η f είναι γνησίως μονότονη να βρεθεί το είδος μονοτονίας της.
- v. Να λυθεί η ανίσωση : $f(e^{x-1}+\ln x)>f(2-x)$

177) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2+(x-2)^2$ με $x \geq 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x. ($2^{Ο}$ 2006)

178) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x-1+e^x$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $e^x + x = 1$

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x-1} < 2 - x$

179) Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + 2$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(2-e^{x-1}) = 3$

iv. Να λύσετε την ανίσωση : $f(3-e^{x-1}) < e+2$

180) Έστω η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ αντιστρέψιμη για την οποία ισχύει $f(2) = 5$. Να βρείτε το $f^{-1}(5)$ και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$.

181) Έστω η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(-2,3) και B(2005,5)

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(2007+f^{-1}(x^2-1)\right) = 5$

iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f^{-1}(x-3) > 2005$

182) Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f:\Re \to \Re$ διέρχεται από τα σημεία A(3,4) και B(6,-2).

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(-3+f^{-1}(|x|-5)\right) = 4$

iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f^{-1}\left(f(x^2+2)+6\right) < 3$

183) Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f με πεδίο ορισμού του R και σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει : $f(e^x+2)+f(x+3) = x$ για κάθε $x \in \Re$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x .

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(6-f^{-1}(x^2-4)\right) > 0$.

184) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $(f \circ f)(x) = 3x-2$ για κάθε $x \in \Re$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»

ii. Να βρείτε την τιμή f(1)

iii. Να εκφράσετε την f^{-1} με τη βοήθεια της f

iv. Να αποδείξετε ότι $f(3x-2) = 3f(x)-2$

185) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να λύσετε την εξίσωση $e^{\eta\mu x}+\eta\mu x=e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$

iii. Να αποδείξετε ότι $e^e+e<e^\pi+\pi$

iv. Να λύσετε την εξίσωση $(f\circ f)(x)=0$

186) Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει : $(f\circ f)(x)=\ln x$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(2010)$

iii. Να αποδείξετε ότι $f(\ln x)=\ln(f(x))$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$.

iv. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=e^{f(x)}$

187) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu+1}+x-1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

iii. Να υπολογίσετε το $f^{-1}(-1)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

188) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει : $e^{f(x)}+2f^3(x)-x+1=0$, για κάθε $x\in\Re$. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=e^x+2x^3+1$ είναι το $\Re$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}=g$.

189) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(\Re)=\Re$, για την οποία ισχύει $f(f(x))+x=0$, για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η f είναι περιττή ii. Η f αντιστρέφεται iii. Η f^{-1} είναι περιττή iv. $f^{-1}=-f$

190) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει : $(f\circ f)(x)=x-1$, $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η f είναι 1-1, έχει σύνολο τιμών το $\Re$ και αντιστρέφεται.

ii. $f^{-1}(x)=1+f(x)$, για κάθε $x\in\Re$

iii. Η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

iv. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι η C_f είναι κάτω από την ευθεία y=x.

191) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x+x-1$

i. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_g με τον άξονα x΄x .

iii. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $(g\circ f)(x)=x-1$

1) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»
2) Να βρείτε το f(1)
3) Να βρείτε τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

192) **Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, η οποία έχει σύνολο τιμών το R και ικανοποιεί τη σχέση : $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα τη x=0, τότε να αποδείξετε ότι :

iii. Η f είναι αντιστρέψιμη
iv. Ισχύει $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$.

193) **Έστω $f,g:(0,+\infty)\to\Re$ συναρτήσεις τέτοιες, ώστε να ισχύει $xg(x)=f(x)$ για κάθε $x>0$. Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι : $f(x+y)<f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$.

194) Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ και η συνάρτηση $g:\Re\to\Re$ ώστε για κάθε $x\in\Re$ να ισχύει η σχέση : $f\big(f(x)\big)=2g(x)-x$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.
ii. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης : $h(x)=f(x)-g(x)$.
iii. Έστω $x_0\in\Re$ με $f(x_0)=x_0$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των C_f,C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.
iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f\big(f(x+x_0-2)\big)+x+x_0=2f\big(x+x_0-2\big)+2$
v. Να λύσετε την ανίσωση : $f\big(f(\ln x+x_0+1)\big)+\ln x+1<x_0$ *(study4exams)*

195) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

i. Να ορίσετε την συνάρτηση $f\circ g$.
ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
iii. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f\circ f\circ g$. *(study4exams)*

196) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει :

- $(f\circ f)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in\Re$.
- $f(2)=5$

i. Να βρείτε το $f(5)$.
ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.
iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f\big(f^{-1}(2x^2+7x)-1\big)=2$ *(study4exams)*

197) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$.
iv. Να λυθεί η εξίσωση : $f\big(2e^{x-1}\big)-f(3-x)=0$. *(study4exams)*

198) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

iii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\Re$, να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

iv. Να δείξετε ότι : $f(x)+f(2016x)<f(2015x)+f(2017x)$ για κάθε $x>0$.

v. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)+f(x^3)=f(x^2)+f(x^8)$, $x>0$.

199) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+e^x-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $e^x=1-x$.

iii. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\Re\to\Re$ η οποία για κάθε $x\in\Re$ ικανοποιεί τη σχέση : $g(x)+e^{g(x)}=2x+1$. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$.

v. Να λύσετε την ανίσωση $(g\circ f)(x)>0$. *(E.M.E. 2008)*

200) **Δίνεται 1-1 συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει : $f(x)-(f\circ g^{-1})(x)=8$ και $3(f\circ g)(x)+2(f\circ g^{-1})(x)=10x-7$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε τις συναρτήσεις f , g.

Έστω συνάρτηση $h:\Re\to\Re$ τέτοια, ώστε : $h(g(f(x)))=e^{-2x}-4x-2$ για κάθε $x\in\Re$.

ii. Να βρείτε την h(x)

iii. Να αποδείξετε ότι η h(x) είναι αντιστρέψιμη

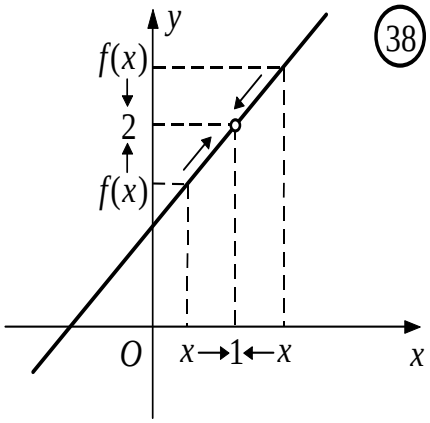
iv. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{e}{e^{x^2}}-\frac{e}{e^{3x}}>2x^2-6x$.

1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$

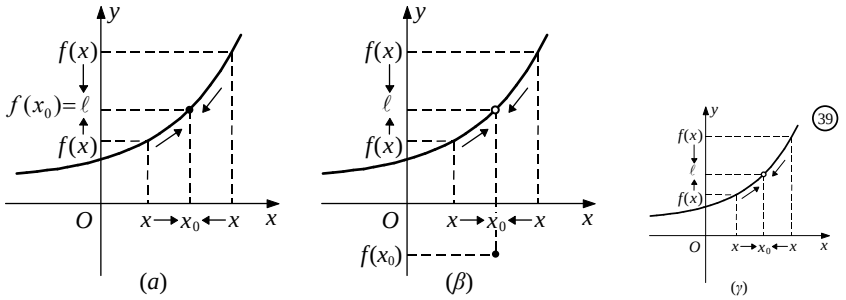
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=\Re-\{1\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1, \qquad x\neq 1 .$$



Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y=x+1$ με εξαίρεση το σημείο Α(1,2) (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:
"Καθώς το *x*, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές $f(x)$ είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα $x\neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1".
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ και διαβάζουμε "το όριο της $f(x)$, όταν το *x* τείνει στο 1, είναι 2".
Γενικά : Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το *x* προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ και διαβάζουμε "το όριο της $f(x)$, όταν το *x* τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή "το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ".



ΣΧΟΛΙΟ
Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι :

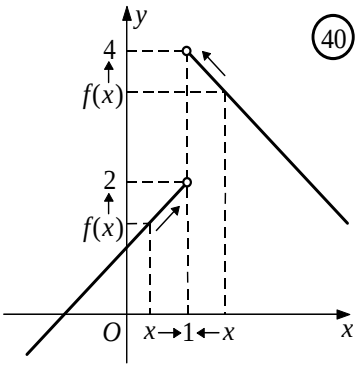
— Για να αναζητήσουμε το όριο της *f* στο x_0, πρέπει η *f* να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η *f* να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής :

$$(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta) \qquad \text{ή} \qquad (\alpha, x_0) \qquad \text{ή} \qquad (x_0,\beta).$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της *f* στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

• Έστω, τώρα, η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases}$,
της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



40

Παρατηρούμε ότι :

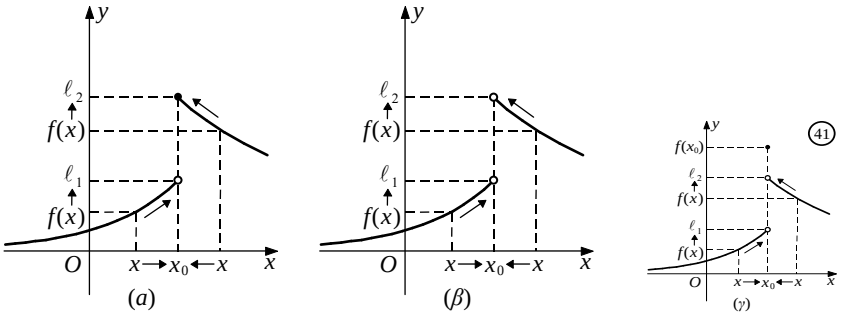
— Όταν το *x* προσεγγίζει το 1 από αριστερά $(x<1)$, τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$.

— Όταν το *x* προσεγγίζει το 1 από δεξιά $(x>1)$, τότε οι τιμές της *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$.

Γενικά:

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το *x* προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές $(x<x_0)$, τότε γράφουμε : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$
και διαβάζουμε : "το όριο της $f(x)$, όταν το *x* τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1".

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το *x* προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές $(x>x_0)$, τότε γράφουμε : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell_2$ και διαβάζουμε : "το όριο της $f(x)$, όταν το *x* τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2".



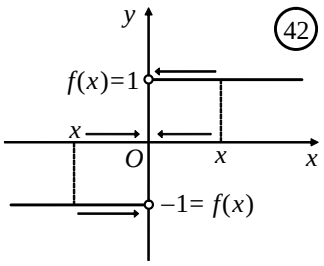
41

Τους αριθμούς $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell, \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ (Σχ. 42) δεν έχει όριο στο $x_0=0$, αφού:



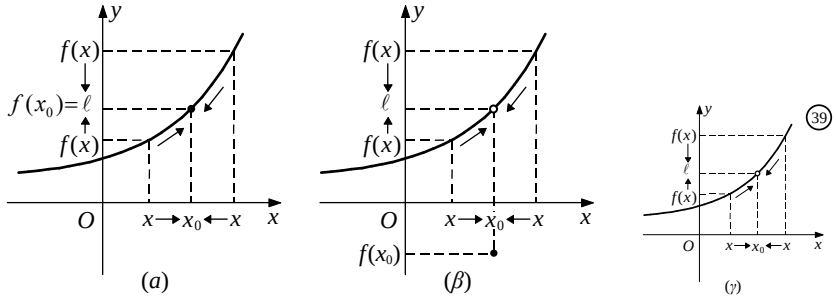
— για $x<0$ είναι $f(x)=\dfrac{-x}{x}=-1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$, ενώ

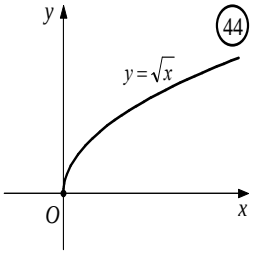
— για $x>0$ είναι $f(x)=\dfrac{x}{x}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, και έτσι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

12. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_0 και τα πλευρικά όρια της f στο x_0;

Απάντηση :

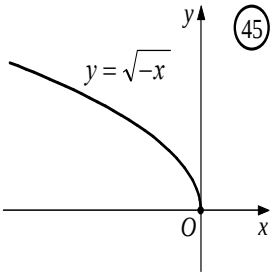
Ισχύει ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$





• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0,β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α,x_0), τότε ορίζουμε : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ (Σχ. 44)



• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α,x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0,β), τότε ορίζουμε : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{-x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0$ (Σχ. 45)

Παρατηρήσεις :

α) Ισχύει ότι :

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

(β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

β) Τους αριθμούς $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τους λέμε πλευρικά όρια της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 αριστερό όριο της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 δεξιό όριο της f στο x_0.

γ) — Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α,x_0) ή (x_0,β).

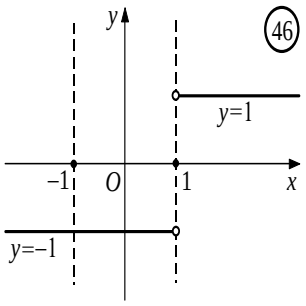
— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό .

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

ε) Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α,x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η *f*.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0=0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x)=\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$. Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.



στ) Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση *f* έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα *P* θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

i) Η *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα *P*.

ii) Η *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α,x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα *P*, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0,β).

iii) Η *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0,β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα *P*, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α,x_0).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ *είναι θετική κοντά στο* $x_0=0$*, αφού ορίζεται στο σύνολο* $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *και είναι θετική σε αυτό.*

1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

13. Να γράψετε τις ιδιότητες του ορίου στο x_0.

Απάντηση :

Για το όριο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

α) Θεώρημα 1ο *(πρόσημο συναρτήσεων και όρια)*

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Παρατήρηση :

- Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και είναι $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$
- Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και είναι $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq 0$

β) Θεώρημα 2ο *(διάταξη και όρια)*

Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Παρατήρηση : Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0.

γ) Θεώρημα 3ο *(πράξεις συναρτήσεων και όρια)*

Αν υπάρχουν στο $\Re$ τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in R$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0.

Παρατηρήσεις :

- Οι ιδιότητες 1. και 3. ισχύουν και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.
- Τα αντίστροφα των ιδιοτήτων 1., 2., 3., 4., 5. Δεν ισχύουν πάντα. Για παράδειγμα μπορεί να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ και να μην υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0.

  Για παράδειγμα : $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-1, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$. Προφανώς τα όρια των f και g στο 0 δεν υπάρχουν, όμως

  - $(f+g)(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}=0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 0}0=0$
  - $\lim\limits_{x\to 0}(0\cdot f(x))=\lim\limits_{x\to 0}0=0$
  - $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1$
  - $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0}1=1$

δ) Είναι : $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu}=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^{\nu}$, $\nu\in\mathrm{N}^*$ για παράδειγμα $\lim\limits_{x\to x_0}x^{\nu}=x_0^{\nu}$

ε) Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathrm{R}$. Είναι :

$\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu}x^{\nu})+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=$$

$$=\alpha_{\nu}\lim_{x\to x_0}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=\alpha_{\nu}x_0^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0).$$ Άρα : $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

στ) Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0\in\mathrm{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Θα είναι τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, όπου $Q(x_0)\neq 0$

ζ)

Κριτήριο παρεμβολής (2016 Β΄)

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν

- $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l\in\Re$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$

η) Ισχύει ότι *(τριγωνομετρικά όρια)*

- $|\eta\mu x|\le|x|$, για κάθε $x\in R$.Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1}$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0}$

14. Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο x_0 .

Απάντηση :

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο σημείο x_0 ,δηλαδή το $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u=g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$.

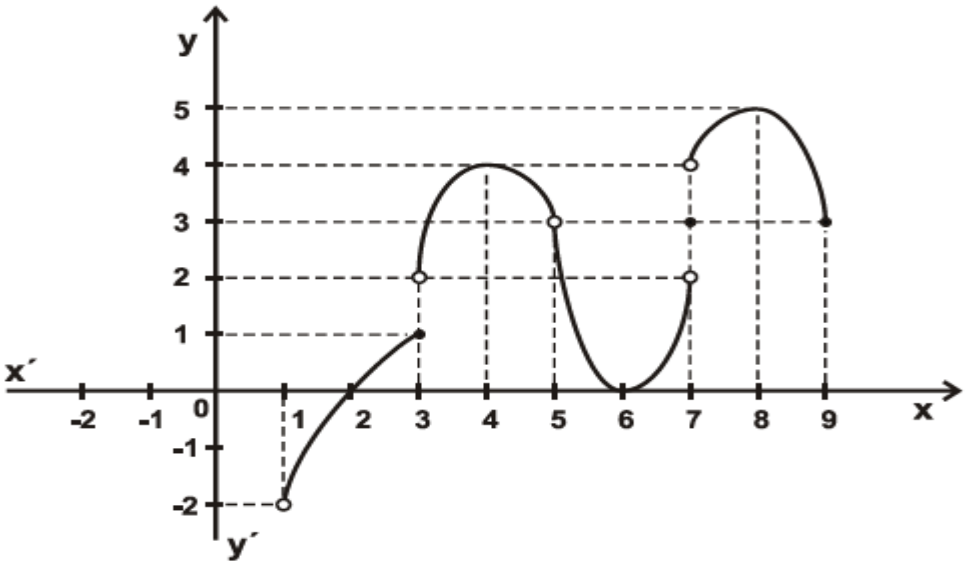
Αν $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{u\to u_0}f(u).$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΟ ΑΠΟ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. *(Θέμα Β 2016Β)*



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και τις τιμές της f :

α) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$, $f(3)$ γ) $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 7}f(x)$, $f(7)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9}f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση :

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι : $A_f = (1,5) \cup (5,9]$, ενώ το σύνολο τιμών της f είναι : $f(A_f) = (-2,5]$.

ii. α) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$.

β) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$ άρα $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ επομένως το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ δεν υπάρχει. Επίσης $f(3) = 1$.

γ) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 5} f(x) = 3$.

δ) $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 7^+} f(x) = 4$ άρα $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 7^+} f(x)$ επομένως το $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$ δεν υπάρχει. Επίσης $f(7) = 3$.

ε) $\lim\limits_{x \to 9} f(x) = \lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, όταν:

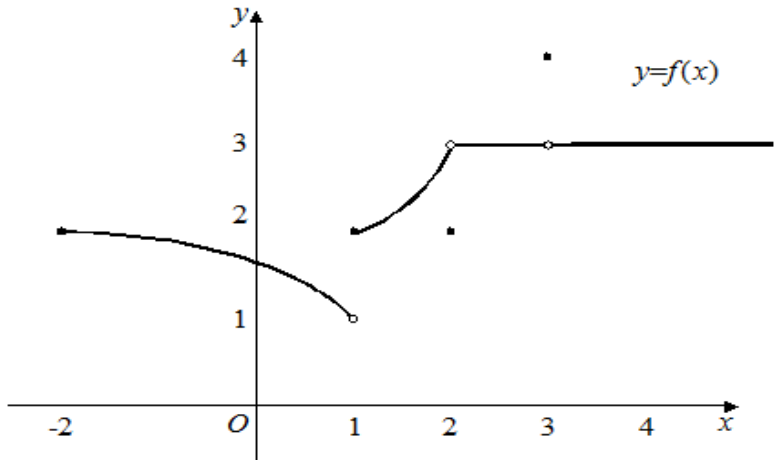
i. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, $x_0 = 2$

ii. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

iv. $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x_0 = 0$.

3) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να υπολογίσουμε ένα όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αρχικά θέτω όπου x το x_0

Περίπτωση 1η Αν το αποτέλεσμα είναι αριθμός $l \in \Re$ τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Περίπτωση 2η Αν μετά την αντικατάσταση προκύψει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, τότε **παραγοντοποιώ** αριθμητή και παρανομαστή με σκοπό να απλοποιηθεί ο παράγοντας της μορφής $x - x_0$

Περίπτωση 3η Αν έχουμε όριο άρρητης συνάρτησης (που περιέχει ρίζες) και προκύπτει η απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του όρου ή των όρων που περιέχει ρίζα

Περίπτωση 4η Αν προκύψει $\frac{\alpha}{0} \pm \frac{\beta}{0}$ τότε κάνω ομώνυμα τα κλάσματα και προκύπτει όριο της μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε και εργάζομαι όπως παραπάνω.

ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ :

- **Κοινός παράγοντας :** Βγάζουμε κοινό παράγοντα από όλους τους όρους ή κατά ομάδες.
- **Ταυτότητες :** Συνήθως χρησιμοποιούμε τις Ταυτότητες

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$$
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

- **Τριώνυμο :**

  Αν Δ>0 τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$

  Αν Δ=0 τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)^2$

  Αν Δ<0 τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

- **Σχήμα Horner :** Δόκιμη κάνω πρώτα με το x_0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 1η

4) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 1}(x^5 - 6x + 2013)$ ii. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}$ iii. $\lim\limits_{x\to -2}(x^3 - 7x^2 + 28)$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 1}(x^5-6x+2013)=1^5-6\cdot 1+2013=1-6+2013=2008$

ii. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}=\sqrt{4^2+9}=5$

iii. $\lim\limits_{x\to -2}(x^3-7x^2+28)=(-2)^3-7\cdot(-2)^2+28=-8-28+28=-8$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 2η

5) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$ `

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2\right)^2-4^2}{x^3-2^3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x^2+4)}{(x^2+2x+4)}=\dfrac{32}{12}=\dfrac{8}{3}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-1)}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-3^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3-3)[(x+3)^2+3(x+3)+3^2]}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2+6x+9+3x+9+9)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+6x+9+3x+9+9}{1}=27$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 3η

6) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

iv. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{(9-x)(3+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{(9-x)(3+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{6}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2+5-9)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

iv. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{1}{12}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 4η

7) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1})$

Λύση : $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1})=\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{3}{(x-1)(x^2+x+1)})=$

$=\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}-\dfrac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+2x+2-3x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

8) Έστω για τις συναρτήσεις f,g ισχύουν : $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=-2$. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 2}\left(3f(x)+|g(x)|+f(x)\cdot g^2(x)\right)$.

9) Έστω μια συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ αν:

i. $g(x)=3(f(x))^2-5$

ii. $g(x)=\dfrac{|2f(x)-11|}{(f(x))^2+1}$

iii. $g(x)=(f(x)+2)(f(x)-3)$.

10) Να εξετάσετε αν είναι καλώς ορισμένα τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-1}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-2}$

iii. $\lim\limits_{x\to -1}(\ln x)$

11) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}(2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x)$

ii. $\lim\limits_{x\to e}[\ln(x^2-ex+1)]$

iii. $\lim\limits_{x\to \pi}(\varepsilon\phi x+\sigma\upsilon\nu^2 x)$

12) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x-1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$

iv. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}$

v. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x}$

vi. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^3-9x}$

13) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+4x-2}{x^2-1}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x+5}{2x^2-x-1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-10x+8}{x^2+x-6}$

iv. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x+6}{x^2-5x+6}$

v. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x+5}{(2x-1)^3-1}$

vi. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

vii. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

viii. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

14)Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

iii. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

iv. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x-3}$

v. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{1-\sqrt{x-2}}$

15)Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

ii. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{3x+\sqrt{x^2+8}}$

iii. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}+2x-3}{6x^2-x-1}$

iv. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{2-2x}}{\sqrt{3x+7}-2\sqrt{x+2}}$

16)Να λυθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}{x^3-4x}$ <u>υποδ.</u> όταν έχω $\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}$, τότε η συζυγής παράσταση είναι $\sqrt[3]{f(x)}^2+\sqrt[3]{f(x)}\cdot\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}^2$ δηλ.
$(\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)})\cdot(\sqrt[3]{f(x)}^2+\sqrt[3]{f(x)}\cdot\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}^2)=\sqrt[3]{f(x)}^3-\sqrt[3]{g(x)}^3=f(x)-g(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt[3]{9-x}-1}{x^2-1}$ <u>υποδ.</u> όταν έχω παράσταση της μορφής $\sqrt[\kappa]{f(x)}\pm\sqrt[\lambda]{g(x)}\pm\lambda$, τότε διασπάμε τον αριθμό λ σε δυο αριθμούς (Οι αριθμοί αυτοί είναι αντίθετοι των τιμών που θα προκύψουν από τις $\sqrt[\kappa]{f(x)}$ και $\sqrt[\lambda]{g(x)}$, αν θέσουμε σ' αυτές όπου x το x_0). Στη συνέχεια χωρίζουμε το κλάσμα σε 2, όπου κάθε κλάσμα περιέχει μια

ρίζα και ένα αριθμό και τέλος υπολογίζουμε το όριο κάθε κλάσματος πολλαπλασιάζοντας με την κατάλληλη συζυγή παράσταση.

iv. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{8-x}-5}{x^2-1}$

v. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}-5}{x^2-25}$

vi. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}-\sqrt{3}-2}{x-1}$

vii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ <u>υποδ.</u> όταν έχω στο ίδιο όριο $\sqrt[\kappa]{f(x)},\sqrt[\lambda]{f(x)}$ (δηλ. ριζικά διαφορετικών τάξεων με το ίδιο υποριζο) τότε θέτω $\sqrt[\mu]{f(x)}=y$ όπου μ είναι το Ε.Κ.Π. των κ,λ.

viii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$

ix. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}+3\sqrt[3]{x-2}-4}{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}$

x. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt[3]{x^2-x+6}}{x-2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

2Α) Το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι ίσα, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l \quad l\in\Re$ αν και μόνο αν : $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l$. Αν τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης είναι διαφορετικά, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f στο x_0.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

17)(Άσκηση 5 σελ. 175 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρεθεί (αν υπάρχει), το όριο της $f(x)$ στο x_0 αν :

i. $f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 1\\ 5x, x>1\end{cases}$ και $x_0=1$ ii. $f(x)=\begin{cases}-2x, x<-1\\ x^2+1, x\ge -1\end{cases}$ και $x_0=-1$

<u>Λύση :</u>

i. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}5x=5$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ και άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+1)=2$

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-2x)=2$. Άρα $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=2$, άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ και μάλιστα $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

18) Αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda^2+8$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=5\lambda+2$, να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0 .

19) Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, με $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda^2-6$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\Re$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

20)Να βρείτε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-9}{x-5}, x\le 1\\ \sqrt{x^2+x+2}, x>1\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x^3-9x}, x>3\\ \dfrac{x^2-3x}{x^3-9x}, 0<x<3\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

iii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}, -1<x<\sqrt{2}\\ x-1, \sqrt{2}<x<2\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

iv. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, x<2\\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}, x>2\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

2Β) ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

21)(Άσκηση 9 σελ. 175 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+\beta, x\le 3\\ \alpha x+3\beta, x>3\end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$.

Λύση :

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=10$

Έχω : $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=10\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}(\alpha x+3\beta)=10\Leftrightarrow 3\alpha+3\beta=10$ (1)

Επίσης : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=10\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}(2\alpha x+\beta)=10\Leftrightarrow 6\alpha+\beta=10$ (2)

Τις (1) και (2) $\begin{cases}3\alpha+3\beta=10\cdot(-2)\\6\alpha+\beta=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6\alpha-6\beta=-20\\6\alpha+\beta=10\end{cases}$ με πρόσθεση κατά μέλη έχω : $-5\beta=-10\Leftrightarrow\beta=2$ και αντικαθιστώντας στην 1η $3\alpha+6=10\Leftrightarrow\alpha=\frac{4}{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

22)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}ax^3-x+a-1, x\geq 2\\(a+1)x-1, x<2\end{cases}$ όπου α πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το α ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

23)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x^2+\alpha x+\beta, x\leq 1\\3x+1, 1<x<2\\x^2-\beta x+\alpha-2, x\geq 2\end{cases}$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα α,β ώστε να υπάρχουν συγχρόνως τα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΡΦΗ $\left(\frac{0}{0}\right)$ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΟΡΙΟΥ (ΟΡΙΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ)

3Α) Σε αυτή τη μεθοδολογία βρίσκει εφαρμογή το Θεώρημα 1ο που λέει ότι :

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

Έστω ότι το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ οδηγεί σε μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και περιέχει όρους της μορφής $|g(x)|$.

- Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ είναι θετικό ή αρνητικό, τότε θεωρούμε αντίστοιχα g(x)>0 ή g(x)<0 κοντά στο x_0 και απαλλασσόμαστε από την παρουσία των απολύτων.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$=0, τότε με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων βρίσκουμε το πρόσημο της g(x) και εργαζόμαστε με πλευρικά όρια.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

24)Να υπολογιστούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2|x-1|-3|x-5|+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|+1}-1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|+x-1}{\left|x^2-x\right|+x-1}$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2|x-1|-3|x-5|+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}$ Έχω :

$\lim\limits_{x\to 3}(x-1)=2>0$ άρα το $x-1>0$ όταν το $x\to 3$

$\lim\limits_{x\to 3}(x-5)=-2<0$ άρα το $x-5<0$ όταν το $x\to 3$

Άρα : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2|x-1|-3|x-5|+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-1)+3(x-5)+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-2+3x-15+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(5x-15)(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{x-1-5+x}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{2x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{2(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{2}=5\sqrt{2}$

ii. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|+1}-1}$ Έχω :

$\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$ άρα :

x	$-\infty$	4	
$x-4$	-	0	+

- Αν $x-4>0\Leftrightarrow x>4$ δηλ. όταν $x\to 4^+$ τότε :

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-4+1}-1}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}{x-4}=2$

- Αν $x-4<0\Leftrightarrow x<4$ δηλ. όταν $x\to 4^-$ τότε :

$\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{-(x-4)}{\sqrt{-(x-4)+1}-1}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{4-x}{\sqrt{4-x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{(4-x)(\sqrt{5-x}+1)}{(\sqrt{5-x}-1)(\sqrt{5-x}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{(4-x)(\sqrt{5-x}+1)}{4-x}=2$. Άρα αφού τα πλευρικά όρια είναι ισα

τότε : $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|+1}-1}=2$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|+x-1}{\left|x^2-x\right|+x-1}$ Έχω :

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+2)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x)=0$

Έχω $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1,ή,x=2$ επίσης $x^2-x=0\Leftrightarrow x=0,ή,x=1$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+		+	0	-	0	+
x^2-x	+	0	-	1	+		+

- Αν $x>1$ δηλ. όταν $x\to 1^+$ τότε :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+3x-2+x-1}{x^2-x+x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+4x-3}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=1$$

- Αν $x<1$ δηλ. όταν $x\to 1^-$ τότε :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2+x-1}{-(x^2-x)+x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+1}{-x^2+x+x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+1}{-x^2+2x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2}{-(x-1)^2}=-1$$

Άρα αφού τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

25)Να υπολογιστούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+x+2|+|x+3|-8}{|x^2+x|-x-1}$

ii. $\lim_{x\to 2}\frac{|x-3|-|x-1|}{x^2-2x}$

26)Να υπολογιστούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+x^2-4}{|x-5|-3}$

ii. $\lim_{x\to 3}\frac{|x^2-9|+|x-3|}{|x+2|-5}$

iii. $\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|+x^2-x}{|x^2+2x-3|-x+1}$

3Β) Στην κατηγορία ασκήσεων που θα δούμε, βρίσκει εφαρμογή το Θεώρημα 2ο σελ. 166 που λέει ότι :

- Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. (Σχόλιο : το παραπάνω Θεώρημα ισχύει και όταν $f(x < g(x)$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ισχύει $xf(x)+3f(x)\le x^2+x-6$ για κάθε $x\in\Re$ και το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

Λύση :

Το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός άρα :

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3} f(x) = l \in \Re$$

Για κάθε $x\in\Re$ ισχύει : $xf(x)+3f(x)\le x^2+x-6 \Leftrightarrow f(x)(x+3)\le x^2+x-6$

- Αν $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$ τότε $f(x)(x+3)\le x^2+x-6 \Leftrightarrow f(x)\le \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$

  Άρα $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) \le \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} \Leftrightarrow l \le \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x+3} \Leftrightarrow l\le -5$ (1)

- Αν $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$ τότε $f(x)(x+3)\le x^2+x-6 \Leftrightarrow f(x)\ge \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$

  Άρα $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) \ge \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} \Leftrightarrow l \ge \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x+3} \Leftrightarrow l\ge -5$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $l=-5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -3} f(x) = -5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

28)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ισχύει $xf(x)-2f(x)\le x^2-5x+6$ για κάθε $x\in\Re$ και το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

29)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ισχύει : $xf(x)-f(x)\le x^2+2x-3$, για κάθε $x\in\Re$ και το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

4Α) Όταν γνωρίζουμε το όριο μιας παράστασης που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και θέλουμε να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής : θέτουμε με $g(x)$ την παράσταση του ορίου που γνωρίζουμε, λύνουμε ως προς $f(x)$ και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

30)(Άσκηση 4 σελ. 176 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αν :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\left(4f(x)+2-4x\right)=-10$ ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$

Λύση :

i. Έστω $4f(x)+2-4x=g(x)$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-10$

Θα λύσω ως προς $f(x)$: $4f(x)+2-4x=g(x)\Leftrightarrow 4f(x)=g(x)+4x-2\Leftrightarrow$

$f(x)=\dfrac{g(x)+4x-2}{4}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)+4x-2}{4}=\dfrac{-10+4-2}{4}=-2$

ii. Έστω $\dfrac{f(x)}{x-1}=h(x)$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=1$

Θα λύσω ως προς $f(x)$: $\dfrac{f(x)}{x-1}=h(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f(x)=(x-1)h(x)$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)h(x)\right)=(1-1)\cdot 1=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

31)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-x^2+x-5\right)=7$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

32)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)f(x)-x^2+1}{1-\sqrt{x}}=10$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

33)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2}{x^2-5x+6}=5$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2x}{x-2}$.

34)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+x^2-x+2\right)=3$, να δείξετε ότι

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-3}{f^2(x)-1}=2$.

35)Αν $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)f(x)=5$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{x^2-3x+2}=4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)g(x)\right)$.

36)Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=5$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf^2(x)-2x+2}{x^2-1}=-1$.

37)Αν $f:\Re\to\Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 2}[xf(x)+x^2-8]=6$, να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-5f(x)}{\sqrt{f(x)-1}-2}$

38)Αν $f:\Re\to\Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+x-5}{x^2-4}=2$, να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}$ iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-3}{x^2-6x+8}$

39)Αν $f:\Re\to\Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=4$, να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-xf(x)+2x}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}-2\right)}$

4Β) ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

40)Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+\beta}{x-1}=4$

41)Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+2x}=3$

42)Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2-(\beta+3)x+2a+\beta}{x^2-4x+3}=2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h . Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Σε περιπτώσεις που η εύρεση του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν ανάγεται σε καμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις (π,χ, δεν γνωρίζουμε τον τύπο της ή έχουμε ανισωτικές σχέσεις) τότε χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής. Ιδιαίτερα η ύπαρξη διπλής ανισότητας της μορφής $A(x) \le B(x) \le \Gamma(x)$ είναι χαρακτηριστική για εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής. Επίσης η ανισότητα της μορφής : $|A(x)| \le B(x)$ γράφεται : $-B(x) \le A(x) \le B(x)$ οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε κριτήριο παρεμβολής

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

43)Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $4x^2+6x-2 \le f(x)-3 \le 5x^2+2x+2$, $x_0 = 2$

ii. $2x^3-8x \le (x-2)f(x) \le 3x^3-6x^2+4x-8$, $x_0 = 2$

Λύση :

i. $4x^2+6x-2 \le f(x)-3 \le 5x^2+2x+2 \Leftrightarrow 4x^2+6x+1 \le f(x) \le 5x^2+2x+5$

Είναι : $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2+6x+1) = 29$ και $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2+2x+5) = 29$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής (κ.π.) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 29$

ii. $2x^3-8x \le (x-2)f(x) \le 3x^3-6x^2+4x-8$

Για να απομονώσω στη μέση την $f(x)$ και να εφαρμόσω κ.π., πρέπει να διαιρέσω κάθε μέλος με το $x-2$. Διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ δηλ. όταν $x \to 2^+$ τότε :

$$2x^3-8x \le (x-2)f(x) \le 3x^3-6x^2+4x-8 \Leftrightarrow \frac{2x^3-8x}{x-2} \le f(x) \le \frac{3x^3-6x^2+4x-8}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^3-8x}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2x(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2x(x-2)(x+2)}{x-2} = 16$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^3-6x^2+4x-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(3x^2+4)}{x-2} = 16$$ Άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 16$ (1)

- Αν $x-2<0 \Leftrightarrow x<2$ δηλ. όταν $x \to 2^-$ τότε :

$$2x^3-8x \le (x-2)f(x) \le 3x^3-6x^2+4x-8 \Leftrightarrow \frac{2x^3-8x}{x-2} \ge f(x) \ge \frac{3x^3-6x^2+4x-8}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^3-6x^2+4x-8}{x-2} \le f(x) \le \frac{2x^3-8x}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^3-6x^2+4x-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(3x^2+4)}{x-2} = 16$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^3-8x}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{2x(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{2x(x-2)(x+2)}{x-2} = 16$$

Άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 16$ (2). Από (1) και (2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 16$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

44)Αν $|f(x)-3x+5|\le x^2$ για κάθε $x\neq 0$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

45)Αν $2-|x-1|\le f(x)-2x\le x^2-2x+3$ για κάθε $x\in\Re$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

46)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $x-x^2\le f(x)\le x$. Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

47)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει :
$4x^2-13\le (x-2)f(x)+3\le x^4-4x^2+3$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

48)Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ αν : $2x^2+7x+2\le\dfrac{f(x)-8}{f(x)+2}\le 3x^2+5x+3$, $x_0=1$

49)Αν για κάθε $x>0$ ισχύει ότι : $4\sqrt{x}\le f(x)\le x+4$ να βρεθούν :

i. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-8}{x-4}$ iii. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-8}{\sqrt{x+5}-3}$

iv. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f^2(x)-64}{x-4}$ v. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{f(x)+1}-3}{x-4}$ vi. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|f(x)-5|-3}{x^2-5x+4}$

50)Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)+1=x$, για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

51)Δίνονται 2 συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}[f^2(x)+g^2(x)]=0$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

52)Δίνονται 2 συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύουν : $\lim\limits_{x\to x_0}[5f(x)+2g(x)]=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=0$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ – ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

6Α (ΒΑΣΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ)

Για την εύρεση τριγωνομετρικών ορίων χρησιμοποιούμε τα εξής βασικά όρια :

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}=1(\alpha\neq 0)$ ή ακόμα $\lim\limits_{\phi(x)\to 0}\dfrac{\eta\mu\phi(x)}{\phi(x)}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha x-1}{\alpha x}=0\ (\alpha\neq 0)$ ή ακόμα $\lim\limits_{\phi(x)\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\phi(x)-1}{\phi(x)}=0$

Η τεχνική εύρεσης είναι ίδια με αυτή που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

53)(Άσκηση 6 σελ. 175 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε τα όρια

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\phi x}{x}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\phi 4x}{\eta\mu 2x}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\eta\mu x}{x}\right)$ v. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^3+x}\right)$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}$ θέτω $u=3x$, όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$ άρα

$3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\overset{u=3x}{=\!=}3\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\phi x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\phi 4x}{\eta\mu 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu 4x}{\sigma\upsilon\nu 4x}}{\eta\mu 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\frac{\eta\mu 4x}{4x}}{2x\frac{\eta\mu 2x}{2x}}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}=$

$=\dfrac{4x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu 4x}{4x}}{\frac{\eta\mu 2x}{2x}}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}==2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu 4x}{4x}}{\frac{\eta\mu 2x}{2x}}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}\overset{*}{=}2\cdot\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{1}=2$

* θέτω $u=4x$, όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x}{4x}\overset{u=4x}{=\!=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

θέτω $v=2x$, όταν $x\to 0$ τότε $v\to 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}\overset{v=2x}{=\!=}\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{\eta\mu v}{v}=1$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\eta\mu x}{x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1-1=0$

v. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^3+x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x(x^2+1)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{(\sqrt{5x+4}-2)(\sqrt{5x+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{5x+4-4}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{5x}\cdot(\sqrt{5x+4}+2)\overset{*}{=}1\cdot\sqrt{4}+2=4$

* θέτω $u=5x$, όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{5x}\overset{u=5x}{=\!=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

54)Να υπολογιστούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^2-x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x-2\eta\mu x}{x^2+x}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^2-x}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\phi x}{x}$

v. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2+x}$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{\sqrt{x+1}-1}$

vii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sqrt{x^2+x+4}-2}$

55)**Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(3x)-f(-x)\eta\mu 2x}{3x^2-\eta\mu^2 x}$

56)**Αν $f:\Re\to\Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$, να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(2x)+x\eta\mu 2x}{x^2+\eta\mu^2 x+xf(-x)}$.

57)**Αν $f:\Re\to\Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(5x)-\eta\mu x}{6x-\eta\mu 3x}$

58)**Αν $f:\Re\to\Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu 3x}{x^2+x}=2$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)+\sqrt{x+1}-1}{\eta\mu 5x}$.

59)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(x+4)=f(x)$ για κάθε $x\in\Re$, και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-3}{x-3}=5$. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-3}{\sqrt{x+5}-2}$.

60)**Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu 5x}{x^2+2x}=4$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\sigma\upsilon\nu x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu 3x+x-x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

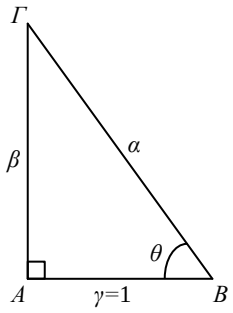
61)**Δίνεται άρτια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ με $\lambda\in\Re$ να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)+\eta\mu f(x)}{x}$

62)**Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{x+\eta\mu x}=3$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu 3x}{x^2-\eta\mu x}$

63)** Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\gamma=1$. Να υπολογίσετε τα όρια :



i. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)$ ii. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2)$ iii. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha}$

6Β (ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΕΠΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ =0 και για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $\alpha \le g(x) \le \beta$ τότε $\lim\limits_{x\to \chi_0}\left(f(x)g(x)\right)$=0

Η απόδειξη προκύπτει από το κριτήριο παρεμβολής. Πράγματι, είναι :

$-\mathrm{M}|f(x)| \le f(x)g(x) \le \mathrm{M}|f(x)|$ Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει το ζητούμενο.

Συμπέρασμα : (μηδενική συνάρτηση)x(φραγμένη συνάρτηση)=μηδενική συνάρτηση

Χαρακτηριστικό της περίπτωσης «μηδενική επί φραγμένη» είναι η ύπαρξη στο όριο : ($\eta\mu\frac{1}{x}, \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ και γενικά $\eta\mu\frac{1}{g(x)}, \sigma\upsilon\nu\frac{1}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

64)Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right)$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

Έχω $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |x|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x|$, άρα $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x| \overset{|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a}{\Longleftrightarrow} -|x| \le x\eta\mu\frac{1}{x} \le |x|$

Εφαρμόζω κ.π. και $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right)$

Παρατηρώ ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+2x\right)=0$ (μηδενική) και $-1\le\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\le 1$ (φραγμένη)

Άρα έχω όριο της μορφής «μηδενική επί φραγμένη»

$\left|(x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right| = \left|x^3+2x\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right| \le \left|x^3+2x\right|$, άρα

$\left|(x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right| \le \left|x^3+2x\right| \Leftrightarrow -\left|x^3+2x\right| \le (x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2} \le \left|x^3+2x\right|$

Εφαρμόζω κ.π. και $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^3+2x\right|\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left|x^3+2x\right|=0$

άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right)=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

65)Να αποδείξετε ότι :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^5\eta\mu\frac{2}{x}\right)=0$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right)=0$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=0$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+1+x^3\eta\mu\frac{3}{x}\right)=1$ v. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^2+x)\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$

66)Να υπολογιστούν τα όρια

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x-x}{x}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

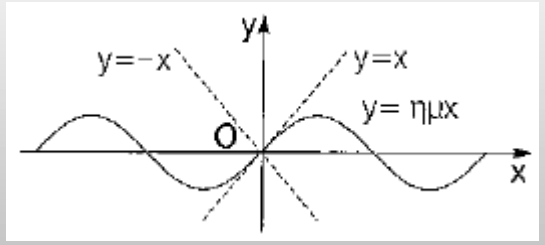
v. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu^2 x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}}{x}\right)$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\eta\mu x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ $|\eta\mu x|\le|x|$

Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ (1), για κάθε $x\in\Re$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.
Από την ανισότητα (1) προκύπτει ότι :

- $|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$
- $\eta\mu x<x\Leftrightarrow x>0$
- $\eta\mu x>x\Leftrightarrow x<0$
- $\eta\mu x<-x\Leftrightarrow x<0$
- $\eta\mu x>-x\Leftrightarrow x>0$



Για $x\neq 0$ $(1)\Rightarrow\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|<1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

67)Να βρείτε τα πεδία ορισμού : i. $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x-x}$ ii. $f(x)=\ln(x-\eta\mu x)$ iii. $f(x)=\sqrt{\eta\mu x+x}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

68)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu 5x}{x}=7$. Να βρείτε τα όρια : i. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)+f(x)\eta\mu x+\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{xf(x)+\eta\mu^2 2x}$

69)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $2x\eta\mu x\le f(x)\le x^2+\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x}$

70)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lambda$ με $\lambda\in\Re$ και $\eta\mu x\cdot f(x)\le 2x+\eta\mu 3x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

71)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lambda$ με $\lambda\in\Re$ και $x^3\cdot f(x)\le\eta\mu^2 3x\cdot\eta\mu x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)+\eta\mu 5x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu 5x}{x^2+\eta\mu^2 3x}$

72)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\left(f(x)-1\right)}{f^2(x)-1}$

73)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ με $\lambda\in\Re$ και $f^3(x)-x\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x=4f^2(x)\cdot\eta\mu x-xf(x)\cdot\eta\mu 7x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)+xf(x)}{x\eta\mu x+\eta\mu^2 x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+1-\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x+1}\cdot\eta\mu x-\eta\mu x}$

74)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $x^2f^2(x)-2xf(x)\cdot\eta\mu x\le x^4-\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x+\varepsilon\phi x}{x^2+3x-\eta\mu 5x}$

75)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\eta\mu 2x-x^2\le f(x)\le x^2+\eta\mu 2x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-\eta\mu 5x}{f(x)+1-\sigma\upsilon\nu x}$

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$

15 .Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_0 .

Απάντηση :

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$.

ε) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

στ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

ζ)Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$. η) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$.

θ) i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in N^*$

ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in N$ και $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\nu \in N$.

16 . Να γράψετε τα Θεωρήματα του άπειρου ορίου στο x_0

Απάντηση :

Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in R$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in R$	$\alpha \in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in R$,										
το όριο της f είναι:	α>0	α<0	α>0	α<0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της f·g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Πράξεις στο σύνολο $\overline{\Re} = \Re \cup \{-\infty, +\infty\}$

(Με βάση τις ιδιότητες των απείρων ορίων, επεκτείνουμε τις πράξεις του $\Re$ στο σύνολο $\overline{\Re} = \Re \cup \{-\infty, +\infty\}$*)*

- $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$ και $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$
- $(+\infty)+\alpha = +\infty$ και $(-\infty)+\alpha = -\infty$, για κάθε $\alpha \in \Re$
- $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$ και $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$ και $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$
- $\alpha \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \alpha\nu\ \alpha > 0 \\ -\infty, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$ και $\alpha \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \alpha\nu\ \alpha > 0 \\ +\infty, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$
- $\dfrac{\alpha}{\pm\infty} = 0$, για κάθε $\alpha \in \Re$.

Σχόλιο

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι :
$\mathbf{(+\infty)+(-\infty)}$ και $\mathbf{0\cdot(\pm\infty)}$.

Επειδή $f - g = f + (-g)$ και $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι : $\mathbf{(+\infty)+(-\infty)}$, $\mathbf{0\cdot(\pm\infty)}$, $\mathbf{(+\infty)-(+\infty)}$, $\mathbf{(-\infty)-(-\infty)}$, $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Για παράδειγμα:

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty \text{ και } \lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$. ***(2018 Β΄)***

Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε να δώσουμε και για τις άλλες μορφές.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\alpha}{0}$

Με το συμβολισμό $\frac{\alpha}{0}$ εννοούμε ότι έχουμε όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\alpha\in\Re$. Για να υπολογίσουμε ένα τέτοιο όριο εργαζόμαστε ως εξής :

1) παραγοντοποιώ τον παρανομαστή και απομονώνω τον παράγοντα που τον μηδενίζει δηλ. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\cdot\text{"}\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\varepsilon\upsilon\mu\alpha\text{"}\right)$ (1)

2) υπολογίζω το όριο του περισσεύματος

3) υπολογίζω το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\right)$

α) αν $(x-x_0)^\nu>0$ κοντά στο x_0 τότε : $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\right)=+\infty$

β) αν $(x-x_0)^\nu<0$ κοντά στο x_0 τότε : $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\right)=-\infty$

γ) αν $(x-x_0)^\nu$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, κάνουμε χρήση πλευρικών ορίων και διαπιστώνουμε ότι το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\right)$ δεν υπάρχει, αφού τα πλευρικά θα είναι το ένα $+\infty$ και το άλλο $-\infty$.

4) Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ από την (1) εκτελώντας τις πράξεις.

Συμπέρασμα : όριο της μορφής $\frac{\alpha}{0}$ είναι είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν υπάρχει.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 σελ. 180 σχολικό βιβλίο)
Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{|x-1|}$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3x+2}{(x-2)^2}$

Λύση

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-1|}\overset{\frac{2}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right)$ έχω :

$\lim\limits_{x\to 1}|x-1|=0$ και $|x-1|>0$ κοντά στο $x_0=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+6)=2$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right)=+\infty\cdot 2=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3x+2}{(x-2)^2}\overset{\frac{-4}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right)$ έχω :

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$ και $(x-2)^2>0$ κοντά στο $x_0=2$, άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2}(-3x+2)=-4$. Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right)=+\infty(-4)=-\infty$

2) (ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 σελ. 181 σχολικό βιβλίο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

Λύση : $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}\overset{\frac{3}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right)$

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ αλλά το $x-2$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=2$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $x-2>0\Leftrightarrow x>2$ τότε $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-x+1)=3$

  άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right)=+\infty\cdot 3=+\infty$

- Αν $x-2<0\Leftrightarrow x<2$ τότε $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x+1)=3$

  άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right)=-\infty\cdot 3=-\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα αφού $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$

  Άρα το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ δεν υπάρχει.

3) Να βρείτε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+2}{16-x^2}$

Λύση :

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+2}{16-x^2}\overset{\frac{6}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+2}{(4-x)(4+x)}=\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{4-x}\cdot\dfrac{x+2}{4+x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 4}(4-x)=0$ αλλά το $4-x$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=4$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $4-x>0\Leftrightarrow x<4$ τότε $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{4-x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x+2}{4+x}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

άρα $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\frac{1}{4-x}\cdot\frac{x+2}{4+x}\right)=+\infty\cdot\frac{3}{4}=+\infty$

- Αν $4-x<0\Leftrightarrow x>4$ τότε $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{1}{4-x}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x+2}{4+x}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

άρα $\lim\limits_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{4-x}\cdot\frac{x+2}{4+x}\right)=-\infty\cdot\frac{3}{4}=-\infty$

Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα άρα το $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+2}{16-x^2}$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x}{(x-4)^4}$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-1}{(x-2)^2}$ (Απ. $+\infty$)

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^2\cdot(x+3)}$ (Απ. $+\infty$)

iv. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x|-3}{|x-2|}$ (Απ. $-\infty$)

v. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+4}{x^2+6x+9}$ (Απ. $+\infty$)

vi. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x-1}{x^3-2x^2+x}$

vii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-3}{x\eta\mu x}$

viii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2}{|\eta\mu x|-|x|}$

ix. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3x-1}{x-\eta\mu x}$

x. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-3}{x^2-\eta\mu^2 x}$

5) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-3x^2+3x-1}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (Απ. $+\infty$)

6) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\frac{1-x}{x^2-2x-3}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$. (Απ. Δεν υπάρχει)

7) Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν:

i. $f(x)=\frac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_0=0$ ii. $f(x)=\frac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_0=1$

iii. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}$, $x_0=0$.

8) Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0, όταν :

i. $f(x)=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^2}$, $x_0=1$ ii. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x|x|}$, $x_0=0$

iii. $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x_0=0$.

9) Να βρεθούν αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια.

i. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x-3}$ (Απ. Δεν υπάρχει)

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-7}{x^2-4}$ (Απ. Δεν υπάρχει)

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ (Απ. Δεν υπάρχει)

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

v. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2x-3}{\sigma\upsilon\nu x}$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{\eta\mu x}$

vii. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x+10}{x^2+2x-3}\right)$

10) Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$.

11) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ δεν έχει όριο στο $\dfrac{\pi}{2}$.

ii. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ δεν έχει όριο στο 0.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\alpha}{0}$

Ζητείται πλήρης διερεύνηση για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων. Όπως και στα μη παραμετρικά παραγοντοποιώ τον παρανομαστή και απομονώνω τον παράγοντα που τον μηδενίζει δηλ. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^{\nu}}\cdot"\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\varepsilon\upsilon\mu\alpha"\right)$ και υπολογίζω το όριο για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12) Να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x-\lambda}{x^3+2x^2+x}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$. (Διερεύνηση)

Λύση :

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x-\lambda}{x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{2x-\lambda}{x(x^2+2x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{2x-\lambda}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2x-\lambda}{x}\right)$$

Έχω $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x-\lambda}{x}=\frac{-2-\lambda}{-1}=\lambda+2$, πρέπει να ξέρω το πρόσημο του «περισσεύματος» καθώς θα επηρεάσει το τελικό όριο, γι' αυτό διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $\lambda+2>0\Leftrightarrow\lambda>-2$, $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2x-\lambda}{x}\right)=+\infty$
- Αν $\lambda+2<0\Leftrightarrow\lambda<-2$, $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2x-\lambda}{x}\right)=-\infty$
- Αν $\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda=-2$, τότε $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+2}{x^3+2x^2+x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(x+1)}{x(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2}{x(x+1)}\overset{\frac{2}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)$

  $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2}{x}=-2$

  $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$ αλλά το $x+1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=-1$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :

  - Αν $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$ τότε $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)=+\infty\cdot(-2)=-\infty$
  - Αν $x+1<0\Leftrightarrow x<-1$ τότε $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)=-\infty\cdot(-2)=+\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ισα άρα το $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)$ δεν υπάρχει.

13) (Άσκηση 3 σελ. 182 σχολικό βιβλίο Β΄ Ομάδας)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$. Να βρείτε το $\lambda\in\Re$ ώστε να υπάρχει στο $\Re$ το $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

Λύση :

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x+1}\right)$$

Έχω $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x+1}=\dfrac{\lambda-2}{2}$, πρέπει να ξέρω το πρόσημο του «περισσεύματος» καθώς θα επηρεάσει το τελικό όριο, για αυτό διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $\dfrac{\lambda-2}{2}>0\Leftrightarrow\lambda-2>0\Leftrightarrow\lambda>2$, τότε : $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ αλλά το $x-1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=1$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :
  - Αν $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$
  - Αν $x-1<0\Leftrightarrow x<1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ισα άρα το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ δεν υπάρχει.

- Αν $\dfrac{\lambda-2}{2}<0\Leftrightarrow\lambda-2<0\Leftrightarrow\lambda<2$, τότε : $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ αλλά το $x-1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=1$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :
  - Αν $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-\infty$
  - Αν $x-1<0\Leftrightarrow x<1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ισα άρα το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ δεν υπάρχει.

- Αν $\dfrac{\lambda-2}{2}=0\Leftrightarrow\lambda=2$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{3}{2}\in\Re$

Άρα το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ υπάρχει στο $\Re$ μόνο αν $\lambda=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

14) Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+\lambda}{|x-2|}$, $\lambda\in\Re$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lambda x^2+x-3}{x-1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lambda x^2+\mu x-3}{x-1}$

15) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+\alpha x+1}=+\infty$, να βρεθεί το α .

16) Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-5}{x^2+\alpha x-\alpha+3}=-\infty$, να βρεθεί το α .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Όταν γνωρίζουμε το όριο μιας παράστασης που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και θέλουμε να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής : θέτουμε με $g(x)$ την παράσταση του ορίου που γνωρίζουμε, λύνουμε ως προς $f(x)$ και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17) (Άσκηση 4 σελ. 182 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{f(x)}=+\infty$ ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x+2}=-\infty$ iii. $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)(3x^2-2)]=+\infty$

Λύση :

i. Έστω $g(x)=\dfrac{x-4}{f(x)}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$, έχω $g(x)=\dfrac{x-4}{f(x)}\Leftrightarrow g(x)f(x)=x-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x-4}{g(x)}$ ($g(x)\neq 0$ κοντά στο $x_0=1$ αφού $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$)

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{g(x)}=\dfrac{-3}{+\infty}=0$

ii. Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x+2}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=-\infty$, έχω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x+2}\Leftrightarrow f(x)=h(x)(x+2)$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[h(x)(x+2)]=-\infty\cdot 3=-\infty$

iii. Έστω $\phi(x)=f(x)(3x^2-2)$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}\phi(x)=+\infty$

$\phi(x)=f(x)(3x^2-2)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\phi(x)}{3x^2-2}$ ($3x^2-2\neq 0$ κοντά στο $x_0=1$)

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\phi(x)}{3x^2-2}=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

18) Έστω συνάρτηση $f(x)$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}=-\infty$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. (Απ. $-\infty$)

19) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 f(x)\right]=-3$ να βρείτε τα όρια : i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{f(x)}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{f(x)\eta\mu^2 x}$

20) **Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x^2-2x+1)f(x)\right]=-3$ να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (Απ. $-\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f^2(x)-3f(x)-5}{f^2(x)+f(x)-4}$ (Απ. 2)

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^3(x)-2f(x)+3}{f^2(x)-3f(x)-1}$ (Απ. $-\infty$) iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)+4}{f^3(x)-2f^2(x)+1}$ (Απ. 0)

21) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re.$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x^2-6x+9)f(x)\right]=5$ να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6f^2(x)-7f(x)+8}{3f^2(x)+f(x)-1}$

22) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re.$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f(x)}{\sqrt{x+4}-2}=-3$ να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^3(x)-5f(x)+3}{f^3(x)+2f^2(x)-7}$

23) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re.$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-5}{f(x)-2}=+\infty$ να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu\left(f(x)-2\right)}{f^2(x)-4}$ iii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-4}{f^2(x)-4f(x)+4}$

24) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re.$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=+\infty$ να βρείτε αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|3-xf(x)|-|2f(x)-3|}$. (**υποδ.** αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0) (Απ. 0)

25) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re.$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$ να βρείτε αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)+x|-|x-4|}{f^2(x)+3f(x)-5}$. (Απ. 0)

26) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re.$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2f(x)}{x-3}=+\infty$.Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (Απ. $-\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to 1}\left[f^2(x)+3f(x)\right]$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f^2(x)+5f(x)|+f^2(x)-2}{f^2(x)-3f(x)+1}$ (Απ. 2) iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{f(x)}$ (Απ. 0) v. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : $f(x) \le g(x)$

➢ Αν ισχύει $f(x) \ge g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Αποδ.

Είναι $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, άρα κοντά στο x_0 ισχύει ότι $g(x) > 0$. Από τη σχέση $f(x) \ge g(x)$ προκύπτει ότι ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Έτσι κοντά στο x_0 έχουμε :

$f(x) \ge g(x) \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{f(x)} \le \dfrac{1}{g(x)}$. Όμως $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Άρα είναι : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ και $\dfrac{1}{f(x)} > 0$ κοντά στο x_0.

➢ Αν ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Αποδ. (Όμοια με παραπάνω)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$. για την οποία ισχύει $(x^2 - 4x + 4) f(x) \le x - 5$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Λύση :

Για x κοντά στο 2 έχουμε :

$(x^2 - 4x + 4) f(x) \le x - 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 f(x) \le x - 5 \Leftrightarrow f(x) \le \dfrac{x-5}{(x-2)^2}$ (1)

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-5}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \left[(x-5) \cdot \dfrac{1}{(x-2)^2} \right] = -3 \cdot (+\infty) = -\infty$ καθώς :

- $\lim\limits_{x \to 2} (x-5) = -3 < 0$
- $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)^2 = 0$ και $(x-2)^2 > 0$ κοντά στο 2,

άρα από (1) προκύπτει ότι : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28) Αν $f : (0,+\infty) \to \Re$ με $f(x) \le -\dfrac{1}{x}$, $x > 0$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

29) Αν $f : (0,+\infty) \to \Re$ με $f(x) \ge \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

30) Αν $x^2 f(x) + 1 \le 0$, για κάθε $x \ne 0$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

31) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re.$ για την οποία ισχύει $(x^2+6x+9)f(x)\geq x+5$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$.

32) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re.$ για την οποία ισχύει $x^2 f(x)\geq x+3$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to0}\left[(f(x)-2010)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$ (Απ. 1)

33) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re.$ για την οποία ισχύει $x^4 f(x)\leq(x-2)\cdot\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

iii. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ (Απ. $-\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{f^2(x)-3f(x)+7}$ (Απ. 0)

1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

17. Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο .

Απάντηση :

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\nu \in N^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\nu \in N^*$.

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$, με $\alpha_{\nu} \neq 0$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_{\nu}x^{\nu})$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\alpha_{\nu}x^{\nu})$

γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_{\kappa}x^{\kappa} + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_{\nu} \neq 0$, $\beta_{\kappa} \neq 0$ ισχύει:

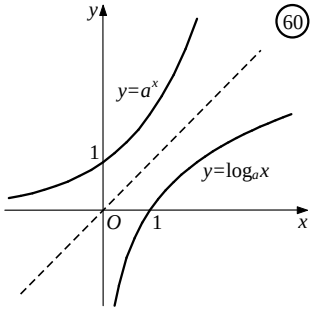
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}\right)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}\right)$

δ) Για το όριο εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης ισχύει ότι

- Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$

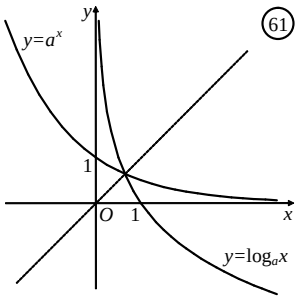
$\lim\limits_{x\to0} \log_{\alpha} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$



- Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$

$\lim\limits_{x\to0} \log_{\alpha} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$



Σχόλια

- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.
- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.
- Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή

18. Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Απάντηση :

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathrm{N}^* \to \Re$.

19. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \Re$;

Απάντηση :

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \Re$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathrm{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ – ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Κρατάμε τους μεγιστοβάθμιους όρους.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (Άσκηση 1 σελ. 186 σχ. βιβλίο Α΄Ομάδας)
Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-10x^3 + 2x - 5\right)$ ii. $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(5x^3 - 2x + 1\right)$ iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^3 + 8}$

iv. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$ v. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + x - 1}{4x^3 - x^2 + 2}$ vi. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2}{x^{10} + x + 3}$

vii. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{5}{x + 2}\right)$ viii. $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{x^2 + 5}{x} - \dfrac{x^2 + 3}{x + 2}\right)$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-10x^3 + 2x - 5\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(-10x^3\right) = -\infty$

ii. $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(5x^3 - 2x + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(5x^3\right) = -\infty$

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^3 + 8} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^3} = 0$

iv. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

v. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + x - 1}{4x^3 - x^2 + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{4x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

vi. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2}{x^{10} + x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^{10}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^9} = 0$

vii. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{5}{x + 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x(x + 2)}{(x^2 + 1)(x + 2)} - \dfrac{5(x^2 + 1)}{(x + 2)(x^2 + 1)}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x^2 + 2x - 5x^2 - 5}{(x^2 + 1)(x + 2)}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{-4x^2 + 2x - 5}{x^3 + 2x^2 + x + 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{-4x^2}{x^3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{-4}{x}\right) = 0$

viii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x}-\dfrac{x^2+3}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(x^2+5)(x+2)-x(x^2+3)}{x(x+2)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+2x^2+5x+10-x^3-3x}{x^2+2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+2x+10}{x^2+2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right)=2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+2x^2+x-5\right)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+x^2-3x+2\right)$ (Απ. $-\infty$)

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^5+3x^2-5x+10\right)$ (Απ. $+\infty$) iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\eta\mu\theta-2)x^5+3x^2-2019\right)$

3) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{x^2+2x+5}$ (Απ. 3)

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+x-3}{x^6+x^4+x^2+1}$ (Απ. 0)

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{-2x^3+x-1}$ (Απ. $+\infty$)

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^6+x^5+3x+2}{x^4-5x+6}$ (Απ. $-\infty$)

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{2x+1}{x^3+1}\right)$ (Απ. 0)

vi. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}-x+1\right)$ (Απ. 3)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α) Για να υπολογίσουμε όρια που περιέχουν παραστάσεις της μορφής : $\sqrt[\nu]{f(x)}\pm g(x)$ ή $\sqrt[\nu]{f(x)}\pm\sqrt[\kappa]{g(x)}$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) Σε κάθε υπόριζο βγάζουμε κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δύναμη του x
2) Χωρίζουμε τις ρίζες και εμφανίζεται : $\sqrt[\nu]{x^\nu}=|x|=\begin{cases}x, x\to+\infty\\-x, x\to-\infty\end{cases}$
3) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x.

(Αν κατά τη διαδικασία εμφανιστεί απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(\pm\infty)$, τότε στο αρχικό όριο πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

4) (Ασκήσεις 2,3 σελ. 187 σχ. βιβλίο Α΄Ομάδας)
Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

viii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}\overset{\substack{x>0\\ \text{αφού}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)}\overset{\substack{x<0\\ \text{αφού}\\ x\to-\infty}}{=\!=\!=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\sqrt{\left(1+\dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)}=+\infty$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}\overset{\substack{x>0\\ \text{αφού}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=1$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}\overset{\substack{x<0\\ \text{αφού}\\ x\to-\infty}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=-1$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+|x|\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}\right)\overset{\substack{x>0\\ \text{αφού}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}\right)=+\infty$

vi. Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι'αυτό πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}==\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}\overset{\substack{x>0\\ \text{αφού}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

vii. Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι'αυτό πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}==\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}\overset{\substack{x<0\\ \text{αφού}\\ x\to-\infty}}{=\!=\!=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

viii. Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι'αυτό πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{[(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+3}][(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x+3}]}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)^2-\sqrt{4x^2-4x+3}^2}{2x-1+\sqrt{x^2\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4x+1-4x^2+4x-3}{2x-1+|x|\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}\overset{\substack{x>0\\ \text{αφού}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{2x-1+x\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x\left(2-\frac{1}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

5) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+x\right)$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-3x\right)$ (Απ. $-\infty$)

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+5}+x+5\right)$ (Απ. $+\infty$)

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x+7\right)$ (Απ. $+\infty$)

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+7}-x+2\right)$ (Απ. 3)

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+10}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)$ (Απ. 2)

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x)$, $\alpha\neq\beta$

viii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$

ix. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

x. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$

6) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και για κάθε x>0 ισχύει :
$1+\sqrt{x^2+2x+3}\geq f(x)+x\geq\sqrt{x^2+4x+6}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (Απ. 2)

7) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{9x^2+1}$, να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$

8) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+7}+x+1}{x+2}$ (Απ. 2)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+7}+\sqrt{x^2+x+7}}{x+3}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+3}+3x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+4x+3}$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+5x}{\sqrt{x^2+2x+3}+2x}$

2Β) ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΜΕ ΠΟΛΛΑ ΡΙΖΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+8x}+\sqrt{4x^2-1}-6x\right)$

Λύση :

Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι'αυτό χωρίζω κατάλληλα την παράσταση και πολλαπλασιάζω αριθμητές και παρανομαστές με τη συζυγή παράσταση:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+8x}+\sqrt{4x^2-1}-6x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+8x}-4x+\sqrt{4x^2-1}-2x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+8x}-4x\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{16x^2+8x}-4x)(\sqrt{16x^2+8x}+4x)}{\sqrt{16x^2+8x}+4x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{4x^2-1}-2x)(\sqrt{4x^2-1}+2x)}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{|x|\sqrt{16+\frac{8}{x}}+4x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+2x} \overset{\substack{x>0\\ \text{αφού}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x\sqrt{16+\frac{8}{x}}+4x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+2x} \overset{\substack{x>0\\ \text{αφού}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x\left(\sqrt{16+\frac{8}{x}}+4\right)} + \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+2\right)} = \frac{8}{4+4}+0=1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

10)Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{9x^2+3x+7}-5x\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-2\sqrt{x^2+1}-x\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{9x^2+x+1}-\sqrt{16x^2+1}\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-5}+\sqrt{4x^2-x}-\sqrt{9x^2+1}\right)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Αν μέσα στο όριο υπάρχει $|g(x)|$ τότε υπολογίζω ξεχωριστά το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$. Αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty$ τότε και $g(x)>0$ όταν $x\to\pm\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=-\infty$ τότε και $g(x)<0$ όταν $x\to\pm\infty$. Οπότε απαλλάσσομαι από τα απόλυτα και υπολογίζω κανονικά το όριο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11)(Άσκηση 4 σελ. 187 σχ. βιβλίο Β΄Ομάδας)
Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$, άρα $x^2-5x>0$ όταν $x\to-\infty$ άρα,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$, άρα $x^2-x>0$ όταν $\to+\infty$ άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^2-x|}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

12)Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{|x^2-5x+13|-7x^2}{|x^3-3x^2+5|-x^3}$ (Απ. 2) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{|x^4+6x^3-5x+6|-x^4}{|4x^3+2x^2-3x|+x^3}$ (Απ. - 2)

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$

13)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{|2x^3+3x^2-3x+5|-|x^2-7x-13|}{|x^3+x-5|+|7-x|}$. Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (Απ. 2) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (Απ. 2)

14)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{|x-1|-|x-2|}{x-3}$. Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (Απ. 0) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (Απ. 0)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15)Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\mu-2)x^5-3x+2\right)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$ iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)$

Λύση :

i. Έστω $f(x)=(\mu-2)x^5-3x+2$, $x\in\Re$.

- Αν $\mu\neq2$ είναι : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\mu-2)x^5=\left((\mu-2)\cdot(+\infty)\right)=\begin{cases}+\infty, & \alpha\nu\ \ \mu>2\\ -\infty, & \alpha\nu\ \ \mu<2\end{cases}$
- Αν $\mu=2$ είναι : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$

Τελικά : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}+\infty, & \alpha\nu\ \ \mu>2\\ -\infty, & \alpha\nu\ \ \mu\leq2\end{cases}$

ii. Έστω $f(x)=\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$.

- Αν $\mu\neq 1$ και $\mu\neq 0$, τότε :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x}{\mu}=\frac{\mu-1}{\mu}\cdot\lim_{x\to+\infty}x,$$

επειδή : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, θα διακρίνω περιπτώσεις για το $\dfrac{\mu-1}{\mu}$

- Αν $\dfrac{\mu-1}{\mu}>0\Leftrightarrow \mu(\mu-1)>0\Leftrightarrow \mu\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

Γιατί : έχω $\mu(\mu-1)=0\Leftrightarrow \mu=0,\acute{\eta},\mu=1$

μ	- ∞	0		1	+ ∞
$\mu(\mu-1)$	+	0	-	0	+

Επειδή θέλω $\mu(\mu-1)>0\Leftrightarrow \mu\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\dfrac{\mu-1}{\mu}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

- Αν $\dfrac{\mu-1}{\mu}<0\Leftrightarrow \mu(\mu-1)<0\Leftrightarrow \mu\in(0,1)$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\dfrac{\mu-1}{\mu}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x=-\infty$

- Αν $\mu=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

- Αν $\mu=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3+2x^2+3}{-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{-5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{5}=+\infty$

iii. Έστω $f(x)=\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right),\ x\in\Re$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x\right)\overset{\substack{x<0\\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\\ x\to-\infty}}{=\!=\!=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right)\right),\ \text{επειδή}\ \lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty,$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right)=1-\mu$$ θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το $1-\mu$

- Αν $1-\mu>0\Leftrightarrow \mu<1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\mu\right)\right)=+\infty$

- Αν $1-\mu<0\Leftrightarrow \mu>1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\mu\right)\right)=-\infty$

- Αν $1-\mu=0 \Leftrightarrow \mu=1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=\;=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}\overset{\substack{x<0\\ \text{αφού}\\ x\to-\infty}}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

16)Να υπολογίσετε τα όρια για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α, β .

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((a-1)x^3+x^2+1\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((a^2-4)x^4+\beta x^3+x+2\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a-2)x^2+x-3}{(a+2)x^3+ax^2+x+5}$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+5}+ax-3\right)$

v. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+ax+2\right)$

17) Αν $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x+\beta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

18)Αν $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}+ax+\beta$, να βρεθούν οι α,β ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=11$ *(απ.* $\alpha=-1,\ \beta=10$*)*

19)Αν $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{9x^2+x}-\alpha x-\beta$, να βρεθούν οι α,β ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\dfrac{5}{6}$

20)Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\Re$, ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x\right)$, να υπάρχει στο $\Re$.

21)Αν $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}-\lambda x$, να βρεθεί το $\lambda\in\Re$, ώστε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

22)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{(\lambda^2+\lambda-2)x^2+(\lambda-1)x+2}{(\lambda+5)x+7}$. Για τις διάφορες τιμές του λ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Τα όρια $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχουν. Αν σε κάποιο όριο παρουσιάζονται οι όροι ημx και συνx , τότε διαιρούμε τους όρους αυτούς με κάποια θετική δύναμη του x , ώστε χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής να τους μηδενίσουμε.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ ενώ :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$, ομοίως και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$ τα οποία αποδεικνύονται με κριτήριο παρεμβολής.

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\eta\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0\end{array}\right.$$ και

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\eta\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0\end{array}\right.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 : Στην ενότητα 1.5 είδαμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$ (Μηδενική επί φραγμένη που αποδεικνύεται ως εξής :

Έχω $\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$, άρα $\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|\overset{|x|\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a}{<=========>}-|x|\le x\eta\mu\dfrac{1}{x}\le|x|$

Εφαρμόζω κ.π. και $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$)

- Όμως $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$ γιατί : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ u=\frac{1}{x}\\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ x\to\pm\infty\\ u\to 0}}{=====}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3 : Αν έχω όριο όπου $x\to\pm\infty$, που περιέχει $\eta\mu x$ ή $\sigma\upsilon\nu x$, τότε διαιρώ κάθε όρο αριθμητή και παρανομαστή με τη μεγιστοβαθμια δύναμη του x. Αν χρειαστεί κάνω διαχωρισμό του κλάσματος.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

23)Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\eta\mu x}{x+2}$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+\eta\mu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x}{3x+\sigma\upsilon\nu x}$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\sigma\upsilon\nu x+x^2\eta\mu x+2}{x^4+\eta\mu^4 x+x}$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\eta\mu x}{x+2}\overset{\substack{x\to+\infty\\ \alpha\rho\alpha:x\neq0\\ \div x}}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\overset{*}{=}\dfrac{2+0}{1+0}=2$,

* $\left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\eta\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0\end{array}\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+\eta\mu^2x-2\sigma\upsilon\nu x}{3x+\sigma\upsilon\nu x}\overset{\substack{x\to+\infty\\ \alpha\rho\alpha:x\neq0\\ \div x}}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6+\dfrac{\eta\mu^2x}{x}-2\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}}{3+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}}\overset{*}{=}\dfrac{6+0-0}{3+0}=2$

* $\left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\eta\mu^2x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\eta\mu^2x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu^2x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\eta\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu^2x}{x}=0\end{array}\right)$ και

$\left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\eta\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0\end{array}\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\sigma\upsilon\nu x+x^2\eta\mu x+2}{x^4+\eta\mu^4x+x}\overset{\substack{x\to+\infty\\ \alpha\rho\alpha:x\neq0\\ \div x^4}}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\dfrac{\eta\mu x}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{1+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^4+\dfrac{1}{x^3}}\overset{*}{=}\dfrac{0+0+0}{1+0^4+0}=0$

* παραπάνω δείξαμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$, ομοίως :

$\left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right|\le\left|\dfrac{1}{x^2}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right|\le\dfrac{1}{|x|^2}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|^2}\le\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\le\dfrac{1}{|x|^2}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|^2}\right)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\eta\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}=0\end{array}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

24) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}-x\right)$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x+3}$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\eta\mu x}{x}$

25) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-\eta\mu x}{x^2+\sigma\upsilon\nu x}$ (Απ. 2)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5\eta\mu x}{2x-7\sigma\upsilon\nu x}$ (Απ. 3)

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu x}{x^2+1}$ (Απ. 0)

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu x}{x^2-3x+2}$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}$ (Απ. 3)

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2\eta\mu x}{4x+1}$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{3+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$

viii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x-5}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

ix. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+2014}{x+1}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

x. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{5+\eta\mu x}$

xi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}}{2x+3}$

xii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $3x^5-2x^2\le(x^5+2x+1)f(x)\le 3x^5+3x^2+5$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Λύση :

i. Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5+2x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty$, άρα όταν $x\to-\infty$ τότε $x^5+2x+1<0$ άρα

$$3x^5-2x^2\le(x^5+2x+1)f(x)\le 3x^5+3x^2+5\Leftrightarrow\frac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}\ge f(x)\ge\frac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}\le f(x)\le\frac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}$$

Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5}{x^5}=3$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5}{x^5}=3$ άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

ii. Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^5=+\infty$, άρα όταν $x\to+\infty$ τότε $x^5+2x+1>0$ άρα

$$3x^5-2x^2\le(x^5+2x+1)f(x)\le 3x^5+3x^2+5\Leftrightarrow\frac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}\le f(x)\le\frac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}\Leftrightarrow$$

Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5}{x^5}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5}{x^5}=3$ άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

iii. Έχω $\dfrac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}\le f(x)\le\dfrac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}\overset{\substack{x\to+\infty\\ \alpha\rho\alpha:x>0}}{\Leftrightarrow}\dfrac{3x^5+3x^2+5}{x(x^5+2x+1)}\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{3x^5-2x^2}{x(x^5+2x+1)}$

$$\Leftrightarrow\frac{3x^5+3x^2+5}{x^6+2x^2+x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{3x^5-2x^2}{x^6+2x^2+x}$$

Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5-2x^2}{x^6+2x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5}{x^6}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5+3x^2+5}{x^6+2x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5}{x^6}=0$ άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

27) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $2x^3-3x^2\le(x^3-5x+2)f(x)\le 2x^3+3x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (Απ. 2) ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ (Απ. 0)

28)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\left|(x^3+3x-1)f(x)-2x^2\right|\le x$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Απ. 0) ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\eta\mu x\right)$ (Απ. 0)

29)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $6x^3-5x^2+2\le f(x)\le 6x^3+2x^2+7$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+3x-5}$ (Απ. $-\infty$)

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^4-2x^3+x}$ (Απ. 0) iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{2x^3-x+13}$ (Απ. 3)

30)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\dfrac{4x^2+x-2}{1-x^2}\le f^2(x)-4f(x)\le\dfrac{4x^3+x-2}{1-x^3}$ για κάθε $x>1$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Απ. 2)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΚΑΙ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31)Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)+2x-3}{x+5}=7$. Να βρείτε τα όρια : i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Λύση :

i. Θέτω $g(x)=\dfrac{xf(x)+2x-3}{x+5}$, με $x\ne -5$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=7$

Έχω : : $g(x)=\dfrac{xf(x)+2x-3}{x+5}\Leftrightarrow g(x)(x+5)=xf(x)+2x-3\Leftrightarrow xf(x)=g(x)(x+5)-2x+3\Leftrightarrow$

Για $x\ne 0$ $f(x)=\dfrac{g(x)(x+5)-2x+3}{x}$ άρα :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)(x+5)-2x+3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[g(x)\left(1+\frac{5}{x}\right)-2+\frac{3}{x}\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\left(1+\frac{5}{x}\right)-2+\frac{3}{x}\right]=7\cdot 1-2=5$$

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{g(x)(x+5)-2x+3}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)(x+5)-2x+3}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[g(x)\left(1+\frac{5}{x}\right)-2+\frac{3}{x}\right]}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)\left(1+\frac{5}{x}\right)-2+\frac{3}{x}}{x}=\left(\frac{5}{+\infty}\right)=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

32)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-6x^2-3x+5}{x^2-5x+4}=4$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$ (Απ. 10)

33)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-\sqrt{x^2+x+2}}{2x+1}=3$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (Απ. 7)

34)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-\eta\mu x}{x+1}=3$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (Απ. 3)

35)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2f(x)-2x^3}{x^3+x^2+1}=3$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ (Απ. 5)

36)Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=5$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-5x\right)=2$. Να βρείτε το $\lambda\in\Re$, ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3f(x)+\lambda x-2}{xf(x)-5x^2+1}=3$. (Απ. $\lambda=-9$)

37)Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to\Re$ για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right)=3$. Να βρείτε το $\lambda\in\Re^*$, ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)+\lambda x-1}{xf(x)-2x^2+1}=1$.

38)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, όταν : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+x\eta\mu\dfrac{1}{x}}{x-\sqrt{x^2+1}}=2$.

39)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x}{\sqrt{x^2+1}+x}=4$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ (Απ. 5)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)+\alpha x^2+3x}{xf(x)-x^2+13}=3$ (Απ. 7)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΟΡΙΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Ισχύουν : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$

Γενικά :

- Αν $\alpha > 1$ τότε : $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_\alpha x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$
- Αν $0 < \alpha < 1$ τότε : $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$

Συχνά : $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

40)Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + 2014 - e^x - 5x^2)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^4+5}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x-2}{x^3+5}}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$

v. $\lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x-3)$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1) - \ln(x^2-5x+6)\right)$

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

viii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - e^{\frac{1}{x}}\right)$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + 2019 - e^x + 5x^2) = -\infty$

ii. Θέτουμε $u = x^4 + 5$, έτσι : $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+5) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^4) = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^4+5} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$.

iii. Θέτουμε $u = \dfrac{x-2}{x^3+5}$, έτσι : $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x^3+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x-2}{x^3+5}} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$.

iv. Θέτουμε $u = \dfrac{\ln x}{x}$, έτσι : $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{-\infty}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\ln x\right) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$

v. Θέτουμε $u = x-3$, έτσι : $\lim\limits_{x\to 3^+} u = \lim\limits_{x\to 3^+}(x-3) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x-3) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1) - \ln(x^2-5x+6)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

Θέτουμε $u = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$, έτσι : $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

vii. Θέτουμε $u = \sqrt{x^2+1}+x$, έτσι :

$$\lim_{x\to-\infty} u = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} \overset{\substack{x<0\\ \text{αφού}\\ x\to-\infty}}{=\!=\!=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

viii. Θέτουμε $u = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{u}$, έτσι : $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

Άρα : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(\ln\dfrac{1}{u} - e^u\right) = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(\ln 1 - \ln u - e^u\right) = -\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

41)Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x + e^x + x^2)$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x-2011) + x^5 + \sqrt{x-2} + e^x\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + e^x)$ (Απ. $-\infty$)

iv. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - x^{2013} + 2013)$ (Απ. $-\infty$)

v. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(e^x - x^2) + x^5 + \sqrt{x+4}\right)$ (Απ. 2)

vi. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\ln(x-2) + x^3 + \sqrt{x-2}\right)$ (Απ. $-\infty$)

vii. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1} + 2x^2 - \ln(1-x)\right)$ (Απ. $+\infty$)

viii. $\lim\limits_{x\to 5^-}\left(e^{x-4} + 2x^2 + 2\ln(5-x)\right)$ (Απ. $-\infty$)

ix. ** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x^3-2x) - 2\ln(x+1)\right)$

x. ** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2x+3) - \ln(x^2+3x)\right)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 :

- Αν έχω μια εκθετική π.χ. μόνο e^x , τότε τη βγάζω κοινό παράγοντα.
- Αν έχω 2 ή περισσότερες εκθετικές, τότε βγάζω κοινό παράγοντα αυτή με τη μεγαλύτερη βάση αν $x \to +\infty$. Αν $x \to -\infty$ κοινό παράγοντα βγάζω την εκθετική με τη μικρότερη βάση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

42)Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}+1}{e^x+2}$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}+3^x}{e^{x+2}+3^{x+1}}$ iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x+1}+3^x}{e^{x+2}+3^{x+1}}=$

Λύση :

i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}+1}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot e+1}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(e+\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e+\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{2}{e^x}}=\frac{e+0}{1+0}=e$$

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}+3^x}{e^{x+2}+3^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot e+3^x}{e^x\cdot e^2+3^x\cdot 3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(\dfrac{e^x}{3^x}e+1\right)}{3^x\left(\dfrac{e^x}{3^x}e^2+3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(\dfrac{e^x}{3^x}e+1\right)}{3^x\left(\dfrac{e^x}{3^x}e^2+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{e}{3}\right)^x\cdot e+1}{\left(\dfrac{e}{3}\right)^x\cdot e^2+3},\quad \text{επειδή } 0<\frac{e}{3}<1\text{, τότε } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^x=0\text{, άρα θα είναι :}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{e}{3}\right)^x\cdot e+1}{\left(\dfrac{e}{3}\right)^x\cdot e^2+3}=\frac{0\cdot e+1}{0\cdot e^2+3}=\frac{1}{3}$$

iii. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}+3^x}{e^{x+2}+3^{x+1}}==\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\cdot e+3^x}{e^x\cdot e^2+3^x\cdot 3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\left(e+\dfrac{3^x}{e^x}\right)}{e^x\left(e^2+\dfrac{3^x}{e^x}\cdot 3\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e+\left(\dfrac{3}{e}\right)^x}{e^2+3\left(\dfrac{3}{e}\right)^x}$$

επειδή $\dfrac{3}{e}>1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{e}\right)^x=0$, άρα θα είναι : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e+\left(\dfrac{3}{e}\right)^x}{e^2+3\left(\dfrac{3}{e}\right)^x}=\dfrac{e+0}{e^2+3\cdot 0}=\dfrac{e}{e^2}=\dfrac{1}{e}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

43) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^x+5}{3^x+2^{x+1}+2}$ (Απ. 1)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+2}+e^x-2}{e^x+e^{x+1}+1}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^x}$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+2^{x+1}}{3^{x+2}+2^x}$

v. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7^x+3^x+1}{8^x+5^x+1}$

vi. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x+5^x-6}{2^x+2}$

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^{x+1}+2^{x+3}}{5^x-2^{x+1}}$ (Απ. -4)

viii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-\alpha^x}{2^x+3\alpha^x}$, $\alpha>0$.

ix. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x-3\lambda^{x+1}}{2^x+\lambda^x}$, $\lambda>0$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{-\frac{1}{x}}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to0}f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$

45)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-\eta\mu x)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να βρείτε τα όρια :

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$ γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$

46)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όταν :

i. $f(x)\geq x^3$, για κάθε $x\in\Re$

ii. $f:(0,+\infty)\to\Re$ και $f(x)>\eta\mu x+\ln x$, για κάθε $x>0$.

47)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ όταν :

i. $(1+x^2)f(x)\leq x^3$, για κάθε $x\in\Re$

ii. $f(x)+x^2-e^x<0$, για κάθε $x\in\Re$

1.8Α ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

20. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

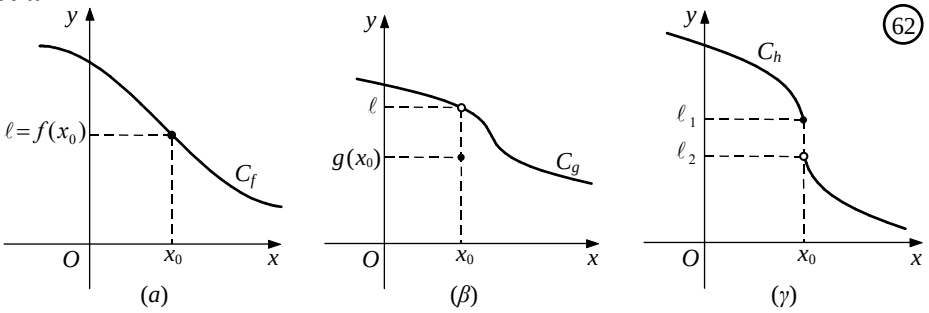
Απάντηση : **(2001 ΟΜΟΓ., 2006 ΟΜΟΓ., 2009 Β΄, 2010 ΟΜΟΓ., 2015)**

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$.

Σχόλια :

α) Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Παρατηρούμε ότι:

— Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

— Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq g(x_0)$.

— Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_0** μόνο τη συνάρτηση f.

β) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

i) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

ii) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Για παράδειγμα,

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x\le 0 \\ 2-x, & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$, οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\ne 1 \\ 3, & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, ενώ $f(1)=3$. ***(2019)***

γ) Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, συνεχής συνάρτηση.

δ) — Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$.

— Κάθε ρητή συνάρτηση $\dfrac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

— Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$.

— Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\ne 1$ είναι συνεχείς.

21. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων.

Απάντηση :

Για τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις :

i. $f+g$, ii. $c\cdot f$, όπου $c\in\mathbb{R}$, iii. $f\cdot g$, iv. $\dfrac{f}{g}$, v. $|f|$ και vi. $\sqrt[\nu]{f}$ με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Σχόλιο :Τα αντίστροφα των i., iii., iv., v., και ii., για $c=0$, δεν ισχύουν. Δηλαδή, μπορεί οι συναρτήσεις : $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$, $0\cdot f$ να είναι συνεχείς στο x_0 και οι f,g να μην είναι συνεχείς στο x_0.

Για παράδειγμα : $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$. Προφανώς οι συναρτήσεις f και g δεν είναι συνεχείς στο 0, όμως οι συναρτήσεις :

- $(f+g)(x)=0$, $x\in\Re$,
- $(f\cdot g)(x)=-1$, $x\in\Re$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-1$, $x\in\Re$,
- $|f(x)|=1$, $x\in\Re$,
- $0\cdot f(x)=0$, $x\in\Re$

είναι συνεχείς στο 0.

22. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης .

Απάντηση :

Για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

23. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

Απάντηση : **(2001 ΟΜΟΓ., 2008, 2012, 2012 ΕΣΠ., 2017)**

• Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

• Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον : $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$

Σχόλιο :

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$.

Παρατηρήσεις :

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα ξένα διαστήματα (α,β) και (β,γ), τότε η f είναι συνεχής στο σύνολο $A=(\alpha,\beta)\cup(\beta,\gamma)$.
- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0, δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής και σε μια περιοχή του x_0.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΣ

Όταν θέλουμε να εξετάσουμε ως προς τη συνέχεια μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, εργαζόμαστε ως εξής :

- Εξηγούμε γιατί είναι συνεχής κάθε κλάδος της συνάρτησης ξεχωριστά, στα ανοιχτά διαστήματα που ορίζεται.
- Εξετάζουμε (με τον ορισμό) τη συνέχεια στα σημεία που αλλάζει ο τύπος. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχείς στο x_0, αλλιώς όχι. Τονίζουμε ότι για την εύρεση του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ εργαζόμαστε με πλευρικά όρια. Η f **δεν** είναι συνεχείς στο x_0, αν :
  - ✓ Δεν υπάρχει κάποιο από τα πλευρικά όρια ή
  - ✓ Τα πλευρικά όρια στο x_0 υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά ή
  - ✓ Τα πλευρικά όρια στο x_0 είναι ίσα, όχι όμως ίσα με το $f(x_0)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 2 σελ. 197 Α΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)
   Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις :

   i. $f(x)=\begin{cases} x^2+4, x<2 \\ x^3, x\geq 2 \end{cases}$ αν $x_0=2$

   ii. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x<1 \\ \sqrt{3+x}, x\geq 1 \end{cases}$ αν $x_0=1$

   iii. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, x\neq -2 \\ -3, x=-2 \end{cases}$ αν $x_0=-2$

   Λύση :

   i. Είναι : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+4)=8$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^3)=8$, $f(2)=2^3=8$
   Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=8$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=2$.

   ii. Είναι : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3+x}=2$, $f(1)=\sqrt{3+1}=2$
   Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=2$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

   i. Είναι : $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-1)=-3$, $f(-2)=-3$
   Άρα $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=-3$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=-2$.

2. (Άσκηση 4 σελ. 198 Α΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)
   Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

   i. $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3, x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, x>1 \end{cases}$

   ii. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, x<0 \\ \sigma\upsilon\nu x, x\geq 0 \end{cases}$

Λύση :

i. Αν $x<1$, $f(x)=2x^2-3$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική

Αν $x>1$, $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών

Θα εξετάσω τώρα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ (σημείο αλλαγής τύπου)

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(2x^2-3)=-1$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x}+1=2$

$f(1)=-1$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$

ii. Αν $x<0$, $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνέχων

Αν $x>0$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής

Θα εξετάσω τώρα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ (σημείο αλλαγής τύπου)

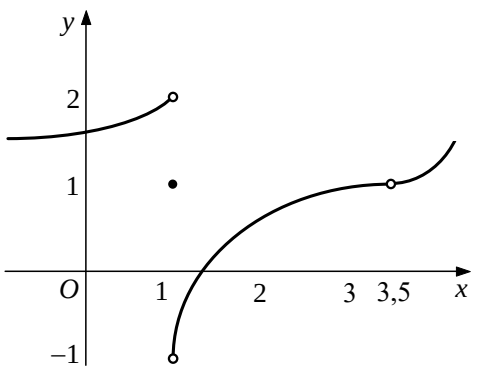
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

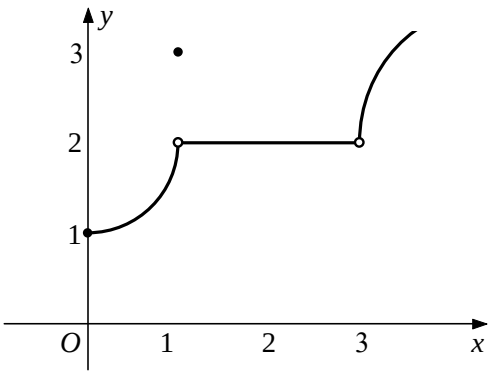
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$

$f(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$. Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

3. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}\ln x+2x^2-3, & x>1\\ \dfrac{\sqrt{x}}{2x-3}, & 0<x\le1\end{cases}$

5. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3+\sigma\upsilon\nu x}-2, & x\le0\\ \dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{x-2}, & 0<x<2\\ 3\sqrt{1+3\sigma\upsilon\nu(x-2)}, & x\ge2\end{cases}$

6. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1\\ 0, x=1\end{cases}$ στο $x_0=1$

ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}, x\neq -2\\ -3, x=-2\end{cases}$ στο $x_0=-2$

7. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

i. $f(x)=\begin{cases}2x^2, & |x|\le 1\\ \dfrac{2}{x}, & |x|>1\end{cases}$

ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$

iii. $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}$

iv. $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ -x^2+1, & x>0\end{cases}$.

8. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, x<1\\ 2x-3, x\ge 1\end{cases}$

ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}, x<1\\ 5x^3-3, x\ge 1\end{cases}$

iii. $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\ln(x^2+1), x<0\\ e^{2x}+x-1, x\ge 0\end{cases}$

iv. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

v. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 0, & x=0\\ xe^{1-\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$

9. Αν η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι συνεχής στο $\chi_0=0$ με f(0)=0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}f(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\dfrac{1}{x}, x>0 \\ 0, x=0 \\ xe^{\frac{1}{x}}, x<0 \end{cases}$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.
ii. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
ii. Να βρείτε τα όρια : α. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

12. Να ελέγξετε αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι παρακάτω συναρτήσεις. Για αυτές που δεν είναι να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

i. $f(x)=5x^2-x+4$ ii. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ iii. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ iv. $f(x)=\ln(x-1)$

v. $f(x)=e^{x^2-1}$ vi. $f(x)=\eta\mu\dfrac{1}{x^2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αν μια συνάρτηση μας δίνεται ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και ζητείται να προσδιορίσω κάποιες παραμέτρους τότε κάνω χρήση του ορισμού : Η f είναι συνεχείς στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Αν χρειαστεί κάνω χρήση του ορισμού με τα πλευρικά όρια :Η f είναι συνεχείς στο x_0 τότε : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13. Για ποια τιμή του *α* η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \boldsymbol{x^2+2\alpha}, & \boldsymbol{\alpha\nu \quad x\le0} \\ \boldsymbol{\dfrac{\eta\mu x}{x}}, & \boldsymbol{\alpha\nu \quad x>0} \end{cases}$ είναι συνεχής;

Λύση :

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η f έχει τύπο $f(x)=x^2+2\alpha$ και επομένως είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f έχει τύπο $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ και επομένως είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι η f συνεχής, αρκεί να είναι συνεχής και στο $x_0=0$, δηλαδή αρκεί $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Έχουμε όμως : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2\alpha)=2\alpha$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ και $f(0)=2\alpha$. Επομένως, αρκεί $2\alpha=1\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{2}$.

14. (Άσκηση 1 σελ. 199 Β΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)

Αν $f(x)=\begin{cases}(x-\kappa)(x+\kappa), x\le 2\\ \kappa x+5, x>2\end{cases}$, να προσδιορίσετε το κ, ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Λύση :

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-\kappa)(x+\kappa)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-\kappa^2)=4-\kappa^2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(\kappa x+5)=2\kappa+5$

$f(2)=(2-\kappa)(2+\kappa)=4-\kappa^2$

Άρα $4-\kappa^2=2\kappa+5\Leftrightarrow \kappa^2+2\kappa+1=0\Leftrightarrow \kappa=-1$

15. (Άσκηση 2 σελ. 199 Β΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)

Αν $f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\beta x-12, x<1\\ 5, x=1\\ \alpha x+\beta, x>1\end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$, για τις οποίες η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Λύση :

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha^2x^2+\beta x-12)=\alpha^2+\beta-12$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\alpha x+\beta)=\alpha+\beta$

$f(1)=5$

Άρα $\begin{cases}\alpha^2+\beta-12=5,(1)\\ \alpha+\beta=5,(2)\end{cases}$

$(2):\alpha+\beta=5\Leftrightarrow \beta=5-\alpha$

$(1)\overset{(2)}{\to}\alpha^2+5-\alpha-12=5\Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-12=0\Leftrightarrow \alpha=4,\acute{\eta},\alpha=-3$

- Για $\alpha=4$, (2) : $\beta=5-4\Leftrightarrow \beta=1$
- Για $\alpha=-3$, (2) : $\beta=5+3\Leftrightarrow \beta=8$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, x<1\\ \beta+1, x=1\\ ax^2-1, x>1\end{cases}$. Να βρείτε την τιμή των α, β ώστε η f να είναι συνεχής.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}+\alpha x^2-\beta & , x<1\\ \eta\mu(\pi x)+2 & , 1\le x\le 2\\ \ln(x-1)+2\beta\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\alpha & , x>2\end{cases}$. Να βρείτε την τιμή των α, β ώστε η f να είναι συνεχής.

18. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α ώστε να είναι συνεχής οι συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 2x+\alpha^2 x}{x}, x<0\\ x^2+3\alpha, x\ge 0\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}2x^2+3\alpha x-1, x<1\\ x^2+\alpha^2+2, 1\le x\le 2\\ \alpha x^2+x+\alpha-2, x>2\end{cases}$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^{a-1}+\ln x, 0<x\le 1\\ \ln(3x-2)+e^{3a-3}, x>1\end{cases}$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΙΜΗΣ Ή ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΗΣ $f(x)$

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0\in D_f$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Άρα

- αν μας ζητείται η τιμή $f(x_0)$, τότε αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- αν μας ζητείται το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε αρκεί να βρούμε το $f(x_0)$
- αν η f είναι συνεχής στο x_0 και μας δίνεται μια ανισοτική σχέση, τότε το $f(x_0)$ το βρίσκουμε χρησιμοποιώντας πλευρικά όρια και καταλήγοντας στις σχέσεις $f(x_0)\ge\alpha$, $f(x_0)\le\alpha$, οπότε $f(x_0)=\alpha$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f(x)=x^2-5x+6$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την τιμή f(2). Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

Λύση :

Είναι $(x-2)f(x)=x^2-5x+6$ για κάθε $x\in\Re$

Αν $x\neq 2$ τότε $(x-2)f(x)=x^2-5x+6\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$. Για να βρούμε το $f(2)$ θα χρησιμοποιήσουμε την συνέχεια της $f(x)$. Δηλ.

Η $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\Re$, άρα η $f(x)$ συνεχής και στο $x_0=2$ άρα ισχύει :

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=-1.$$

Άρα για τον τύπο της $f(x)$ ισχύει : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, x\neq 2\\ -1, x=2\end{cases}$.

21. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f(x)\le \eta\mu(x-2)+x^2-2x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε το f(2).

Λύση :

Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\Re$, άρα η $f(x)$ συνεχής και στο $x_0=2$ άρα ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$ (1)

- Για $x-2>0\Leftrightarrow x>2$ έχω :

  $(x-2)f(x)\le \eta\mu(x-2)+x^2-2x\Leftrightarrow f(x)\le\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ κοντά στο 2^+

  Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\le\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\dfrac{x^2-2x}{x-2}\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(2)\le\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{x-2}\Leftrightarrow$

  $\overset{*}{\Leftrightarrow} f(2)\le 1+2\Leftrightarrow f(2)\le 3$ (2) $\quad$ $(*\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\underset{\substack{\text{όταν: } x\to 2,\ u\to 0\\ \text{τότε: } u\to 0}}{\overset{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ x-2=u}{=\!=\!=\!=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1)$

- Για $x-2<0\Leftrightarrow x<2$ έχω :

  $(x-2)f(x)\le \eta\mu(x-2)+x^2-2x\Leftrightarrow f(x)\ge\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ κοντά στο 2^-

  Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)\ge\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\dfrac{x^2-2x}{x-2}\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(2)\ge\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x(x-2)}{x-2}\Leftrightarrow$

  $\overset{*}{\Leftrightarrow} f(2)\ge 1+2\Leftrightarrow f(2)\ge 3$ (3). Άρα από (2) και (3) έχω ότι $f(2)=3$.

22. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ να βρεθεί η τιμή f(1) όταν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}=4$.

Λύση :

Έστω : $g(x)=\dfrac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ με $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=4$ έτσι :

$$g(x)=\frac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow (x-1)f(x)=g(x)(\sqrt{x}-1)+\eta\mu(x-1)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)+\eta\mu(x-1)}{x-1}$, άρα είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)+\eta\mu(x-1)}{x-1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)(\sqrt{x}-1)}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \overset{*}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} + 1 \overset{*}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{\sqrt{x}+1} + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{2} + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

Επειδή όμως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ισχύει : $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow f(1) = 3$

$$(*\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \underset{\substack{\text{όταν: } x\to 1,\ u\to 0\\ \text{τότε: } u\to 0}}{\overset{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ x-1=u}{=\!=\!=}} \lim\frac{\eta\mu u}{u} = 1)$$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$ έχουμε $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2 \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right) = x^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{f^2(x)+1} \quad (1)$$

Είναι : $|f(x)| = \left|\frac{x^2-1}{f^2(x)+1}\right| = \frac{|x^2-1|}{f^2(x)+1} \le \frac{|x^2-1|}{1} = |x^2-1|$ για κάθε $x\in\Re$, καθώς για κάθε $x\in\Re$, $f^2(x)\ge 0 \Leftrightarrow f^2(x)+1\ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)+1}\le 1 \Leftrightarrow \frac{|x^2-1|}{f^2(x)+1}\le |x^2-1|$.

Επομένως : $|f(x)|\le |x^2-1| \Leftrightarrow -|x^2-1| \le f(x) \le |x^2-1|$

Έτσι : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}\left(-|x^2-1|\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 1}\left(|x^2-1|\right)=0\end{array}\right\}$ από κριτήριο παρεμβολής : $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

Επίσης : $f(1) = \frac{1^2-1}{f^2(1)+1} = 0$, άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

24. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f(x) = \sqrt{x+7} - 3$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την τιμή f(2).

25. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $xf(x) = 2x + 3\eta\mu x$, για κάθε $x\in\Re$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε το f(0).

26. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{x^2+3}$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

27. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $x^2 f(x) + x = x\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(x)\sqrt{x^2+1} = 2\eta\mu^2 x + f(x)$, για κάθε $x\ne 0$. Αν f(0)=4, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

29. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta}{x-1}$, για κάθε $x\neq 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$.
   i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$.
   ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

30. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$, για κάθε $x\neq -2$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$.
   i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$.
   ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

31. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $xf(x)\le \eta\mu x+x^2-4x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε το f(0).

32. Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με την ιδιότητα : $f^2(x)+2x\eta\mu x\le 2xf(x)+\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\Re$.
   i. Να βρείτε το f(0)
   ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 0.

33. Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα : $(x-1)f(x)\ge x^2-3x+2$ για κάθε $x\in\Re$. Αν f συνεχής στο $x_0=1$, να βρεθεί η τιμή f(1).

34. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)\cdot\eta\mu x\ge x^2+3x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε το f(0).

35. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $xf(x)-\eta\mu 3x\le x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in\Re^*$. Να βρείτε το f(0).

36. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $3-2x^2\le f(x)\le 3+x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

37. Αν η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\Re$ είναι συνεχής στο $x_0=4$, να βρεθεί η τιμή $f(4)$ όταν για κάθε $x\ge 0$, ισχύει : $4\sqrt{x}-8\le(x-4)f(x)\le x-4$.

38. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)+x^2-1}{\sqrt{x}-1}=12$. Να βρεθεί το $f(1)$.

39. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, και ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu 3x}{x^2+x}=2$ να βρεθεί το $f(0)$.

40. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(1,2). Αν επιπλέον ισχύει : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)f(x)+\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3}=\dfrac{9}{16}$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

41. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-\eta\mu x\cdot\eta\mu3x}{\sqrt{x^2+4}-2}=8$. Να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα y'y.

42. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ να βρεθεί η τιμή f(1) όταν $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)f(x)-x+1}{x^2\eta\mu(x-1)}=3$.

43. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\left|xf(x)-3x+\eta\mu3x\right|\le x^2$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε το f(0)

ii. Να βρείτε το $\alpha\in\Re$, ώστε η συνάρτηση : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x},x\neq0\\ \alpha,x=0\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

44. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+6f(x)+9\sigma\upsilon\nu^2x\le0$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

45. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)-4xf(x)\le-3x^2-2x+1$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

46. Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση, ώστε $f^3(x)+f(x)=\ln x$ (1), για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

47. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha\in\Re$.

i. Να βρείτε το f(0). ii. Να βρείτε το α ώστε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu^2x+2xf(x)}{x^2+\eta\mu x\cdot f(x)}=3$

48. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+x}{x^2}=2$.

i. Να βρείτε το f(0) και το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii. Να βρείτε το λ ώστε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2\lambda f^2(x)}{3x^2+x\eta\mu x}=3$

49. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=1$, περιττή και $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+2}{(x-1)^2}=3$.

i. Να βρείτε το f(1), ii. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1=-1$.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-3}{x^2+1+2x}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Όταν μια συνάρτηση f δίνεται μέσα από μια συναρτησιακή σχέση και γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο α, τότε για να δείξουμε ότι είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού Α, αποδεικνύουμε ότι είναι συνεχής σε τυχαίο σημείο $x_0\in A$, χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή σχέση με αλλαγή μεταβλητής στην εύρεση του ορίου.

Ισχύει ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, αν και μόνο αν :

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ή
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$
- $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=f(x_0)$ (στο όριο θέτω $x_0+h=x$) ή
- $\lim\limits_{h\to1}f(x_0\cdot h)=f(x_0)$ (στο όριο θέτω $x_0\cdot h=x$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

50. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$

i. Να βρείτε το f(0).

ii. Αν η f είναι συνεχής στο 2, να αποδείξετε ότι :
α. η f είναι συνεχής στο 0, β. η f είναι συνεχής στο $\Re$.

51. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$, να δείξετε ότι :

i. Αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

ii. Αν η f είναι συνεχής στο α με $0<\alpha\neq1$, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

52. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, η οποία είναι συνεχής. Να βρείτε την τιμή :

i. $f(2)$, όταν $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)}{h}=12$ και στη συνέχεια να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$.

ii. $f(3)$, όταν $\lim\limits_{h\to1}\dfrac{f(3h)}{h-1}=6$ και στη συνέχεια να βρείτε τα όρια :

α. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{\sqrt{x^2+7}-4}$ και β. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\eta\mu f(x)}{x-3}$

1.8β ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

24. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση : (2013 ΟΜΟΓ., 2014 ΕΣΠ. Β΄)

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

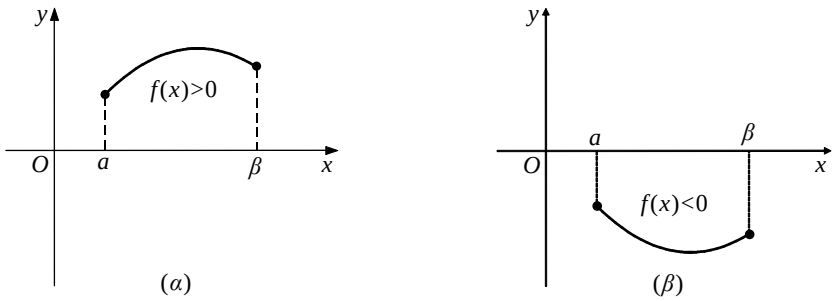
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

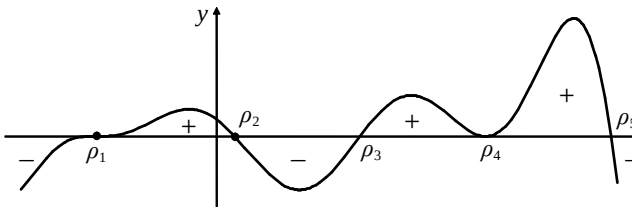
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Σχόλια :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.



- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x.

Παρατηρήσεις :

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\le 0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

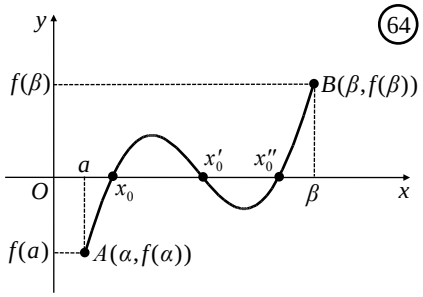
- Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano, δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ που έχει ρίζα στο (α,β) αλλά δεν είναι συνεχής στο [α,β] ή δεν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

- Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, δεν έχουμε ως συμπέρασμα ότι η f δεν έχει ρίζα στο (α,β).

25. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση :

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



64

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO ΚΑΙ ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α.** Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια **τουλάχιστον** ρίζα σε ένα διάστημα (α,β) ακολουθούμε τα εξής βήματα :
- φέρνουμε όλους τους όρους στο α' μέλος
- θεωρούμε το α' μέλος ως μια συνάρτηση f
- εξασφαλίζουμε για την f τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο [α,β].

Υποπερίπτωση : Αν θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=\kappa$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) θεωρώ νέα συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ ή $h(x)=f(x)-\kappa$ αντίστοιχα και εφαρμόζω Θ.Bolzano στην h.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

53. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x+2=3\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (0,π).

Λύση :

Έχω $4x+2-3\sigma\upsilon\nu x=0$, έστω $f(x)=4x+2-3\sigma\upsilon\nu x$, $D_f=\Re$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,π). Εφαρμόζω Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο [0,π]

- $f(x)$ συνεχής στο [0,π] ως πράξεις συνέχων (π.σ.)
- $f(0)=-1<0$, $f(\pi)=4\pi+2-3\sigma\upsilon\nu\pi=4\pi+2+3=4\pi+5>0$

Άρα $f(0)\cdot f(\pi)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,π)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

54. Να δειχθεί ότι έχουν μια τουλάχιστον ρίζα, στο αντίστοιχο διάστημα, οι παρακάτω εξισώσεις :
   i. $x^3-3x^2-x+3=0$ στο (0,2) ii. $3x+\ln x^4=x^2+4$ στο (1,e)
   iii. $x\ln\sqrt{x}+x^2\ln x=2$ στο (1,e) iv. $2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 3x=0$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$

55. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x-x+1$ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα (0,π). (Υποδ. Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα)

56. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-4x^2-4x+16$ τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα (1,3).

57. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $\Re$, ώστε $f(0)<1$ και $f(1)>3$, τότε η εξίσωση $f(x)=e^x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (0,1).

58. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ και $g(x)=xe^x-3$. Να δειχθεί ότι γραφικές παραστάσεις των των f , g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (1,e) . (Υποδ. Οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο αν η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα. Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ και εφαρμόζοντας Θ. Bolzano για την $h(x)$ δείχνω ότι η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.)

59. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\ln x+3$. Να δειχθεί ότι γραφικές παραστάσεις των των f , g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (1,e) .

60. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις *f*, να βρείτε έναν ακέραιο *α* τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(\alpha,\alpha+1)$ η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα
   i. $f(x)=x^3+x-1$ ii. $f(x)=x^5+2x+1$
   iii. $f(x)=x^4+2x-4$ iv. $f(x)=-x^3+x+2$

61. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $0<f(x)<1$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f^2(x)-2f(x)+2x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) .

62. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\Re$, όπου $\beta,\gamma\in\Re$ με $\beta^2<3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1). (Πανελλήνιες 2001)

63. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g συνεχής στο [α,β]. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $\alpha<g(x)<\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ g)(x)+x=f(x)+g(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α,β).

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β.** Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει περισσότερες ρίζες, τότε εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία σε περισσότερα διαστήματα, είτε χωρίζοντας το αρχικό διάστημα, είτε εντοπίζοντας νέα διαστήματα. Τα διαστήματα δεν πρέπει να έχουν κοινά εσωτερικά στοιχεία.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

64. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+2x^2=1$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο διάστημα (-1,1).

Λύση :

Έχω $x^4+2x^2-1=0$, έστω $f(x)=x^4+2x^2-1, D_f=\Re$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο (-1,1). Εφαρμόζω Θ.Bolzano για την $f(x)$ στα [-1,0] & [0,1]

Θ.Bolzano για την $f(x)$ στα [-1,0]

- $f(x)$ συνεχής στο [-1,0] ως πολυωνυμηκή
- $f(-1)=2>0$, $f(0)=-1<0$ Άρα $f(-1)\cdot f(0)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-1,0)

Θ.Bolzano για την $f(x)$ στα [0,1]

- $f(x)$ συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμηκή
- $f(0)=-1<0$, $f(1)=2>0$ Άρα $f(0)\cdot f(1)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

Άρα τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο (-1,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

65. Να δειχθεί ότι έχουν δυο τουλάχιστον ρίζες οι επόμενες εξισώσεις :

i. $4x^3-3x^2-8x+6=0$ στο (0,2)

$x-3-5\eta\mu x=0$ στο $(-\frac{\pi}{2},\pi)$

ii. $(3-x)\ln x=x^3-5x^2+5x$ στο (1,4)

66. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=(x-2)e^x-(x+2)$ έχει :

i. μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,3)
ii. δυο τουλάχιστον ρίζες αντίθετες.

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Γ.** Αν η εξίσωση περιέχει παρανομαστές και η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποιο άκρο, τότε πρώτα απαλείφουμε τους παρανομαστές και μετά θέτουμε συνάρτηση f(x).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

67. (Άσκηση 5β) σελ. 200 Ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

Λύση : Αν θέσουμε ως συνάρτηση $f(x)$ το 1ο μέλος της εξίσωσης δεν θα ορίζονται τα $f(1), f(2)$ με αποτέλεσμα να μην μπορώ να εφαρμόσω Θ.Β. Γι' αυτό κάνω πρώτα

απαλοιφή παρανομαστών : $\frac{e^x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-2}=0 \Leftrightarrow e^x(x-2)+\ln x\cdot(x-1)=0$, έστω $f(x)=e^x(x-2)+\ln x\cdot(x-1)$, $D_f=(0,+\infty)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Εφαρμόζω Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο [1,2]

- $f(x)$ συνεχής στο [1,2] ως π.σ.
- $f(1)=-e<0$, $f(2)=\ln 2>0$ Άρα $f(1)\cdot f(2)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

68. Να δειχθεί ότι έχουν μια τουλάχιστον ρίζα, στο αντίστοιχο διάστημα, οι παρακάτω εξισώσεις : :

i. $\frac{x^4+1}{x-1}+\frac{x^3+1}{x-2}=0$ στο (1,2) ii. $\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{e^x+1}{x-2}=0$ στο (1,2)

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Δ.** Αν ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β] (Δηλ. ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$) τότε αρκεί να δείξουμε ότι $f(\alpha)f(\beta)\le 0$ και διακρίνω τις περιπτώσεις

- αν $f(\alpha)f(\beta)=0$, τότε θεωρούμε $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$
- αν $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε ισχύει το Bolzano

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

69. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα [-3,3] και για κάθε $x\in[-3,3]$ ισχύει $|f(x)|\le 3$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [-3,3].

Λύση : Έχω $f(x)-x=0$, έστω $g(x)=f(x)-x$, $D_g=[-3,3]$, θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [-3,3]. Εφαρμόζω Θ.Bolzano για την $g(x)$ στο [-3,3]

- $g(x)$ συνεχής στο [-3,3] ως π.σ.
- Από εκφώνηση : $|f(x)|\le 3\Leftrightarrow -3\le f(x)\le 3$ (1) για κάθε $x\in[-3,3]$

  Άρα $g(-3)=f(-3)+3\ge 0$ (Από (1) : $-3\le f(-3)\le 3\Leftrightarrow 0\le f(-3)+3\le 6$)

  Και $g(3)=f(3)-3\le 0$ (Από (1) : $-3\le f(3)\le 3\Leftrightarrow -6\le f(3)-3\le 0$)

Άρα $g(-3)\cdot g(3)\le 0$

- Αν $g(-3)\cdot g(3)=0\Leftrightarrow g(-3)=0\Leftrightarrow$ το -3 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$

  ή $g(3)=0\Leftrightarrow$ το 3 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
- Αν $g(-3)\cdot g(3)<0$ από Θ.Β. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-3,3)

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [-3,3]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

70. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α,β] με $f(\alpha)+f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

71. Έστω $f:\Re\to\Re$ συνεχής συνάρτηση με $f(1)+f(2)=7$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x^2=4x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [1,2].

72. Έστω $f:\Re\to[0,6]$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-6f(x)+9x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [0,1].

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ε.** Αν σε κάποιο άκρο (ή και στα δυο) δεν ορίζεται η f(x) τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο της τιμής της f από όριο :

- αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l<0$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^+ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$
- αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l>0$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^- τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$
- αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^+ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$
- αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^- τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

73. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=\dfrac{1}{x-1}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

Λύση : Έστω $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x-1}$, $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\dfrac{1}{x-1}\right)=(-\infty)-\dfrac{1}{0-1}=-\infty$, οπότε υπάρχει α κοντά στο 0^+ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)<0$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\ln x-\dfrac{1}{x-1}\right)=0-(-\infty)=+\infty$, οπότε υπάρχει β κοντά στο 1^- τέτοιο, ώστε $f(\beta)>0$
- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq(0,1)$ και επιπλέον $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(0,1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

74. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=x^2-2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

75. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=x^2-4x+2$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0,1).

76. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1)+\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΥΠΑΡΞΗ $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΜΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑ

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ (ή $\xi \in (\alpha,\beta)$) που να ικανοποιεί μια ισότητα, εργαζόμαστε ως εξής :

- Στην ισότητα που δίνεται, (αν χρειάζεται κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και θέτουμε όπου x_0 το x.
- Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)$ το πρώτο μέλος.
- Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano για την $g(x)$ στο [α,β] και δείχνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$. Από την ισότητα $g(x_0)=0$ οδηγούμαστε στη ζητούμενη ισότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

77. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\alpha,-1)$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε : $x_0\big(f(x_0)-1\big)=\beta f(x_0)-\alpha$.

Λύση : Θα δείξω ότι η εξίσωση $x\big(f(x)-1\big)=\beta f(x)-\alpha$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β). Έστω $g(x)=x\big(f(x)-1\big)-\beta f(x)+\alpha$, $D_g=[\alpha,\beta]$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β). Θ.Β. για τη $g(x)$ στο [α,β]

- $g(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως π.σ.
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(\alpha,-1)$ άρα $f(\alpha)=-1$,
  $g(\alpha)=\alpha(f(\alpha)-1)-\beta f(\alpha)+\alpha=-2\alpha+\beta+\alpha=\beta-\alpha>0$ ($\alpha<\beta$ άρα και $\alpha\neq\beta$)
  $g(\beta)=\beta(f(\beta)-1)-\beta f(\beta)+\alpha=\beta f(\beta)-\beta-\beta f(\beta)+\alpha=\alpha-\beta<0$

Άρα έχω $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

78. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha-1,\alpha+1]$ και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $f(x-2)=f(x+2)$ (1). Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha-1,\alpha+1]$ ώστε να είναι $f(x_0-1)=f(x_0+1)$.

Λύση : Θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x-1)=f(x+1)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha-1,\alpha+1]$. Έστω $g(x)=f(x-1)-f(x+1)$, $D_g=\Re$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha-1,\alpha+1]$. Θ.Β. για τη $g(x)$ στο $[\alpha-1,\alpha+1]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\alpha-1,\alpha+1]$ ως π.σ.
- $g(\alpha-1)=f(\alpha-1-1)-f(\alpha-1+1)=f(\alpha-2)-f(\alpha)$

$$g(\alpha+1)=f(\alpha+1-1)-f(\alpha+1+1)=f(\alpha)-f(\alpha+2)\overset{(1)}{=}f(\alpha)-f(\alpha-2)=-[f(\alpha-2)-f(\alpha)]$$

Άρα έχω $g(\alpha-1)\cdot g(\alpha+1)=-[f(\alpha-2)-f(\alpha)]^2\le 0$

- Αν $g(\alpha-1)\cdot g(\alpha+1)=0\Leftrightarrow g(\alpha-1)=0\Leftrightarrow$ το α-1 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
  ή $g(\alpha+1)=0\Leftrightarrow$ το α+1 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
- Αν $g(\alpha-1)\cdot g(\alpha+1)<0$ από Θ.Β. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\alpha-1,\alpha+1)$

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha-1,\alpha+1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

79. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις $f(0) < g(0)$ και $f(1) > g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

80. **Έστω $f : \Re \to \Re$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει : $(x^2 - 4x + 2) f(x) \le f(0) + f(4)$. Να αποδείξετε ότι :
   i. $f(0) = f(4)$
   ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,2]$ τέτοιο ώστε : $f(\xi^2) = \xi \cdot f(2\xi)$.

81. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε : $\frac{\eta\mu\xi}{\xi - 1} = 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\xi - 3}$.

82. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g που είναι συνεχείς στο [α,β]. Αν $f(\alpha) > g(\alpha)$ και $f(\beta) < g(\beta)$, να αποδεδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

83. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 3x$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

84. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύουν $f(0) < 1$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 < 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} + x_0 \eta\mu \frac{1}{x_0}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ ΣΤΟ (α,β)

Για να δείξω ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο (α,β):

1ο Βήμα : Δείχνω ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β) με Θ. Bolzano

2ο Βήμα : Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β), οπότε η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

85. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $e^x = 2 - x$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1)

Λύση : Έχω : $e^x = 2 - x \Leftrightarrow e^x + x - 2 = 0$, έστω $f(x) = e^x + x - 2$, $D_f = \Re$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

1ο Βήμα : θ.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

Θ.Β. για την $f(x)$ στο [0,1]

- $f(x)$ συνεχής στο [0,1] ως π.σ.
- $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e - 1 > 0$ άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

2ο Βήμα : θ.δ.ο. η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη

Έστω $x_1, x_2 \in \Re$ με :

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$ (2), προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1} + x_1 - 2 < e^{x_2} + x_2 - 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Άρα τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

86. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $e^x = 3 - 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1)

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\ln x + x - 2$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο (1,e).

88. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 2x$ και $g(x) = 15 - 5x$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα (2,3).

89. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα (λ, μ) και μια στο (μ, ν).

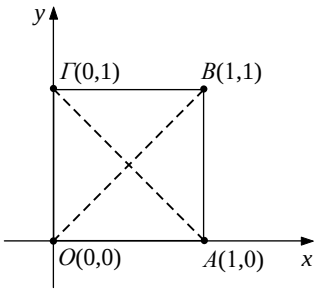
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ Θ. BOLZANO

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

90. Ένας πεζοπόρος ξεκάνει από ένα χωριό Α στις 6 π.μ. και φτάνει σε ένα άλλο χωριό Β στις 11 π.μ. Την επόμενη μέρα ξεκάνει από το χωριό Β στις 6 π.μ. και φτάνει στο χωριό Α στις 11 π.μ., κάνοντας την ίδια διαδρομή. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δυο ημέρες.

91. Ένα αυτοκίνητο ξεκάνει στις 7 π.μ. από μια πόλη Α και φτάνει στις 12 μ.μ. σε μια πόλη Β. Την επόμενη μέρα ξεκάνει στις 7 π.μ. από την πόλη Β και φτάνει στις 12 μ.μ. στην πόλη Α ακλουθώντας την ίδια διαδρομή. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δυο ημέρες.

92. Δίνεται το τετράγωνο *ΟΑΒΓ* του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο $[0,1]$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.



i. Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου
ii. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.

1.8γ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γ. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO

26. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του ενδιαμέσων τιμών.

Διατύπωση :

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

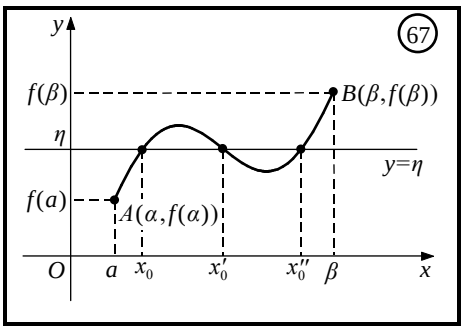
Απόδειξη : **(2001 ΟΜΟΓ., 2005, 2010 ΕΣΠ. Β΄, 2013 ΕΣΠ., 2015)**

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

Αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.



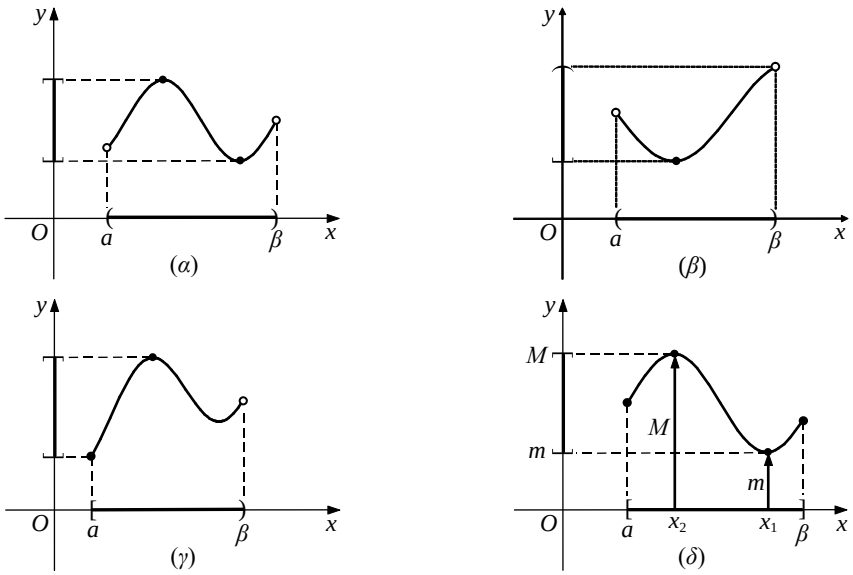
Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β] και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $y = \eta$, τότε η C_f τέμνει την ευθεία $y = \eta$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, \eta)$ με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Σχόλια :

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



27. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Απάντηση :

Στην ειδική περίπτωση που το *Δ* είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

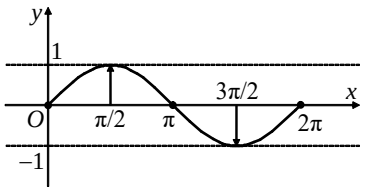
Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$m \le f(x) \le M$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Σχόλιο :

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m,M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

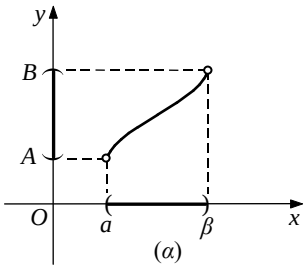
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0,2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$ με $m = -1$ και $M = 1$.



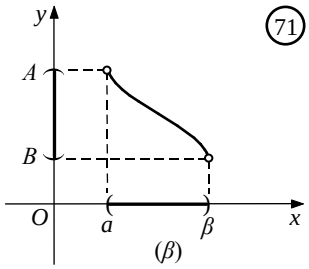
• Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) (Σχ. 71α), όπου $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) (Σχ. 71β).



(α)

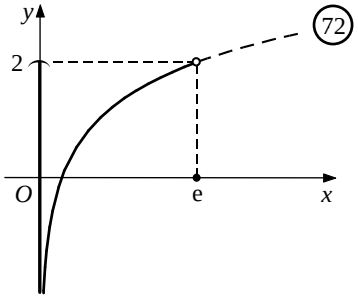


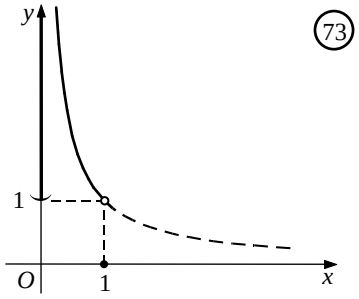
(β)

Για παράδειγμα,

— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\ln x+1$, $x\in(0,e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα $(-\infty,2)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to e^-} f(x)=2\,.$$





— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, (Σχ. 73) είναι το διάστημα $(1,+\infty)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1} f(x)=1\,.$$

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ και $(\alpha,\beta]$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : Θ.Ε.Τ. – ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ & ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Α. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η *f* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε : $f(x_0)=\eta$

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παίρνει δυο τιμές διαφορετικές μεταξύ τους, τότε η f παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες (Θ.Ε.Τ.). Άρα αν η f δεν είναι σταθερή, τότε το σύνολο τιμών της f(Δ) είναι επίσης διάστημα.

Β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu \in [\alpha,\beta]$ ώστε : $f(x_\varepsilon)=\mu \le f(x) \le M = f(x_\mu)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ που σημαίνει ότι τα μ, Μ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$

Γ. Ένα θεωρητικό συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω θεωρήματα είναι ότι «Αν η f είναι συνεχείς και ¨1-1¨ σε διάστημα Δ, τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Δ».

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

93. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+5x^3-x+10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=50$.

1ος Τρόπος : Εφαρμόζω Θ.Ε.Τ. για την $f(x)$

- $f(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πολυωνυμική
- $f(1) \neq f(2)$ (αφού $f(1)=15,\quad f(2)=80$)

Άρα από Θ.Ε.Τ. , αφού $f(1)<50<f(2)$, η εξίσωση $f(x)=50$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

2ος Τρόπος : Έστω $g(x)=f(x)-50$, θ.δ.ο. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Εφαρμόζοντας Θ.Bolzano στη $g(x)$ στο [1,2] …

94. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0,1]. Αν f(0)=2 και f(1)=4 να δείξετε ότι :

i. Η ευθεία y=3 , τέμνει τη C_f , σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

ii. Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε : $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$ ***(2ο 2000)***

Λύση :

i. Αρκεί ν.δ.ο η εξίσωση $f(x)=3$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

1ος Τρόπος : Εφαρμόζω Θ.Ε.Τ. για την $f(x)$

- $f(x)$ συνεχής στο [0,1]
- $f(0) \neq f(1)$ (αφού $f(0)=2, f(1)=4$)

Άρα από Θ.Ε.Τ. , αφού $f(0)<3<f(1)$, η εξίσωση $f(x)=3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1) και επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και μοναδική.

2ος Τρόπος : Έστω $g(x)=f(x)-3$, θ.δ.ο. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1). Θ.Β. στη $g(x)$ στο [0,1] και μονοτονία…

ii. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0,1], έχουμε : $0<x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0)<f(x)<f(1)$ για κάθε $x\in(0,1)$. Άρα :

- $f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)<f(1)$ (1)
- $f(0)<f\left(\frac{2}{5}\right)<f(1)$ (2)
- $f(0)<f\left(\frac{3}{5}\right)<f(1)$ (3)
- $f(0)<f\left(\frac{4}{5}\right)<f(1)$ (4)

Αν προσθέσω κατά μέλη τις (1), (2), (3), (4) έχω : $4f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)<4f(1) \Leftrightarrow f(0)<\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}<f(1)$

Από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε : $f(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

95. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,4]\to\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[1,4]$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0)=\frac{f(1)+2f(2)+3f(4)}{6}$.

Λύση :

Επειδή η f είναι συνεχής στο [1,4], από Θ.Μ.Ε.Τ. θα έχει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m επομένως θα ισχύει $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[1,4]$. Άρα :

- $m\le f(1)\le M$ (1)
- $m\le f(2)\le M \Leftrightarrow 2m\le 2f(2)\le 2M$ (2)
- $m\le f(4)\le M \Leftrightarrow 3m\le 3f(3)\le 3M$ (3)

Αν προσθέσω κατά μέλη τις (1), (2), (3), έχω : $6m\le f(1)+2f(2)+3f(3)\le 6M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m\le\frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}\le M$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\Delta=[1,4]$, το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $f(\Delta)=[m,M]$. Έτσι ο αριθμός $\eta=\frac{f(1)+2f(2)+3f(4)}{6}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, έτσι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[1,4]$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0)=\frac{f(1)+2f(2)+3f(4)}{6}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

96. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+5x^3-x+10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο τέτοιο ώστε $f(\xi)=50$.

97. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[1,3]\to\Re$ με $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$ και $f(1)\cdot f(3)=10$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=4$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (1,3)

98. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(2)+f(3)<5<f(1)+f(4)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi,\eta\in\Re$, ώστε $\xi+\eta=5$ και $f(\xi)+f(\eta)=5$.

99. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,5]\to\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον τουλάχιστον $x_0\in[1,5]$, τέτοιο ώστε : $f(x_0)=\dfrac{3f(2)+5f(3)+7f(4)}{15}$.

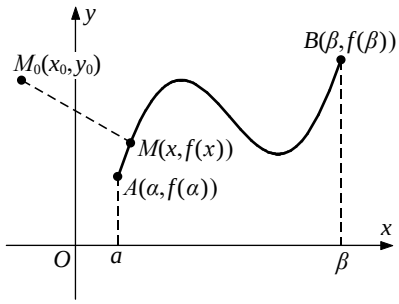
100. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[0,4]$ τέτοιο ώστε $2f(1)+3f(2)+4f(3)=9f(\xi)$.

101. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(1)+2f(2)+3f(3)=6f(\xi)$.

102. Έστω συνάρτηση f συνεχής και $f\uparrow[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$.

103. Έστω f συνεχής και γνησίως μονότονη στο [0,4] με $f(4)=1$ και $f(0)=7$.
   i. Να βρεθεί το είδος μονοτονίας της f.
   ii. Αν $\alpha\in[1,7]$ να δείξετε ότι η $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο [0,4]
   iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi)=\dfrac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9}$.

104. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη *C* είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και το $M_0(x_0,y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου.



   i. Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x)=(M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
   ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα, στα οποία χωρίζουν το πεδίο ορισμού οι διαδοχικές ρίζες της. Η διαδικασία που ακολουθούμε ώστε να βρούμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι η εξής :

- Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$, $x\in D_f$
- Σε πίνακα πρόσημου χωρίζουμε το πεδίο ορισμού σε διαστήματα, τοποθετώντας τις ρίζες και τα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού.
- Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που δημιουργούνται επιλέγουμε κατάλληλο αριθμό ξ και βρίσκουμε το πρόσημο της τιμής $f(\xi)$. Το πρόσημο αυτό έχει η f σε ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

105. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης : $f(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,2\pi]$.

Λύση :

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες της $f(x)=0$ στο $[0,2\pi]$. Έχουμε

$$f(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\quad \kappa\in Z$$

και $x\in[0,2\pi]$ άρα $x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$.

Έτσι οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα : $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$, επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που οι διαδοχικές ρίζες χωρίζουν το $[0,2\pi]$, δηλαδή στα διαστήματα : $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
$f(x_0)$	$f(0)=-1$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$	$f(2\pi)=-1$
Πρόσημο	−	+	−

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ είναι $f(x)<0$, ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ είναι $f(x)>0$.

106. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}$

Λύση : $f(x)=\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}$, πρέπει $x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq -3$ (1) και $16-x^2\geq 0\Leftrightarrow x\in[-4,4]$ (2) άρα από (1) και (2) $D_f=[-3,4]$.

$f(x)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}=0\Leftrightarrow\sqrt{x+3}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=1\Leftrightarrow x+3=1\Leftrightarrow x=-2$ δεκτή

ή $\sqrt{16-x^2}=0\Leftrightarrow 16-x^2=0\Leftrightarrow x=4$ δεκτή ή $x=-4$ απορ.

x	-3	-2		4
$\sqrt{x+3}-1$	-	0	+	
$\sqrt{16-x^2}$	+		+	0
$f(x)=\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}$	-		+	

Άρα : $f(x)<0$ για κάθε $x\in[-3,-2)$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,4)$ και $f(x)=0$ όταν $x=-2,ή,x=4$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

107. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ με : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
ii. Να βρεθούν οι ρίζες της f(x)=0
iii. Να αποδειχθεί ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (-3,3)

108. Να βρείτε το πρόσημα της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x, όταν:

i. $f(x)=\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}$, $x\in(-\pi,\pi)$
ii. $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,2\pi]$.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 2x+2(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-1$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ στο [0,π].
iii. Να βρείτε το πρόσημο της f στο [0,π].

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΑΠΟ f^2.

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό. Αυτή η διαπίστωση μας βοηθάει να βρούμε τον τύπο μιας συνεχούς συνάρτησης η οποία ικανοποιεί μια δοσμένη σχέση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$

110. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(0)=3$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει : $f^2(x)=x^2+9$, για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$, $f^2(x)=x^2+9\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow|f(x)|=\sqrt{x^2+9}$, (1)

Όμως $\sqrt{x^2+9}\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$, άρα από (1) έχουμε : $|f(x)|\neq 0\Leftrightarrow f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\Re$. Είναι $f(0)=3>0$, συνεπώς $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$. Τελικά η (1) γίνεται $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, $x\in\Re$.

111. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(0)=-3$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει : $f^2(x)=9+6xf(x)$, για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$, $f^2(x)=9+6xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-6xf(x)=9\Leftrightarrow$

$f^2(x)-6xf(x)+9x^2=9x^2+9\Leftrightarrow(f(x)-3x)^2=9x^2+9\Leftrightarrow|f(x)-3x|=\sqrt{9x^2+9}$ (1)

Έστω η συνάρτηση : $g(x)=f(x)-3x$, $x\in\Re$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Οπότε η (1) γίνεται : $|g(x)|=\sqrt{9x^2+9}$, $x\in\Re$ (2).

Όμως $\sqrt{9x^2+9}\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$, άρα από (2) έχουμε : $|g(x)|\neq 0\Leftrightarrow g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$ και g συνεχής, άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\Re$. Είναι $g(0)=f(0)-0=-3<0$, συνεπώς $f(x)<0$ για κάθε $x\in\Re$. Τελικά η (2) γίνεται

$-g(x)=\sqrt{9x^2+9}\Leftrightarrow g(x)=-\sqrt{9x^2+9}\Leftrightarrow f(x)-3x=-\sqrt{9x^2+9}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=3x-\sqrt{9x^2+9}$, $x\in\Re$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 :

$f(x)\neq 0$ για κάθε x ανήκει στο εσωτερικό το Α και μηδενίζει στα άκρα του Α

112. (Άσκηση 7 σελ. 200 Ομάδας σχολικό βιβλίο)

Έστω f μια συνεχή συνάρτηση στο διάστημα [-1,1], για την οποία ισχύει : $x^2+f^2(x)=1$ για κάθε $x\in[-1,1]$

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$
ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1).
iii. Να βρεθεί ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f.
iv. Αν $f(0)=1$, να βρείτε την f.

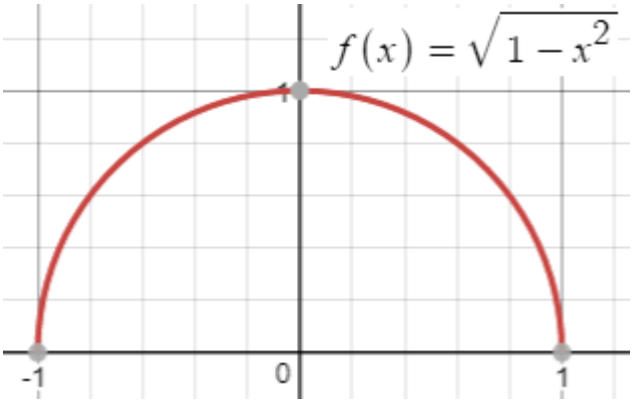
Λύση :

i. Έχω $x^2 + f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 - x^2$,
$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, ή, x = -1$.

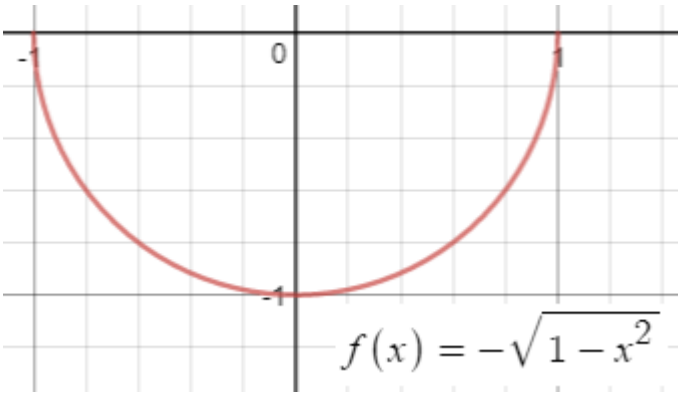
ii. Στο διάστημα (-1,1) η $f(x)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζει (αφού οι μόνες ρίζες της $f(x) = 0$ είναι οι $x = 1, ή, x = -1$) άρα η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1).

iii. Η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1) άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

- Αν $f(x) > 0$ στο $(-1,1)$, τότε : $f^2(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και από τη σχέση $f^2(x) = 1 - x^2$ παίρνουμε : $f(-1) = f(1) = 0$,έτσι έχουμε $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.



- Αν $f(x) < 0$ στο $(-1,1)$, τότε : $f^2(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow -f(x) = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και από τη σχέση $f^2(x) = 1 - x^2$ παίρνουμε : $f(-1) = f(1) = 0$,έτσι έχουμε $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.



iv. Επειδή $f(0) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1,1]$.

113. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ με $f^2(x)-3x-4=-x^2$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

iii. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο με τεταγμένη -2, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση :

i. Για κάθε $x\in\mathrm{A}$ είναι : $f^2(x)=-x^2+3x+4$, όμως $f^2(x)\geq 0$ άρα πρέπει $-x^2+3x+4\geq 0\Leftrightarrow x\in[-1,4]$ οπότε : $\mathrm{A}=[-1,4]$.

ii. $f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow -x^2+3x+4=0\Leftrightarrow x=-1 \quad ή \quad x=4$.

iii. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο με τεταγμένη -2, δηλ. το σημείο $\mathrm{M}(0,-2)\in C_f \Leftrightarrow f(0)=-2$.

Επίσης : $f^2(x)=-x^2+3x+4\Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{-x^2+3x+4}$

Όμως η f είναι συνεχής στο $(-1,4)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,4)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-1,4)$ και $f(0)=-2<0$ άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,4)$. Επίσης είναι $f(-1)=f(4)=0$, οπότε : $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[-1,4]$.

Έτσι έχουμε :

$|f(x)|=\sqrt{-x^2+3x+4}\Leftrightarrow -f(x)=\sqrt{-x^2+3x+4}\Leftrightarrow f(x)=-\sqrt{-x^2+3x+4}$ για κάθε $x\in[-1,4]$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 :

Η f μηδενίζει σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του Α και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq x_0$

114. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει ότι : $f^2(x)=x^2$ για κάθε $x\in\Re$.

Λύση :

Έχουμε : $f^2(x)=x^2$, $x\in\Re$

$f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$, δηλ. $f(0)=0$

Η συνάρτηση f στο διάστημα $(-\infty,0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σε αυτό άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$.

- Αν $f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ τότε : $f^2(x)=x^2\Leftrightarrow |f(x)|=|x|\Leftrightarrow -f(x)=-x\Leftrightarrow f(x)=x$ (1)
- Αν $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$ τότε : $f^2(x)=x^2\Leftrightarrow |f(x)|=|x|\Leftrightarrow f(x)=-x$ (2)

Ομοίως η συνάρτηση f στο διάστημα $(0,+\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σε αυτό άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

- Αν $f(x)<0$ στο $(0,+\infty)$ τότε : $f^2(x)=x^2\Leftrightarrow |f(x)|=|x|\Leftrightarrow -f(x)=x\Leftrightarrow f(x)=-x$ (3)
- Αν $f(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ τότε : $f^2(x)=x^2\Leftrightarrow |f(x)|=|x|\Leftrightarrow f(x)=x$ (4)

Συνδυάζοντας τα παραπάνω η $f:\Re\to\Re$ έχει έναν από τους παρακάτω τύπους :

1ον από (1), (3) $f(x)=\begin{cases}x & ,x<0\\ -x & ,x\geq 0\end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

2ον από (1), (4) $f(x)=\begin{cases}x & ,x<0\\ x & ,x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=x$ για κάθε $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

3ον από (2), (3) $f(x)=\begin{cases}-x & ,x<0\\ -x & ,x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=-x$ για κάθε $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

4ον από (2), (4) $f(x)=\begin{cases}-x & ,x<0\\ x & ,x\geq 0\end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

115. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\Re$ η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ που ικανοποιούν την σχέση : $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\Re$. ΘΕΜΑ Γ (2016)

Λύση :

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, το $g(0)=0$, δηλ. $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Re$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

Είναι : $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)\Leftrightarrow |f(x)|=|g(x)|\overset{\Gamma 1.}{\underset{g(x)\geq 0}{\Leftrightarrow}}|f(x)|=g(x)$

- Για $x=0$ είναι : $|f(0)|=g(0)\Leftrightarrow |f(0)|=0\Leftrightarrow f(0)=0$
- Για $x>0$ είναι : $f^2(x)>0$ άρα $g(x)\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$
  - Αν $f(x)>0$ τότε $f(x)=g(x)$ (1)
  - Αν $f(x)<0$ τότε $f(x)=-g(x)$ (2)
- Για $x<0$ είναι : $f^2(x)>0$ άρα $g(x)\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$
  - Αν $f(x)>0$ τότε $f(x)=g(x)$ (3)
  - Αν $f(x)<0$ τότε $f(x)=-g(x)$ (4)

Τελικά :

1ον από (1), (3) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

2ον από (1), (4) $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0\\ -e^{x^2}+x^2+1, & x<0\end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

3ον από (2), (3) $f(x)=\begin{cases}-e^{x^2}+x^2+1, & x\geq 0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0\end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

4ον από (2), (4) $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1,\ x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

116. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ με $x^2+f^2(x)=4$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$
   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
   iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-2,2).
   iv. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

117. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ με $f^2(x)=9-x^2$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$
   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
   iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-3,3).
   iv. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

118. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση : $\big(f(x)-2\eta\mu x\big)\big(f(x)+2\eta\mu x\big)=4\sigma\upsilon\nu^2x$ για κάθε $x\in\Re$

119. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση :
$f^2(x)=2e^xf(x)$ για κάθε $x\in\Re$.

120. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση : $\big(f(x)-\sigma\upsilon\nu x\big)\big(f(x)+\sigma\upsilon\nu x\big)=\eta\mu^2x$ για κάθε $x\in\Re$
   i. να αποδείξετε ότι $f^2(x)=1$
   ii. να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον χ'χ
   iii. να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο
   iv. να βρείτε τον τύπο της f

121. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει ότι : $f^2(x)+2x=x^2+1$ για κάθε $x\in\Re$.

122. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x)=1+2xf(x)$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=1$.

123. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με την ιδιότητα : $f^2(x)-1=2xf(x)$ για κάθε $x\in\Re$.
   i. να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x) -x διατηρεί σταθερό πρόσημο
   ii. αν f(0)=1, τότε
   α. να βρείτε τον τύπο της f β. να υπολογίσετε το όριο Α= $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(xf(x)\big)$

124. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x)-2xf(x)=5$ για κάθε $x\in\Re$. Επίσης η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(2,-1).
   i. Να αποδείξετε ότι η $f(x)<0$ για κάθε $x\in\Re$.
   ii. Να βρείτε τον τύπο της f iii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

125. **Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re^*$ για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x)-6f(x)+5=x^4+4x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε :

i. την τιμή f(1) ii. τον τύπο της f iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : $f(x)$ ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΙ $f(x)\neq 0$

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό. Αυτή η διαπίστωση μας βοηθάει να βρούμε τον τύπο μιας συνεχούς συνάρτησης η οποία ικανοποιεί μια δοσμένη σχέση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

126. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[-2,4]\to\Re$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-2,4]$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(-1,-5).

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x)+16=x^2-2f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,4)

ii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\pi)x^3+5x^2-3\right)$

Λύση :

i. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(-1,-5), άρα $f(-1)=-5$
Επίσης η f είναι συνεχής στο $[-2,4]$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-2,4]$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-2,4]$. Όμως $f(-1)=-5<0$, άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in[-2,4]$.

Έστω $g(x)=xf(x)+2f(x)-x^2+16$ με $x\in[-2,4]$, θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,4).
Θ.Bolzano για τη $g(x)$ στο $[-2,4]$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[-2,4]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(-2)=-2f(-2)+2f(-2)-4+16=12>0$
  $g(4)=4f(4)+2f(4)-16+16=6f(4)<0$ καθώς $f(x)<0$ για κάθε $x\in[-2,4]$
  Άρα $g(-2)\cdot g(4)<0$. Οπότε από Θ.Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,4).

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\pi)x^3+5x^2-3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\pi)x^3\right)=+\infty$ καθώς $f(\pi)<0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$.

127. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία είναι συνεχής. Οι αριθμοί 1 και 3 είναι διαδοχικές ρίζες της f και $f(2)<0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to3^-}e^{\frac{1}{f(x)}}$.

Λύση :
Επειδή η f είναι συνεχής στο $\Re$ και οι αριθμοί 1 και 3 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,3)$. Επιπλέον το $2\in(1,3)$ και $f(2)<0$, άρα $f(x)<0$, για κάθε $x\in(1,3)$.

Στο όριο $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{f(x)}}$, θέτω $\frac{1}{f(x)} = y$. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \overset{f\ συνεχής}{=} f(3) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο 3^-, έτσι : $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$. Τελικά $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{f(x)}} = \lim\limits_{y\to -\infty} e^y = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

128. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,2]\to\Re$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-1}+\frac{f(x)}{x-2}=2010$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

129. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε : $\frac{\eta\mu\xi}{f(\xi)}=\frac{1}{\xi-\alpha}+\frac{1}{\xi-\beta}$.

130. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x+3}-2}=8$.

i. Να βρείτε την τιμή f(1).
ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(2)x^3-2x^2+3x-5\right)$.

131. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)+\eta\mu^2 3x}{\sqrt{x^2+4}-2}=16$.

i. Να βρείτε την τιμή f(0)
ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(2010)x^3-3x^2+2x-1\right)$

132. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,4]\to\Re$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(2,5).

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x)-16=-x^2+f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,4).
ii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(3)x^5-2x^3+5x^2-1\right)$.

133. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $xf(x)=(x^2-4)e^x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (-2,2).

134. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $x^3f^2(x)-2x^5f(x)=-x^2+x-1$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε το f(1)
ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$.

135. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in\Re$. Επίσης η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(3,2). Να αποδείξετε ότι :
   i. $f(x)<x$, για κάθε $x\in\Re$ ii. υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $\xi\cdot f(\xi)=1$.

136. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύουν : $f(2007)+f(2006)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

137. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu 3x}{\sqrt{x+1}-1}=2$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδικές ρίζες τις -1 και 3. Να βρείτε :
   i. Την τιμή $f(0)$
   ii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(e)\ln x\right)$
   iii. Το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+f(1)x\right)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Για να βρούμε το σύνολο τιμών f(Δ) μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ=(α,β) κάνω τα εξής :

- Διαπιστώνω ότι η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ=(α,β)
- Βρίσκω τα όρια : $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)$ οπότε :
  - ✓ f(Δ)=(A,B) , αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή
  - ✓ f(Δ)=(B,A) , αν η f είναι γνησίως φθίνουσα

Αν κάποιο από τα άκρα του Δ είναι κλειστό, τότε και το αντίστοιχο του f(Δ) θα είναι κλειστό.

ΜΟΡΦΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ	ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ f	ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ f
[α,β]	Γνησίως Αύξουσα	$[f(\alpha),f(\beta)]$
[α,β]	Γνησίως Φθίνουσα	$[f(\beta),f(\alpha)]$
(α,β]	Γνησίως Αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x),f(\beta)\right]$
(α,β]	Γνησίως Φθίνουσα	$\left[f(\beta),\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$
[α,β)	Γνησίως Αύξουσα	$\left[f(\alpha),\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$
[α,β)	Γνησίως Φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x),f(\alpha)\right]$
(α,β)	Γνησίως Αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x),\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$
(α,β)	Γνησίως Φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x),\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

138. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}-e^{x^2+1}-\ln x$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Λύση : Πρέπει $1-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$ και $x>0$ άρα $A_f=(0,1]$

$A_f=(0,1]$, έστω $x_1,x_2\in A_f=(0,1]$ με :

$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 1-x_1>1-x_2\Rightarrow \sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}$ (1)

$x_1<x_2\overset{x>0}{\Rightarrow}x_1^2<x_2^2\Rightarrow x_1^2+1<x_2^2+1\Rightarrow e^{x_1^2+1}<e^{x_2^2+1}\Rightarrow -e^{x_1^2+1}>-e^{x_2^2+1}$ (2)

$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow -\ln x_1>-\ln x_2$ (3), προσθέτω κατά μέλη τις (1), (2) και (3) και έχω: $\sqrt{1-x_1}-e^{x_1^2+1}-\ln x_1>\sqrt{1-x_2}-e^{x_2^2+1}-\ln x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_f=(0,1]$ άρα $f(A)=[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x))$

$f(1)=-e^2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{1-x}-e^{x^2+1}-\ln x)\overset{1-e-(-\infty)}{=\!=\!=}+\infty$ άρα $f(A)=[-e^2,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

139. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x^2+e^x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5-\sqrt{x-1}-\ln x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

141. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

.

142. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο διάστημα.

i. $f(x)=3-2x$ στο [-1,2]
ii. $f(x)=x^2+\ln x-1$ στο [1,e]
iii. $f(x)=e^{-x}-2x+1$ στο [0,1)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΓΙΑ Ν.Δ.Ο. Η ΕΞΙΣΩΣΗ f(x)=0 ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΑ

1ος Τρόπος Με προφανή ρίζα.
2ος Τρόπος Αν ζητείται να δείξω ότι η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) τότε εφαρμόζω το Θ.Bolzano για την f.
Υποπερίπτωση : Αν θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=\kappa$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) θεωρώ νέα συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ ή $h(x)=f(x)-\kappa$ αντίστοιχα και εφαρμόζω Θ.Bolzano στην h.
3ος Τρόπος Με τη βοήθεια του συνόλου τιμών. Αν το $0\in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα. Γενικότερα αν το $\kappa\in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση f(x)=κ , $\kappa\in\Re$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.
Υποπερίπτωση : Αν θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα θεωρώ νέα συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ και βρίσκω το $h(\Delta)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΓΙΑ Ν.Δ.Ο. Η ΕΞΙΣΩΣΗ f(x)=0 ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΡΙΖΑ

1ο Βήμα δείχνω ότι η f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα με έναν από τους παραπάνω τρόπους
2ο Βήμα δείχνω ότι η f(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα (συνήθως με μονοτονία) οπότε συμπεραίνω ότι έχει ακριβώς μια ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

143. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x-1)+e^{x-2}=1$ έχει μια μόνο ρίζα. Στη συνέχεια να βρεθεί η ρίζα αυτή.

Λύση :

$\ln(x-1)+e^{x-2}=1\Leftrightarrow \ln(x-1)+e^{x-2}-1=0$, έστω $f(x)=\ln(x-1)+e^{x-2}-1$ με $A_f=(1,+\infty)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_f=(1,+\infty)$.

έστω $x_1,x_2\in A_f=(1,+\infty)$ με :

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow \ln(x_1-1)<\ln(x_2-1)$ (1)

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-2<x_2-2\Rightarrow e^{x_1-2}<e^{x_2-2}\Rightarrow e^{x_1-2}-1<e^{x_2-2}-1$ (2)

προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω: $\ln(x_1-1)+e^{x_1-2}-1<\ln(x_2-1)+e^{x_2-1}-1\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_f=(1,+\infty)$ άρα

$f(A)=(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(\ln(x-1)+e^{x-2}-1)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x-1)+e^{x-2}-1)=+\infty$

άρα $f(A)=(-\infty,+\infty)=\Re$. Το $0\in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $A_f=(1,+\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και μοναδική.

Για να βρούμε τη ρίζα θα ψάξουμε να βρούμε την προφανή ρίζα. Παρατηρώ ότι για $x=2$, έχω $f(2)=\ln(2-1)+e^{2-2}-1=\ln1+1-1=0$, άρα η $x=2$ ρίζα της $f(x)=0$ και επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

144. (ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΘΕΜΑ) Αν η συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\Re$ είναι συνεχής και 1-1, τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

145. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1$
   i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
   iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+e^{x-1}=1$ έχει μια μόνο ρίζα.
   iv. Να βρεθεί η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-e^{-x}+x+1$
   i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
   iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα.

147. Για κάθε $\kappa\in\Re$ δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=2x^3-\kappa x^2+10$
   i. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(-\infty,0]$ να βρείτε το f(Δ)
   ii. Για κάθε $\alpha\in(14,15)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha-5$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

148. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^x$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει μια ακριβώς θετική ρίζα.

149. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\ln(9-x)$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e$ έχει μια ακριβώς ρίζα.

150. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\ln x$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
   ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε μόνο ένα σημείο.

151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-\sqrt{x-1}-\ln x$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
   ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε μόνο ένα σημείο.

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-e^{-x}$.
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε μόνο ένα σημείο.
   iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\sqrt{x}\cdot e^x=1+2012e^x$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

153. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.
   i. $f(x)=e^x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ii. $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΟΡΙΟ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\Re$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f((\alpha,\beta))=(\gamma,\delta)$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=\gamma$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=\delta$.

Αν μια συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\Re$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα με $f((\alpha,\beta))=(\gamma,\delta)$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=\delta$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=\gamma$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

154. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta=(-\infty,1)$, να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+x^2}{x+2016}$.

Λύση :

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Re$, οπότε έχει σύνολο τιμών $f(\Re)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,1)$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$.

Τελικά : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+x^2}{x+2016}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(\frac{f(x)}{x^2}+1\right)}{x\left(1+\frac{2016}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\frac{f(x)}{x^2}+1\right)}{1+\frac{2016}{x}}=\dfrac{-\infty(0+1)}{1+0}=-\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

155. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta=(-\infty,0)$, να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2}{x-1}$.

156. Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+1$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

157. Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+1$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{-x+1}-x-2, x\le 1 \\ \ln x+x-3, x>1 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς δυο ρίζες.
iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)+2}{x-1}+\frac{f(\beta)+2}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2) για κάθε $\alpha,\beta\in\Re-\{1\}$.
iv. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$.

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{x}+x, x\le 0 \\ e^{-x}-\ln(x+1), x>0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς δυο ρίζες ετερόσημες.
iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)-1}{x-1}+\frac{f(\beta)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2) για κάθε $\alpha,\beta\in\Re^*$.
iv. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$.

153. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1)+\eta\mu\alpha=\ln x+\alpha$ έχει μια ακριβώς λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$ για κάθε θετικό αριθμό α.

154. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\gamma\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\delta\in\Re$, να δείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0>0$ τέτοιος ώστε να ισχύει : $f(x_0)+e^{x_0+1}+\ln x_0=1$

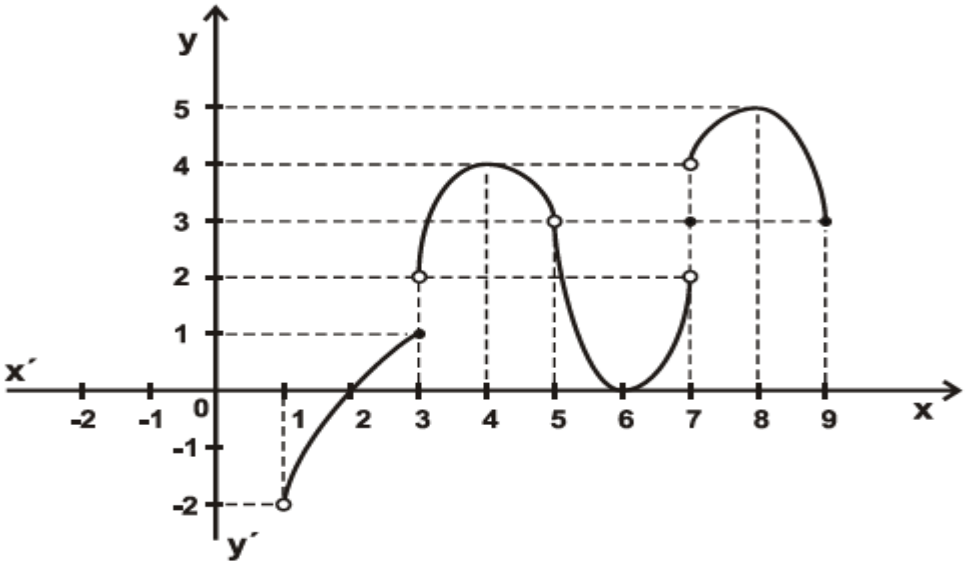
155. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln x+x-1$.

i. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa\in\Re$ η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μια μόνο ρίζα.
iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e$
iv. Να βρείτε το $\lambda\in\Re$ ώστε να ισχύει : $e^{\lambda^2+1}-e^{2\lambda}=\ln(2\lambda)-\ln(\lambda^2+1)-\lambda^2+2\lambda-1$.

156. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $xf(x)-x^2=\alpha x+\beta-2f(x)$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$.

i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$.
ii. Να βρείτε τον τύπο της f.
iii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0^2+1$.

157. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 8} f\big(f(x)\big)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iv. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. ***(ΘΕΜΑ Β ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2016)***

158. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,9]\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι :

- $f(1)\cdot f(3)\cdot f(9)=27$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,9]$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,9]$.

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[1,9]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=3$.

iii. η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1,9]$.

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-e^{3x}-x^3+1$.

i. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}$.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-e^{3x}-x^3-2015}=1$, έχει μοναδική ρίζα.

v. Αν για τη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\Re$ ισχύει : $e^{3g(x)}+g^3(x)=x^3e^6+(\ln x+2)^3$, για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι ο τύπος της g είναι $g(x)=\ln x+2$ και να βρεθεί η αντίστροφη της. ***(ΘΕΜΑ Β ΟΕΦΕ 2016 Α΄ΦΑΣΗ)***

160. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με τύπο : $f(x)=2x^4+3\ln x+1$.
   i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.
   ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
   iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\Re$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.
   iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει : $\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$. ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

161. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x^2}-e$, $x\in(0,+\infty)$. Να βρείτε :
   i. Το πρόσημο της τιμής $f\left(\frac{1}{100}\right)$.
   ii. Το σύνολο τιμών της f.
   iii. Να αποδείξετε ότι : $f(0{,}01)\cdot f\left(\sqrt[3]{2006}\right)>f(0{,}01)\cdot f\left(\sqrt[3]{2007}\right)$
   iv. Να συγκρίνετε τους θετικούς αριθμούς α και β αν ισχύει η ισότητα : $e^{\alpha^2}+\ln\alpha=e^{\beta^2}+\ln\beta$.

162. Δίνονται οι συνεχείς στο $\Re$ συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύουν :
   - $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$
   - Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$
   - $\rho_1=-1$ και $\rho_2=5$ είναι δυο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$.

   i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$
   ii. Να αποδείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,5)$
   iii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(3)x^4+2x^2+1}{g(2)x^3+5}=-\infty$ ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

163. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1$ για κάθε $x\in\Re$, $\alpha\in\Re^*$.
   i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$.
   ii. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.
   iii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha<2$.
   iv. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha>3$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

164. Δίνεται η συνεχής στο 0 συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν :
   - $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$ (1)
   - $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$

   i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$
   ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$
   iii. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x\in\Re$
   iv. Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα το 0 τότε να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x\cdot y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$.

165. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$

ii. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

iii. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}$

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)-\xi=0$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

166. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0\\ \lambda\ , & x=0\\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0\end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ,λ.

ii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

iii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

167. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν :

- $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x\in\Re$.
- $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2016$, για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ii. Να βρείτε το $f(1)$

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

168. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,8]\to\Re$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση : $f^3(x)+f(x)=x+2$ (1) για κάθε $x\in[0,8]$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. $f\left(\frac{23}{8}\right)=\frac{3}{2}$

iii. Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

iv. Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συνταγμένες του.

(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2014)

169. Έστω η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση : $f^2(x)=2xf(x)-x^2f(2-x)$ για κάθε $x\in\Re$ με $f(2)=0$.
   i. Να αποδείξετε ότι $[f(x)-x]^2=x^2[1-f(2-x)]$ για κάθε $x\in\Re$.
   ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\Re$.
   iii. Αν η C_f έχει με τον άξονα x΄x δυο μόνο κοινά σημεία, τότε να αποδείξετε ότι για $x=1$ η f παίρνει μέγιστη τιμή $f(1)=1$. ***(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2008)***

170. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $f(0)=2$ η οποία για κάθε $x\in\Re$ ικανοποιεί τη σχέση : $f\big(f(x)\big)+4f(x)=6-x^4$ (1)
   i. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.
   ii. Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=0$
   iii. Αν $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+4f(x)-5}{x-1}=-4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to1}f\big(f(x)\big)$
   iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\big(f(x)\big)+1=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $\big(-\sqrt{2},\sqrt{2}\big)$. ***(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2010)***

171. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία για κάθε $x\in\Re$ ικανοποιεί τη σχέση : $f^2(x)=x^6$.
   i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
   ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
   iii. Αν $f(-2)>0$ και $f(2)<0$, να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^3$
   iv. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
   v. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}. ***(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2010)***

172. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, για την οποία ισχύει : $f^2(x)+2xf(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2x-x^2$, για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, με $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{6}$.
   i. Να δείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x-x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   ii. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}f(x)+1, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-1, & x<0\end{cases}$, με $\kappa\in\Re$. Να βρείτε την παράμετρο κ, ώστε η g να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
   iii. Για $\kappa=2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$.
   iv. Για $\kappa=2$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1-1.

(ΘΕΜΑ Γ Ο.Ε.Φ.Ε. 2016 ΦΑΣΗ Α΄)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 1ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2019

➢ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A,B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

2) Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

3)Μία συνάρτηση f : A → IR είναι συνάρτηση 1 – 1,αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 ∈ A ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

4) Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις *fog* και *gof*, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

5) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς
την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

6) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

7) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία y = x, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

8) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog ≠ gof.

9) Μία συνάρτηση f : A→ IR. λέγεται συνάρτηση 1 – 1, όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2 ∈A ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

10) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_o∈A (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_o)$, όταν : $f(x) < f(x_o)$ για κάθε x∈A.

11) Μια συνάρτηση f : A → IR είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

12) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον xx΄) τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.

13) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f.

14) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

15) Αν μια συνάρτηση f:A→ IR είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x\,,\ x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y\,,\ y \in f(A)$$

16) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

17) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο x_0∈A, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x∈A

18) Η συνάρτηση f είναι 1 – 1 , αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

19) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε πάντοτε ισχύει fog = gof

20) Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης.

21) Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

22) Μια συνάρτηση f:A→ $\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2∈A ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

23) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

24) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

25) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1 – 1 στο διάστημα αυτό.

26) Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

27) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης – f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f.

28) Αν μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

29) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η ho(gof), τότε ορίζεται και η (hog)of και ισχύει : ho(gof) = (hog)of

30) Αν η συνάρτηση $f : A \to R$ είναι 1 – 1 τότε ισχύει : $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$

31) Αν η f είναι 1-1 και το σημείο Μ (α, β) ανήκει στην γραφική παράσταση C της f , τότε το Μ'(β, α) θα ανήκει στην γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως.

➢ ΟΡΙΑ

32) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

33) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0 .

34) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o , τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_o} f(x)+\lim_{x\to x_o} g(x)$$

35) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o , τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_o} f(x)-\lim_{x\to x_o} g(x)$$

36) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε ισχύει :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad , \quad \text{εφόσον} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0 \ .$$

37) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda \in \Re$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda$.

38) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον f(x) ≥ 0 κοντά στο x_0, με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

39) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x))$.

40) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_o, τότε :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} g(x)$$

41) Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = -\infty$.

42) Αν υπάρχει στο $\Re$ το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε : $\lim\limits_{x\to x_o}\left(k\, f(x)\right) = k \lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\right)$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.

43) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

44) Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω επίσης $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

45) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

46) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in R$ και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

47) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x \to x_0}\big(f(x)\big) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - \ell) = 0$

48) Ισχύει : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

49) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

50) Ισχύει : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$

51) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

52) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

53) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

54) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0, και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

55) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

56) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

57) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

58) Αν είναι $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$

59) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

60) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \alpha_0$

61) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f : \Re \to \Re$ και $g : \Re \to \Re$, αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0}\big[f(x) \cdot g(x)\big] = 0$.

62) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in R$

63) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

64) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0}\big(-f(x)\big) = +\infty$

65) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0}|f(x)| = +\infty$

66) Αν $\lim\limits_{x \to x_0}|f(x)| = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

➢ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

67) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β), τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.
68) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.
69) Αν f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha)< 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ'ανάγκη $f(\beta)> 0$.
70) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.
71) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
72) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.
73) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
74) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) όπου $A= \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B= \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.
75) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.
76) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
77) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.
78) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα [α, β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M], όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.
79) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
80) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
ΒΑΣΙΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Α΄

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in A$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in A$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in A$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

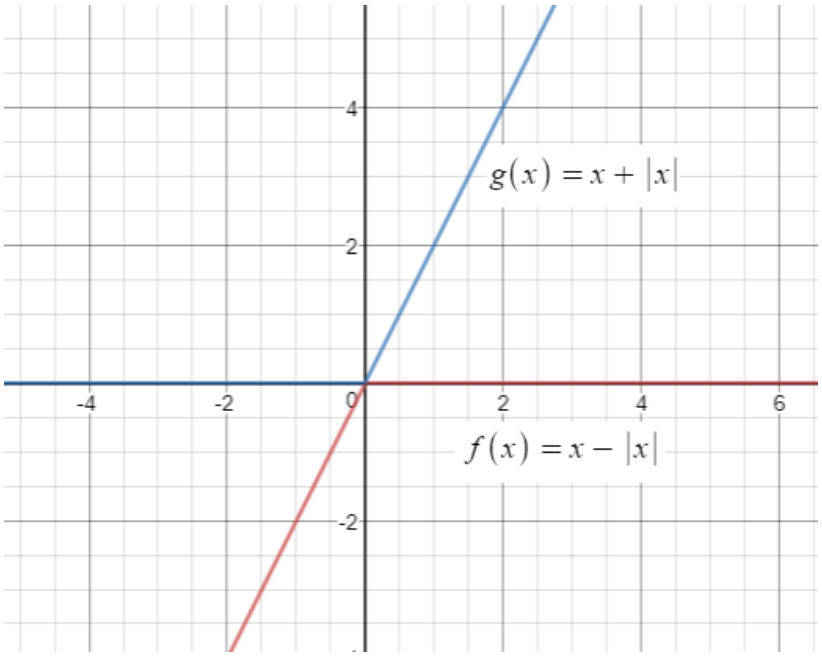
Απάντηση :

α. Ψ

β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x-|x|$, $x\in\Re$ και $g(x)=x+|x|$, $x\in\Re$. Έχουμε λοιπόν ότι :

$f(x)\cdot g(x)=\left(x-|x|\right)\cdot\left(x+|x|\right)=x^2-|x|^2=x^2-x^2=0$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι παραπάνω συναρτήσεις και οπτικοποιείται το αποτέλεσμα :



2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν f,g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε υποχρεωτικά ισχύει $g\circ f=f\circ g$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\sqrt{x}$.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=(0,+\infty)$, ενώ η g το $D_g=[0,+\infty)$.

Για να ορίζεται η παράσταση $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ πρέπει : $x\in D_f$ και $f(x)\in D_g$ ή , ισοδύναμα,

$\begin{cases} x>0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$, δηλαδή πρέπει $x\geq 1$. Επομένως, ορίζεται η $g\circ f$ και είναι : $(gof)(x)=g(f(x))=g(\ln x)=\sqrt{\ln x}$, $D_{g\circ f}=[1,+\infty)$

Για να ορίζεται η παράσταση $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ πρέπει : $x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$ ή, ισοδύναμα,

$\begin{cases} x\geq 0 \\ g(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$, δηλαδή πρέπει $x>0$. Επομένως, ορίζεται η $f\circ g$ και είναι : $(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\ln\sqrt{x}$, $D_{f\circ g}=(0,+\infty)$. Τελικά παρατηρούμε ότι $gof\neq fog$.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Έστω f,g,h τρεις συναρτήσεις. Αν ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $h\circ(g\circ f)=(g\circ f)\circ h$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Είναι ψευδής καθώς στην σύνθεση δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα όπως εξηγήθηκε στο **1.** αλλά η προσεταιριστική ιδιότητα $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(Πανελλήνιες 2018)***
«Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο Α και “1-1” τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Α».

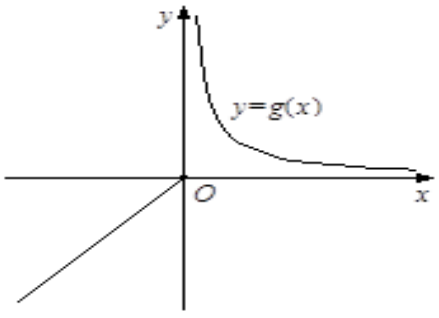
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι “1-1” αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x>0 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα :



5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(Πανελλήνιες 2018 Επαναληπτικές)***

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0,+\infty) \to \Re$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right] = 0$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$.

6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(Πανελλήνιες 2019)***

«Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \Re$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in \Re$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Ο ισχυρισμός θα ήταν σωστός, αν η f ήταν συνεχής στο x_0. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \alpha\nu \ \ x \neq 1 \\ 3 \quad , & \alpha\nu \ x = 1 \end{cases}$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$, ενώ $f(1) = 3$.

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

28. ΟΡΙΣΜΟΣ (2004, 2009)
Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση :

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Σχόλια :

α) Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=\ f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

β) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:
Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια :

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα

29. Α) Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0,f(x_0))$

Β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0,f(x_0))$. **(2000)**

Απάντηση :

Α) Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Β) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(x_0,f(x_0))$ είναι:

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$$

Σχόλια :

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι $\boxed{\lambda = f'(x_0)}$, οπότε η εξίσωση της $\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau\text{ο}\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma\ \varepsilon$ είναι : $\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A** ή **κλίση της f στο x_0**.

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι $\upsilon(t_0)=S'(t_0)$.

30. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(2000, 2003, 2007 Β΄, 2013 Β΄, 2017 Σ-Λ με εξήγηση)**

Απόδειξη :

Για $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε θα είναι :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=-1$.

(2017)

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε θα είναι και συνεχής στο x_0,

Ισχύει όμως ότι : Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ 1 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

- Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0.

  Δηλ. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- Αν x_0 είναι σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f και η f δίνεται αριστερά του x_0 και δεξιά του x_0 με διαφορετικό τύπο (σε κλάδους), τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν, τα πλευρικά όρια :

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$α όπου α πραγματικός αριθμός.

- ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΟ $f'(x_0)$

  Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0.

  Δηλ. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ 2 : ΤΙ ΕΚΦΡΑΖΕΙ Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

- Το ***ρυθμό μεταβολής*** του y=f(x) ως προς x, όταν $x=x_0$.
- Το ***συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ε*** της γραφικής παράστασης της f, στο σημεία επαφής Α($x_0, f(x_0)$) δηλαδή $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\phi\omega=f'(x_0)$.
- Την ***ταχύτητα*** $\upsilon(t_0)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση x(t), τη χρονική στιγμή t_0. Είναι $\upsilon(t_0)=x'(t_0)$
- Την ***επιτάχυνση*** $\alpha(t_0)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $\upsilon(t)$, τη χρονική στιγμή t_0. Είναι $\alpha(t_0)=\upsilon'(t_0)$.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ 3 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- Αν δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : Παράγωγος στο x_0 συνάρτησης απλού τύπου

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε την παράγωγο της $f(x)=x^2+1$ στο σημείο $x_0=0$.

Λύση :

$f(x)=x^2+1$ άρα $D_f=\Re$.

Έχουμε : $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$. Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει $f'(0)=0$.

2) Να βρείτε αν υπάρχει την παράγωγο της $f(x)=\sqrt{x-2}$ στο σημείο $x_0=2$.

Λύση :

$f(x)=\sqrt{x-2}$ και $D_f=[2,+\infty)$.

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}}{(x-2)\cdot\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{(x-2)\cdot\sqrt{x-2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$.

Το παραπάνω όριο υπάρχει, αλλά δεν είναι πραγματικός αριθμός, άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : Παράγωγος και συνέχεια – παράγωγος στο x_0 συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0. Αν όμως δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x<0\\ x^3, x\geq 0\end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο x_0=0.

Λύση :

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3)=0$

$f(0)=0^3=0$ Άρα η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$ και άρα η $f(x)$ δεν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

4) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2-x+2, x\le 1\\ 2x^2-3x+3, x>1\end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση :

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-x+2)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x^2-3x+3)=2$

$f(1)=1^2-1+2=2$ Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x+2-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-3x+3-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(2x-1)}{x-1}=1$

Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=1$

5) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\eta\mu(x-1), x\le 1\\ \sqrt{x+3}-2, x>1\end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση :

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\eta\mu(x-1))=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\sqrt{x+3}-2)=0$

$f(1)=\eta\mu(1-1)=0$ Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\underset{\substack{\text{Όταν: } x\to 1\\ \text{τότε: } u\to 0}}{\overset{\text{Θέτω } x-1=u}{=\!=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\dfrac{1}{4}$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. (Παρατηρώ δηλαδή ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 αλλά να μην είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό)

6) Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $f(x)=(x-\eta\mu x)g(x)$ να βρεθεί η τιμή $f'(0)$.

Λύση :

Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)\in\Re$.

Επίσης : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\eta\mu x)g(x)-(0-0)g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\eta\mu x)g(x)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)g(x)\right]=(1-1)g(0)=0$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : Παράγωγος στο x_0 συνάρτησης με απόλυτη τιμή

Αν έχουμε συνάρτηση που περιέχει απόλυτες τιμές και θέλουμε να βρούμε την παράγωγο σε ένα σημείο x_0, βρίσκουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που περιέχονται στην απόλυτη τιμή (κατασκευάζοντας πίνακα προσήμων) και με βάση τα πρόσημα βγάζουμε τις απόλυτες τιμές. Αν χρειαστεί γράφουμε τη συνάρτηση με πολλαπλό τύπο και κάνουμε χρήση πλευρικών ορίων τόσο για την συνέχεια όσο και για την παραγωγισιμότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

7) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=|x-1|+3$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση : Έχω : $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

Άρα η $f(x)=|x-1|+3$ γίνεται : $f(x)=\begin{cases}x-1+3, x\geq 1\\-(x-1)+3, x<1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}x+2, x\geq 1\\-x+4, x<1\end{cases}$

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x+4)=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$

$f(1)=3$ Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x+4-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Καθορισμός παραμέτρων ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Βρίσκουμε αρχικά τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων (π.χ. α,β) ώστε η f να είναι συνεχής στο x_0 (1). Έπειτα βρίσκουμε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$ και ζητάμε να ισχύει $l_1=l_2$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προσδιορίζουμε τις παραμέτρους α,β.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8) Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α και β ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+\beta, x\le 1\\ 2\alpha x+2\beta-4, 1<x\end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση :

- Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Δηλαδή ισχύει : $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

$f(1)=1+\alpha+\beta$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+\alpha x+\beta)=1+\alpha+\beta$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2\alpha x+2\beta-4)=2\alpha+2\beta-4$

Άρα $1+\alpha+\beta=2\alpha+2\beta-4\Leftrightarrow\alpha+\beta=5\Leftrightarrow\beta=5-\alpha$ (1)

- Αφού η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta-(1+\alpha+\beta)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta-1-\alpha-\beta}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+\alpha x-1-\alpha}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1+\alpha x-\alpha}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)+\alpha(x-1)}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+1+\alpha)}{x-1}=2+\alpha$ (2)

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\alpha x+2\beta-4-(1+\alpha+\beta)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\alpha x+2\beta-4-1-\alpha-\beta}{x-1}=$

$\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\alpha x+2(5-\alpha)-5-\alpha-5+\alpha}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\alpha x+10-2\alpha-10}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\alpha(x-1)}{x-1}=2\alpha$ (3)

Από (2) και (3) $2+\alpha=2\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$ και λόγο της (1) $\beta=3$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : Προσδιορισμός $f'(x_0)$ από ανισοτική σχέση (κριτήριο παρεμβολής)

Αρχικά θέτουμε όπου x το x_0 και βρίσκουμε την τιμή $f(x_0)$. Έπειτα μορφοποιούμε την ανισότητα ώστε να έχουμε στη μέση $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και τέλος εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε το $f'(x_0)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Αν για κάθε $x\in\Re$ ισχύει : $2x^2+5x+3\le f(x)\le 3x^2+3x+4$ να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=1$.

Λύση :

Για $x=1$ η σχέση γίνεται : $2+5+3\le f(1)\le 3+3+4\Leftrightarrow 10\le f(1)\le 10$. Άρα $f(1)=10$. Η παράγωγος στη θέση $x_0=1$ είναι : $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-10}{x-1}$

Άρα έχω : $2x^2+5x+3\le f(x)\le 3x^2+3x+4\Leftrightarrow 2x^2+5x-7\le f(x)-10\le 3x^2+3x-6$ (1).

- Για $x-1>0\Leftrightarrow x>1$: $\frac{2x^2+5x-7}{x-1}\le\frac{f(x)-10}{x-1}\le\frac{3x^2+3x-6}{x-1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2+5x-7}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(2x+7)}{x-1}=9$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3x^2+3x-6}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(3x+6)}{x-1}=9$ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχω :

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-10}{x-1}=9$ (2)

- Για $x-1<0\Leftrightarrow x<1$: $\frac{2x^2+5x-7}{x-1}\ge\frac{f(x)-10}{x-1}\ge\frac{3x^2+3x-6}{x-1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^2+5x-7}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(2x+7)}{x-1}=9$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{3x^2+3x-6}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(3x+6)}{x-1}=9$ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχω :

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-10}{x-1}=9$ (3). Άρα από (2) και (3) ισχύει : $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-10}{x-1}=9$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : Προσδιορισμός $f'(x_0)$ από γνωστό όριο

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}=4$.

i. Να βρείτε το $f(1)$ ii. Ν.δ.ο η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρείτε το $f'(1)$

Λύση :

i. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ άρα : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ (1)

Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}$, άρα $\lim\limits_{x\to1}g(x)=4$

Έχω : $g(x)=\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow g(x)(\sqrt{x}-1)=f(x)-x\Leftrightarrow f(x)=g(x)(\sqrt{x}-1)+x$

Άρα : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}[g(x)(\sqrt{x}-1)+x]=1$, άρα από (1) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow f(1)=1$.

ii. Για να δείξω ότι η f είναι παρ/μη στο $x_0=1$, αρκεί να δείξω ότι το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Έχω : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)+x-1}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}+\dfrac{x-1}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{g(x)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}+1\right]=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{g(x)}{(\sqrt{x}+1)}+1\right]=\dfrac{4}{2}+1=3\in\Re$, άρα η f είναι παρ/μη στο $x_0=1$ και $f'(1)=3$.

11) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x^2+3x-3}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ να βρείτε το $f'(1)$.

Λύση : Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ άρα είναι και συνεχής στο $x_0=1$ δηλαδή : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ (1). Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)-x^2+3x-3}{x^2-1}$ με $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\dfrac{1}{2}$. Λύνοντας ως προς $f(x)$ έχω : $f(x)-x^2+3x-3=g(x)(x^2-1)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x^2-1)+x^2-3x+3$ άρα : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[g(x)(x^2-1)+x^2-3x+3\right]=\dfrac{1}{2}\cdot0+1-3+3=1$ άρα από (1) : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow f(1)=1$

Επίσης : η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ άρα : $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow$ $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$. Το όριο που δίνεται γράφεται : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x^2+3x-3}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1-x^2+3x-2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+1)}\right]=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}\right]=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)\cdot\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)=0$$

12) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=5$ και $\lim_{x\to 1}\frac{f(4x+1)-2}{x-1}=8$. Να δείξετε ότι $f(5)=2$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=5$ με $f'(5)=2$.

Λύση :

Έχουμε : $\lim_{x\to 1}\frac{f(4x+1)-2}{x-1}=8 \overset{\substack{\text{θέτω}\\ 4x+1=u\Leftrightarrow x=\frac{u-1}{4}}}{\underset{\substack{x\to 1\\ u\to 5}}{\Leftrightarrow}} \lim_{u\to 5}\frac{f(u)-2}{\frac{u-1}{4}-1}=8\Leftrightarrow\lim_{u\to 5}\frac{f(u)-2}{\frac{u-5}{4}}=8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lim_{u\to 5}\frac{f(u)-2}{u-5}=8\Leftrightarrow\lim_{u\to 5}\frac{f(u)-2}{u-5}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-2}{x-5}=2$ (1)

Έστω : $g(x)=\frac{f(x)-2}{x-5}$, $x\neq 5$ και $\lim_{x\to 5}g(x)=2$. Είναι : $f(x)=(x-5)g(x)+2$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=5$, άρα $f(5)=\lim_{x\to 5}f(x)=\lim_{x\to 5}[(x-5)g(x)+2]=2$

Έτσι $(1)\Leftrightarrow\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-2}{x-5}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=2\Leftrightarrow f'(5)=2$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : Ισοδύναμος ορισμός για το $f'(x_0)$

Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0.

Δηλ. $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13) (Άσκηση 2 σελ. 220 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου κατεύθυνσης)
Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3$, για κάθε $h\in\Re$, να αποδείξετε ότι : i. $f(1)=2$ ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ότι $f'(1)=3$.

Λύση :

i. Για να βρω το $f(1)$, στη σχέση $f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3$, θα βάλω όπου $h=0$ και έχω : $f(1)=2$

ii. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ αρκεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός. Έχω $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2+3h+3h^2+h^3-2}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h+3h^2+h^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(3+3h+h^2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3\in\Re$. Άρα η f παρ/μη στο $x_0=1$ με $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=3$.

14) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-2h)}{h}=3f'(x_0)$.

Λύση :

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 άρα $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Έχουμε : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-2h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-2h)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}\overset{(*)}{=}f'(x_0)-(-2)f'(x_0)=3f'(x_0)$.

(*) είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}\overset{\substack{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\\ -2h=u\Leftrightarrow h=-\frac{u}{2}\\ h\to 0\\ u\to 0}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{-\frac{u}{2}}=-2\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=-2f'(x_0)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3xf(x)=x^3-1$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$.

Λύση :

i. Στη σχέση $f^3(x)+3xf(x)=x^3-1$ θέτω για $x=0$ και έχω : $f^3(0)=-1\Leftrightarrow f(0)=-1$

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ άρα $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}$

Όμως : $f^3(x)+3xf(x)=x^3-1\Leftrightarrow f^3(x)+1=x^3-3xf(x)\Leftrightarrow$

$(f(x)+1)(f^2(x)-f(x)+1)=x^3-3xf(x)\Leftrightarrow f(x)+1=\dfrac{x(x^2-3f(x))}{f^2(x)-f(x)+1}$

καθώς η παράσταση $f^2(x)-f(x)+1$ είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$ με $\Delta=-3<0$ άρα $f^2(x)-f(x)+1>0$ για κάθε $x\in\Re$. Έτσι έχουμε :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\left(x^2-3f(x)\right)}{f^2(x)-f(x)+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3f(x)}{f^2(x)-f(x)+1}=\frac{0-3f(0)}{f^2(0)-f(0)+1}=1$$

καθώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ άρα είναι και συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=-1$.

16) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2\eta\mu x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$.

Λύση :

i. Στη σχέση $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2\eta\mu x$ θέτω για $x=0$ και έχω : $f^3(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$

ii. Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$. Διαιρώ τη σχέση : $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2\eta\mu x$ με $x^3\neq 0$ και έχουμε : $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\frac{f(x)}{x}=2\frac{\eta\mu x}{x}$ άρα παίρνοντας όριο έχουμε : $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\frac{f(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}\right)\Leftrightarrow\lambda^3+\lambda=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lambda^3+\lambda-2=0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+2)=0\Leftrightarrow\lambda=1\Leftrightarrow f'(0)=1$.

17) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)+1=x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι : i. η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και ii. ότι $f'(1)=2$.

Λύση :

i. Για κάθε $x\in\Re$ έχουμε $f^3(x)+f(x)+1=x^2\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=x^2-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=x^2-1\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-1}{f^2(x)+1}$ (1)

Είναι : $|f(x)|=\left|\frac{x^2-1}{f^2(x)+1}\right|=\frac{|x^2-1|}{f^2(x)+1}\leq\frac{|x^2-1|}{1}=|x^2-1|$ για κάθε $x\in\Re$.

Δηλ. $|f(x)|\leq|x^2-1|\Leftrightarrow-|x^2-1|\leq f(x)\leq|x^2-1|$

Έτσι : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}\left(-|x^2-1|\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 1}\left(|x^2-1|\right)=0\end{array}\right\}$ από κριτήριο παρεμβολής : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

Επίσης : $f(1)=\frac{1^2-1}{f^2(1)+1}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

ii. $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{x^2-1}{f^2(x)+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(f^2(x)+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{f^2(x)+1}=\frac{1+1}{f^2(1)+1}=2$. (καθώς $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$)

18) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \alpha$ και για κάθε $x, y \in \Re$ είναι $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ (1) με $f(0) \neq 0$, να δείξετε ότι $f'(x_0) = \alpha f(x_0)$ για κάθε $x_0 \neq 0$.

Λύση :

Για $x = y = 0$ είναι : $(1) \Leftrightarrow f(0) = f^2(0) \Leftrightarrow f(0)\big(f(0)-1\big) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$ καθώς $f(0) \neq 0$

Επίσης : $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0)\cdot f(h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0)\cdot\big(f(h)-1\big)}{h} =$

$= f(x_0) \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = f(x_0) \cdot f'(0) = f(x_0) \cdot \alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19) Αν $f(x) = 3x - 2$, να βρείτε το $f'(2)$.

20) Αν $f(x) = x^2 + x$ να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0=1.

21) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x-1|$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. (Υποδ. για να βρούμε την παράγωγο σε ένα σημείο x_0 μιας συνάρτησης f που περιέχει απόλυτα, πρώτα βγάζουμε τα απόλυτα και η συνάρτηση γίνεται πολλαπλού τύπου)

22) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x-2|$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$.

23) Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν

i. $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$ ii. $f(x) = |x^2 - 3x|$, $x_0 = 1$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , \quad x < 0 \\ x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

24) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 2 - x + x\eta\mu|x|$ στο σημείο $x_0 = 0$.

25) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, x < 0 \\ x^5 + 15, x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. (Υποδ. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0. Αν όμως δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη)

26) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x < 0 \\ 2x + \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

27) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ x-\eta\mu x, & x\geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

28) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x>0 \\ \eta\mu x+(\beta-2)x+2\alpha-2, & x\leq 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

29) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=7$ και $f(7)=10$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$.

30) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

31) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot(\eta\mu x)^{2015}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

32) Αν μια συνάρτηση είναι f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=7$ να αποδείξετε :

i. $f(1)=0$
ii. $f'(1)=7$

33) Αν μια συνάρτηση είναι f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x^2-7x}{x^2-2x}=2$

i. Να βρείτε το $f(0)$
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε το $f'(0)$.
iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu x}{\sqrt{x+4}-2}$.

34) Αν μια συνάρτηση είναι f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu 3x}{x^2-x}=2$

i. Να βρείτε το $f(0)$
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε το $f'(0)$.
iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu x\cdot\eta\mu 5x}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

35) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$,για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$

i. Να δείξετε ότι f(0)=0
ii. Να δείξετε ότι f΄(0)=1
iii. Να βρείτε το λ ∈ IR έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3$. (Πανελλήνιες 2005)

36) Αν για μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ισχύει : $x^2+3x\le f(x)\le 2x^2-x+4$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε το $f'(2)$.

37) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει : $\eta\mu^2 x-x^4\le xf(x)\le \eta\mu^2 x+x^4$ να αποδείξετε ότι :

i. $f(0)=0$ ii. $f'(0)=1$.

38) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$. Αν $f(3)=5$ και $f'(3)=2$ να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$.

39) Αν η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι συνεχής στο 1 και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(2x-5)-x}{x-3}=7$

i. να αποδείξετε ότι $f(1)=3$
ii. να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=4$
iii. να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-9}{\sqrt{x}-1}$

40) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει $f'(0)=5$. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(0)}{x}$
ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(x)}{x}$

41) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει $f'(0)=2$. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}$
ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(7x)-f(3x)}{x}$

42) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

i. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$
ii. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)$.

43) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη στο 2, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+2f(x)+4=x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε : i. το $f(2)$ και ii. το $f'(2)$.

44) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+8x\cdot\eta\mu x\cdot f(x)=x\cdot\eta\mu^2 3x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$

45) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy-2$ για κάθε $x,y\in\Re$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=4$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\Re$.

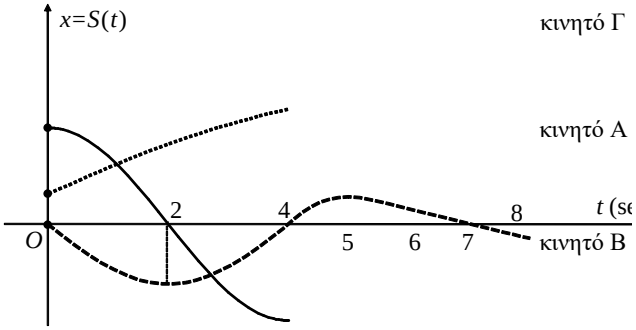
46) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 1. Αν επιπλέον η συνάρτηση : $g(x)=\begin{cases} f^3(x)+3f(x), & x\le 1 \\ f(x)-3, & x>1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1, τότε να βρείτε :

i. τα $f(1)$ και $f'(1)$

ii. το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-x^2+2}{x-1}$.

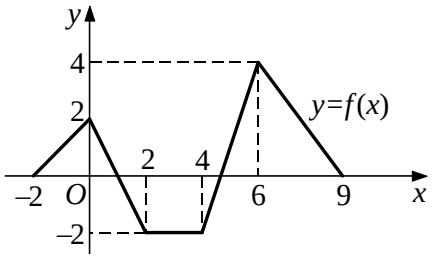
iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xg(x)+2x^2-1=2x^3-5x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

47) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0sec έως 8sec. Να βρείτε :



i. Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;
ii. Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;
iii. Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή $t=2$sec, ποιο τη χρονική στιγμή $t=4$sec και ποιο τη χρονική στιγμή $t=5$sec;
iv. Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0sec έως 4sec;
v. Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;
vi. Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

48) Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

31. ΟΡΙΣΜΟΙ

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

α) Παραγωγίσιμη στο σύνολο Α

β) Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

γ) Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ **(2010 Β΄, 2013)**

δ) Τι ονομάζουμε πρώτη, δεύτερη και γενικά νιοστή παράγωγο μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση :

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

γ) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει: $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R$.

δ) Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f': A_1 \to R$$
$$x \to f'(x),$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της** ***f*** ή απλά **παράγωγος της** ***f***. Η πρώτη παράγωγος της *f* συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται "ντε εφ προς ντε χι". Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y=f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y=(f(x))'$.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της** ***f*** και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της** ***f***, με $\nu\geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)}=[f^{(\nu-1)}]',\quad \nu\geq 3.$$

Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης, με βάση τον ορισμό που δώσαμε, δεν είναι πάντα εύκολη. Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγώγισης συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά).

Παρατήρηση :

Ισχύει : $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ και $f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$

Επίσης : $f'(x)=\lim\limits_{u\to x}\dfrac{f(u)-f(x)}{u-x}$ και $f''(x)=\lim\limits_{u\to x}\dfrac{f'(u)-f'(x)}{u-x}$ $[x+h=u]$

32. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $f(x)=c$, τότε $f'(x)=0$

β) Αν $f(x)=x$, τότε $f'(x)=1$

γ) Αν $f(x)=x^{\nu}$, με $\nu\in N-\{0,1\}$, τότε $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$

δ) Αν $f(x)=\sqrt{x}$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

(2005 Β΄)

Απόδειξη :

α) Για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

β) Για $x\neq x_0$ ισχύει ότι : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

γ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

Επομένως : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$,δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

δ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$ οπότε :

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Παρατήρηση : η $f(x)=\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,+\infty)$, όμως : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Σχόλια – Τύποι :

- Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $\boxed{(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x}$
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$, δηλαδή $\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x}$
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=e^x$, δηλαδή $\boxed{(e^x)'=e^x}$
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, δηλαδή $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

33. ΘΕΩΡΗΜΑ *(Παράγωγος αθροίσματος)*

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Απόδειξη :

Για $x\neq x_0$, ισχύει: $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$, δηλαδή

$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Σημείωση :

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x).$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, ..., f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε : $(f_1+f_2+...+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_k'(x)$.

Για παράδειγμα, $(\eta\mu x+x^2+e^x+3)'=(\eta\mu x)'+(x^2)'+(e^x)'+(3)'=\sigma\upsilon\nu x+2x+e^x$.

34. ΘΕΩΡΗΜΑ *(Παράγωγος γινομένου)*

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση :

- Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$$\boxed{(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}.$$

Για παράδειγμα, $(e^x\ln x)'=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x}$, $\quad x>0$.

- Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))'&=[(f(x)g(x))\cdot h(x)]'=(f(x)g(x))'\cdot h(x)+(f(x)g(x))\cdot h'(x)\\&=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)\\&=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).\end{aligned}$$

Για παράδειγμα : $(\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\ln x)'=(\sqrt{x})'\cdot\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot(\eta\mu x)'\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot(\ln x)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1}{x},\quad x>0.$$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε: $\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$

Για παράδειγμα : $(6x^3)' = 6(x^3)' = 6 \cdot 3x^2 = 18x^2$.

35. ΘΕΩΡΗΜΑ *(Παράγωγος πηλίκου)*

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Σημείωση :

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε: $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$.

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathfrak{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απόδειξη:

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon x = 0\}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon x - \eta\mu x(\sigma\upsilon x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon x \sigma\upsilon x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

36. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

Σχόλια :

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u=g(x)$, τότε $(f(u))'=f'(u)\cdot u'$. Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y=f(u)$ και $u=g(x)$, έχουμε τον τύπο $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

37. ΘΕΩΡΗΜΑ

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $a\in\Re-Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$,

β) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $x\in R^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

(2008)

Απόδειξη :

α) Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

β) Πράγματι, αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha$.

γ) Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.

Επομένως, $y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $f'(x)$
$f(x)=c\,,\ c\in\Re\,,$	$f'(x)=(c)'=0\,,$
$f(x)=x\,,$	$f'(x)=(x)'=1\,,$
$f(x)=x^{\nu}\,,$	$f'(x)=(x^{\nu})'=\nu\cdot x^{\nu-1}\,,$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\eta\mu x$	$f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$
$f(x)=\varepsilon\phi x$	$f'(x)=(\varepsilon\phi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$f(x)=\sigma\phi x$	$f'(x)=(\sigma\phi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=(e^x)'=e^x$
$f(x)=\alpha^x$	$f'(x)=(\alpha^x)'=\alpha^x\cdot\ln\alpha$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

Επίσης ισχύουν οι εξής κανόνες παραγώγισης :

- $\big(f(x)\pm g(x)\big)'=f'(x)\pm g'(x)$
- $\big(cf(x)\big)'=cf'(x)\,,\quad c\in\Re$
- $\big(f(x)g(x)\big)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=4x+5$

ii. $f(x)=x^2+5x+2013$

iii. $f(x)=7x^3+5x^2-3x+1$

iv. $f(x)=3e^x+9$

v. $f(x)=2\ln x+5x+\dfrac{1}{x}$

vi. $f(x)=3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x$

vii. $f(x)=2\sqrt{x}+3\ln x$

viii. $f(x)=\sqrt[3]{x}\,,\ x>0$

Λύση :

i. $f'(x)=(4x+5)'=(4x)'+(5)'=4(x)'+0=4\cdot 1=4$

ii. $f'(x)=(x^2+5x+2013)'=(x^2)'+(5x)'+(2013)'=2x+5$

iii. $f'(x)=(7x^3+5x^2-3x+1)'=(7x^3)'+(5x^2)'-(3x)'+(1)'=3\cdot 7x^2+2\cdot 5x-3=21x^2+10x-3$

iv. $f'(x)=(3e^x+9)'=(3e^x)'+(9)'=3(e^x)'=3e^x$

v. $f'(x)=(2\ln x+5x+\dfrac{1}{x})'=(2\ln x)'+(5x)'+\left(\dfrac{1}{x}\right)'=2(\ln x)'+5-\dfrac{1}{x^2}=2\cdot\dfrac{1}{x}+5-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{x}+5-\dfrac{1}{x^2}$

vi. $f'(x)=(3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x)'=(3\eta\mu x)'-(2\sigma\upsilon\nu x)'=3(\eta\mu x)'-2(\sigma\upsilon\nu x)'=3\sigma\upsilon\nu x-2\cdot(-\eta\mu x)=$
$=3\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x$

vii. $f'(x)=(2\sqrt{x}+3\ln x)'=(2\sqrt{x})'+(3\ln x)'=2(\sqrt{x})'+3(\ln x)'=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+3\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x}$

viii. Είναι $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ $\left(\sqrt[\mu]{x^\nu}=x^{\frac{\nu}{\mu}},\ x>0\right)$

Άρα : $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=2x^3\cdot\ln x$

ii. $f(x)=(3x^2+5x)(2x+7)$

iii. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\ln x$

iv. $f(x)=4x^2\eta\mu x-3x^2\sigma\upsilon\nu x$

v. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$

vi. $f(x)=\dfrac{x^2+10}{x+11}$

vii. $f(x)=\dfrac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

viii. $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$

Λύση :

i. $f'(x)=(2x^3\cdot\ln x)'=(2x^3)'\cdot\ln x+2x^3\cdot(\ln x)'=6x^2\cdot\ln x+2x^3\cdot\dfrac{1}{x}=6x^2\cdot\ln x+2x^2$

ii. $f'(x)=(3x^2+5x)'(2x+7)+(3x^2+5x)(2x+7)'=(6x+5)(2x+7)+(3x^2+5x)\cdot 2=$
$=12x^2+42x+10x+35+6x^2+10x=18x^2+62x+35$

iii. $f'(x)=(\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\ln x)'=(\sqrt{x})'\cdot\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot(\eta\mu x)'\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot(\ln x)'=$
$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\dfrac{1}{x},\quad x>0.$

iv. $f'(x)=(4x^2\eta\mu x-3x^2\sigma\upsilon\nu x)'=(4x^2\eta\mu x)'-(3x^2\sigma\upsilon\nu x)'=$
$=(4x^2)'\cdot\eta\mu x+4x^2\cdot(\eta\mu x)'-[(3x^2)'\cdot\sigma\upsilon\nu x+3x^2\cdot(\sigma\upsilon\nu x)']=$
$=8x\cdot\eta\mu x+4x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x-[6x\cdot\sigma\upsilon\nu x+3x^2\cdot(-\eta\mu x)]=$
$=8x\cdot\eta\mu x+4x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x-(6x\cdot\sigma\upsilon\nu x-3x^2\cdot\eta\mu x)=$
$=8x\cdot\eta\mu x+4x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x-6x\cdot\sigma\upsilon\nu x+3x^2\cdot\eta\mu x=$

v. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x}\right)'=\dfrac{(x^2+2x-1)'\cdot x-(x^2+2x-1)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{(2x+2)x-x^2-2x+1}{x^2}=$
$\dfrac{2x^2+2x-x^2-2x+1}{x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

vi. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+10}{x+11}\right)'=\dfrac{(x^2+10)'\cdot(x+11)-(x^2+10)\cdot(x+11)'}{(x+11)^2}=\dfrac{2x(x+11)-(x^2+10)}{(x+11)^2}=$
$=\dfrac{2x^2+22x-x^2-10}{(x+11)^2}=\dfrac{x^2+22x-10}{x^2+22x+121}$

vii. $f'(x)=\left(\dfrac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\dfrac{(x+\eta\mu x)'\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)-(x+\eta\mu x)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)'}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=$
$=\dfrac{(1+\sigma\upsilon\nu x)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)-(x+\eta\mu x)\cdot(-\eta\mu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=\dfrac{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2+(x+\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$

viii. $f'(x)=\left(\dfrac{x\ln x}{x-1}\right)'=\dfrac{(x\ln x)'(x-1)-x\ln x(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=$
$=\dfrac{x\ln x-\ln x+x-1-x\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}.$

3) Να βρείτε την παράγωγο της παρακάτω συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}x^2-x & ,x\le 2\\ x^3-2x^2-x+4 & ,x>2\end{cases}$

Λύση :

- Για $x<2$ έχω $f(x)=x^2-x$ άρα $f'(x)=2x-1$
- Για $x>2$ έχω $f(x)=x^3-2x^2-x+4$ άρα $f'(x)=3x^2-4x-1$
- Στο $x_0=2$ θα πρέπει να εξετάσω με τον ορισμό αν είναι παραγωγίσιμη :
  Πρώτα θα εξετάσω αν είναι συνεχής στο $x_0=2$:

$f(2)=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x)=2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^3-2x^2-x+4)=2$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=2$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=2$:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3$

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-2x^2-x+4-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x^2-1)}{x-2}=3$ άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $f'(2)=3$ άρα : $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x<2\\ 3 & ,x=2\\ 3x^2-4x-1 & ,x>2\end{cases}$ ή

$f'(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x\le 2\\ 3x^2-4x-1 & ,x\ge 2\end{cases}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i. $f(x)=3x+2$
ii. $f(x)=x^2-3x+50$ στο x_0=-1
iii. $f(x)=5x^3+7x^2-2x+100$
iv. $f(x)=e^x+4$
v. $f(x)=6\ln x+x$ x_0=6
vi. $f(x)=2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x$
vii. $f(x)=5\varepsilon\phi x$
viii. $f(x)=\sqrt{x}+2\ln x$ x_0=4

5) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i. $f(x)=x^2\cdot\ln x$
ii. $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$
iii. $f(x)=(x^2-2x)(2x+1)$
iv. $f(x)=(3x-x^2)(2x^3+x)$
v. $f(x)=(x^2+1)\cdot e^x$
vi. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^x$
vii. $f(x)=x\cdot\eta\mu x$
viii. $f(x)=x^2\cdot\eta\mu x\cdot e^x$
ix. $f(x)=x\cdot e^x\cdot\ln x-e^x$
x. $f(t)=x^2\cdot\ln x+t^2e^x-\sqrt{t}\cdot\eta\mu t$

6) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-3}$ ii. $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ iii. $f(x)=\dfrac{x^2+10}{x-1}$

iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ v. $f(x)=\dfrac{x^2\cdot\eta\mu x}{x-1}$ vi. $f(x)=\dfrac{x^2\cdot\ln x}{2x+1}$

7) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

8) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x<0\\ \sigma\upsilon\nu x, x\geq 0\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x-x^2, x\leq 1\\ x^2-3x+2, x>1\end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής. Στη συνέχεια να βρείτε την παράγωγο f΄(x) και να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0=1.

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x\cdot\eta\mu x-(x^2-2)\sigma\upsilon\nu x$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^3}$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x^3}$

11) Αν μία συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι :

i. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)+af'(\alpha)$

ii. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^xf(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=e^\alpha(f(\alpha)+f'(\alpha))$.

12) Αν $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$ και $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, να βρείτε τις συναρτήσεις f', g'. Ισχύει $f'=g'$;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ισχύει : $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

$\left(f^{\alpha}(x)\right)' = \alpha\cdot f^{\alpha-1}(x)\cdot f'(x)$
$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$
$\left(\ln\lvert f(x)\rvert\right)' = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)}\cdot \ln\alpha\cdot f'(x)$
$\left(\eta\mu f(x)\right)' = \sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$\left(\sigma\upsilon\nu f(x)\right)' = -\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$\left(\varepsilon\phi f(x)\right)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\sigma\phi f(x)\right)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{f^2(x)}\cdot f'(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \left(x^3+2x\right)^{2013}$

ii. $f(x) = \ln^3 x$

iii. $f(x) = \sqrt{x^3+2x}$

iv. $f(x) = \ln(x^3+2x)$

v. $f(x) = e^{x^3+2x}$

vi. $f(x) = \eta\mu(x^3+2x)$

vii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^3+2x)$

viii. $f(x) = \varepsilon\phi(x^3+2x)$

ix. $f(x) = \sigma\phi(x^3+2x)$

x. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+2x}$

xi. $f(x) = x^{\eta\mu x}$

Λύση :

i. $f'(x) = \left[\left(x^3+2x\right)^{2013}\right] = 2013\cdot\left(x^3+2x\right)^{2012}\cdot(x^3+2x)' = 2013\cdot\left(x^3+2x\right)^{2012}\cdot(3x^2+2)$

ii. $f'(x) = (\ln^3 x)' = 3\ln^2 x\cdot(\ln x)' = 3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{3\ln^2 x}{x}$

iii. $f'(x)=(\sqrt{x^3+2x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^3+2x}}\cdot(x^3+2x)'=\dfrac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x}}$

iv. $f'(x)=\left(\ln(x^3+2x)\right)'=\dfrac{1}{x^3+2x}\cdot(x^3+2x)'=\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}$

v. $f'(x)=(e^{x^3+2x})'=e^{x^3+2x}\cdot(x^3+2x)'=e^{x^3+2x}\cdot(3x^2+2)$

vi. $f'(x)=\left(\eta\mu(x^3+2x)\right)'=\sigma\upsilon\nu(x^3+2x)\cdot(x^3+2x)'=\sigma\upsilon\nu(x^3+2x)\cdot(3x^2+2)$

vii. $f'(x)=\left(\sigma\upsilon\nu(x^3+2x)\right)'=-\eta\mu(x^3+2x)\cdot(x^3+2x)'=-\eta\mu(x^3+2x)\cdot(3x^2+2)$

viii. $f'(x)=\left(\varepsilon\phi(x^3+2x)\right)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x^3+2x)}\cdot(x^3+2x)'=\dfrac{3x^2+2}{\sigma\upsilon\nu^2(x^3+2x)}$

ix. $f'(x)=\left(\sigma\phi(x^3+2x)\right)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2(x^3+2x)}\cdot(x^3+2x)'=-\dfrac{3x^2+2}{\eta\mu^2(x^3+2x)}$

x. $f(x)=\left(\dfrac{1}{x^3+2x}\right)'=-\dfrac{1}{(x^3+2x)^2}\cdot(x^3+2x)'=-\dfrac{3x^2+2}{(x^3+2x)^2}$

xi. (Υποδ. Για κάθε $\alpha\in\Re$ ισχύει : $\alpha=e^{\ln a}$. Μια συνάρτηση $f(x)=[g(x)]^{h(x)}$, η οποία ορίζεται όταν $g(x)>0$, για να βρούμε την $f'(x)$ γράφουμε τον τύπο της $f(x)$ ως έξης : $f(x)=[g(x)]^{h(x)}=e^{\ln(g(x))^{h(x)}}=e^{h(x)\cdot\ln g(x)}$ και στη συνέχεια παραγωγίζουμε)
$f(x)=x^{\eta\mu x}$, με $A_f=(0,+\infty)$ και είναι : $f(x)=x^{\eta\mu x}=e^{\ln x^{\eta\mu x}}=e^{\eta\mu x\cdot\ln x}$ έτσι έχουμε :
$f'(x)=\left(e^{\eta\mu x\cdot\ln x}\right)'=e^{\eta\mu x\cdot\ln x}\cdot(\eta\mu x\cdot\ln x)'=x^{\eta\mu x}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$.

14) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)=f(\eta\mu^2x)-f(\sigma\upsilon\nu^2x)$.

Λύση : $g'(x)=\left(f(\eta\mu^2x)-f(\sigma\upsilon\nu^2x)\right)'=f'(\eta\mu^2x)(\eta\mu^2x)'-f'(\sigma\upsilon\nu^2x)(\sigma\upsilon\nu^2x)'=$
$=f'(\eta\mu^2x)2\eta\mu x(\eta\mu x)'-f'(\sigma\upsilon\nu^2x)2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x)'=$
$=f'(\eta\mu^2x)2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+f'(\sigma\upsilon\nu^2x)2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x=f'(\eta\mu^2x)\cdot\eta\mu 2x+f'(\sigma\upsilon\nu^2x)\cdot\eta\mu 2x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sqrt{3x+1}$

ii. $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$

iii. $f(x)=\sqrt{x\cdot e^x}$

iv. $f(x)=\ln(x-3)$

v. $f(x)=\ln(2x^3-3x)$

vi. $f(x)=\eta\mu(2x-5)$

vii. $f(x)=\sigma\upsilon\nu(2x^2-5)$

viii. $f(x)=x\cdot\sqrt{e^x+3}$

ix. $f(x)=\eta\mu\sqrt{x}$

x. $f(x)=x^x$

xi. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$

xii. $f(x)=\left(x+\frac{2}{x}\right)^{x}$

16) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x)=e^{2x+2}$

ii. $f(x)=e^{x^2+x}$

iii. $f(x)=e^{\sqrt{x^2+5x-1}}$

iv. $f(x)=e^{-2x}\cdot(x^2+1)$

v. $f(x)=(2x^2+x)^5$

vi. $f(x)=(3x^4+4x^3)^{-2}$

vii. $f(x)=(x-1)^{2/3}$

viii. $f(x)=\eta\mu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

ix. $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)$

x. $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

xi. $f(x)=\eta\mu(x+1)^3$

xii. $f(x)=\sqrt{2x^2+4x-12}$

xiii. $f(x)=\sigma\upsilon\nu(3x^2+5)$

xiv. $f(x)=\varepsilon\phi e^{-x}+\sigma\upsilon\nu\ln x$

xv. $f(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\eta\mu 2x$

17) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sqrt{e^x+x^2}-e^{-2x^2}$

ii. $f(x)=\ln^2 x\cdot\sqrt{3+2\sigma\upsilon\nu x}$

iii. $f(x)=\sigma\upsilon\nu(x^2-5x)$

iv. $f(x)=\varepsilon\phi 3x+e^{-\frac{x}{2}}$

v. $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 3x$

vi. $f(x)=\ln^3(e^{-2x}+1)$

vii. $f(x)=e^{-2x}\cdot(x^2+1)$

viii. $f(x)=\frac{\ln(x-1)}{\eta\mu 2x}$

ix. $f(x)=\eta\mu^2(\sqrt{x+1})$

x. $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$

18) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν :

i. $f(x)=x^2\sqrt{1+x^3}$, $x_0=2$

ii. $f(x)=(2x)^{1/3}+(2x)^{2/3}$, $x_0=4$

iii. $f(x)=x^3\eta\mu^3(\pi x)$, $x_0=\dfrac{1}{6}$

iv. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2-x}$, $x_0=3$.

19) Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^{\ln x}$

ii. $f(x)=2^{5x-3}$

iii. $f(x)=(\ln x)^x$, $x>1$

iv. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

20) Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

ii. $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$

21) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$, για την οποία ισχύει : $f(x^3+5x)=5x^4+6x^2+4$, $x\in\Re$. Να βρείτε το $f'(6)$.

22) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)=xf(\ln x)$ για κάθε $x>0$. Στη συνέχεια αν δίνεται ότι $f(1)=f'(1)=2$, να βρείτε την τιμή $g'(e)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{-x}$, $x\in\Re$. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta\in\Re$, ώστε να ισχύει : $\alpha f''(x)+\beta f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Re$.

Λύση :

$$f'(x)=\left(x\cdot e^{-x}\right)'=(x)'e^{-x}+x(e^{-x})'=e^{-x}+xe^{-x}(-x)'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

$$f''(x)=\left[(1-x)e^{-x}\right]'=(1-x)'e^{-x}+(1-x)(e^{-x})'=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=e^{-x}(-1-1+x)=e^{-x}(x-2)$$

Άρα

$$\alpha f''(x)+\beta f'(x)=f(x)\Leftrightarrow \alpha e^{-x}(x-2)+\beta(1-x)e^{-x}=xe^{-x}\Leftrightarrow \alpha x-2\alpha+\beta-\beta x=x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha-\beta)x+\beta-2\alpha=x\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=1\\ \beta-2\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=-2\end{cases}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

24) Δίνεται συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, για την οποία ισχύει : $f(\ln x) = 3e^{x-1} + \ln^2 x$, για κάθε $x > 0$. Να βρείτε το $f''(0)$.

25) Να βρεθεί πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Re$ να είναι $\mathrm{P}(x) + \mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}''(x) = x^3 + 5x^2 + x + 3$.
*(**Υπόδειξη :** Αν το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει βαθμό $\nu \geq 1$, τότε το $\mathrm{P}'(x)$ έχει βαθμό $\nu - 1$)*

26) Να βρεθεί πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{P}(1) = 0$ και για κάθε $x \in \Re$ να είναι $[\mathrm{P}'(x)]^2 = 4\mathrm{P}(x)$.

27) Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε $f(0) = 4$, $f'(-1) = 2$, $f''(2) = 4$ και $f^{(3)}(1) = 6$.

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}\eta\mu x$. Να δείξετε ότι $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Re$.

29) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει : $2f''(x) - f'(x) = 3f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

30) Δίνεται **παραγωγίσιμη** συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

Λύση :

Στη σχέση : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ (1) θέτω $x = 0$ και έχω : $f^3(0) = 8 \Leftrightarrow f(0) = 2$.

Η συνάρτηση $f^3(x) - 2xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισιμων, ομοίως και η συνάρτηση $4x^2 + 8$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x) - 2xf(x))' = (4x^2 + 8)' \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 8x$ (2)

Στη (2) για $x = 0$ έχω : $3f^2(0) \cdot f'(0) - 2f(0) - 2 \cdot 0 f'(0) = 8 \cdot 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 \cdot f'(0) - 2 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 \cdot f'(0) = 4 \Leftrightarrow f'(0) = \frac{1}{3}$. *(**Προσοχή :** Στην παραπάνω άσκηση παραγωγίσαμε τη συναρτησιακή σχέση εφαρμόζοντας κανόνες παραγώγισης, γιατί είχαμε την πληροφορία ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$. Αν γνωρίζαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0 **δεν** θα μπορούσαμε να παραγωγίσουμε τη σχέση και θα έπρεπε να βρούμε το $f'(0)$ με τον ορισμό)*

31) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re^*\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$ για κάθε $x,y\in\Re^*$. Να δείξετε ότι για κάθε $x,y\in\Re^*$ ισχύει : $f''(x)-f''(y)=\frac{2f(x)}{x^2}-\frac{2f(y)}{y^2}$.

Λύση : Παραγωγίζουμε τη σχέση $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$ (1) ως προς x, θεωρώντας το y σταθερά : $\left(f(xy)\right)'=\left(x^2f(y)+y^2f(x)\right)'\Leftrightarrow f'(xy)\cdot(xy)'=2xf(y)+y^2f'(x)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow yf'(xy)=2xf(y)+y^2f'(x)$ (2), επίσης με παραγώγιση στη σχέση (2) έχουμε :
$\left(yf'(xy)\right)'=\left(2xf(y)+y^2f'(x)\right)'\Leftrightarrow yf''(xy)\cdot(xy)'=2f(y)+y^2f''(x)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2f''(xy)=2f(y)+y^2f''(x)\overset{y\neq0}{\Leftrightarrow} f''(xy)=\frac{2f(y)}{y^2}+f''(x)$ (3)

Τώρα παραγωγίζουμε την (1) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερά : $\left(f(xy)\right)'=\left(x^2f(y)+y^2f(x)\right)'\Leftrightarrow f'(xy)\cdot(xy)'=x^2f'(y)+2yf(x)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow xf'(xy)=x^2f'(y)+2yf(x)$ (4), επίσης με παραγώγιση στη σχέση (4) έχουμε :
$\left(xf'(xy)\right)'=\left(x^2f'(y)+2yf(x)\right)'\Leftrightarrow xf''(xy)\cdot(xy)'=x^2f''(y)+2f(x)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2f''(xy)=x^2f''(y)+2f(x)\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow} f''(xy)=f''(y)+\frac{2f(x)}{x^2}$ (5)

Από (3) και (5) έχουμε :
$\frac{2f(y)}{y^2}+f''(x)=f''(y)+\frac{2f(x)}{x^2}\Leftrightarrow f''(x)-f''(y)=\frac{2f(x)}{x^2}-\frac{2f(y)}{y^2}$.

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+3x+2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την $\left(f^{-1}\right)'(3)$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Λύση :

i. Έχω : $D_f=\Re$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $x_1<x_2\Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1<x_2\Leftrightarrow 3x_1<3x_2\Leftrightarrow 3x_1+2<3x_2+2\Leftrightarrow$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1}+3x_1+2<e^{x_2}+3x_2+2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ αντιστρέψιμη. Επίσης $f(\Re)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\Re$. Άρα $D_{f^{-1}}=\Re$.

ii. Για κάθε $x\in\Re$ ισχύει ότι $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ οπότε : $\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)'=(x)'\Leftrightarrow$
$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)=1$, όμως $f'(x)=e^x+3$ άρα : $\left(f^{-1}\right)'\left(e^x+3x+2\right)\cdot(e^x+3)=1$ (3).
Στην (3) για $x=0$ έχω : $\left(f^{-1}\right)'(3)\cdot f'(0)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(3)\cdot4=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(3)=\frac{1}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

33) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-2f(x)=4x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

34) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)-2x=8x^3$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

35) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $e^{xf(x)}+3f(x)=19$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

36) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3xf(x)=x^3-1$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$ αν γνωρίζουμε ότι η f είναι :

i. παραγωγίσιμη στο $\Re$
ii. παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

37) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)+ae^{-f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in\Re$. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων :

i. Να βρείτε το α
ii. Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$.
iii. Να βρείτε το $f'(0)$

38) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)\cdot f(2-x)=-x^3+x^2+5x+3$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε :

i. Το $f'(1)$
ii. Το όριο : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$.

39) Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+7}}{x^2-4}=\dfrac{17}{24}$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f'(2)$.
ii. Αν $g(x)=f(x^2+3x)+f^2(x)-f(x^2+x)$, να βρείτε τη $g'(-2)$.

40) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
ii. Να βρείτε την $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

41) **Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(x)\neq-2$ για κάθε $x\in\Re$, για την οποία ισχύει : $f^2(x)-f(x^2)=4x^3+2x^2$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.
ii. Να αποδείξετε ότι $f(-1)\neq0$
iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=5\xi$.

42) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+1$ για κάθε $x\in\Re$. Αν η C_f διέρχεται από το Α(1,1), να βρείτε :

i. Το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y΄y

ii. Το $f'(0)$

iii. Το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+1}}{\eta\mu x}$.

43) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x+y)=\dfrac{f(x)}{e^y}+\dfrac{f(y)}{e^x}$ για κάθε $x,y\in\Re$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,y\in\Re$ ισχύει : $e^x[f(x)+f'(x)]=e^y[f(y)+f'(y)]$.

44) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(xy)=f(x)+f(y)+x^2y^2-x^2-y^2$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$ ισχύει : $xf'(x)-yf'(y)=2(x^2-y^2)$.

Β. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΕΞΗΣ :

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\boxed{\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = \varepsilon\phi\omega}$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x΄x. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι : $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$
- Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Δηλαδή αν μια συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$, τότε δεν είναι πάντα παραγωγίσημη στο x_0, αφού μπορεί να δέχεται και κατακόρυφη εφαπτομένη. (ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται άρα και το $f'(x_0)$) .Αν όμως δέχεται εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) τότε είναι παραγωγίσιμη. Οι έννοιες εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ και παράγωγος στο x_0 είναι ταυτόσημες.
- Αν μια παραγωγίσημη συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω, τότε :
  - ω οξεία $\Leftrightarrow f'(x_0) > 0$.
  - ω αμβλεία $\Leftrightarrow f'(x_0) < 0$.
  - ω=0 $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ (// x΄x) .
- Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, μπορεί να έχει με τη C_f και άλλα κοινά σημεία. (π.χ. η εφαπτομένη της $f(x) = x^3$ στο $x_0 = 0$)

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ	2ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ
$\varepsilon\phi 0° = 0$	$\varepsilon\phi 180° = 0$
$\varepsilon\phi 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\varepsilon\phi 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\varepsilon\phi 45° = 1$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{4} = 1$	$\varepsilon\phi 135° = -1$ ή $\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4} = -1$
$\varepsilon\phi 60° = \sqrt{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\varepsilon\phi 120° = -\sqrt{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$
$\varepsilon\phi 90° = --$	

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $M(x_0, f(x_0))$

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε γνωστό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, χρησιμοποιούμε τον τύπο $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$. Βρίσκουμε το $f(x_0)$ άρα το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$. Στη συνέχεια βρίσκω την $f'(x)$ και το $f'(x_0)$ κάνω αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο και προκύπτει η εξίσωση της εφαπτομένης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+5$, $x\in\Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(2,f(2))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(2,f(2))$, τότε $(\varepsilon):y-f(2)=f'(2)(x-2)$. Έχω $f(2)=7$ άρα το σημείο επαφής $\mathrm{A}(2,f(2))\to\mathrm{A}(2,7)$. Έχω : $f'(x)=2x-1$ άρα $f'(2)=3$.

Ισχύει : $(\varepsilon):y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-7=3(x-2)\Leftrightarrow y-7=3x-6\Leftrightarrow y=3x+1$ Άρα : $(\varepsilon):y=3x+1$.

2) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-2xf(x)=4x^2+8$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0,f(0))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(0,f(0))$, τότε $(\varepsilon):y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

Στη σχέση : $f^3(x)-2xf(x)=4x^2+8$ (1) θέτω $x=0$ και έχω : $f^3(0)=8\Leftrightarrow f(0)=2$.

Η συνάρτηση $f^3(x)-2xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισιμων, ομοίως και η συνάρτηση $4x^2+8$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμία. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x)-2xf(x))'=(4x^2+8)'\Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=8x$ (2)

Στη (2) για $x=0$ έχω : $3f^2(0)\cdot f'(0)-2f(0)-2\cdot 0f'(0)=8\cdot 0\Leftrightarrow 3\cdot 2^2\cdot f'(0)-2\cdot 2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12\cdot f'(0)=4\Leftrightarrow f'(0)=\dfrac{1}{3}$.

Ισχύει : $(\varepsilon):y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-2=\dfrac{1}{3}x\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x+2$. Άρα : $(\varepsilon):y=\dfrac{1}{3}x+2$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2, x\le 2\\ x^2+5x-10, x>2\end{cases}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(2,f(2))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{M}(2,f(2))$, τότε $(\varepsilon):y-f(2)=f'(2)(x-2)$. Έχω $f(2)=2^3-3\cdot 2+2\Leftrightarrow f(2)=4$ άρα το σημείο επαφής $\mathrm{M}(2,f(2))\to\mathrm{M}(2,4)$. Επίσης πρέπει να βρω το $f'(2)$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-3x+2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2}=9$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+5x-10-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+5x-14}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x+7)}{x-2}=9$ άρα f παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $f'(2)=9$.

Ισχύει : $(\varepsilon):y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-4=9(x-2)\Leftrightarrow y-4=9x-18\Leftrightarrow y=9x-14$. Άρα : $(\varepsilon):y=9x-14$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f(x) = x^4 - 5x + 6$, $\mathrm{M}(1, f(1))$

ii. $f(x) = 2e^x$, $\mathrm{M}(0, f(0))$

iii. $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$, $\mathrm{M}(0, f(0))$

iv.

ii. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + 3}$, $\mathrm{M}(1, f(1))$

iii. $f(x) = x \ln x$, $\mathrm{M}(e, f(e))$

5) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, x \le -2 \\ 2x^2 + 3x + 6, x > -2 \end{cases}$. Να βρείτε, αν υπάρχει, την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(-2, f(-2))$.

6) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, x \le 2 \\ x^3 + 2ax^2 - x + 4, x > 2 \end{cases}$ $a \in \Re$

i.Να βρείτε το α

ii.Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(2, f(2))$.

7) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, x \le 1 \\ 2ax + 2\beta - 5, x > 1 \end{cases}$ $a, \beta \in \Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1, f(1))$.

8) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο Ν εκτός του Μ. Στο σημείο Ν η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο Μ.

9) Δίνεται η παραγωγίσημη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με την ιδιότητα : $f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$ για κάθε $x \in \Re$. Να δείξετε ότι $f'(3) = 5$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{A}(3, f(3))$.

10) Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $2x^2 - 3x + 1 \le f(x) \le 3x^2 - 9x + 10$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $\mathrm{A}(3, f(3))$, της οποίας και να βρείτε την εξίσωση.

11) Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f'(1) = f''(1) = 2$. Αν $g(x) = f(e^x)$, τότε να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{g'}$ στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y΄y.

12) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$.

13) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)-2x=8x^3$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

14) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $e^{xf(x)}+3f(x)=19$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

15) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $3f(x^2+x)-11x=xf(3x-1)-9$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$.

16) Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi,\frac{1}{\xi}\right)$. Αν A,B είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι :

i. Το M είναι μέσο του AB.
ii. Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi\in\Re^*$.

17) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)}{h}=8$ και $f(1)=3$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$.

18) Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$, για την οποία ισχύει : $f(\eta\mu x)=e^x\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

19) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-x^2}{\sqrt{x+2}-2}=-4$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(2,f(2))$ της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\frac{\beta}{x}$. Έστω ότι η C_f διέρχεται από το σημείο A(-2,-5) και η εφαπτομένη της f στο A σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega=\frac{3\pi}{4}$.

i. Να βρείτε τα α,β.
ii. Για $\alpha=-\frac{1}{4}$ και $\beta=8$ να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της f΄(χ) στο σημείο $B(-1,f'(-1))$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ ΤΗΣ

Όταν δε μας δίνεται το σημείο επαφής αλλά ένα στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης, τότε ξεκινάμε θεωρώντας το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ το οποίο πρέπει και να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας το στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης. Πιο συγκεκριμένα διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = \lambda_\zeta$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{\lambda_\zeta}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, όταν $\lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ σχηματίζει γωνία $\omega \neq 90°$ με τον άξονα x΄x , όταν $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\phi\omega \Leftrightarrow f'(x_0) = \varepsilon\phi\omega$ (ισχύει ότι $\varepsilon\phi(\pi - \omega) = -\varepsilon\phi\omega$)

Αφού βρούμε το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$, κάνουμε αντικατάσταση στον τύπο : $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$, $x \in \Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που

i. Έχει συντελεστή διεύθυνσης 5
ii. Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = x + 5$
iii. Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x - 3y + 12 = 0$
iv. Είναι παράλληλη στον άξονα x΄x
v. Σχηματίζει γωνία με τον άξονα x΄x 45^0.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(x_0, f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Επίσης $f'(x) = -2x + 3$.

i. Η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης 5 άρα $f'(x_0) = 5 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 5 \Leftrightarrow x_0 = -1$. Άρα $f(-1) = -4$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(-1, f(-1)) \to M(-1,-4)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y + 4 = 5(x+1) \Leftrightarrow y + 4 = 5x + 5 \Leftrightarrow y = 5x + 1$. Άρα : $(\varepsilon): y = 5x + 1$.

ii. Η $(\varepsilon) // (\zeta): y = x + 5 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Άρα $f(1) = 2$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(1, f(1)) \to M(1,2)$. Ισχύει :

$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-2 = 1(x-1) \Leftrightarrow y-2 = x-1 \Leftrightarrow y = x+1$. Άρα : $(\varepsilon): y = x+1$.

iii. $(\varepsilon) \perp (\eta): x - 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \xleftrightarrow{\lambda_\eta = -\frac{A}{B} = \frac{1}{3}} \lambda_\varepsilon = -3$ (Όταν δυο ευθείες είναι κάθετες οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι αντιθετοαντιστροφοι). $\lambda_\varepsilon = -3 \Leftrightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = -3 \Leftrightarrow -2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 3$. Άρα $f(3) = 0$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(3, f(3)) \to M(3,0)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y - 0 = -3(x-3) \Leftrightarrow y = -3x + 9$. Άρα : $(\varepsilon): y = -3x + 9$.

iv. $(\varepsilon) // x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$. Άρα $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) \to M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{9}{4} = 0(x-3) \Leftrightarrow y = \frac{9}{4}$. Άρα : $(\varepsilon): y = \frac{9}{4}$.

(Θα μπορούσαμε να πούμε ότι επειδή $(\varepsilon) // x'x$ άρα θα είναι της μορφής $y = y_0$ και αφού βρούμε το σημείο επαφής $M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, να πούμε κατευθείαν $(\varepsilon): y = \frac{9}{4}$)

v. Η (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° άρα $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\phi\omega \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \varepsilon\phi 45° \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Άρα $f(1) = 2$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(1, f(1)) \to M(1,2)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x+1$ Άρα : $(\varepsilon): y = x+1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που

i. Έχει συντελεστή διεύθυνσης 3
ii. Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = 5x + 7$
iii. Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x - 7y + 13 = 0$
iv. Είναι παράλληλη στον άξονα x΄x
v. Σχηματίζει γωνία με τον άξονα x΄x 45^0.
vi. Σχηματίζει γωνία με τον άξονα x΄x 135^0.

23) Να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 1$ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{2\pi}{3}$.

24) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της $f(x) = x \ln x$ που είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{O}y$.

25) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ που είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

26) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{3x-1}$. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): y=-2x-1$. Στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων.

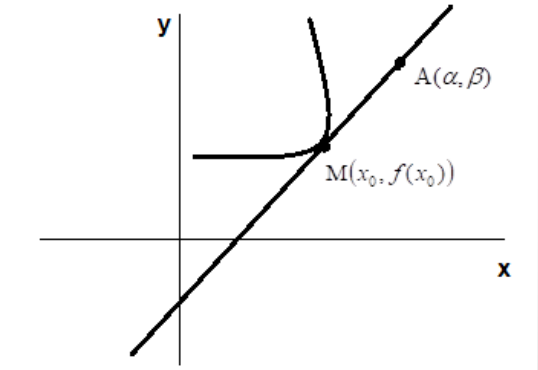
27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της f ώστε οι εφαπτομένες σ' αυτά να είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): y=2x$.

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-2x}(x^2+5)$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της f ώστε οι εφαπτομένες σ' αυτά να είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

29) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :
$f(x)=\eta\mu 2x-2\eta\mu^2 x$, $x\in[0,2\pi]$, στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x.

30) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΠΟΥ ΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗ C_f



Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από ένα σημείο $A(\alpha,\beta)$ που **δεν ανήκει** στη C_f, εργαζόμαστε ως εξής :

1) θεωρούμε $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής

2) γράφουμε τον τύπο της εφαπτομένης $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

3) η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(\alpha,\beta)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της, Δηλ. $\beta-f(x_0)=f'(x_0)(\alpha-x_0)$

4) από την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε την τιμή (ή τις τιμές) του x_0 και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης.

(Προσοχή : σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να μπερδεύουμε το σημείο επαφής με το σημείο διέλευσης.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=3x^2-5x+2$ που διέρχονται από το σημείο Α(3,2).

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Επίσης $f'(x)=6x-5$.

Άρα : $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(3x_0^2-5x_0+2)=(6x_0-5)(x-x_0)$ (1)

Όμως η (ε) διέρχεται από το σημείο Α(3,2) άρα οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της (1) δηλαδή : $(\varepsilon): y-(3x_0^2-5x_0+2)=(6x_0-5)(x-x_0) \overset{\substack{x=3\\y=2}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 2-(3x_0^2-5x_0+2)=(6x_0-5)(3-x_0) \Leftrightarrow 2-3x_0^2+5x_0-2=18x_0-6x_0^2-15+5x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x_0^2-18x_0+15=0 \Leftrightarrow x_0^2-6x_0+5=0 \Leftrightarrow x_0=1$ ή $x_0=5$

- Για $x_0=1$, $f(x_0)=f(1)=0$ και $f'(x_0)=f'(1)=1$ άρα $(\varepsilon_1): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-0=1(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$ άρα $(\varepsilon_1): y=x-1$

- Για $x_0=5$, $f(x_0)=f(5)=52$ και $f'(x_0)=f'(5)=25$ άρα $(\varepsilon_2): y-f(5)=f'(5)(x-5) \Leftrightarrow y-52=25(x-5) \Leftrightarrow y-25=25x-125 \Leftrightarrow y=25x-73$ άρα $(\varepsilon_2): y=25x-73$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

32) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

34) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=x^2$ η οποία διέρχεται από το σημείο Α(-1,-3).

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{7-2x}{3-x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο Α(3,0).

36) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+6x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο Α(-3,-10).

37) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x}$, λ>0. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Ιούνιος 2005)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΗ C_f

Η ευθεία (ε): $y=\lambda x+\beta$ εφάπτεται στη C_f, αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$, ώστε να ισχύει : $\begin{cases} f'(x_0)=\lambda \quad (1) \\ \mathrm{M}(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(x_0)=\lambda x_0+\beta \quad (2) \end{cases}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

38) Αν η ευθεία $y=6x-2$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=2x^2-\alpha x+\beta$ στο σημείο $\mathrm{M}(2, f(2))$,

i. Να βρείτε τα α,β.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=2x+4$ εφάπτεται στη C_f.

Λύση :

i. Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $\mathrm{M}(2, f(2))$. Επίσης $f'(x)=4x-\alpha$.

Η ευθεία $y=6x-2$ εφάπτεται στη C_f στο

$$\mathrm{M}(2, f(2)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=6\cdot 2-2 \\ f'(2)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2\alpha+\beta=10 \\ 8-\alpha=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha+\beta=2 \\ \alpha=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=6 \end{cases}$$

ii. Για $\alpha=2$ και $\beta=6$ ο τύπος της f γίνεται : $f(x)=2x^2-2x+6$ άρα $f'(x)=4x-2$. Η ευθεία $y=2x+4$ εφάπτεται στη C_f, αν και μόνο αν υπάρχει σημείο $\mathrm{N}(x_0, f(x_0))$ της C_f, ώστε να ισχύουν : $\begin{cases} f(x_0)=2\cdot x_0+4 \\ f'(x_0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2-2x_0+6=2x_0+4 \\ 4x_0-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2-4x_0+2=0 \\ 4x_0=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-2x_0+1=0 \\ x_0=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ x_0=1 \end{cases}$. Άρα η ευθεία $y=2x+4$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $\mathrm{N}(1, f(1)) \to \mathrm{N}(1,6)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\zeta): y=-3x+6$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-5x+7$

40) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\eta): x-2y=0$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2-3x+3}$

41) Έστω $f:\Re \to \Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με : $f'(1)=1$ και $g(x)=f(x^3+x+1)-1$, για κάθε $x \in \Re$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1, f(1))$.

ii. Να βρείτε το $g'(0)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται της C_g στο $\mathrm{B}(0, g(0))$.

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+3$ με $\beta,\gamma\in\Re$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon):y=10x-9$.

i. Να βρείτε τα β,γ ii. Να αποδείξετε ότι και η ευθεία $(\zeta):y=3x+2$ εφάπτεται της C_f.

43) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ με $\beta,\gamma\in\Re$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(-1,f(-1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon):y=-4x+7$.

i. Να βρείτε τα β,γ ii.Να αποδείξετε ότι και η ευθεία $(\zeta):y=2x+4$ εφάπτεται της C_f.

44) Αν η ευθεία $y=2\alpha x-\beta$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x$ στο σημείο $M(1,f(1))$, να βρείτε τα α,β.

45) Αν η ευθεία $y=2x-1$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^3-\beta x-2$ στο σημείο $M(-1,f(-1))$, να βρείτε τα α,β.

46) Αν η ευθεία $y=\lambda x-1$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x^2-x$, να βρείτε το σημείο επαφής και στη συνέχεια την ευθεία (ε).

47) Αν η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=xe^{-\lambda x}$, $\lambda\neq 0$, να βρείτε το σημείο επαφής.

48) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=x^2+3x$.

i.Να βρείτε της εφαπτομένη της καμπύλης της f στο $x_0=1$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

ii.Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη, εφάπτεται και στην καμπύλη της g.

49) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ της οποίας η C_f στο σημείο $A(4,f(4))$ έχει εφαπτομένη την ευθεία $y=x-1$. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f^2(x)-9}{\sqrt{x}-2}$.

50) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ και θεωρούμε και τη συνάρτηση $g(x)=(x^3-x^2)f(x^2-1)$, για κάθε $x\in\Re$. Η ευθεία $y=40x-76$ εφάπτεται στη C_g στο σημείο της $A(2,g(2))$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $B(3,f(3))$.

51) Δίνονται οι παραγωγισιμες συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει : $f\left(x^2\right)=\left(2x^3+3x^2\right)^2\cdot g(x)$ για κάθε $x\in\Re$. Αν η ευθεία $(\varepsilon):y=3x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,f(1))$, τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $B(-1,g(-1))$.

52) Δίνεται άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$ έχει εξίσωση $y=2x-3$.

i.Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$

ii.Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x^2+x)+f^2(x)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $B(-2,g(-2))$.

53) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)+8x=2x^3+(x^2+4)f(x)$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=4x-1$ εφάπτεται στη C_f και να βρείτε το σημείο επαφής.

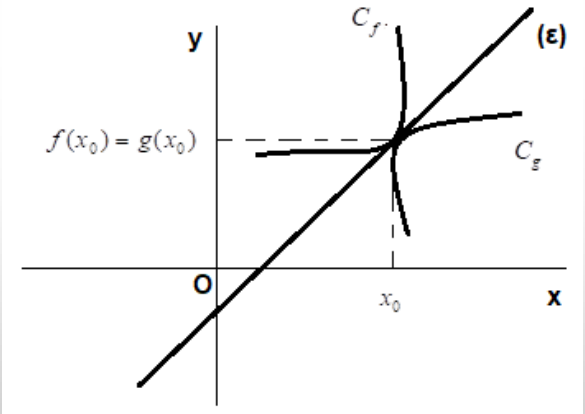
54) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\Re$ για την οποία ισχύει $f'(1)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x)=f(x^2+x+1)-1,\ x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0,g(0))$.

55) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, x\geq 2\\ 3x^2-10x-4\alpha, x<2\end{cases}$ και η συνάρτηση $g(x)=x^2+\beta x+\gamma$ με $a,\beta,\gamma\in\Re$.

i. Να βρείτε το α ii. Να βρείτε την $f'(x)$

ii. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$ εφάπτεται και στη C_g στο σημείο $B(3,g(3))$, τότε να βρείτε τα β,γ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥΣ



Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δυο συναρτήσεων f,g έχουν κοινή εφαπτομένη (ή αλλιώς εφάπτονται μεταξύ τους) στο κοινό σημείο τους $M(x_0,y_0)$, αν ισχύει : $f(x_0)=g(x_0)$ και $f'(x_0)=g'(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

56) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ και $g(x)=x^2+2\kappa x+\lambda$. Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda\in\Re$, έτσι ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=-1$.

Λύση :

$$f'(x)=\left(\frac{2x}{x-1}\right)'=\frac{(2x)'(x-1)-2x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$g'(x)=2x+2\kappa$

Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους με $x_0=-1$, άρα ισχύει : $f(-1)=g(-1)$ και $f'(-1)=g'(-1)$

Έχω $f(-1)=g(-1)\Leftrightarrow\frac{-2}{-2}=1-2\kappa+\lambda\Leftrightarrow 1=1-2\kappa+\lambda\Leftrightarrow\lambda=2\kappa$ (1)

Και $f'(-1)=g'(-1)\Leftrightarrow-\frac{1}{2}=-2+2\kappa\Leftrightarrow-1=-4+4\kappa\Leftrightarrow\kappa=\frac{3}{4}$, άρα από (1) $\lambda=2\kappa\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

57) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2$ και $g(x)=x^2+2\beta x+\alpha$, με $\alpha,\beta\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές των α,β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

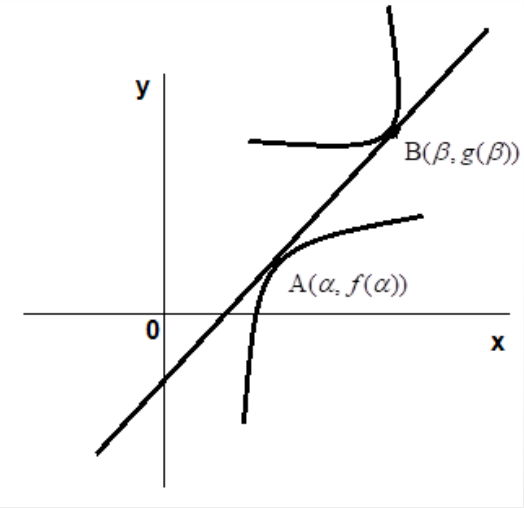
58) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2x^2-7x+7$ και $g(x)=x^2-3x+3$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g στο κοινό σημείο τους έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε και την εξίσωση.

59) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x+4$ και $g(x)=3x^2-3x$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g στο κοινό σημείο τους έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε και την εξίσωση.

60) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-3x+3$ και $g(x)=\frac{1}{x}$.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g
ii. Να βρείτε το διάστημα όπου η C_f είναι κάτω από τη C_g
iii. Να δείξετε ότι στο κοινό σημείο τους οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΜΗ ΚΟΙΝΟ ΤΟΥΣ ΣΗΜΕΙΟ



Για να βρούμε, αν υπάρχει, κοινή εφαπτομένη (ε) των C_f, C_g σε μη κοινό σημείο τους, εργαζόμαστε ως εξής :

1) θεωρούμε $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_f και C_g αντίστοιχα

2) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι : $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ (1) ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(\beta, g(\beta))$ είναι : $y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta)$ (2)

3) για να παριστάνουν οι (1) και (2) την ίδια ευθεία πρέπει : $\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta g'(\beta) + g(\beta) \end{cases}$

4) από το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε τα α,β .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

61) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g .

Λύση : $f(x) = x^2 - 3x + 4$ με $D_f = \Re$ και $f'(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$ με $D_g = \Re$ και $g'(x) = 2x - 7$. Αρχικά θα εξετάσουμε αν οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους. Για να βρούμε κοινά σημεία των C_f, C_g, λύνουμε την εξίσωση : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = x^2 - 7x + 16 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$, άρα το κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το $M(3, f(3)) \to M(3,4)$. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους Μ πρέπει να ισχύει : $f(3) = g(3) \Leftrightarrow 4 = 4$ που ισχύει, και $f'(3) = g'(3) \Leftrightarrow 3 = -1$ που δεν ισχύει. Άρα οι C_f, C_g δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους.

Θα εξετάσουμε τώρα αν έχουν κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο. Έστω (ε) η κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g και $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_f και C_g αντίστοιχα.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι : $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ (1) ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(\beta, g(\beta))$ είναι : $y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta)$ (2)
Για να παριστάνουν οι (1) και (2) την ίδια ευθεία πρέπει :
$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta g'(\beta) + g(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 2\alpha - 3 = 2\beta - 7 \\ -\alpha(2\alpha-3) + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -\beta(2\beta-7) + \beta^2 - 7\beta + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = -4 \\ -2\alpha^2 + 3\alpha + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -2\beta^2 + 7\beta + \beta^2 - 7\beta + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ -\alpha^2 + 4 = -\beta^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 2, (1) \\ \beta^2 - \alpha^2 = 12, (2) \end{cases} \Leftrightarrow$ η (2) λόγο της (1) γίνεται $\beta^2 - \alpha^2 = 12 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \beta^2 - (\beta-2)^2 = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta^2 - \beta^2 + 4\beta - 4 = 12 \Leftrightarrow 4\beta = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και από (1) $\alpha - 4 = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Άρα τα σημεία επαφής είναι $A(2, f(2)) \to A(2,2)$ και $B(4, g(4)) \to B(4,4)$, ενώ η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι : $(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x$ δηλαδή $(\varepsilon) : y = x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

62) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g αν $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 + x + 4$.

63) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

64) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g αν $f(x) = x^2 - x - 2$ και $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

65) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΠΑΦΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

66) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x + x^2 - x$ στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι κάθετη στην ευθεία : $(\zeta) : x + y + 2017 = 0$.

Λύση :

Έχουμε $A_f = \Re$ και $f'(x) = e^x + 2x - 1$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ με $(\varepsilon) : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ τότε

$(\varepsilon) \perp (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$

Δηλ. $f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow e^\xi + 2\xi - 1 = 1 \Leftrightarrow e^\xi + 2\xi - 2 = 0$. Έστω $g(x) = e^x + 2x - 2$, $x \in \Re$. Θα δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Εφαρμόζω Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο [0,1]

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{array}{l} g(0) = e^0 - 2 = -1 < 0 \\ g(1) = e + 2 - 2 = e > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(1) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

67) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει :

i. Ένα τουλάχιστον σημείο Α της C_f με τετμημένη $x_1 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Α να είναι παράλληλη στην ευθεία : $(\zeta) : 12x - 2y + 2011 = 0$.

ii. Ένα τουλάχιστον σημείο Β της C_f με τετμημένη $x_2 \in (1,2)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Β να τέμνει τον άξονα y΄y στο -16.

68) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \ln x - 2x^2$ στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

69) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \ln x$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

70) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+3x+2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0=3$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Λύση :

i. Έχω : $D_f=\Re$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $x_1<x_2\Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1<x_2\Leftrightarrow 3x_1<3x_2\Leftrightarrow 3x_1+2<3x_2+2\Leftrightarrow$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1}+3x_1+2<e^{x_2}+3x_2+2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ αντιστρέψιμη. Επίσης $f(\Re)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\Re$. Άρα $D_{f^{-1}}=\Re$.

ii. Έστω (ε) η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $M\left(3,f^{-1}(3)\right)$ τότε :

$(\varepsilon):y-f^{-1}(3)=\left(f^{-1}\right)'(3)(x-3)$ (3)

Για $\alpha\in\Re$ είναι : $f^{-1}(3)=\alpha\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(3)\right)=f(\alpha)\Leftrightarrow 3=f(\alpha)\overset{f(0)=3}{\Leftrightarrow}f(\alpha)=f(0)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=0$.

Άρα $\boxed{f^{-1}(3)=0}$. Για κάθε $x\in\Re$ ισχύει ότι $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ οπότε : $\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)'=(x)'\Leftrightarrow$ $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)=1$, όμως $f'(x)=e^x+3$ άρα : $\left(f^{-1}\right)'\left(e^x+3x+2\right)\cdot(e^x+3)=1$ (4).

Στην (4) για $x=0$ έχω : $\left(f^{-1}\right)'(3)\cdot f'(0)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(3)\cdot 4=1\Leftrightarrow\boxed{\left(f^{-1}\right)'(3)=\frac{1}{4}}$.

Άρα : (3) $(\varepsilon):y-f^{-1}(3)=\left(f^{-1}\right)'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-0=\frac{1}{4}(x-3)\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

71) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0=3$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

72) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^5+2x^3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0=0$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Γ. ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0}$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, εφαρμόζω το Θ. De L΄Hospital (παραγωγίζω αριθμητή και παρανομαστή). Αν έχουμε και πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

π.χ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\eta\mu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{-\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(-\eta\mu x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{0}{-1}=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Να υπολογιστούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x+\eta\mu 2x}{\eta\mu 5x-\eta\mu 2x}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x^2-x}{x^3-x^2}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\eta\mu x}$ viii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$ ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{e^x-1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{\infty}{\infty}$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, εφαρμόζω το Θ. De L΄Hospital (παραγωγίζω αριθμητή και παρανομαστή). Αν έχουμε και πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

π.χ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^2}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x^2)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{xe^x}=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να υπολογιστούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e^x}{x^2+e^x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+\ln x}{3x+\ln x}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{e^x}$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{x}$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$ vii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x+2)}{x}$ viii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+2)}{\ln(x^2+5)}$ ix) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $0\cdot\infty$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, γράφω $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ή $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$

οπότε έχω απροσδιοριστία $\dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\infty}{\infty}$ και λειτουργώ όπως παραπάνω.

π.χ.1 $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

π.χ.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)\overset{-\infty\cdot0}{=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\dfrac{1}{e^x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x)'}{(e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)$ ii) $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2\ln x)$ iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(2-x^2)$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x$ v) $\lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{x}\ln x)$ vi) $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-1)\ln x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\infty-\infty$

Α. Όριο $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$. Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία $\infty-\infty$, γράφουμε τον τύπο με τη μορφή $f(x)\left(1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$ ή $g(x)\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right)$. Για το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{\infty}{\infty}$, και εφαρμόζουμε Θ. De L΄Hospital.

π.χ.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x+e^x)\overset{+\infty-\infty+\infty}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{e^x}{x}\right)\right)=l$

όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

επίσης : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$

Άρα : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{e^x}{x}\right)\right)=+\infty(1-0+\infty)=+\infty$

π.χ.2 **(Ειδική περίπτωση!!) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-x\right]$

(σε όρια αυτής της μορφής, αν δουλέψουμε σύμφωνα με τη μεθοδολογία και το π.χ.1 θα οδηγηθούμε σε απροσδιοριστία $0\cdot\infty$, για αυτό χρησιμοποιώ το εξής τέχνασμα :)

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-\ln e^x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x+1}{e^x}\right)=l$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x+1)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

Άρα : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x+1}{e^x}\right)=\ln1=0$

Β. Όταν ο τύπος είναι διαφορά, με ένα τουλάχιστον όρο κλάσμα, και έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\infty-\infty$, κάνουμε ομώνυμα και μετά βρίσκουμε το Όριο.

π.χ. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{xe^x-x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1-x)'}{(xe^x-x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)'}{(e^x+xe^x-1)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-x\right]$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-\ln x)$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x^2)$ v) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x^2)$ vi) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3+e^{-x}\right]$ vii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln(1+e^x)\right]$

viii) ** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+x)-x\right]$ ix)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x-1)-x+1\right]$ x)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2+1)-e^{x^2+1}\right]$

5) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{x}\right)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $0^0,\infty^0,1^\infty$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, γράφω $f(x)^{g(x)}=e^{\ln\left[f(x)^{g(x)}\right]}=e^{g(x)\ln[f(x)]}$. Στη συνέχεια βρίσκω το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot\ln(f(x))]=l$. Το ζητούμενο όριο είναι e^l.

π.χ. 1 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}$, έχουμε :

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

Άρα : $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$ ii) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\eta\mu x}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ Θ. HOSPITAL ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7) Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς στη θέση x=0 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} e^x-e^{-x}-x, x\le 0 \\ \dfrac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}, x>0 \end{cases}$

8) Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς στη θέση x=0 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} e^{1-\sigma\upsilon\nu x}+x, x\le 0 \\ \dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}, x>0 \end{cases}$

9) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση x=1 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} 2x-x^2, x\le 1 \\ x-\ln x, x>1 \end{cases}$

.

10) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση x=0 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} 1+x-x^2, x\le 0 \\ e^x+x^2, x>0 \end{cases}$.

11) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση x=0 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} e^x-1, x\le 0 \\ x\ln x, x>0 \end{cases}$.

12) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f(x)-f(x-h)-f(x+h)}{h^2}=e^x+x-1$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την f'' .

13) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=0$.

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

iii. Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_h στα σημεία $A(0,f(0))$ και $B(0,h(0))$ είναι παράλληλες. (Θέμα πανελληνίων)

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

38. ΟΡΙΣΜΟΣ

Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x = x_0$, αν $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ;

Απάντηση :

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Σχόλια :

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή : $\alpha(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Για να επιλύσουμε προβλήματα σχετικά με ρυθμούς μεταβολής μεγεθών, κάνουμε τα εξής :

i. Πρώτα καταγράφουμε όλους τους αγνώστους, καθώς και τις σχέσεις που τους συνδέουν. Αν η σχέση που συνδέει τους αγνώστους δε δίνεται στην εκφώνηση, τότε την φτιάχνουμε μέσα από τα δεδομένα της εκφώνησης (είτε με σχήμα, είτε με τη λογική σκέψη).
ii. Έπειτα μετατρέπουμε τη σχέση που συνδέει τους αγνώστους σε συνάρτηση ως προς τον ανεξάρτητο άγνωστο.
iii. Υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων όταν $x = x_0$ που ζητείται ο ρυθμός μεταβολής.
iv. Τέλος παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που φτιάξαμε και με αντικατάσταση $x = x_0$ προκύπτει ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής.

Υπενθύμιση :

- Εμβαδόν σφαίρας : $\mathrm{E}=4\pi R^2$, Όγκος σφαίρας : $V=\frac{4}{3}\pi R^3$
- Εμβαδόν κώνου : $\mathrm{E}=\pi R\lambda+\pi R^2$, Όγκος κώνου : $V=\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon$,
- Όγκος πυραμίδας : $V=\frac{1}{3}\mathrm{E}_{βάσης}\cdot\upsilon$
- Ο ρυθμός μεταβολής της **ταχύτητας** v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή : $\alpha(t_0)=v'(t_0)=S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος (δηλ. $\mathrm{K}(x),\mathrm{E}(x),\mathrm{P}(x)$). Έτσι, η παράγωγος $\mathrm{K}'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x=x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0. Η βασική σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις $\mathrm{K}(x),\mathrm{E}(x),\mathrm{P}(x)$ είναι $\boxed{\mathrm{P}(x)=\mathrm{E}(x)-\mathrm{K}(x)}$. Το μέσο κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος συμβολίζεται με $\mathrm{K}_\mu(x)$ και είναι $\boxed{\mathrm{K}_\mu(x)=\frac{\mathrm{K}(x)}{x}}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων Α(4,0) και Β(0,x) ως προς x, όταν x=3.

Λύση :

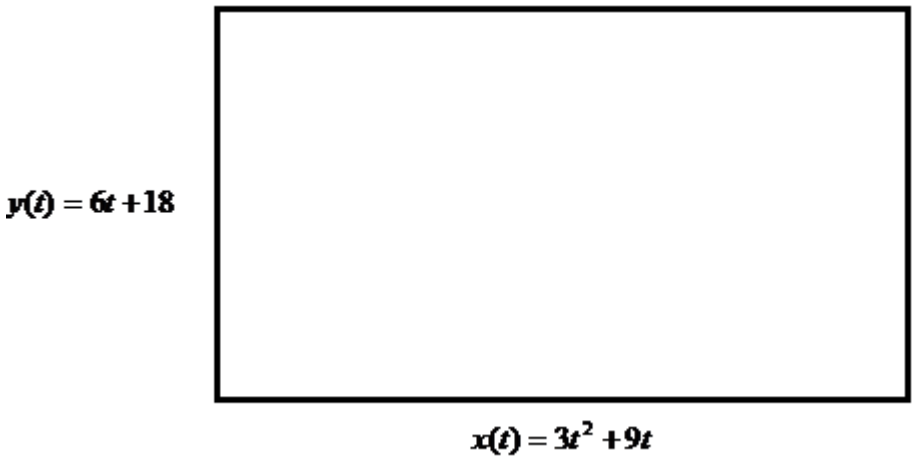
Η Απόσταση δυο σημείων $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ Δίνεται από τον τύπο : $(\mathrm{AB})=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Άρα $(\mathrm{AB})=\sqrt{(0-4)^2+(x-0)^2}=\sqrt{16+x^2}$

Άρα η συνάρτηση που δίνει την απόσταση (AB) ως προς x είναι $f(x)=\sqrt{16+x^2}$ με $D_f=\Re$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ όταν x=3, δηλ. το $f'(3)$. Βρίσκω πρώτα την $f'(x)=(\sqrt{16+x^2})'=\frac{1}{2\sqrt{16+x^2}}\cdot(16+x^2)'=\frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}$

Άρα $f'(3)=\frac{3}{\sqrt{16+9}}=\frac{3}{5}$

2) Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $x(t)=3t^2+9t$ και $y(t)=6t+18$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο.

Λύση :



$\mathrm{E} = x \cdot y$ άρα $\mathrm{E}(t) = x(t) \cdot y(t) = (3t^2 + 9t)(6t + 18) = 18t^3 + 54t^2 + 54t^2 + 162t =$
$= 18t^3 + 108t^2 + 162t$

Τη χρονική στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο θα ισχύει $x(t) = y(t) \Leftrightarrow 3t^2 + 9t = 6t + 18 \Leftrightarrow 3t^2 + 3t - 18 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2, ή, t = -3$ απορ.

Η συνάρτηση του εμβαδού είναι $\mathrm{E}(t) = 18t^3 + 108t^2 + 162t$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο δηλ. το $\mathrm{E}'(2)$. Βρίσκω πρώτα $\mathrm{E}'(t) = 54t^2 + 216t + 162$. Άρα $\mathrm{E}'(2) = 54 \cdot 2^2 + 216 \cdot 2 + 162 = 810$ τετραγωνικές μονάδες/sec.

3) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, όπου το *t* μετριέται σε δευτερόλεπτα και το *x* σε μέτρα.

i. Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο *t*.
ii. Ποια είναι η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2 s και ποια σε χρόνο 4 s;
iii. Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
iv. Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
v. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 s.

Λύση :

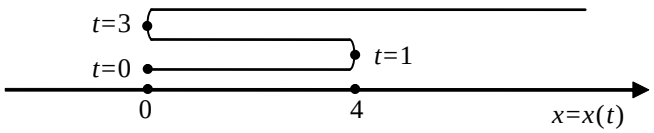
i. Η ταχύτητα είναι : $\upsilon(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t)' = 3t^2 - 12t + 9$.

ii. Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο $t = 2s$ είναι $\upsilon(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3\,\mathrm{m/s}$
και σε χρόνο $t = 4s$ είναι $\upsilon(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9\,\mathrm{m/s}$.

iii. Το σημείο είναι ακίνητο, όταν $\upsilon(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ή $t = 3$.
Άρα, το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 1 s και ύστερα από 3 s.

iv. Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, όταν
$\upsilon(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 > 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) > 0 \Leftrightarrow t < 1$ ή $t > 3$.
Άρα, το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση στα χρονικά διαστήματα $t < 1$ και $t > 3$ (και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $1 < t < 3$).

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



v.Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

- Στη διάρκεια του πρώτου δευτερόλεπτου $S_1 = |x(1) - x(0)| = |4 - 0| = 4\,\text{m}$.
- Από $t = 1$ μέχρι $t = 3$ $S_2 = |x(3) - x(1)| = |0 - 4| = 4\,\text{m}$
- Από $t = 3$ μέχρι $t = 5$ $S_3 = |x(5) - x(3)| = |20 - 0| = 20\,\text{m}$

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5s είναι

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 4 + 20 = 28\,\text{m}.$$

4) Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου *t* ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας *E* και του όγκου *V* της μπάλας, όταν $t = 1\,\text{sec}$. (Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$). *(Ασκ. 1 Α΄ ομάδας σελ. 243 σχολικό)*

Λύση : Επειδή $\text{E} = 4\pi r^2$ και η ακτίνα r μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t, έχουμε :

$\text{E}(t) = 4\pi r^2(t)$ και $r(t) = 4 - t^2$.

$\text{E}'(t) = 8\pi r(t) \cdot r'(t)$ με $r'(t) = -2t$.

Έτσι : $\text{E}'(1) = 8\pi r(1) \cdot r'(1) = 8\pi \cdot 3 \cdot (-2) = -48\pi \ \ cm^2/s$

Ομοίως $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$, $V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t)$

Έτσι : $V'(1) = 4\pi r^2(1) \cdot r'(1) = 4\pi \cdot 9 \cdot (-2) = -72\pi \ \ cm^3/s$

5) Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10\text{cm}^2/\text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r = 85\text{cm}$.

(Ασκ. 1 Β΄ ομάδας σελ. 244 σχολικό)

Λύση : Είναι $r = r(t)$ η ακτίνα της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου t.

Η επιφάνεια της σφαίρας είναι $\text{E}(t) = 4\pi r^2(t)$ και ο όγκος $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$.

Οπότε : $\text{E}'(t) = 8\pi r(t) \cdot r'(t)$ και $V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10\text{cm}^2/\text{sec}$ δηλ. $\text{E}'(t_0) = +10 \ \ cm^2/s$ και η ακτίνα της είναι $r(t_0) = 85 \ \ cm$.

Άρα

$$E'(t_0)=+10\ cm^2/s \Leftrightarrow 8\pi r(t_0)\cdot r'(t_0)=10 \Leftrightarrow 8\pi\cdot 85\cdot r'(t_0)=10 \Leftrightarrow r'(t_0)=\frac{1}{68\pi}cm/s$$

Έτσι : $V'(t_0)=4\pi r^2(t_0)\cdot r'(t_0)=4\pi\cdot 85^2\cdot\frac{1}{68\pi}=425\,cm^3/s$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΚΙΝΗΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\frac{1}{4}x^2$, $x\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$. *(Ασκ. 5 Α΄ ομάδας σελ. 244 σχολικό)*

Λύση : Έστω $M(x,y)$ σημείο της καμπύλης $y=\frac{1}{4}x^2$. Επειδή η τετμημενη και η τεταγμένη του σημείου Μ μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t είναι $x=x(t), y=y(t)$ με $y(t)=\frac{1}{4}x^2(t)$

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης *x* του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του *y* άρα : $x'(t)=y'(t) \Leftrightarrow x'(t)=\left(\frac{1}{4}x^2(t)\right)' \Leftrightarrow x'(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot x'(t) \overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}x(t) \Leftrightarrow x(t)=2$. Και $y(t)=\frac{1}{4}x^2(t) \Leftrightarrow y(t)=\frac{1}{4}2^2 \Leftrightarrow y(t)=1$. Δηλ. $M(2,1)$

7) Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2+y^2=1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α. *(Ασκ. 8 Β΄ ομάδας σελ. 245 σχολικό)*

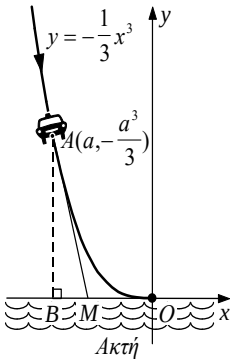
Λύση : Έστω $x=x(t), y=y(t)$ οι συντεταγμένες του κινητού, την τυχαία χρονική στιγμή t. Τη χρονική στιγμή t_0 που το κινητό βρίσκεται στη θέση $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι $\boxed{x(t_0)=\frac{1}{2},\ y(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Επίσης $\boxed{y'(t_0)=-3}$. Όμως το κινητό κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=1$ δηλ. $x^2(t)+y^2(t)=1$. Παραγωγιζοντας και τα δυο μέλη έχουμε : $\left(x^2(t)+y^2(t)\right)'=0 \Leftrightarrow 2x(t)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)=0$ (1)

Έτσι η (1) για $t=t_0$ γίνεται :

$$2x(t_0)\cdot x'(t_0)+2y(t_0)\cdot y'(t_0)=0 \Leftrightarrow 2\frac{1}{2}\cdot x'(t_0)+2\frac{\sqrt{3}}{2}(-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'(t_0)=3\sqrt{3}\ \mu ον άδες/s\ .$$

8) Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3,\ x\le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3. *(Ασκ. 6 Β΄ ομάδας σελ. 245 σχολικό)*



Λύση :

Ο προβολέας του περιπολικού φωτίζει κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3}\right)$, καθώς αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Είναι $y=f(x)=-\frac{1}{3}x^3,\ x\le 0$ με $f'(x)=-x^2$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3}\right)$ τότε $(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow(\varepsilon): y+\frac{\alpha^3}{3}=-\alpha^2(x-\alpha)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\varepsilon): y=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3}$. Το σημείο Μ είναι το σημείο που η εφαπτομένη τέμνει τον x΄x.

Έτσι : $(\varepsilon)\overset{y=0}{\Leftrightarrow}0=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3}\Leftrightarrow 3\alpha^2x=2\alpha^3\overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow}x=\frac{2\alpha}{3}$. Άρα το σημείο Μ έχει τετμημενη $x(t)=\frac{2\alpha(t)}{3}$, έτσι $x'(t)=\frac{2\alpha'(t)}{3}=-\frac{2\alpha(t)}{3}$, όμως τη χρονική στιγμή t_0 το περιπολικό, δηλ το σημείο Α, έχει τετμημενη -3 άρα $\alpha(t_0)=-3$. Τελικά $x'(t_0)=-\frac{2\alpha(t_0)}{3}=-\frac{2(-3)}{3}=2\ \frac{\mu ον.\ \mu ήκους}{\mu ον.\ χρόνου}$.

9) Ένα υλικό σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $C: y=e^x+x^3+1$, με $x=x(t),\ y=y(t)\quad t\ge 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ περνάει από το σημείο $A(0,2)$ η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $l=(OM)$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α.

Λύση :

Έστω $x=x(t), y=y(t)$ οι συντεταγμένες του σημείου Μ. Ισχύει ότι $y(t)=e^{x(t)}+x^3(t)+1$. Τη χρονική στιγμή t_0 το Μ παίρνει από το $A(0,2)$, άρα : $\boxed{x(t_0)=0,\ y(t_0)=2}$ και από εκφώνηση $\boxed{x'(t_0)=2\ \mu ον./s}$. Επίσης : $(OM)=l=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow l^2=x^2+y^2$. Όμως η απόσταση $l=(OM)$ είναι συνάρτηση του χρόνου t, έτσι έχω : $l^2(t)=x^2(t)+y^2(t)$ (1).

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της (1) έχω : $2l(t)\cdot l'(t)=2x(t)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)$ (2).

Επίσης η (1) για $t=t_0$ γίνεται : $l^2(t_0)=x^2(t_0)+y^2(t_0)\Leftrightarrow l^2(t_0)=4\Leftrightarrow \boxed{l(t_0)=2}$.

Ακόμα : $y'(t)=\left(e^{x(t)}+x^3(t)+1\right)'=e^{x(t)}\cdot x'(t)+3x^2(t)\cdot x'(t)$,

Δηλαδή : $y'(t_0)=e^{x(t_0)}\cdot x'(t_0)+3x^2(t_0)\cdot x'(t_0)=e^0\cdot 2+3\cdot 0^2\cdot 2=2\Leftrightarrow \boxed{y'(t_0)=2}$.

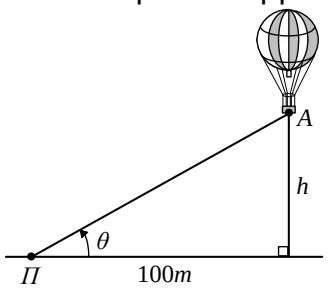
Τελικά η (2) για $t=t_0$ γίνεται : $2l(t_0)\cdot l'(t_0)=2x(t_0)\cdot x'(t_0)+2y(t_0)\cdot y'(t_0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot 2l'(t_0)=2\cdot 0\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\Leftrightarrow 4l'(t_0)=8\Leftrightarrow l'(t_0)=2\ \mu ον./s$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10) Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m.



(Ασκ. 4 Β΄ ομάδας σελ. 245 σχολικό)

Λύση :

Το ύψος h και η γωνία θ μεταβάλλονται ως συνάρτηση του χρόνου t.

Έτσι : $h=h(t)$ και $\theta=\theta(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 από δεδομένα έχουμε :

$\boxed{h(t_0)=100m}$ και $\boxed{h'(t_0)=50m/\min}$. Το τρίγωνο του σχήματος είναι ορθογώνιο έτσι :

$\varepsilon\phi\theta=\dfrac{\alpha\pi.\ κάθετη}{\pi ροσκ.\ κάθετη}=\dfrac{h}{100}\Rightarrow \varepsilon\phi\theta(t)=\dfrac{h(t)}{100}$. Παραγωγίζοντας την ισότητα έχουμε :

$$\left(\varepsilon\phi\theta(t)\right)'=\left(\frac{h(t)}{100}\right)'\Leftrightarrow \frac{1}{συν^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{1}{100}\cdot h'(t)\Leftrightarrow$$

$$\frac{ημ^2\theta(t)+συν^2\theta(t)}{συν^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{1}{100}\cdot h'(t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{ημ^2\theta(t)}{συν^2\theta(t)}+1\right)\cdot\theta'(t)=\frac{1}{100}\cdot h'(t)\Leftrightarrow\left(\varepsilon\phi^2\theta(t)+1\right)\cdot\theta'(t)=\frac{1}{100}\cdot h'(t)\quad(1)$$

Η (1) για $t=t_0$ γίνεται : $\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0)+1\right)\cdot\theta'(t_0)=\dfrac{1}{100}\cdot h'(t_0)$ (2)

Όμως $\varepsilon\phi\theta(t_0)=\dfrac{h(t_0)}{100}=\dfrac{100}{100}=1$.

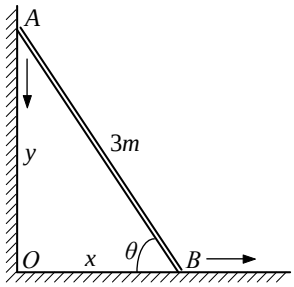
Άρα η (2) γίνεται :

$$\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0)+1\right)\cdot\theta'(t_0)=\frac{1}{100}\cdot h'(t_0)\Leftrightarrow(1^2+1)\cdot\theta'(t_0)=\frac{50}{100}\Leftrightarrow\theta'(t_0)=\frac{1}{4}\ rad/\min.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΚΑΛΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστρά στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:



i. Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή *A* της σκάλας.

ii. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).

(Ασκ. 7 Β΄ ομάδας σελ. 245 σχολικό)

Λύση :

i. Τα μεγέθη x, y, θ είναι συναρτήσεις του χρόνου t έτσι : $x = x(t), y = y(t), \theta = \theta(t)$.

Από δεδομένα έχουμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\boxed{x'(t_0) = 0{,}1m/s}$, $\boxed{y(t_0) = 2{,}5m}$.

Ψάχνουμε την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή *A* της σκάλας δηλ. το $y'(t_0)$.

Επειδή το τρίγωνο του σχήματος είναι ορθογώνιο έχουμε :

$x^2 + y^2 = 3^3 \Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = 9$ (1)

Επίσης $x^2(t) + y^2(t) = 9 \overset{t=t_0}{\Leftrightarrow} x^2(t_0) + y^2(t_0) = 9 \Leftrightarrow x^2(t_0) + 6{,}25 = 9 \Leftrightarrow \boxed{x(t_0) = \sqrt{2{,}75}m}$.

Παραγωγίζοντας την ισότητα (1) έχουμε : $2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$ (2)

Η (2) για $t = t_0$ γίνεται :

$2x(t_0) \cdot x'(t_0) + 2y(t_0) \cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2{,}75} \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 2{,}5 \cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{y'(t_0) = -\frac{\sqrt{2{,}75}}{25} m/s}$.

ii. Είναι $\varepsilon\phi\theta = \frac{\alpha\pi.\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\pi\rho o\sigma\kappa.\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta} = \frac{y}{x} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$. Παραγωγίζοντας την ισότητα έχουμε :

$$\left(\varepsilon\phi\theta(t)\right)' = \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\theta(t) + \sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} + 1\right) \cdot \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow \left(\varepsilon\phi^2\theta(t) + 1\right) \cdot \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}$$

(3)

Η (3) για $t = t_0$ γίνεται : $\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1\right) \cdot \theta'(t_0) = \frac{y'(t_0)x(t_0) - y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)}$ (4)

Όμως $\varepsilon\phi\theta(t_0) = \frac{y(t_0)}{x(t_0)} = \frac{2{,}5}{\sqrt{2{,}75}}$.

Άρα η (4) γίνεται : $\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0)+1\right)\cdot\theta'(t_0)=\dfrac{y'(t_0)x(t_0)-y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)}\Leftrightarrow$

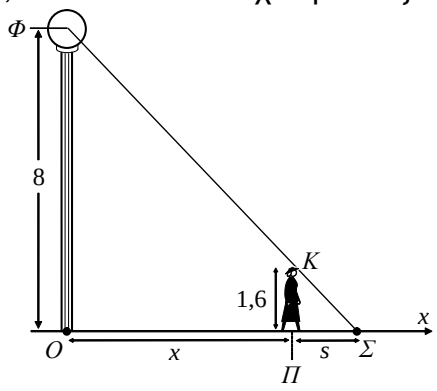
$\Leftrightarrow\left(\dfrac{6,25}{2,75}+1\right)\cdot\theta'(t_0)=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{2,75}}{25}\cdot\sqrt{2,75}-2,5\cdot 0,1}{2,75}\Leftrightarrow\dfrac{9}{2,75}\theta'(t_0)=\dfrac{-\dfrac{2,75}{25}-0,25}{2,75}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\theta'(t_0)=-0,36\Leftrightarrow\theta'(t_0)=-0,04\,rad/s$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΚΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12) Μία γυναίκα ύψους 1,60m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8m με ταχύτητα 0,8m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;



(Ασκ. 5 Β΄ ομάδας σελ. 244 σχολικό)

Λύση :

Επειδή τα τρίγωνα ΦΟΣ και ΚΠΣ είναι όμοια ισχύει : $\dfrac{\text{ΚΠ}}{\text{ΦΟ}}=\dfrac{\text{ΠΣ}}{\text{ΟΣ}}\Leftrightarrow\dfrac{1,6}{8}=\dfrac{s}{x+s}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{5}=\dfrac{s}{x+s}\Leftrightarrow 5s=x+s\Leftrightarrow 4s=x\Leftrightarrow s=\dfrac{1}{4}x$ (1)

Τα μεγέθη x,s είναι συναρτήσεις του χρόνου t έτσι : $x=x(t), s=s(t)$, $x'(t)=0,8\,m/s$ και ψάχνουμε το $s'(t)$ που είναι η ταχύτητα με την οποία αυξάνει ο ίσκιος της.

Η (1) γίνεται $s(t)=\dfrac{1}{4}x(t)$ άρα $s'(t)=\dfrac{1}{4}x'(t)\Leftrightarrow s'(t)=\dfrac{1}{4}0,8\Leftrightarrow s'(t)=0,2\,m/s$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13) Αν το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $\mathrm{K}(x)$ και η συνολική είσπραξη είναι $\mathrm{E}(x)$, τότε το συνολικό κέρδος είναι $\mathrm{P}(x)=\mathrm{E}(x)-\mathrm{K}(x)$ και το μέσο κόστος είναι $\mathrm{K}_{\mu}(x)=\dfrac{\mathrm{K}(x)}{x}$.

i. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι ισος με το ρυθμό μεταβολής της είσπραξης.

ii. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ισο με το οριακό κόστος.

Λύση :

i. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι $\mathrm{P}'(x)=\mathrm{E}'(x)-\mathrm{K}'(x)$.
Άρα $\mathrm{P}'(x)=0\Leftrightarrow \mathrm{E}'(x)-\mathrm{K}'(x)=0\Leftrightarrow \mathrm{E}'(x)=\mathrm{K}'(x)$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι $\mathrm{K}'_{\mu}(x)=\left(\dfrac{\mathrm{K}(x)}{x}\right)'=\dfrac{\mathrm{K}'(x)\cdot x-\mathrm{K}(x)}{x^2}$

Άρα $\mathrm{K}'_{\mu}(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{K}'(x)\cdot x-\mathrm{K}(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow \mathrm{K}'(x)\cdot x-\mathrm{K}(x)=0\Leftrightarrow \mathrm{K}'(x)=\dfrac{\mathrm{K}(x)}{x}\Leftrightarrow$
$\mathrm{K}'(x)=\mathrm{K}_{\mu}(x)$.

14) Ένα εργοστάσιο για την κατασκευή x χιλιάδων μονάδων ενός προϊόντος έχει κόστος $\mathrm{K}(x)=\dfrac{1}{3}x^3-60x^2+100x+4$ χιλ. ευρώ. Η είσπραξη από την πώληση των προϊόντων δίνεται από τον τύπο : $\mathrm{E}(x)=-x^3+30x^2-1700x-2$ χιλ. ευρώ. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός.

Λύση :

Το κέρδος $\mathrm{P}(x)$ του εργοστασίου δίνεται από τον τύπο $\mathrm{P}(x)=\mathrm{E}(x)-\mathrm{K}(x)\Leftrightarrow$
$\mathrm{P}(x)=-x^3+30x^2-1700x-2-\dfrac{1}{3}x^3+60x^2-100x-4\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=-\dfrac{4}{3}x^3+90x^2-1800x-6$

Οπότε : $\mathrm{P}'(x)=-4x^2+180x-1800$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός όταν : $\mathrm{P}'(x)>0\Leftrightarrow -4x^2+180x-1800>0\Leftrightarrow -x^2+45x-450>0\Leftrightarrow x\in(15,30)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων Α(1,2) και Β(x,0) ως προς x, όταν x=1.

16) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του τυχαίου σημείου Μ που ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=e^x$ από την αρχή των αξόνων ως προς x, όταν x=0.

17) Έστω τα σημεία $\mathrm{A}(0,x+1)$ και $\mathrm{B}(\sqrt{x},0)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ,

i. Της απόστασης των σημείων Α και Β ως προς x όταν x=1.

ii. Του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ ως προς x όταν x=1.

18) Δίνεται το σημείο Μ(x,y) ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=e^x$, $x>0$. Αν $A(x^2,0)$, να βρείτε :
   i. Το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΜΟΑ ως συνάρτηση του x.
   ii. Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του τριγώνου ΜΟΑ ως προς x όταν x=1.

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x$ και ε η εφαπτομένη ευθεία στην καμπύλη της f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha>1$. Να βρείτε :
   i. Την εξίσωση της ε
   ii. Τα σημεία τομής Α, Β της ε με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.
   iii. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ ως προς α όταν α=e.

20) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $\alpha=x^2$ και $\beta=e^{2x}$ ως προς x όταν x=1.

21) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x=x(t)=-t^3+12t^2-36t$ όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.
   i. Να βρείτε την ταχύτητα και στη συνέχεια την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t=1s
   ii. Να βρείτε την επιτάχυνση και στη συνέχεια την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t=2s
   iii. Πότε το σημείο είναι ακίνητο;
   iv. Πότε το σημείο κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
   v. Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 7s.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3(ax-1)^2$
   i. Να βρείτε το α ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x να μηδενίζει για $x=\frac{1}{2}$.
   ii. Για α=2, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) στην καμπύλη της f στο σημείο Α(2,f(2)).

23) Από ένα σφαιρικό μπαλόνι εκλύεται αέριο με ρυθμό και η ακτίνα του δίνεται από τον τύπο ρ(t)=4-t, $t\geq 0$, t σε ώρες και ρ σε cm. Να βρείτε :
   i. Σε πόσο χρόνο η μπάλα θα λιώσει τελείως.
   ii. Τον μέσο ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της όταν $t\in[1,2]$.
   iii. Τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της όταν $t_1=2h$

24) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός τετραγώνου ως προς την πλευρά του τη στιγμή που αυτό είναι ίσο με $36\,m^2$.

25) Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ αυξάνεται με ρυθμό $2\,cm/\sec$, ενώ η πλευρά ΒΓ ελαττώνεται με ρυθμό $3\,cm/\sec$. Να βρείτε :
   i. Τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου,
   ii. Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, όταν : ΑΒ=10cm και ΒΓ=6cm.

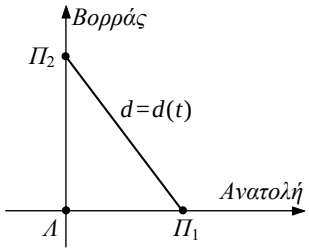
26) Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με σταθερή βάση ΒΓ=16cm μεταβάλλεται με ρυθμό $5\,cm/\sec$. Αν τη χρονική στιγμή t_0 το σημείο Α απέχει από την πλευρά ΒΓ 6 cm, να βρείτε :
   i. Τον ρυθμό μεταβολής των ίσων πλευρών,
   ii. Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

27) Δυο αυτοκίνητα Α και Β κινούνται κατά μήκος δυο κάθετων οδών ΑΓ και ΒΓ με ταχύτητα 50km/h και 100km/h αντίστοιχα. Να βρεθεί :
   i. Μια συνάρτηση που δίνει την απόσταση των δυο αυτοκινήτων σε σχέση με τις αποστάσεις των οχημάτων από το σημείο Γ.
   ii. Η απόσταση των δυο οχημάτων τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το πρώτο όχημα απέχει από τη διασταύρωση 800m και το δεύτερο 600m
   iii. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ΑΒ ως προς τον χρόνο την παραπάνω χρονική στιγμή t_0.

28) Το συνολικό κόστος x μονάδων ενός προϊόντος είναι $\mathrm{K}(x)=30x^2-1000x-50$ και η συνολική είσπραξη $\mathrm{E}(x)=2x^3-60x^2+200x+100$ σε χιλ €. Να βρείτε τον αριθμό των μονάδων του προϊόντος που πρέπει να παραχθεί ώστε να έχουμε θετικό ρυθμό μεταβολής του κέρδους (κερδοφόρα επιχείρηση).

29) Ο όγκος *V* ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 100cm^3/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του *r* τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9cm;

30) Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι *Λ*. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15km/h και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα 20km/h.

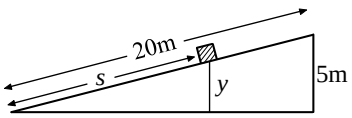


   i. Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2
   ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d=(\Pi_1\Pi_2)$ των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

31) Μια κάμερα είναι τοποθετημένη στην κορυφή ενός στύλου ύψους 3m. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ υπό την οποία η κάμερα παρακολουθεί ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα 40km/h, όταν αυτό :
   i. έχει απομακρυνθεί από το στύλο κατά 4m,
   ii. Σε 4m θα έχει διέλθει από το στύλο

32) Έστω *T* το εμβαδόν του τριγώνου *OAB* που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x>1$. Αν το *x* μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού *T*, όταν $x=5$ cm.

33) Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του *y*.



2.5 Α ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

39.ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE (2007 Β΄, 2012 Β΄)

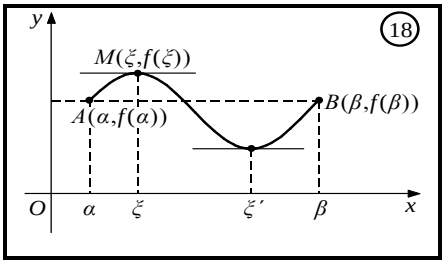
Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

Το θεώρημα του Rolle διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β) **και**
- $f(\alpha)=f(\beta)$



τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε** $f'(\xi)=0$**.**

Γεωμετρική Ερμηνεία :

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ [α,β]

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

i. $f(x)=x^2-6x+2$, $[-1,7]$

ii. $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3 & ,x<1\\ 8x-2x^2 & ,x\geq 1\end{cases}$ $[-3,3]$

Λύση :

i. Θ. Rolle για την $f(x)=x^2-6x+2$ στο $[-1,7]$ έχω :

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,7]$ ως πολυωνυμική
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,7)$ με $f'(x)=2x-6$
- $f(-1)=9$ και $f(7)=9$ άρα $f(-1)=f(7)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,7)$.

Πράγματι : $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3\in(-1,7)$

ii. Πρώτα πρέπει να εξετάσω ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμοτητα της $f(x)$ στο $x_0=1$. Έχω :

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+2x+3)=6$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(8x-2x^2)=6$

$f(1)=6$, άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Επίσης :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+2x+3-6}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=4$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{8x-2x^2-6}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-2x^2+8x-6}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-2(x-1)(x-3)}{x-1}=4$$

Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Οπότε Θ. Rolle για την $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3 & ,x<1\\ 8x-2x^2 & ,x\ge1\end{cases}$ στο $[-3,3]$ έχω :

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3,3]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$
- $f(-3)=6$ και $f(3)=6$ άρα $f(-3)=f(3)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-3,3)$.

Πράγματι :

Για $x<1$ $f'(x)=2x+2$ άρα : $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x+2=0\Leftrightarrow x=-1\in(-3,3)$

Για $x>1$ $f'(x)=8-4x$ άρα : $f'(x)=0\Leftrightarrow 8-4x=0\Leftrightarrow x=2\in(-3,3)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

i. $f(x)=x^2+2x+1$, [-2,0]

ii. $f(x)=\ln(x+1)$, [0,1]

iii. $f(x)=1+\eta\mu 3x$, [0,π]

iv. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$, [0,2]

v. $f(x)=\begin{cases}x^2+4x-12 & ,x\le-2\\ 4x^2+16x & ,x>-2\end{cases}$ $[-6,0]$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f'(x)=0$ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ $f(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-\alpha}$ $\alpha\in\Re$ και $\alpha>2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον x΄x . (2000Β΄)

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$. Για να είναι $(\varepsilon)//x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 0$. Άρα Θ. Rolle για την $f(x)$ στο $[1,2]$.

- $f(x)$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών
- $f(x)$ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισιμων
- $f(1) = \dfrac{1-3+2}{1-\alpha} = 0$, $f(2) = \dfrac{4-6+2}{1-\alpha} = 0$ άρα $f(1) = f(2)$

Οπότε από Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = xe^{x-1} + ax^2 - (a+1)x$, με $x, a \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1)

5) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \eta\mu x \cdot \ln(3-x) + x^3 - 4x + 5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,2)$, στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, -1 \le x < 0 \\ x^3 + \gamma, 0 \le x < 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα α,β,γ ώστε για την f να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [-1,1].

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x$. Να δείξετε ότι :
   i. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον χ'χ. (η εξίσωση f ΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)).
   ii. Η εξίσωση $x^x = e^{2-x}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (1,2).

8) Αν $\alpha^2 + \alpha = \beta$, να δείξετε ότι υπάρχει στο διάστημα (-1,1) σημείο x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f, όπου $f(x) = (\alpha^2 - \beta)x^3 + (\beta^2 - \alpha)x^2 + \alpha x + \beta$ στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι παράλληλη στον άξονα των x΄x.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f(x)=0$ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ Θ.ROLLE ΣΕ ΜΙΑ ΑΡΧΙΚΗ $F(x)$ ΤΗΣ $f(x)$

Η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) τρόποι :

i. Η εξίσωση έχει μια προφανή ρίζα ή

ii. Θ. Bolzano για την f στο [α,β] ή

iii. Σύνολο τιμών της f περιέχει το 0

ή

iv. **Θ. Rolle για την F (παράγουσα της f) στο [α,β]**

Η f(x)=0 έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β) τρόποι :

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την f στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

Ή

Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την F στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

ΓΕΝΙΚΑ

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση σε διάστημα Δ και δεν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano, προφανής ρίζα ή σύνολο τιμών, τότε μπορούμε να βρούμε μια αρχική ή παράγουσα συνάρτηση της $f(x)$ (δηλ. μια συνάρτηση $F(x)$ για την οποία ισχύει $F'(x)=f(x)$) και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε Θ.Rolle για την $F(x)$ στο Δ.

Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε να ισχύει μια σχέση, εργαζόμαστε ως εξής :

1) Βάζουμε όπου ξ το x μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και θεωρώ καινούρια συνάρτηση $g(x)$, ώστε να έχουμε εξίσωση $g(x)=0$.

2) Αν δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε βρίσκουμε μια αρχική συνάρτηση $g(x)$, δηλαδή μια συνάρτηση $G(x)$ τέτοια ώστε $G'(x)=g(x)$

3) Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για τη $G(x)$ στο $[\alpha,\beta]$.

ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ)

Στην προσπάθεια να βρούμε την αρχική συνάρτηση, πρέπει να ελέγχουμε αν εμφανίζεται παράγωγος γινομένου, πηλίκου ή παράγωγος σύνθετης συνάρτησης. Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι εξής παρατηρήσεις :

- $0 = (c)'$
- $c = (cx)'$
- $x^{\alpha} = \left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)'$, $\alpha \neq -1$
- $\dfrac{1}{x} = \left(\ln|x| \right)'$, $x \neq 0$
- $\dfrac{1}{x^2} = \left(-\dfrac{1}{x} \right)'$, $x \neq 0$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x} \right)'$
- $\eta\mu x = \left(-\sigma\upsilon\nu x \right)'$
- $\sigma\upsilon\nu x = \left(\eta\mu x \right)'$
- $e^x = \left(e^x \right)'$
- $\alpha^x = \left(\dfrac{\alpha^x}{\ln a} \right)'$
- $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \left(\varepsilon\phi x \right)'$
- $\dfrac{1}{\eta\mu^2 x} = \left(-\sigma\phi x \right)'$

- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$
- $f(x)+x\cdot f'(x)=\left(x\cdot f(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\left(\ln|f(x)|\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$
- $e^{f(x)}\cdot f'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'$
- $f^{\nu}(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ π.χ. $f(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'$
- $\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)=\left(\eta\mu f(x)\right)'$
- $\eta\mu f(x)\cdot f'(x)=\left(-\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Να δείξετε ότι η εξίσωση : $4x^3+3x^2-8x=4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,2)$.

Λύση :

Έχω $4x^3+3x^2-8x=4\Leftrightarrow 4x^3+3x^2-8x-4=0$ έστω $f(x)=4x^3+3x^2-8x-4$ θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,2)$. Αρχικά εξετάζω αν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano για την $f(x)$, έχω :

- $f(x)$ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική
- $f(-1)=3$, $f(2)=24$ άρα $f(-1)\cdot f(2)=72>0$. Άρα δεν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano συνεπώς θα εφαρμόσω Θ.Rolle σε μια αρχική της $f(x)$. Έχω : $F(x)=x^4+x^3-4x^2-4x$ είναι αρχική της $f(x)$ (αφού ισχύει : $F'(x)=f(x)$). Δηλαδή θα δείξω ότι η εξίσωση $F'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,2)$. Θ.Rolle για την $F(x)$ στο $[-1,2]$.
- $F(x)$ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική
- $F(x)$ παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$

- $F(-1)=0$, $F(2)=0$, άρα από Θ.Rolle η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,2)$.

10) Αν $8\alpha+3\beta=0$ να δείξετε ότι η εξίσωση : $4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x=\beta$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2)

Λύση :

Έχω $4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x=\beta \Leftrightarrow 4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x-\beta=0$ έστω $f(x)=4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x-\beta$ θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$. Αρχικά εξετάζω αν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano για την $f(x)$, έχω :

- $f(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική
- $f(1)=12\alpha+6\beta$, $f(2)=60\alpha+19\beta$ παρατηρώ ότι δεν μπορώ να βγάλω κάποιο συμπέρασμα για το πρόσημο των τιμών $f(1), f(2)$ αλλά ούτε και για το γινόμενο τους $f(1)\cdot f(2)$. Άρα δεν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano συνεπώς θα εφαρμόσω Θ.Rolle σε μια αρχική της $f(x)$. Έχω : $F(x)=\alpha x^4+(2\alpha+\beta)x^3+(2\beta+\alpha)x^2-\beta x$ είναι αρχική της $f(x)$ (αφού ισχύει : $F'(x)=f(x)$). Δηλαδή θα δείξω ότι η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Θ.Rolle για την $F(x)$ στο $[1,2]$.
- $F(x)$ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική
- $F(x)$ παραγωγίσιμη στο $(1,2)$
- $F(1)=\alpha+2\alpha+\beta+2\beta+\alpha-\beta=4\alpha+2\beta$,
  $F(2)=32\alpha+8\beta+8\beta+4\alpha-2\beta=36\alpha+14\beta$, πρέπει
  $F(1)=F(2) \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=36\alpha+14\beta \Leftrightarrow 32\alpha+12\beta=0 \Leftrightarrow 8\alpha+3\beta=0$ που ισχύει από εκφώνηση. Άρα από Θ.Rolle η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

11) Να δειχθεί ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα :

i. $4x^3+9x^2-4=0$ στο (-2,1)

ii. $(3x^2-1)\eta\mu x+(x^3-x)\sigma\upsilon\nu x=0$ στο (0,1)

12) Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-3\alpha x^2=2(\alpha+8)x-4\alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-2,2)

13) Αν 26α+3βln3=0, να δείξετε ότι η εξίσωση : $\alpha x^2+\frac{\beta}{x}+\eta\mu(\pi x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,3)

14) Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2+2\lambda x-\lambda-1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

15) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2007x^{2006}-2006(\lambda+1)x^{2005}+\lambda=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

1) Αν στη σχέση υπάρχει μόνο $f'(x)$ με κάποιο όρο δίπλα της (ως συντελεστή), τότε διαιρώ όλα με τον ορό αυτό, ώστε να έχω μόνο $f'(x)$, τα πηγαίνω όλα στο 1ο μέλος και το θέτω συνάρτηση $g(x)$. Αν δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano στη $g(x)$, τότε βρίσκω (με αντιπαραγωγιση) μια αρχική $G(x)$ της $g(x)$ τέτοια ώστε $G'(x)=g(x)$ και εφαρμόζω Θ. Rolle στην αρχική $G(x)$. Αν η εκφώνηση μας δίνει εξίσωση που περιέχει $f'(x)$ και δεν μας δίνει πληροφορία ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής, τότε δεν μπορώ να εφαρμόσω Θ. Bolzano και θα πρέπει να εφαρμόσω Θ. Rolle.

2) Αν στη σχέση υπάρχει και $f'(x)$ και $f(x)$, τότε μεταφέρω όλους τους όρους στο 1ο μέλος και προσπαθώ να φτιάξω (με αντιπαραγωγιση) παράγωγο γινομένου ή πηλίκου ή παράγωγο σύνθετης συνάρτησης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

16)Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f(2)-f(1)=\ln 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi)=2\xi^2-3\xi+1$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $xf'(x)=2x^2-3x+1\Leftrightarrow$ $\overset{\div x}{\Leftrightarrow} f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)-2x+3-\frac{1}{x}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Θέτω $g(x)=f'(x)-2x+3-\frac{1}{x}$ και θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2), όμως δεν μπορώ να εφαρμόσω Θ. Bolzano στη $g(x)$ γιατί δεν γνωρίζω αν η $f'(x)$ είναι συνεχής ώστε και η $g(x)$ συνεχής στο [1,2].

Έτσι θα βρω μια αρχική $G(x)$ της $g(x)$. Έχω $G(x)=f(x)-x^2+3x-\ln x$. Θ. Rolle για τη $G(x)$ στο [1,2].

- $G(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών
- $G(x)$ παραγωγίσιμη στο (1,2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $G'(x)=g(x)$
- $G(1)=f(1)-1+3=f(1)+2$, $G(2)=f(2)-4+6-\ln 2=f(2)+2-\ln 2$

Πρέπει $G(1)=G(2)\Leftrightarrow f(1)+2=f(2)+2-\ln 2\Leftrightarrow f(2)-f(1)=\ln 2$ που ισχύει από εκφώνηση. Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $G'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

17)Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f(0)=2f(1)$. Να δείξετε η εξίσωση $f'(x)=-\frac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Λύση :

$f'(x)=-\frac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)=-2xf(x)\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+(x^2+1)'f(x)=0\Leftrightarrow \left((x^2+1)f(x)\right)'=0$

Θέτω $g(x)=(x^2+1)f(x)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1), Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο [0,1].

- $g(x)$ συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (0,1) ως πράξεις παραγωγισιμων

- $g(0)=f(0)$, $g(1)=2f(1)$

Πρέπει $g(0)=g(1)\Leftrightarrow f(0)=2f(1)$ που ισχύει από εκφώνηση.

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

18)Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [2,3], παραγωγίσιμη στο (2,3) με $f(3)=2f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο Α(1,0).

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi,f(\xi))$.

Τότε : $(\varepsilon): y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$. Όμως η (ε) διέρχεται από το $A(1,0)$ αν οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή :

$(\varepsilon): y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\overset{\substack{x=1\\y=0}}{\Leftrightarrow}0-f(\xi)=f'(\xi)(1-\xi)\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-1)-f(\xi)=0$

Δηλ. αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τ.ω. $f'(\xi)(\xi-1)-f(\xi)=0$

Όμοια αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)(x-1)-f(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)(x-1)-f(x)(x-1)'}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)'=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$, $x\in[2,3]$. Θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$. Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για τη $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ στο $[2,3]$.

- $g(x)$ συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ ως πράξεις παραγωγίσιμες συναρτήσεων
- $g(2)=f(2)$, $g(3)=\dfrac{f(3)}{2}$

Πρέπει $g(2)=g(3)\Leftrightarrow f(2)=\dfrac{f(3)}{2}\Leftrightarrow f(3)=2f(2)$ που ισχύει από εκφώνηση.

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,e]\to\Re$ η όποια είναι και παραγωγίσιμη στο (1,e). Αν $f(e)=0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $\xi\cdot f'(\xi)\cdot\ln\xi=-f(\xi)$

20) Αν η συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f(2)-f(1)=3-\ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $x_0\cdot f'(x_0)=2x_0^2-1$.

21)Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ με $f(0)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε : $(1-2\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

22)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(1)-f(0)=e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f'(x)-2x=e^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

23)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,4]\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(4)-f(2)=\ln 2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $xf'(x)=2x^2-6x+1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (2,4).

24)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο [0,2] και παραγωγίσιμη στο (0,2) για την οποία ισχύει ότι : $f(2)-f(0)=6$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=3\xi^2-\xi$.

25)Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2), με $f(2)=2$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

26)Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2), με $f(2)=2$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)\cdot f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

27)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(1)=e^2-e$ και $f(2)=\dfrac{e^2}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε : $x_0^2\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\cdot x_0-e^{x_0}=0$.

28)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+xf'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,2).

29)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(6)=3f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2,6)$ τέτοιο ώστε : $\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

30)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(0)=2f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi+f(\xi)\eta\mu\xi=0$.

31)Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $2f(1)=f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

32)**Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)<0<f(2)$. Να δείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $g:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $g(x)=xf(x)$ για κάθε $x\in\Re$ δεν είναι γνησίως μονότονη.
ii. Υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΜΕ $e^{G(x)}$

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f'(x)+g(x)\cdot f(x)=0$ (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα (α,β) τότε :

1ον βρίσκουμε μια αρχική (παράγουσα) της $g(x)$ τέτοια ώστε $G'(x)=g(x)$

2ον πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) με $e^{G(x)}$ και ισοδύναμα έχουμε :

$(1)\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+g(x)\cdot e^{G(x)}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+G'(x)\cdot e^{G(x)}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+\left(e^{G(x)}\right)'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{G(x)}\cdot f(x)\right)'=0.$

3ον εφαρμόζουμε Θ.Rolle για την $h(x)=e^{G(x)}\cdot f(x)$ στο [α,β]

Ειδικά αν έχουμε : 1) $f'(x)+f(x)=0$ πολλαπλασιάζουμε με e^{x}

2) $f'(x)-f(x)=0$ πολλαπλασιάζουμε με e^{-x}

3) $f'(x)+\lambda f(x)=0$ πολλαπλασιάζουμε με $e^{\lambda x}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

33) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-3f(\xi)$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση : $f'(x)=-3f(x)\Leftrightarrow f'(x)+3f(x)=0\xleftrightarrow[\cdot e^{3x}]{\substack{g(x)=3\\ \acute{\alpha}\rho\alpha\\ G(x)=3x}}e^{3x}\cdot f'(x)+3e^{3x}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3x}\cdot f'(x)+\left(e^{3x}\right)'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{3x}\cdot f(x)\right)'=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Έστω $g(x)=e^{3x}\cdot f(x)$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο [1,2]

- $g(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (1,2) ως πράξεις παραγωγισιμων
- $g(1)=e^{3}\cdot f(1)=0$, $g(2)=e^{6}\cdot f(2)=0$ άρα ισχύει $g(1)=g(2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

34)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση : $f'(x)=2xf(x)$

$$\Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=0 \overset{\substack{g(x)=-2x\\ \acute{\alpha}\rho\alpha\\ G(x)=-x^2}}{\Longleftrightarrow} e^{-x^2}\cdot f'(x)-2xe^{-x^2}\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow$$

$\cdot e^{-x^2}$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2}\cdot f'(x)+\left(e^{-x^2}\right)'\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{-x^2}\cdot f(x)\right)'=0$$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Έστω $g(x)=e^{-x^2}\cdot f(x)$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο [1,2]

- $g(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (1,2) ως πράξεις παραγωγισιμων
- $g(1)=e^{-1}\cdot f(1)=0$, $g(2)=e^{-4}\cdot f(2)=0$ άρα ισχύει $g(1)=g(2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35)Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε :

i. $f'(\xi)+f(\xi)=0$
ii. $f'(\xi)-f(\xi)=0$
iii. $f'(\xi)+2f(\xi)=0$
iv. $f'(\xi)=3f(\xi)$
v. $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$
vi. $f'(\xi)=\eta\mu\xi\cdot f(\xi)$

36)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(3)\cdot e^6$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+3f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,3).

37)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημενες 1 και 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi)=5f(\xi)$.

38)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $f(2)>0$ και $f(1)>0$, για τα οποία ισχύει $\ln f(1)=3+\ln f(2)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+2xf(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

39)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $\frac{f(2)}{f(1)}=\sqrt{e}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\xi^2 f'(\xi)=f(\xi)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ κ ΡΙΖΕΣ

Α. Η f(x)=0 έχει μια το πολύ ρίζα ρ_1 στο (α,β)

1ος ΤΡΟΠΟΣ : Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη , ή

2ος ΤΡΟΠΟΣ : Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και δεύτερη ρίζα ρ_2, και εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2] \Rightarrow$ άτοπο!

Β. Η f(x)=0 έχει δυο το πολύ ρίζες στο (α,β)

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και τρίτη ρίζα. Δηλαδή έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με π.χ $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, οπότε εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f στα δυο διαστήματα που εμφανίζονται : $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3] \Rightarrow$ άτοπο!

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

40)Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2x-3$ για κάθε $x \in \Re$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 - 3x + \alpha$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Λύση :

Έχω την εξίσωση $f(x) = x^2 - 3x + \alpha \Leftrightarrow f(x) - x^2 + 3x - \alpha = 0$. Έστω η συνάρτηση : $g(x) = f(x) - x^2 + 3x - \alpha$. Θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Επειδή δεν γνωρίζω τον τύπο της $f(x)$ δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία της άρα ούτε και της $g(x)$. Άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο τρόπο. Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, εφαρμόζω Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο $[\rho_1, \rho_2]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $g'(x) = f'(x) - 2x + 3$
- $g(\rho_1) = 0$, $g(\rho_2) = 0$ (ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της $g(x) = 0$) άρα ισχύει $g(\rho_1) = g(\rho_2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2). Άτοπο γιατί $f'(x) \neq 2x - 3$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

41)Έστω $f : \Re \to \Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.
ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2 - 3x + 1) - f(2x - 5) = 0$.

Λύση :

i. Θα υποθέσουμε ότι η f δεν είναι 1-1, άρα θα υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ τ.ω. $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_1 < x_2$, τότε εφαρμόζω Θ.Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$.
   - Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$
   - Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και
   - $f(x_1) = f(x_2)$

Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο καθώς $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η f είναι 1-1 και άρα είναι και αντιστρέψιμη.

ii. $f(x^2 - 3x + 1) - f(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow f(x^2 - 3x + 1) = f(2x - 5) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2 - 3x + 1 = 2x - 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ \ \acute{\eta} \ \ x = 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

42)Να δειχθεί ότι εξίσωση : $x^6 + x^2 = ax + \beta$ με $\alpha, \beta \in \Re$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο $\Re$.

43)Να δειχθεί ότι εξίσωση : $e^x + x^2 = ax + \beta$ με $\alpha, \beta \in \Re$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο $\Re$.

44)Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2x - 1$ για κάθε $x \in \Re$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 - x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

45) Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq x$ για κάθε $x \in \Re$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x^2$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

46)Έστω $f : \Re \to \Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$. Να λύσετε την εξίσωση : $f(3x - 2) - f(2x + 1) = 0$.

47)Δίνεται μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R και η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) : 2x-y+1=0 . Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία (η) : y=2x έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο.

48) Αν για τη συνάρτηση $f : (1,+\infty) \to \Re$ ισχύει $f^2(x) - 3f(x) + 2 = e^x + x$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο.

49)Αν για τη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \Re$ ισχύει $f^2(x) + 4f(x) - 2x = e^x - 3$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ κ ΡΙΖΕΣ

Η f(x)=0 έχει μια ακριβώς ρίζα στο (α,β)

Βήμα 1ο : Η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ_1 στο (α,β) (με προφανή ή Θ. Bolzano ή σύνολο τιμών ή Θ. Rolle)

Βήμα 2ο : 1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Μονοτονία για την f στο [α,β] ή

2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Έστω ότι η f(x)=0 έχει και δεύτερη ρίζα ρ_2, με π.χ. $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow$ Θ. Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2] \Rightarrow$ άτοπο!

Η f(x)=0 δυο ακριβώς ρίζες στο (α,β)

Βήμα 1ο : Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη περίπτωση για την f στα [α,γ], [γ,β]$\Rightarrow$ η f έχει δυο τουλάχιστον ρίζες : $\rho_1 \in (\alpha,\gamma)$ και $\rho_2 \in (\gamma,\beta)$.

Βήμα 2ο : 1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στα [α,γ] και [γ,β] $\Rightarrow$ υπάρχουν δυο ακριβώς ρίζες ή

2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Έστω ότι η f(x)=0 έχει και τρίτη ρίζα ρ_3 με π.χ. $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Στη συνέχεια : εφαρμόζω το Θ. Rolle για την f στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3] \Rightarrow$ άτοπο!

Η f(x)=0 έχει ν ακριβώς ρίζες (Ρ πολυώνυμο του x)

Ειδικά αν η συνάρτηση είναι πολυώνυμο Ρ, εκτός από τη μέθοδο της περίπτωσης 4), αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση P(x)=0 έχει ν ακριβώς ρίζες, τότε :

i. Με το Θ. Bolzano Δείχνουμε ότι η εξίσωση έχει ν τουλάχιστον ρίζες. (1)
ii. Επειδή Ρ είναι πολυώνυμο ν βαθμού, έχει το πολύ ν ρίζες (2). οπότε από (1) και (2) $\Rightarrow$η εξίσωση έχει ν ακριβώς ρίζες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

50) Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο [1,2] με $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1,2]$ και $f'(x) \neq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (1,2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{1}{2} x_0$. (Υπόδειξη : Για τουλ. μια Θ.Bolzano στην $g(x) = f(x) - e^x + 1$ και για το πολύ μια Θ.Rolle για τη g με άτοπο)

Λύση :

Θέτουμε όπου x_0 το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}x = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$. Έστω $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$.

Βήμα 1ο Αρχικά θα δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Θ. Bolzano για τη $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ στο $[1,2]$

- $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών (η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ άρα και συνεχής στο $[1,2]$ άρα και η $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών)

- $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}>0$ (αφού $\frac{1}{2}<f(x)<1$ για κάθε $x\in[1,2]$) άρα και $\frac{1}{2}<f(1)<1$)

  $g(2)=f(2)-1<0$ (αφού $\frac{1}{2}<f(x)<1$ για κάθε $x\in[1,2]$) άρα και $\frac{1}{2}<f(2)<1$)

  Δηλαδή $g(1)\cdot g(2)<0$ άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$

Βήμα 2ο Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(1,2)$. Επειδή δεν γνωρίζω τον τύπο της $f(x)$ δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία της άρα ούτε και της $g(x)$. Άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο τρόπο. Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει 2 ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, εφαρμόζω Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο $[\rho_1,\rho_2]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}$
- $g(\rho_1)=0$, $g(\rho_2)=0$ (ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $g(x)=0$) άρα ισχύει $g(\rho_1)=g(\rho_2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Άτοπο γιατί $f'(x)\neq\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in(1,2)$. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Τελικά από βήμα 1ο και βήμα 2ο συμπεραίνω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$.

51) Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(1)-f(0)=2$ και $f''(x)<2$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=4\xi^3+2\xi$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=4x^3+2x\Leftrightarrow f'(x)-4x^3-2x=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$. Θέτω $g(x)=f'(x)-4x^3-2x$.

Βήμα 1ο Αρχικά θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$, όμως δεν μπορώ να εφαρμόσω Θ. Bolzano στη $g(x)$ γιατί δεν έχω κάποια πληροφορία για το πρόσημο της $f'(x)$.

Έτσι θα βρω μια αρχική $G(x)$ της $g(x)$. Έχω $G(x)=f(x)-x^4-x^2$. Θ. Rolle για τη $G(x)$ στο $[0,1]$.

- $G(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών (η f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής άρα και η $G(x)=f(x)-x^4-x^2$ συνεχής ως πράξεις συνεχών)
- $G(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγισιμων με $G'(x)=g(x)=f'(x)-4x^3-2x$
- $G(0)=f(0)$, $G(1)=f(1)-1-1=f(1)-2$

Πρέπει $G(0)=G(1)\Leftrightarrow f(0)=f(1)-2\Leftrightarrow f(1)-f(0)=2$ που ισχύει από εκφώνηση. Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $G'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Βήμα 2ο Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,1)$. Επειδή δεν γνωρίζω τον τύπο της $f(x)$ δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία της άρα ούτε και της $g(x)$. Άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο τρόπο. Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει 2 ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, εφαρμόζω Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο $[\rho_1,\rho_2]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πράξεις συνεχών

- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $g'(x)=f''(x)-12x^2-2$
- $g(\rho_1)=0$, $g(\rho_2)=0$ (ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $g(x)=0$) άρα ισχύει $g(\rho_1)=g(\rho_2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)-12x^2-2=0 \Leftrightarrow f''(x)=12x^2+2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Άτοπο γιατί $f''(x)<2$ για κάθε $x\in\Re$. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Τελικά από βήμα 1ο και βήμα 2ο συμπεραίνω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

52) Να δειχθεί ότι έχουν ακριβώς μια ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα οι παρακάτω εξισώσεις

i. $2x=\sigma\upsilon\nu x$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ii. $x^3+3x=1-3\eta\mu x$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

53)Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2=3\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

54) Δίνεται η συνάρτηση f με $f'(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in\Re$. Αν $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in[0,1]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e^{x_0}-1$. (Υπόδειξη : Για τουλ. μια Θ.Bolzano στην $g(x)=f(x)-e^x+1$ και για το πολύ μια Θ.Rolle για τη g με άτοπο)

55) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη με $f'(x)<1$ και $1<f(x)<3$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e^{x_0}+x_0$.

56)Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,2]\to\Re$ παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 1$ και $1<f(x)<2$ για κάθε $x\in[1,2]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ακριβώς ένα σημείο.

57)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-13x^3-18x^2+2x+1$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1).

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-39x^2-36x+2=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1)

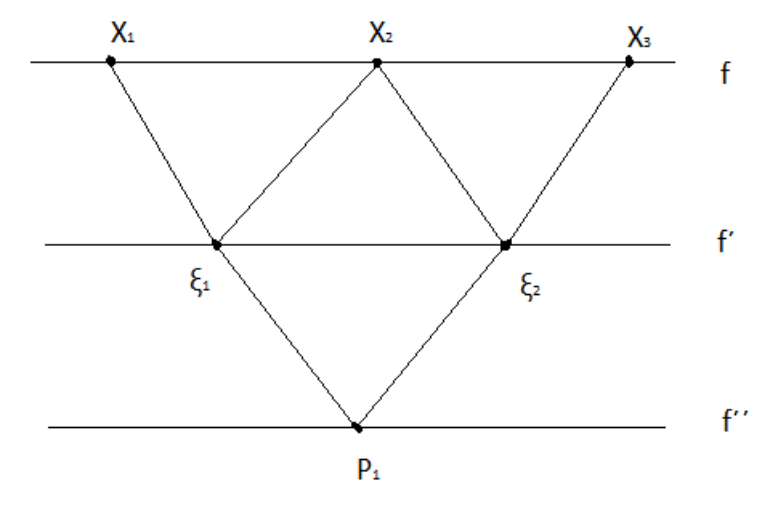
58)Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)-f(1)=-e$ και $f''(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=e^\xi+1$. (Υπόδειξη : Ύπαρξη ρίζας με Θ. Rolle για την $F(x)=f(x)-e^x-x$ και για το πολύ μια ρίζα Θ.Rolle για τη $g(x)=f'(x)-e^x-1$ με άτοπο)

59)Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)-f(1)=-e-2013$ και $f''(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=e^\xi+2014$. (Υπόδειξη : Όμοια με παραπάνω)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : (ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ Θ.ROLLE)

Ισχύει η εξής πρόταση : Ανάμεσα σε δυο ρίζες της f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f΄

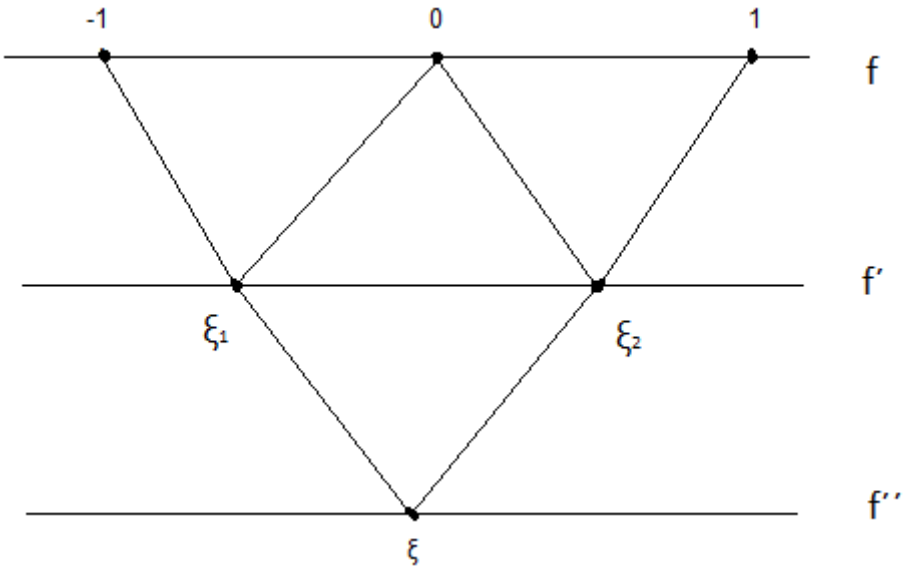
Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f''(\xi) = 0$, πρέπει να εφαρμόσουμε το Θ.Rolle για την $f'(x)$ σε κάποιο διάστημα $[x_1, x_2]$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δυο αριθμούς $x_1 \neq x_2$ με $f'(x_1) = f'(x_2)$. Οι τιμές αυτές μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του Θ.R. σε δυο διαστήματα ξένα μεταξύ τους.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

60)Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(-1) = f(0) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση :



1) Θ. Rolle για την $f(x)$ στο $[-1,0]$

- $f(x)$ συνεχής στο $[-1,0]$
- $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$

- $f(-1) = f(0)$

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

2) Θ. Rolle για την $f(x)$ στο $[0,1]$

- $f(x)$ συνεχής στο $[0,1]$
- $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$
- $f(0) = f(1)$

Άρα υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

3) Θ. Rolle για την $f'(x)$ στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [-1,1]$

- $f'(x)$ συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$
- $f'(x)$ παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2)
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

61) Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγισιμη για την όποια ισχύει ότι $f(0) = f(1) = f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

62) Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημενες 1,2,3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

63) Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(0) = f(2) = 2$ και $f(1) = 3$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 4 - 6\xi$.

64) Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(0) = -1$, $f(1) = e$ και $f(2) = e^2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x + x^2 - 3x$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον σημεία της C_g με τετμημενες στο διάστημα (0,2) στα όποια η C_g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) + 2 = e^{\xi}$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

65) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f'(2)=4$, $f(1)=3$ και $f(x)\le x^2+2x$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\Re$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=3-2x_0$.

66) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $A(6,1)$ και $B(2,3)$, τότε να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}\big(4+f(x^2-1)\big)=1$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=-\xi$.

67) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(2)f(4)\neq 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\big(2,f(2)\big)$ είναι παράλληλη στην ευθεία : $(\zeta):f'(4)x-\dfrac{f(2)}{f(4)}y+2017=0$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(2)f'(2)=f(4)f'(4)$,

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)f''(\xi)+\big(f'(\xi)\big)^2=0$,

iii. η εξίσωση $xf(x)f''(x)+1-x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,4)$.

68) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f'(-2)=16$, $f'(-1)=9$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu 3x}{x^2-x}=2$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-2,-1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=e^{-2\xi}$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M\big(0,f(0)\big)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)+2f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-2,0)$.

69) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με σύνολο τιμών το $\Re$, για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $A(9,2)$ και $B(4,3)$, τότε να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\big(5+f(x^2-1)\big)=2$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $2g(\xi)+\xi=0$.

iv. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής και η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $M(x_0,0)$, τότε να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της M σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

2.5 Β ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (Θ.Μ.Τ.)

40.ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (2003, 2008 Β΄, 2013, 2016)

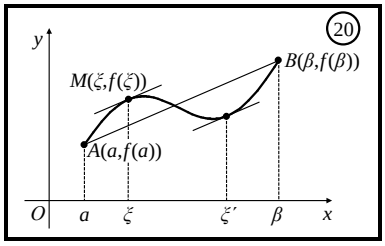
Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

Το θεώρημα της μέσης τιμής διατυπώνεται ως εξής :
Αν μια συνάρτηση f είναι:
- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ **και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε:**

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$



Γεωμετρική Ερμηνεία :
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ [α,β]

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ με $x\in[0,4]$.
   i. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,4]$
   ii. Να βρείτε το $\xi\in(0,4)$

   Λύση :

   iii. Θ.Μ.Τ για την $f(x)=\sqrt{x}$ στο $[0,4]$ έχω :
   - Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,4]$
   - Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$

   iv. Έχω : $f'(\xi)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{\xi}=2\Leftrightarrow\sqrt{\xi}=1\Leftrightarrow\xi=1.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x$ με $x\in[0,4]$.
   i. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0,4]
   ii. Να βρείτε το $\xi\in(0,4)$

3) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

   i. $f(x)=x^3+x$, [0,1] ii. $f(x)=x\ln x$, [1,e] iii. $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5, x<1\\ 2x^2-5x+6, x\geq 1\end{cases}$, [0,2]

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$. Να δείξετε ότι :
   i. ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ, για την f στο διάστημα $[e,e^2]$
   ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(e,e^2)$ τ.ω. $f'(\xi)<0$
   iii. $f(\xi)>\dfrac{1}{\xi}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f'(x)=\kappa$ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ $f(x)$

Γενικά για να δείξω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\kappa$ τότε :
1ος Θ.Μ.Τ για την f στο [α,β]
2ος Θ. Rolle για τη $g(x)=f(x)-kx$
3ος Θ. Bolzano για την $h(x)=f'(x)-k$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Έστω $f:[0,1]\to\Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $f(0)=2$, $f(1)=4$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x_1,f(x_1))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000. (Πανελλήνιες 2000)

   Λύση :

   Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_1,f(x_1))$. Η $(\varepsilon)//y=2x+2000\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=2\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow f'(x_1)=2$. Δηλαδή αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=2$

   Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[0,1]$

   - Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ (η $f(x)$ είναι παραγωγισιμη άρα και συνεχής)
   - Η $f(x)$ είναι παραγωγισιμη στο $(0,1)$

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{4-2}{1}=2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,f(-1))$, $B(2,f(2))$.
   i. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(x_0,f(x_0))$ με $x_0\in(-1,2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ.
   ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

7) Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να δειχτεί ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» στο διάστημα [α,β].

8) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(-1)=3$ και $f(2)=15$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=4$.

9) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon):2x+y-3=0$.

10) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,6)$ και $B(0,3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon):2x+3y-3=0$.

11) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(4)=f(1)+3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi,f(\xi))$, με $\xi\in(1,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα x΄x.

12) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(\alpha)=2\beta+6\alpha$ και $f(\beta)=5\beta+3\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ $f'(\xi_1)$, $f'(\xi_2)$, $f'(\xi_3)$

Όταν μας ζητούν να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2,..., \xi_\nu \in (\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+...+f'(\xi_\nu)=\lambda$, τότε χωρίζουμε το διάστημα [α,β] σε ν υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ σε κάθε ένα από αυτά.

Υποπερίπτωση : Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $\kappa_1 f'(\xi_1)+\kappa_2 f'(\xi_2)+\kappa_3 f'(\xi_3)=\lambda$ τότε βρίσκουμε το άθροισμα $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=\kappa$ και παίρνουμε αντίστοιχα σημεία γ,δ τέτοια ώστε :

$\gamma-\alpha=\frac{\kappa_1}{\kappa}(\beta-\alpha)$, $\delta-\gamma=\frac{\kappa_2}{\kappa}(\beta-\alpha)$ και $\beta-\delta=\frac{\kappa_3}{\kappa}(\beta-\alpha)$ και στη συνέχεια εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [α.γ], [γ,δ], [δ,β].

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13)Έστω μια συνάρτηση $f:[1,3]\to\Re$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το [0,2] και είναι παραγωγίσιμη στο (1,3), να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-2$.

Λύση :

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=[1,3]$ άρα θα έχει σύνολο τιμών : $f(\Delta)=[f(3),f(1)]$ όμως από εκφώνηση $f(\Delta)=[0,2]$ άρα $f(3)=0$ και $f(1)=2$. Για να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-2$ θα εφαρμόσουμε 2 Θ.Μ.Τ. για την f.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,2]$
   - f συνεχής στο $[1,2]$
   - f παραγωγίσιμη στο $(1,2)$

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-2$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,3]$
   - f συνεχής στο $[2,3]$
   - f παραγωγίσιμη στο $(2,3)$

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=-f(2)$

Άρα τελικά $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=f(2)-2-f(2)=-2$.

14)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,5]$, παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ και ισχύει $f(5)=f(0)+1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,5)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=1$

Λύση :

Είναι $\kappa=2+3\Leftrightarrow\kappa=5$. Χωρίζουμε το διάστημα $[0,5]$ σε $[0,\gamma],[\gamma,5]$ ώστε

$\gamma-0=\frac{2}{5}(5-0)\Leftrightarrow\gamma=2$

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,2]$
   - f συνεχής στο $[0,2]$

- f παραγωγίσιμη στο $(0,2)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{f(2)-f(0)}{2}$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,5]$

- f συνεχής στο $[2,5]$
- f παραγωγίσιμη στο $(2,5)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (2,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{f(5)-f(2)}{3}$

Τελικά : $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2) = 2\dfrac{f(2)-f(0)}{2}+3\dfrac{f(5)-f(2)}{3} = f(2)-f(0)+f(5)-f(2) =$

$= f(5)-f(0) \overset{f(5)=f(0)+1}{=} f(0)+1-f(0) = 1$

15)Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $3f'(\xi_1)+2f'(\xi_2) = 0$.

Λύση :

Αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha) = f(\beta)$.

Είναι $\kappa = 3+2 \Leftrightarrow \kappa = 5$. Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε $[\alpha,\gamma],[\gamma,\beta]$ ώστε

$\gamma-\alpha = \dfrac{3}{5}(\beta-\alpha)$, $\beta-\gamma = \dfrac{2}{5}(\beta-\alpha)$

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\gamma]$

- f συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$
- f παραγωγίσιμη στο (α,γ)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = \dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\frac{3}{5}(\beta-\alpha)} =$

$= \dfrac{5}{3}\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\gamma,\beta]$

- f συνεχής στο $[\gamma,\beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (γ,β)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma} = \dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\frac{2}{5}(\beta-\alpha)} =$

$= \dfrac{5}{2}\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\alpha}$

Τελικά : $3f'(\xi_1)+2f'(\xi_2) = 3\dfrac{5}{3}\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}+2\dfrac{5}{2}\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\alpha} =$

$= \dfrac{5f(\gamma)-5f(\alpha)}{\beta-\alpha}+\dfrac{5f(\beta)-5f(\gamma)}{\beta-\alpha} = \dfrac{5f(\gamma)-5f(\alpha)+5f(\beta)-5f(\gamma)}{\beta-\alpha} = \dfrac{5\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)}{\beta-\alpha} = 0$

καθώς $f(\alpha) = f(\beta)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

16)Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Rolle στο [1,3]. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 , \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

17)Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f(3x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \Re$. Αν $f(1) = 3$ δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (0,3)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) = 9$.

18)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ και $f(4) = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (1,4)$ διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(\xi_1, f(\xi_1))$ και $B(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι μεταξύ τους κάθετες.

19)Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1) = f(3) = 0$ και $f(2) > 0$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$
ii. Υπάρχει $\xi \in (1,3)$ ώστε $f''(\xi) < 0$.

20)Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο [0,3] να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : (Θ.Μ.Τ. & Θ.Bolzano), (Θ.Μ.Τ. & Θ.Ε.Τ.),

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση της μορφής $g(f(\xi_1), f(\xi_2)) = \kappa$ ή $g(f(\xi_1), f(\xi_2)) < \acute{\eta} > 0$, τότε χωρίζουμε το διάστημα (α, β) σε δυο υποδιαστήματα (α, x_0) και (x_0, β), όπου το x_0 μπορεί να προκύψει από το Θ.Bolzano ή από το Θ.Ε.Τ. και μετά εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x_0]$, $[x_0, \beta]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

21)Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \Re$, η οποία είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)
ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = 4$.

(3ο Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2001)

Λύση :

i. Θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)
Έστω $g(x) = f(x) - 2x$ θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β). Εφαρμόζω Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο [α,β]
   - g συνεχής στο [α,β] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
   - $g(\alpha) = f(\alpha) - 2\alpha = 2\beta - 2\alpha = 2(\beta - \alpha) > 0$

- $g(\beta)=f(\beta)-2\beta=2\alpha-2\beta=2(\alpha-\beta)<0$ δηλ. $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$

Οπότε από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β), δηλ. υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-2x_0=0\Leftrightarrow f(x_0)=2x_0$.

ii. Για να δείξω ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$, θα πρέπει να διασπάσω το διάστημα (α,β) ώστε να εφαρμόσω δυο Θ.Μ.Τ.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,x_0]$
   - f συνεχής στο $[\alpha,x_0]$
   - f παραγωγίσιμη στο (α,x_0)

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,x_0)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}=\frac{2x_0-2\beta}{x_0-\alpha}=\frac{2(x_0-\beta)}{x_0-\alpha}$$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_0,\beta]$
   - f συνεχής στο $[x_0,\beta]$
   - f παραγωγίσιμη στο (x_0,β)

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2\in(x_0,\beta)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}=\frac{2\alpha-2x_0}{\beta-x_0}=\frac{2(\alpha-x_0)}{\beta-x_0}$$

Τελικά : $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{2(x_0-\beta)}{x_0-\alpha}\cdot\frac{2(\alpha-x_0)}{\beta-x_0}=\frac{2(x_0-\beta)}{x_0-\alpha}\cdot\frac{-2(x_0-\alpha)}{-(x_0-\beta)}=4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

22)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,2\alpha]\to\Re$, με α>0 για την οποία ισχύει $f(\alpha)=\alpha$ και $f(2\alpha)=2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $x_0\in(\alpha,2\alpha)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=3\alpha-x_0$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,2\alpha)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

23)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει $f(1)=2$ και $f(3)=8$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=6$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $\frac{2}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=1$.

24)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει $f(1)=2$ και $f(3)=6$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=8-2x_0$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : (Θ.Μ.Τ. & Θ.Rolle)
ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ $f''(\xi)$ - ΠΡΟΣΗΜΟ $f'(\xi)$, $f''(\xi)$

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $f''(\xi)=0$, ή $f''(\xi)<0$ ή $f''(\xi)>0$ τότε εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ όπου $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και βρίσκουμε τις τιμές $f'(\xi_1)$, $f'(\xi_2)$ όπου $\xi_1 \in (\alpha,x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0,\beta)$.

- Αν $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$, τότε εφαρμόζουμε Θ.Rolle για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.
- Αν $f'(\xi_1)\neq f'(\xi_2)$, τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στην f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε
  - $f''(\xi)<0$, αν $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$
  - $f''(\xi)>0$, αν $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

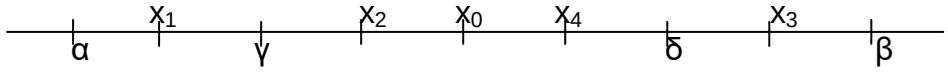
25)Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α)=f(β)=0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α,β), δ∈(α,β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ)<0, να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β).
ii. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)>0$ και $f''(\xi_2)<0$.
iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)=0$. *(4ο Πανελλήνιες 2003)*

Λύση :

i. Προφανώς $\gamma \neq \delta$ (Αν ήταν γ=δ τότε $f^2(\gamma)<0$ άτοπο)
Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτω γ<δ, f συνεχής στο $[\gamma,\delta]\subseteq[\alpha,\beta]$
f(γ)·f(δ)<0
Άρα από θ Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\gamma,\delta)$ της f δηλ. $f(x_0)=0$

ii.



Επειδή f(γ)·f(δ)<0 υποθέτω: f(γ)<0 και f(δ)>0
(Σε αντίθετη περίπτωση η απόδειξη είναι όμοια)

$$\left.\begin{matrix} f\ συνεχής\ στο [\alpha,\gamma] \\ f\ παραγ.\ στο\ (\alpha,\gamma)\end{matrix}\right| \overset{\Theta.Μ.Τ}{\Rightarrow} \text{Υπάρχει 1 τουλάχιστον } x_1 \in (a,\gamma) \quad f'(x_1)=\frac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}<0$$

$$\left.\begin{matrix} f\ συνεχής\ στο [\gamma,x_0] \\ f\ παραγ.\ στο\ (\gamma,x_0)\end{matrix}\right| \overset{\Theta.Μ.Τ}{\Rightarrow} \text{Υπάρχει 1 τουλάχιστον } x_2 \in (\gamma,x_0) \quad f'(x_2)=\frac{f(x_0)-f(\gamma)}{x_0-\gamma}=\frac{-f(\gamma)}{x_0-\gamma}>0$$

$$\left.\begin{array}{l} f \ συνεχής \ στο [x_1,x_2] \\ f \ παραγ. \ στο \ (x_1,x_2) \end{array}\right| \overset{\Theta.Μ.Τ}{\Rightarrow} \begin{array}{c} Υπάρχει \ 1 \ τουλάχιστον \ \xi_1 \in (x_1,x_2) \\ και \ άρα \ \xi_1 \in (\alpha,\beta) \\ f''(\xi_1) = \dfrac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \end{array}$$

Όμοια με ΘΜΤ στα [δ,β], [x_0,δ] εξασφαλίζω την ύπαρξη σημείων:
$x_3 \in$ (δ,β): $f'(x_3)<0$
$x_4 \in (x_0,δ)$: $f'(x_4)>0$ οπότε με ΘΜΤ στο $[x_4,x_3]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_4,x_3)$ και άρα $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_3)-f'(x_4)}{x_3-x_4} < 0$$

iii. Από το ii. διαπιστώνω ότι:
f'' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και
$f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)<0$
Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (\alpha,\beta)$ τ.ω. $f''(\xi)=0$.

26)Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$. Αν τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $\alpha<\beta<\gamma$ είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\gamma)$ ώστε να είναι $f''(\xi)=0$.

Λύση :

Τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακα άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ΑΒ) είναι ισος με το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ΒΓ). Δηλ.

$$\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_A} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}, \ (1)$$

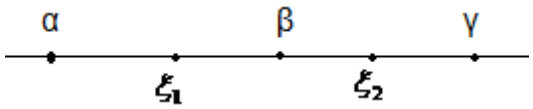
1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$
   - f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
   - f παραγωγίσιμη στο (α,β)

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\beta,\gamma]$
   - f συνεχής στο $[\beta,\gamma]$
   - f παραγωγίσιμη στο (β,γ)

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$

   Δηλ. λόγο της (1) ισχύει $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta} \Leftrightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$



3) Θ.Rolle. για την f' στο $[\xi_1,\xi_2] \subseteq [\alpha,\gamma]$
   - f' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2] \subseteq [\alpha,\gamma]$
   - f' παραγωγίσιμη στο $(\xi_1,\xi_2) \subseteq (\alpha,\gamma)$

   Άρα από Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1)=\alpha+2\beta$, $f(2)=2\alpha+3\beta$ και $f(3)=3\alpha+4\beta$, με $\alpha,\beta\in\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$, ώστε $f''(\xi)=0$. *(Υποδ. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)=0$, πρέπει να εφαρμόσουμε το Θ.Rolle για την $f'(x)$ σε κάποιο διάστημα $[x_1,x_2]$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δυο αριθμούς $x_1\neq x_2$ με $f'(x_1)=f'(x_2)$. Οι τιμές αυτές μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ σε δυο διαστήματα ξένα μεταξύ τους.)*

28) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5), B(2,-4), \Gamma(3,2)$. Να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,3)$, ώστε : $f(x_1)=f(x_2)=0$.
ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$, ώστε $f''(\xi)>0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Αν έχουμε ως δεδομένο μια ανισοτική σχέση που περιέχει $f'(x)$ και μας ζητείται να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση για την $f(x)$, τότε η απόδειξη ενδεχομένως μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. (υπάρχουν και άλλοι τρόποι όπως θα μάθουμε)

- Μετασχηματίζω την ανισότητα έτσι ώστε να δημιουργηθεί στο κέντρο η διαφορά $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο [α,β] οπότε έχω : $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1). Αφού $\xi\in(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\alpha<\xi<\beta$, μορφοποιώ την παράσταση $f'(\xi)$ και έχω ανισότητα της μορφής $A<f'(\xi)<B$ η οποία λόγο της (1) αποδεικνύει την ζητούμενη ανισότητα.

- Μπορούμε να αποδείξουμε μια διπλή ανισότητα δυο μεταβλητών α,β χρησιμοποιώντας το Θ.Μ.Τ. Πρώτα βρίσκουμε συνάρτηση f, ώστε η ανισότητα να πάρει τη μορφή : $\kappa<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<\lambda$. Μετά εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο [α,β] έτσι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Τέλος ξεκινάμε από ανισότητα $\alpha<\xi<\beta$ και καταλήγουμε σε ανισότητα $\kappa<f'(\xi)<\lambda$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

29) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4] με f(0)=1 και $2\le f'(x)\le 5$ για κάθε $x\in(0,4)$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $9\le f(4)\le 21$.

Λύση :

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[0,4]$

- f συνεχής στο $[0,4]$
- f παραγωγίσιμη στο $(0,4)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(4)-f(0)}{4-0} = \dfrac{f(4)-1}{4}$

Όμως επειδή από εκφώνηση ισχύει $2 \le f'(x) \le 5$ για κάθε $x \in (0,4)$ άρα θα είναι :

$$2 \le f'(\xi) \le 5 \Leftrightarrow 2 \le \frac{f(4)-1}{4} \le 5 \Leftrightarrow 8 \le f(4)-1 \le 20 \Leftrightarrow 9 \le f(4) \le 21.$$

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Να αποδείξετε ότι $f(x) \le x-1$ για κάθε $x>0$. Πότε ισχύει η ισότητα ;

Βασική ανισότητα $\ln x \le x-1$

Λύση :

Θα δείξουμε ότι $f(x) \le x-1 \Leftrightarrow \ln x \le x-1$ (1) για κάθε $x>0$.

✓ Αν $x=1$, τότε προφανώς η (1) ισχύει, ως ισότητα.

✓ Αν $0<x\neq 1$, θα δείξουμε ότι $\ln x < x-1 \Leftrightarrow f(x) < x-1$ (2)

➢ Αν $x>1$, τότε η $(2) \Leftrightarrow f(x) < x-1 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < 1$, (3)

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x]$

- f συνεχής στο $[1,x]$
- f παραγωγίσιμη στο $(1,x)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Έτσι η $(3) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} < 1 \Leftrightarrow \xi > 1$, που ισχύει.

➢ Αν $0<x<1$, τότε η $(2) \Leftrightarrow f(x) < x-1 \overset{x<1}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > 1$, (4)

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,1]$

- f συνεχής στο $[x,1]$
- f παραγωγίσιμη στο $(x,1)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Έτσι η $(4) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} > 1 \Leftrightarrow \xi < 1$, που ισχύει.

Τελικά $\ln x \le x-1$, για κάθε $x>0$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=1$.

(Η ανισότητα $\ln x \le x-1$, για κάθε $x>0$ θεωρείται «βασική» και χρησιμοποιείται σε ασκήσεις χωρίς απόδειξη.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

31)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [3,5] και ισχύουν f(3)=4 και $2 \le f'(x) \le 3$ για κάθε $x \in \Re$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $8 \le f(5) \le 10$.

32) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,5] με f(1)=3 και $0 \le f'(x) \le 5$ για κάθε $x \in (1,5)$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $3 \le f(5) \le 23$.

33) i. Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{x^2+\eta\mu x}{2x^2+2}\right| \le \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \Re$.

ii. Αν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R, με $f'(x)=\frac{x^2+\eta\mu x}{2x^2+2}$, να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha,\beta \in \Re$ ισχύει $|f(\beta)-f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|\beta-\alpha|$.

34) Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες :

i. $e^x \ge x+1,\ x \in \Re$. Πότε ισχύει το ίσον;

ii. $e^x > x,\ x \in \Re$.

iii. $\ln x < x,\ x>0$.

iv. $\ln x \ge 1-\frac{1}{x},\ x>0$.

v. $e^{x-1} \ge x,\ x \in \Re$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : Θ.Μ.Τ. ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ $f'(x)$ ΓΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει : $f'(x+1) > f(x+1)-f(x)$. *(3ο Πανελλήνιες 2008)*

Λύση :

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)=x\ln x$. Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x,x+1]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ ως πράξεις συνεχών
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ ως πράξεις παραγωγισιμων με $f'(x)=\ln x+1$.

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$. Όμως $\xi \in (x,x+1)$ άρα $\xi < x+1$ (1). Θα πρέπει να πάρω f' και στα δυο μέλη της (1), πρέπει όμως να γνωρίζω τη μονοτονία της f'. Έστω $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow$

$\ln x_1+1<\ln x_2+1 \Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι η σχέση (1) θα γίνει : $(1):\xi<x+1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

36)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να δείξετε ότι $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$ για κάθε $x\in\Re$.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$ είναι : $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}<f'(x)<\dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}$

Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x-1,x]$ και στο $[x,x+1]$

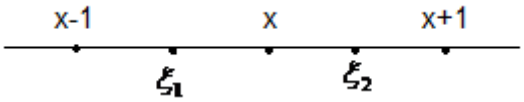
- f *συνεχής στο* $[x-1,x]$
- f *παρ/μη στο* $(x-1,x)$

} άρα υπάρχει $\xi_1\in(x-1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}$

Επίσης :

- f *συνεχής στο* $[x,x+1]$
- f *παρ/μη στο* $(x,x+1)$

} άρα υπάρχει $\xi_2\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$



Έτσι ισχύει ότι :

$\xi_1<x<\xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)>f'(x)>f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}>f'(x)>\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-f(x-1)>f'(x)>f(x+1)-f(x) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$

Δηλαδή η σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε ισχύει για κάθε $x\in\Re$.

37)Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}, x>0$. *(3ο Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2006)*

Λύση :

Για κάθε $x>0$ έχουμε : $\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}<\dfrac{1}{x}$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$, $x>0$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\ln x$ στο $[x,x+1]$

- f *συνεχής στο* $[x,x+1]$
- f *παρ/μη στο* $(x,x+1)$

} άρα υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$

και $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Για κάθε $x_1,x_2>0$ είναι $x_1<x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \Rightarrow f'(x_1)>f'(x_2) \Rightarrow f'\downarrow(0,+\infty)$

Έτσι ισχύει $\xi\in(x,x+1) \Leftrightarrow x<\xi \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}>\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}>\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{1} \Leftrightarrow \ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$.

38)Αν $\alpha<\beta$ με $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, να δείξετε ότι $(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta<\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha<(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$.

Λύση :

Έχουμε να δείξουμε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha<\beta$ ισχύει :

$(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta<\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha<(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\beta<\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}<\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]\subseteq\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

- f συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$

Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}$

Δηλαδή έχουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση (1) που γίνεται $\sigma\upsilon\nu\beta<\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}<\sigma\upsilon\nu\alpha\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\beta<f'(\xi)<\sigma\upsilon\nu\alpha\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\beta<\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\alpha$ (2).

Η $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Έτσι :

$\xi\in(\alpha,\beta)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\alpha<\xi<\beta\overset{f'(x)=\sigma\upsilon\nu x\downarrow(\alpha,\beta)}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu\alpha>\sigma\upsilon\nu\xi>\sigma\upsilon\nu\beta\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\beta<\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [1,7] και παραγωγίσιμη στο (1,7). Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (1,7) να δείξετε ότι $f(1)+f(7)>f(3)+f(5)$ για κάθε $x\in\Re$.

40)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να δείξετε ότι $f(x+1)+f(x+2)>f(x)+f(x+3)$ για κάθε $x\in\Re$.

41)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$. Να δείξετε ότι $f'(x)>\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ για κάθε x>α.

42) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$. Να δείξετε ότι $f'(x)>\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ για κάθε x<α.

43) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Αν ισχύει $f(0)=0$ να δείξετε ότι $f'(x)<\frac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.

Θ.Μ.Τ. ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

44)(Άσκηση 6 σελ. 250 σχολικό βιβλίο Β΄ ομάδας)
Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [-1,1] και ισχύει $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

Λύση :

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$

- f *συνεχής στο* $[-1,0]$
- f *παρ/μη στο* $(-1,0)$

άρα υπάρχει $\xi_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = f(0) + 1$

- f *συνεχής στο* $[0,1]$
- f *παρ/μη στο* $(0,1)$

άρα υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 - f(0)$

Όμως : $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$, αρα :

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_1) \le 1 \Leftrightarrow f(0) + 1 \le 1 \Leftrightarrow f(0) \le 0 \\ f'(\xi_2) \le 1 \Leftrightarrow 1 - f(0) \le 1 \Leftrightarrow f(0) \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = 0 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

45)Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR με f΄(x)≠0 για κάθε x ∈ IR .

i. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.
ii. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004 + f(x^2 - 8)\right) = -2$.
iii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y = -\dfrac{1}{668}x + 2005$. (3ο Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2005)

46)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, για την οποία ισχύει $2f(x) - 2x \le f(4) + f(-4)$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(4) - f(-4) = 8$
ii. υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-4,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon) : y = x + 2012$
iii. υπάρχει $x_0 \in (-4,4)$ ώστε $f(x_0) = f(-4) + 4$
iv. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-4,4)$, ώστε $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = 2$.

2.6Α ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Α΄ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ. – ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

41. ΘΕΩΡΗΜΑ (2004 Β΄, 2009, 2014)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη :

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

42. ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

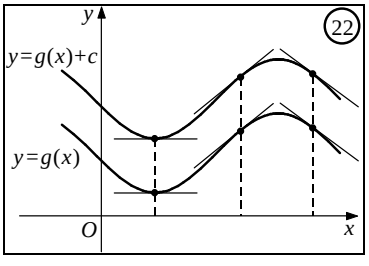
- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

Απόδειξη :

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.



Σχόλιο :

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμα του **ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. (2019)**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1\,,\,x<0\\ 1\,,\,x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

43. ΕΦΑΡΜΟΓΗ (ΣΕΛ. 252)
Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$,τότε $f(x)=ce^x$ για κάθε $x\in R$. Αντί του R μπορούμε να έχουμε τυχαίο διάστημα Δ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ αποδεικνύουμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο Δ και ότι $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\Delta$. Όταν μια συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει ότι $f(x)=c$ για κάθε $x\in\Delta$. Αν μπορούμε να βρούμε μια τιμή $f(x_0)$ σε κάποιο $x_0\in\Delta$, τότε είναι $c=f(x_0)$ οπότε θα ισχύει : $f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x\in\Delta$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(4)=3$ και : $xf'(x)=3x-2f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
   i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^2f(x)-x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.
   ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

i. Η $g(x)=x^2f(x)-x^3$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνέχων. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^2f(x)-x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$, αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Έχω : $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-3x^2$ (1).
Επίσης από εκφώνηση : $xf'(x)=3x-2f(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f'(x)=\dfrac{3x-2f(x)}{x}$. Άρα η σχέση (1) γίνεται : $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-3x^2\Leftrightarrow g'(x)=2xf(x)+x^2\dfrac{3x-2f(x)}{x}-3x^2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow g'(x)=2xf(x)+3x^2-2xf(x)-3x^2\Leftrightarrow g'(x)=0$. Άρα η $g(x)$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii. Η $g(x)=x^2f(x)-x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$ άρα ισχύει : $g(x)=c$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα και $g(4)=c\Leftrightarrow4^2f(4)-4^3=c\Leftrightarrow16\cdot3-64=c\Leftrightarrow c=-16$. Άρα $g(x)=-16\Leftrightarrow x^2f(x)-x^3=-16\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3-16}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει : $\dfrac{f'(x)}{2}=\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.
   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$, x>0 , είναι σταθερή.
   ii. Αν $f(1)=2$ να βρείτε τον τύπο της f.

3) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(4)=4e^{-2}$ και : $2\sqrt{x}\cdot f'(x)+f(x)=e^{-\sqrt{x}}$ για κάθε $x\geq0$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot f(x)-\sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$.
ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

4) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$ για κάθε $x,y\in\Re$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

5) Δίνεται συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\left|e^{f(x)}-e^{f(y)}-\ln x+\ln y\right|\le(x-y)^{2016}$ για κάθε $x,y\in(1,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-\ln x$, $x>1$ είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(e)=0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

- $0=(c)'$
- $c=(cx)'$
- $x^{\alpha}=\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$, $\alpha\neq-1$
- $\frac{1}{x}=\left(\ln|x|\right)'$, $x\neq0$
- $\frac{1}{x^2}=\left(-\frac{1}{x}\right)'$, $x\neq0$
- $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)'$
- $\eta\mu x=\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)'$
- $\sigma\upsilon\nu x=\left(\eta\mu x\right)'$
- $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=(\varepsilon\phi x)'$
- $-\frac{1}{\eta\mu^2 x}=(\sigma\phi x)'$
- $e^x=(e^x)'$
- $\alpha^x=\left(\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}\right)'$
- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$
- $\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$

ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \left(\ln|f(x)|\right)'$
- $e^{f(x)} \cdot f'(x) = \left(e^{f(x)}\right)'$
- $f^{\nu}(x) \cdot f'(x) = \left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ π.χ. $f(x) \cdot f'(x) = \left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \left(\sqrt{f(x)}\right)'$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta \to \Re$ αν ισχύει : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ όταν $x \in \Delta = (0,+\infty)$ και $f(1) = 3$.

Λύση : Έχω : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x} + \ln x + \dfrac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x} + \ln x + \dfrac{1}{x} + c$

Για $x = 1$ έχουμε : $f(1) = \sqrt{1} + \ln 1 + \dfrac{1}{1} + c \Leftrightarrow 3 = 1 + 1 + c \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + \dfrac{1}{x} + 1$, $D_f = (0,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta \to \Re$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x) = 2x + 3$ όταν $x \in \Delta = \Re$ και $f(2) = 5$

ii. $f'(x) = 3x^2 + x + 1$ όταν $x \in \Delta = \Re$ και $f(0) = 2$

iii. $f'(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ όταν $x \in \Delta = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 2$

iv. $f'(x) = e^x - \eta\mu x$ όταν $x \in \Delta = \Re$ και $f(0) = 3$

v. $f'(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ όταν $x \in \Delta = (0,+\infty)$ και $f(1) = 2e$

vi. $f''(x) = 12x - 2$ όταν $x \in \Delta = \Re$ και $f'(1) = 7$ και $f(1) = 3$

vii. $f''(x) = 6x + 2$ όταν $x \in \Delta = \Re$ και $f'(0) = 1$ και $f(1) = -3$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ – ΠΗΛΙΚΟΥ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\Re$ αν ισχύει : $x\cdot f'(x)\cdot\ln x+f(x)=2x^2$ $x\in\Delta=(1,+\infty)$ και $f(e)=e^2$

Λύση :

Έχω : $x\cdot f'(x)\cdot\ln x+f(x)=2x^2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)\cdot\ln x+f(x)\cdot\frac{1}{x}=2x\Leftrightarrow\left(f(x)\ln x\right)'=(x^2)'\Leftrightarrow$ $f(x)\ln x=x^2+c$. Για $x=e$ έχω : $f(e)\ln e=e^2+c\Leftrightarrow e^2=e^2+c\Leftrightarrow c=0$ άρα $f(x)\ln x=x^2 \overset{\substack{\ln x\neq 0\Leftrightarrow\\ \ln x\neq\ln 1\Leftrightarrow\\ x\neq 1}}{<\!\!=\!\!=\!\!=\!\!>} f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$ με $x\in(1,+\infty)$ και $x\neq 1$ άρα $D_f=(1,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

9) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\Re$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $(1+x^2)\cdot f'(x)=2x\cdot f(x)$ $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=1$

ii. $x\cdot f'(x)-f(x)=2x^3$ $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=1$

iii. $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$ $x\in\Delta=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0)=0$

iv. $f'(x)=2x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x$ όταν $x\in\Delta=\Re$ και $f(0)=1$

v. $\eta\mu x\cdot f'(x)=2x\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)$ όταν $x\in\Delta=\Re$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$

10) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\Re$ με $f(0)=-1$ για την οποία ισχύουν :

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x<1$
- $(x-1)f'(x)+|f(x)|=0$ για κάθε $x<1$.

Να δείξετε ότι $f(x)=x-1$, $x\leq 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11)Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση :

$2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι : $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

(3ο Πανελλήνιες 2005)

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$ έχω :

$2f'(x)=e^{x-f(x)}\Leftrightarrow 2f'(x)=\dfrac{e^x}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow 2e^{f(x)}f'(x)=e^x\Leftrightarrow \left(2e^{f(x)}\right)'=(e^x)'\Leftrightarrow$

$2e^{f(x)}=e^x+c$. Για $x=0$ έχω : $2e^{f(0)}=e^0+c\Leftrightarrow 2e^0=1+c\Leftrightarrow c=1$. Άρα

$2e^{f(x)}=e^x+1\Leftrightarrow e^{f(x)}=\dfrac{e^x+1}{2}\Leftrightarrow \ln e^{f(x)}=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$, $D_f=\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12)Έστω μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)\cdot f'(x)-\eta\mu x=0$ για κάθε $x\in\Re$. Αν $f(0)=-\sqrt{2}$, να βρείτε τον τύπο της f .

13)Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση : $f'(x)=4x^3e^{-f(x)}$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(1)=\ln 3$. Να βρείτε τον τύπο της f.

14)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\Re$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x)=2xe^{-f(x)}$, $x\in\Delta=\Re$ και $f(1)=1$

ii. $x^2f'(x)+e^{-f(x)}=0$, $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=0$

iii. $f'(x)+2xf^2(x)=0$, $f(x)\neq 0$, $x\in\Delta=\Re$ και $f(0)=1$

iv. $f'(x)-e^x\sqrt{f(x)-1}=0$, $f(x)>1$, $x\in\Delta=\Re$ και $f(0)=2$

v. $f'(x)=f^2(x)\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)\neq 0$, $x\in\Delta=\Re$ και $f(0)=2$

15)Έστω μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f'(3x-1)=2x+1$. Αν f(2)=5 , να βρείτε τον τύπο της f .

16)Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την όποια ισχύει : $f'(x^2)=3x-1$ για κάθε x>0. Αν f(1)=1 , να βρείτε τον τύπο της f .

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΜΕ $e^{g(x)}$

- Αν έχουμε ισότητα της μορφής : $f'(x)+g(x)\cdot f(x)=0$ (1)

  πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) με $e^{G(x)}$ και ισοδύναμα έχουμε :

  $(1)\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+g(x)\cdot e^{G(x)}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+G'(x)\cdot e^{G(x)}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+\left(e^{G(x)}\right)'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{G(x)}\cdot f(x)\right)'=0$.

- Ειδικότερα ισχύει η ισοδυναμία : $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη, με $f(0)=1$. Αν ισχύει : $f'(x)=2xf(x)$ να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$ έχω :

$$f'(x)=2xf(x)\Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=0 \overset{\substack{g(x)=-2x\\ \acute{\alpha}\rho\alpha\\ G(x)=-x^2}}{\underset{\cdot e^{-x^2}}{\Longleftrightarrow}} e^{-x^2}\cdot f'(x)-2xe^{-x^2}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2}\cdot f'(x)+\left(e^{-x^2}\right)'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{-x^2}\cdot f(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^{-x^2}\cdot f(x)=c$$, για $x=0$ έχω : $e^0\cdot f(0)=c\Leftrightarrow c=1$. Άρα $e^{-x^2}\cdot f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}$, $D_f=\Re$.

18)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(0)=3$ και : $f'(x)-x^3=f(x)-3x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$ έχουμε : $f'(x)-x^3=f(x)-3x^2\Leftrightarrow f'(x)+3x^2=f(x)+x^3\Leftrightarrow$

$\left(f(x)+x^3\right)'=f(x)+x^3$, άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $f(x)+x^3=c\cdot e^x$ (1) $x\in\Re$

Για $x=0$ η (1) γίνεται : $f(0)+0^3=c\cdot e^0\Leftrightarrow c=3$, άρα η (1) γίνεται : $f(x)+x^3=3e^x\Leftrightarrow f(x)=3e^x-x^3$, $x\in\Re$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\Re$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x)-f(x)=e^x$ όταν $x\in\Delta=\Re$ και $f(0)=2$

ii. $f'(x)\cdot e^x=2x-x^2$, όταν $x\in\Delta=\Re$ και $f(0)=0$

20)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f:\Re\to\Re$ με $f(1)=2$ και $f'(x)+f(x)=x^2+2x$ $x\in\Re$

ii. $f:\Re\to\Re$ με $f(0)=e$ και $f'(x)-2xf(x)=0$ $x\in\Re$

iii. $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(1)=\dfrac{1-e}{e}$ και $x^2f'(x)-f(x)=1$ $x>0$

iv. $f:\Re\to\Re$ με $f(0)=1$ και $f'(x)=3x^2f(x)$, $f(x)>0$, $x\in\Re$

21)Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(x)>0$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)=f(x)\cdot\ln f(x)$, για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

22)Έστω $f:[0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)=\dfrac{x+1}{x}f(x)$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$. Να βρείτε τον τύπο της f.

23)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{e}$, και $xf'(x)=(x-1)f(x)$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

24)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{\pi}{6}}$, και $f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x=f(x)\eta\mu x$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε τον τύπο της f.

25)Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Re$, $f(0)=1$ και $f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $g(x)=\frac{f'(x)+f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή,

ii. $\left(f(x)e^x\right)'=e^{2x}$ για κάθε $x\in\Re$,

iii. ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. (Πανελλήνιες 2001)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν στην ίδια ισότητα περιέχονται οι συναρτήσεις :

$f(x)+g(x)$ και $f'(x)+g'(x)$ ή $f(x)+g(x)$ και $f''(x)+g''(x)$, (όπου $g(x)$ γνωστή συνάρτηση) και ζητείται να βρούμε τον τύπο της $f(x)$, τότε θέτω $h(x)=f(x)+g(x)$ και με αντιπαραγώγιση βρίσκω την $h(x)$ και στη συνέχεια την $f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύουν : $f'(x)-2x+2x\left(f(x)-x^2\right)=0$, για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=1$, $f(x)\neq x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

Λύση :

[στη σχέση που δίνεται εμφανίζεται : $f(x)-x^2$ και $f'(x)-2x$]

Για κάθε $x\in\Re$ έχω : $f'(x)-2x+2x\left(f(x)-x^2\right)=0$, έστω $g(x)=f(x)-x^2$

1ος Τρόπος

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $g'(x)+2xg(x)=0$

(Η $g(x)=f(x)-x^2$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και $g(x)\neq 0$ (καθώς $f(x)\neq x^2$) άρα η g διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\Re$ και $g(0)=f(0)=1>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$.)

Έχουμε : $g'(x)+2xg(x)=0\overset{\cdot e^{x^2}}{\Leftrightarrow}e^{x^2}\cdot g'(x)+2xe^{x^2}\cdot g(x)=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left(g(x)\cdot e^{x^2}\right)'=0$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g(x)\cdot e^{x^2}=c$

Για $x=0$ είναι : $g(0)\cdot e^0=c\Leftrightarrow f(0)-0=c\Leftrightarrow c=1$, άρα :

$g(x)\cdot e^{x^2}=1\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{e^{x^2}}\Leftrightarrow g(x)=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)-x^2=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2}+x^2,\ x\in\Re$.

2ος Τρόπος

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $g'(x)+2xg(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=-2xg(x)$

Η $g(x)=f(x)-x^2$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και $g(x)\neq 0$ (καθώς $f(x)\neq x^2$) άρα η g διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\Re$ και $g(0)=f(0)=1>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$.

Τελικά : $g'(x)=-2xg(x) \overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{g'(x)}{g(x)}=-2x \Leftrightarrow \left(\ln g(x)\right)'=(-x^2)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $\ln g(x)=-x^2+c$ (1), και για $x=0$, $\ln g(0)=c \Leftrightarrow \ln 1=c \Leftrightarrow c=0$

Άρα : $\ln g(x)=-x^2 \Leftrightarrow g(x)=e^{-x^2} \Leftrightarrow f(x)-x^2=e^{-x^2} \Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2}+x^2$, $x\in\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$, για την οποία ισχύουν : $\left(xf'(x)-1\right)\cdot\left(f(x)-\ln x\right)=x^2$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=1$. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 6 : ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ $f''(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

28) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=2f'(0)=1$ και : $f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)f'(x)$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$, έχουμε :

$f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)f'(x) \Leftrightarrow f''(x)f(x)+f'(x)f'(x)=f(x)f'(x) \Leftrightarrow$

$\left(f'(x)f(x)\right)'=f(x)f'(x)$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $f(x)f'(x)=c\cdot e^x$ (1) $x\in\Re$. Για $x=0$ η (1) γίνεται : $f(0)f'(0)=c \Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2}$ άρα η (1) γίνεται : $f(x)f'(x)=\dfrac{1}{2}e^x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=e^x \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=(e^x)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $f^2(x)=e^x+c_2$, $x\in\Re$ (2). Για $x=0$ η (2) γίνεται : $f^2(0)=1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$.

Άρα η (2) γίνεται τελικά : $f^2(x)=e^x$, $x\in\Re$.

- Η f είναι συνεχής για κάθε $x\in\Re$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$ (έστω ότι υπάρχει $x_0\in\Re$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0 \Leftrightarrow f^2(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=0$ αδύνατο)

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$. Έτσι : $f^2(x)=e^x \Rightarrow f(x)=\sqrt{e^x}$, $x\in\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

29) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f''(x)-2xf'(x)=2f(x)$, $x\in\Re$
- $f(2)=e$, $f'(0)=0$
- $f(x)>0$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

30)Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f''(x)-2f'(x)+f(x)=e^x,\ x\in\Re$
- $f(1)=\frac{e}{2},\ f'(1)=\frac{3e}{2}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x-\frac{f'(x)-f(x)}{e^x},\ x\in\Re$ είναι σταθερή.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

31)Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=-f''(x),\ x\in\Re$
- $f(0)=\ln 2,\ f'(0)=\frac{1}{2}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

32)Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f(x)f''(x)-f(x)f'(x)=\left(f'(x)\right)^2,\ x\in\Re$
- $f(0)=e,\ f'(0)=e$
- $f(x)\neq 0,\ x\in\Re$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

33)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ x\in\Re$. (Θέμα Γ΄ 2011)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 7 : ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ $f(x)$ ΚΑΙ $g(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

34)Έστω $f,g:(-1,+\infty)\to\Re$ δυο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ικανοποιούν τις συνθήκες :

- $f'(x)=e^{-g(x)},\ \ g'(x)=e^{-f(x)}$, για κάθε $x>-1$
- $f(0)=g(0)=0$

Να δείξετε ότι $f=g$ και στη συνέχεια να βρείτε τις συναρτήσεις : f,g.

Λύση : Για κάθε $x>-1$,

είναι : $f'(x)=e^{-g(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{e^{g(x)}}\Leftrightarrow f'(x)e^{g(x)}=1$ (1), ομοίως : $g'(x)e^{f(x)}=1$ (2)

Άρα από (1) και (2) είναι : $f'(x)e^{g(x)}=g'(x)e^{f(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}=\frac{g'(x)}{e^{g(x)}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)}=g'(x)e^{-g(x)}\Leftrightarrow\left(-e^{-f(x)}\right)'=\left(-e^{-g(x)}\right)'$ (1), άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. η (1) γίνεται : (1) : $-e^{-f(x)}=-e^{-g(x)}+c$ (2). Για $x=0$ η (2) γίνεται : $-e^{-f(0)}=-e^{-g(0)}+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα : $-e^{-f(x)} = -e^{-g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ για κάθε $x > -1$.

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $f'(x) = e^{-g(x)} \Leftrightarrow f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = (x)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $e^{f(x)} = x + c_2$ (3)

Για $x = 0$ η (3) γίνεται : $e^{f(0)} = 0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1$, άρα $e^{f(x)} = x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln(x+1)$ με $x > -1$. Αρα τελικά : $f(x) = g(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35)Έστω $f, g : \Re \to \Re$ δυο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιούν τις συνθήκες :

- $f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}$, $g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$, για κάθε $x \in \Re$
- $f(0) = g(0) = 1$,
- $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Re$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις : f, g.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 8 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f(x) = \alpha g(x)$

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x) = ag(x)$, $x \in \Delta$, τότε θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - ag(x)$, $x \in \Delta$ και αποδεικνύουμε ότι είναι σταθερή, δηλ. $h(x) = c$ και στη συνέχεια δείχνω ότι $c = 0$.

(σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να συμφέρει περισσότερο να θέσω $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, $x \in \Delta$ *και να δείξω ότι ότι είναι σταθερή, δηλ.* $h(x) = \alpha$ *)*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

36)Έστω $f : \Re \to \Re$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $f(x) \cdot f'(-x) = 1$, για κάθε $x \in \Re$ και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι $f(x) \cdot f(-x) = 1$, $x \in \Re$.

Λύση :

Έστω : $g(x) = f(x) \cdot f(-x) - 1$, θα δείξω ότι $g(x)$ σταθερή, άρα $g(x) = c$ και μετά $c = 0$

Η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και επιπλέον $g'(x) = f'(x) \cdot f(-x) - f(x) \cdot f'(-x) \Leftrightarrow g'(x) = f'(x) \cdot f(-x) - 1$

Στη σχέση : $f(x) \cdot f'(-x) = 1$ αν θέσω όπου x το –x έχω : $f(-x) \cdot f'(x) = 1$

Άρα : $g'(x) = f'(x) \cdot f(-x) - 1 \Leftrightarrow g'(x) = 1 - 1 = 0$, άρα $g(x)$ είναι σταθερή για κάθε $x \in \Re$, δηλ. $g(x) = c$, $x \in \Re$. Όμως $g(0) = f(0) \cdot f(0) - 1 = 0$, άρα $g(0) = c \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα : $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f(-x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f(-x) = 1$, $x \in \Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

37)Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$, για την οποία ισχύουν : $x^2 f'(x)=(x-\ln x)e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=0$. Να δείξετε ότι : $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$, $x>0$.

38)Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$, για την οποία ισχύουν : $xf'(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$. Να δείξετε ότι : $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

39)Έστω $f:\Re\to\Re$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $f(x)\cdot f'(-x)=2$, για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=1$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)>0$, $x\in\Re$.
ii. Να δείξετε ότι $f(x)\cdot f(-x)=1$, $x\in\Re$.
iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 9 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΚΑΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Αν Δ_1,Δ_2 διαστήματα με $\Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset$ και έχουμε : $f'(x)=g'(x)$, για κάθε $x\in\Delta_1,\Delta_2$, τότε

- Αν $x\in\Delta_1$, τότε $f(x)=g(x)+c_1$
- Αν $x\in\Delta_2$, τότε $f(x)=g(x)+c_2$

Δηλαδή : $f(x)=\begin{cases}g(x)+c_1, & x\in\Delta_1\\ g(x)+c_2, & x\in\Delta_2\end{cases}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

40)Έστω $f:\Re^*\to\Re$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $x^3 f'(x)+x^2 f(x)=2x^3+1$, για κάθε $x\neq 0$ και $f(1)=5$, $f(-1)=2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\neq 0$, $x^3 f'(x)+x^2 f(x)=2x^3+1\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=2x+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'$

με $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Άρα : $xf(x)=\begin{cases}x^2-\frac{1}{x}+c_1, & x<0\\ x^2-\frac{1}{x}+c_2, & x>0\end{cases}$ δηλαδή : $f(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{x^2}+\frac{c_1}{x}, & x<0\\ x-\frac{1}{x^2}+\frac{c_2}{x}, & x>0\end{cases}$

Όμως $f(-1)=2\Leftrightarrow -1-1-c_1=2\Leftrightarrow c_1=-4$ και $f(1)=5\Leftrightarrow 1-1+c_2=5\Leftrightarrow c_2=5$.

Τελικά : $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x}, & x<0 \\ x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x}, & x>0 \end{cases}$

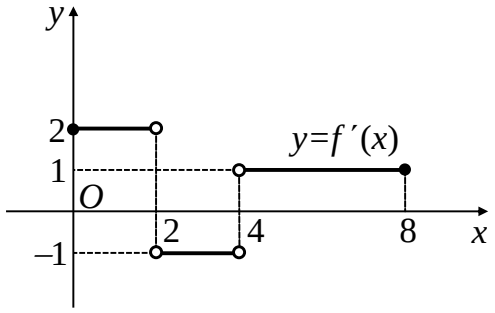
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

41)Έστω $f:\Re\to\Re$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $xf'(x)-2f(x)=x^3$, για κάθε $x\in\Re$ και $f(1)=4$, $f(-1)=-2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

42)Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες : $xf'(x)-f'(x)=2x^2-x-1$, για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

43)Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες : $(x-1)f'(x)=2x^2+x-3$, για κάθε $x\in\Re$ και $f(-2)=3$. Να βρείτε τον τύπο της f.

44) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,8]\to\Re$, η οποία είναι συνεχής, με $f(0)=0$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.



2.6Β ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Β΄ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

44. ΘΕΩΡΗΜΑ (2000, 2006, 2012, 2017, 2019)
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.
• Αν $f'(x)>0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
• Αν $f'(x)<0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

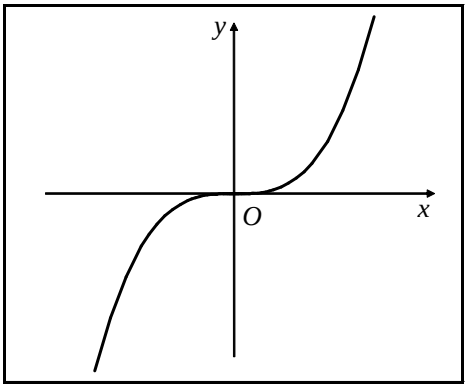
Απόδειξη :

• Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.
• Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Για παράδειγμα : $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Σχόλιο :
Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.

Για παράδειγμα : η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Re$.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να εξετάσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

i. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της D_f και εξετάζουμε αν είναι συνεχής.
ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης.
iii. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$.
iv. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f στον οποίο πρέπει να περιέχονται το Π.Ο. της f καθώς και οι ρίζες της $f'(x)=0$.
v. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ είτε λύνοντας τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$ είτε βρίσκοντας το πρόσημο μιας τιμής της $f'(x)$ σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι ρίζες της.
vi. Συμπληρώνουμε το είδος της μονοτονίας της $f(x)$ ανάλογα με το πρόσημο της $f'(x)$. Ισχύει :
   - Αν $f'(x)>0$ τότε η f γνησίως αύξουσα
   - Αν $f'(x)<0$ τότε η f γνησίως φθίνουσα

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

45) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-6x+1$
ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$
iii. $f(x)=xe^x$
iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Λύση :

i. $f(x)=x^2-6x+1,\ D_f=\Re,\ f'(x)=2x-6,\ f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις πρωτοβάθμιες ανισώσεις, δηλ. δεξιά του 0 ομόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x)
Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,3]$
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[3,+\infty)$

ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7,\ D_f=\Re,\ f'(x)=3x^2+6x-9,$
$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x=-3,\acute{\eta},x=1$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις, δηλ. όταν Δ>0 και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, τότε για τα πρόσημα ισχύει ότι εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x^2)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in(-\infty,-3]$ και για κάθε $x\in[1,+\infty)$

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-3,1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[-3,1]$

iii. $f(x)=xe^x$, $D_f=\Re$, $f'(x)=e^x+xe^x$,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x+xe^x=0\Leftrightarrow e^x(1+x)=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x=0\Leftrightarrow x=-1$$

x	- ∞	-1	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x+xe^x>0\Leftrightarrow e^x(1+x)>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x>0\Leftrightarrow x>-1$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow e^x+xe^x<0\Leftrightarrow e^x(1+x)<0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x<0\Leftrightarrow x<-1$$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,-1]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[-1,+\infty)$

iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow\ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$$

x	0	e	+ ∞
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow x^2(1-\ln x)>0\overset{\substack{x^2>0\\ \gamma\iota\alpha\\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\\ x\in(0,+\infty)}}{\Longleftrightarrow}1-\ln x>0\Leftrightarrow\ln x<1\Leftrightarrow\ln x<\ln e\Leftrightarrow x<e$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}<0\Leftrightarrow x^2(1-\ln x)<0\overset{\substack{x^2>0\\ \gamma\iota\alpha\\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\\ x\in(0,+\infty)}}{\Longleftrightarrow}1-\ln x<0\Leftrightarrow\ln x>1\Leftrightarrow\ln x>\ln e\Leftrightarrow x>e$$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in(0,e]$
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[e,+\infty)$.

46) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^5+e^{2x+1}+x-2014$

ii. $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x}$

iii. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$

Λύση :

i. $f(x)=x^5+e^{2x+1}+x-2014$, $D_f=\Re$, $f'(x)=5x^4+2e^{2x+1}+1>0$ για κάθε $x\in D_f=\Re$ και η f είναι συνεχής, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\Re$.

ii. $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x}$, $D_f=[0,3]$, $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$ για κάθε $x\in(0,3)$ και η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f=[0,3]$.

iii. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$, $D_f=\Re$, $f'(x)=x^2-2x+1$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\overset{\Delta=0}{\Leftrightarrow}x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f	γν. αύξουσα		γν. αύξουσα

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\Re$.

47) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

Λύση :

i. $D_f=\Re$, $f'(x)=e^x+1>0\Rightarrow f\uparrow\Re$.

ii. $f(x)=0\Leftrightarrow e^x+x-1=0$, παρατηρώ ότι η $x=0$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η $f\uparrow\Re$ είναι και μοναδική.

Για το πρόσημο της f έχουμε :

- για $x<0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$
- για $x>0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

ΥΠΟΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 SOS : Αν δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$, τότε βρίσκω την $f''(x)$, στη συνέχεια βρίσκω το πρόσημο της $f''(x)$, άρα και τη μονοτονία της $f'(x)$ και από τη μονοτονία της $f'(x)$ προσδιορίζω το πρόσημο της $f'(x)$ και άρα τη μονοτονία της $f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

48) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=3e^x+x^2-3x+15$

ii. $f(x)=2ex(\ln x-1)-x^2$

iii. $f(x)=6e^x+x^3-3x^2-6x$

Λύση :

i. $f(x)=3e^x+x^2-3x+15$, $D_f=\Re$, $f'(x)=3e^x+2x-3$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 3e^x+2x-3=0$

Η τελευταία εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους, για αυτό θα βρω την $f''(x)=3e^x+2>0$, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Για την εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow 3e^x+2x-3=0$ έχω για $x=0$, $3e^0-3=0$, άρα η $x=0$ προφανής ρίζα της $f'(x)=0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι και μοναδική.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Τα πρόσημα για την $f'(x)$ προκύπτουν ως εξής :

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<0\overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\downarrow$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$
- $x>0\overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\uparrow$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

ii. $f(x)=2ex(\ln x-1)-x^2=2ex\ln x-2ex-x^2$, $D_f=(0,+\infty)$,

$f'(x)=2e\ln x+2e-2e-2x=2e\ln x-2x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2e\ln x-2x=0$. Η τελευταία εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους, για αυτό θα βρω την $f''(x)=\frac{2e}{x}-2$,

$f''(x)=0\Leftrightarrow \frac{2e}{x}-2=0\Leftrightarrow \frac{2e}{x}=2\Leftrightarrow 2x=2e\Leftrightarrow x=e$

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	γν. αύξουσα -		γν. φθίνουσα -
f	γν. φθίνουσα		γν. φθίνουσα

Το παραπάνω πινακάκι συμπληρώνεται ως εξής :

Ψάχνω πρώτα το πρόσημο της $f''(x)$, αφού μπορώ να λύσω την εξίσωση $f''(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, θα μπορώ να λύσω και τις ανισώσεις : $f''(x)>0$, $f''(x)<0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}-2>0 \Leftrightarrow \frac{2e-2x}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2e-2x>0 \Leftrightarrow x<e$, άρα $f' \uparrow$ στο $(0,e]$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}-2<0 \Leftrightarrow \frac{2e-2x}{x}<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2e-2x<0 \Leftrightarrow x>e$, άρα $f' \downarrow$ στο $[e,+\infty)$

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<e \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(e) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f \downarrow$ για κάθε $x \in (0,e]$
- $x>e \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(e) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f \downarrow$ για κάθε $x \in [e,+\infty)$

Τελικά η $f \downarrow$ για κάθε $x \in D_f=(0,+\infty)$.

iii. $f(x)=6e^x+x^3-3x^2-6x$, $D_f=\Re$, $f'(x)=6e^x+3x^2-6x-6$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6e^x+3x^2-6x-6=0$. Αυτή η εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους άρα θα βρω την $f''(x)=6e^x+6x-6$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6e^x+6x-6=0$ αλλά και αυτή η εξίσωση δεν λύνεται άρα θα βρω την $f'''(x)=6e^x+6>0$. Άρα η $f'' \uparrow$ για κάθε $x \in \Re$. Για την εξίσωση $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6e^x+6x-6=0$ έχω για $x=0$, $6e^0-6=0$ άρα η $x=0$ προφανής ρίζα της $f''(x)=0$ και επειδή η $f'' \uparrow$ για κάθε $x \in \Re$, θα είναι και μοναδική.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'''(x)$	+	0	+
$f''(x)$	γν. αύξουσα -	0	γν. αύξουσα +
$f'(x)$	γν. φθίνουσα +	0	γν. αύξουσα +
f	γν. αύξουσα		γν. αύξουσα

Το παραπάνω πινακάκι συμπληρώνεται ως εξής :

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f''(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f''(x)>0$ ή $f''(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<0 \overset{f'':\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x)<f''(0) \Leftrightarrow f''(x)<0$ άρα $f' \downarrow$ για κάθε $x \in (-\infty,0]$
- $x>0 \overset{f'':\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(0) \Leftrightarrow f''(x)>0$ άρα $f' \uparrow$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<0 \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και η f συνεχής, άρα $f \uparrow$ για κάθε $x \in (-\infty,0]$
- $x>0 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και η f συνεχής, άρα $f \uparrow$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

Τελικά η $f \uparrow$ για κάθε $x \in D_f=\Re$

ΥΠΟΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 SOS : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν θέλουμε να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f και έχουμε : $f'(x)=g(x)\cdot h(x)$ ή $f'(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ και η $g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε βρίσκουμε το πρόσημο της $h(x)$, άρα και της $f'(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

49) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{x}{\eta\mu x}$ στο διάστημα $(0,\pi)$.

Λύση :

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $f'(x)=\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$. Επειδή $\eta\mu^2 x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ με ενδιαφέρει αποκλειστικά το πρόσημο το αριθμητή της $f'(x)$. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,\pi)$ τότε $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=x\eta\mu x>0$, για κάθε $x\in(0,\pi)$ και επειδή $g(x)$ είναι συνεχής στο 0 έχουμε $g(x)\uparrow[0,\pi)$.

Άρα για κάθε $x\in(0,\pi)$ έχω : $x>0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$ άρα και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και άρα τελικά $f(x)\uparrow(0,\pi)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

50) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=-2x+3$
ii. $f(x)=-x^2+3x-1$
iii. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$
iv. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$
v. $f(x)=-x^3+x^2-x-1$

51) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$
ii. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$
iii. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$
iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ *(Ομογενείς 2014)*
v. $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$
vi. $f(x)=x\ln x$
vii. $f(x)=x\cdot e^x$
viii. $f(x)=2e^x-x+1$
ix. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

x. $f(x)=x(3-2\ln x)$

xi. $f(x)=x-\ln x-\dfrac{x^2}{2}$

xii. $f(x)=\ln(x-2)-x+\dfrac{x^2}{2}$

xiii. $f(x)=\ln(x^2+1)-x$

xiv. $f(x)=x-\ln(e^x+1)$ *(Ομογενείς 2011)*

xv. $f(x)=e^{x^3+x}+x^3-6x^2+12x$

52)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

53)Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

ii. $\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x>0$, για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

iii. Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

54)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=x^2(2\ln x-5)-4x(\ln x-3)$.

55)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=3e^x+x^2-3x+7$.

56)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=e^x+x\ln x-(e+1)x$.

57)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=2e^{x-1}-x^2+3$.

58)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=-\dfrac{2+x^2e^x+2xe^x}{2e^x}$.

59)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=-2x^2+4x-(x-1)\ln x$.

60)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=2e^x-x^2-2x$.

61)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$.

62)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=6x^2\ln x-2x^3-3x^2+6x$.

63)Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\ln x+x^2-\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1]$.

ii. $f(x)=\ln x-\ln(1-x)$, $x\in(0,1)$.

iii. $f(x)=\ln(1+x^2)$

64)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
iii. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και μετά να βρείτε την αντίστροφη της.

ΠΟΛΥ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f ΜΕ Θ.Μ.Τ.

Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της παραγώγου $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, τότε μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, με $x_0\in(\alpha,\beta)$, στα διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65)Δίνεται μια συνάρτηση f, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Λύση :

Για κάθε $x>0$ η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$. Για να δείξω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, αρκεί να δείξω ότι $g'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}>0\Leftrightarrow f'(x)\cdot x-f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$

- f *συνεχής στο* $[0,x]$
- f *παρ/μη στο* $(0,x)$

} άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$

Όμως $\xi\in(0,x)\Leftrightarrow\xi<x\overset{f''(x)>0\Rightarrow f'\uparrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}<f'(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f(x)<f'(x)\cdot x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)\cdot x-f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Άρα $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

66)Δίνεται μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, $x>0$, είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει τύπο, αλλά δεν χρειάζεται να εξετάσω αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, καθώς δεν επηρεάζει τη μονοτονία της f.
- Βρίσκουμε την f΄(x) για $x < x_0$ και την f΄(x) για $x > x_0$.
- Βρίσκουμε το πρόσημο της f΄(x) για $x < x_0$ και της f΄(x) για $x > x_0$.
- Σχηματίζω πίνακα με το πρόσημο της f΄ και την μονοτονία της f. Στην πρώτη γραμμή του πινάκα γραφώ τις ρίζες της f΄(x)=0 και τα σημεία αλλαγής τύπου της f

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

67)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1, x\le 2 \\ x^2-6x+1, x>2 \end{cases}$

Λύση : Πρώτα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=2$. Έχω :

$f(2)=-1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-6x+1)=-7$. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=2$

- Για $x\in(-\infty,2)$ είναι $f'(x)=(x^2-2x-1)'=2x-2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$
- Για $x\in(2,+\infty)$ είναι $f'(x)=(x^2-6x+1)'=2x-6$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3$

Άρα τελικά :

x	-∞	1		2		3	+∞
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
$f(x)$	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $(2,3]$

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[1,2)$ και $[3,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

68)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, x\le 3 \\ 2x-3, x>3 \end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases} 3-x^2, x\le 2 \\ x-3, x>2 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αν μας ζητούν να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε θέτουμε :

- $f'(x) \geq 0$ αν f είναι γνησίως αύξουσα
- $f'(x) \leq 0$ αν f είναι γνησίως φθίνουσα

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

69) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x^2 + \alpha^2) + 2\alpha x + 3$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

Λύση :

Είναι $f(x) = 2\ln(x^2 + \alpha^2) + 2\alpha x + 3$ και $A_f = \Re$ με :

$$f'(x) = 2\frac{2x}{x^2 + \alpha^2} + 2\alpha = \frac{2\alpha x^2 + 4x + 2\alpha^3}{x^2 + \alpha^2} = \frac{2\left(\alpha x^2 + 2x + \alpha^3\right)}{x^2 + \alpha^2}$$

Για να είναι f γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ θα πρέπει για κάθε $x \in \Re$ να ισχύει

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\left(\alpha x^2 + 2x + \alpha^3\right)}{x^2 + \alpha^2} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 + 2x + \alpha^3 \leq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

Για να ισχύει αυτό πρέπει : $\alpha < 0$ και $\Delta \leq 0$

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4 - 4\alpha^4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^4 \leq 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha^2)(1 + \alpha^2) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Επιπλέον $\alpha < 0$ άρα τελικά $\alpha \in (-\infty, -1]$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ μόνο όταν $\alpha \in (-\infty, -1] \Leftrightarrow \alpha \leq -1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

70) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + a^2}$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

71) Ομοίως για τη συνάρτηση : $f(x) = 3x^3 - ax^2 + 9x - 1$ ώστε να είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

72) Ομοίως για τη συνάρτηση : $f(x) = 8x^3 - 3(\alpha + 3)x^2 + 6\alpha x - 2$ ώστε να είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

73) Ομοίως για τη συνάρτηση : $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + (a - 1)x^2 - 4x + 1$ ώστε να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ισχύει ότι : Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μια ρίζα.
Για να επιλύσουμε μια εξίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
3) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
4) αποδεικνύουμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα που είναι η προφανής.

(Υπόδειξη : αν δεν είναι εύκολο να βρω το πρόσημο της f' , βρίσκω την f'' μετά το πρόσημο της f'' δηλ. τη μονοτονία της f' από εκεί το πρόσημο της f' άρα τη μονοτονία της f)

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Έστω ότι έχουμε μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$, της οποίας έχουμε βρει μια προφανή ρίζα ρ. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική, χωρίς η f να είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της. Αρκεί η f να αλλάζει μονοτονία στο ρ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

74) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x+\ln x-1-e$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x+\ln x=1+e$.

Λύση :

i. $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=e^x+1+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=(0,+\infty)$.

ii. $e^x+x+\ln x=1+e \Leftrightarrow e^x+x+\ln x-1-e=0 \Leftrightarrow f(x)=0$
Παρατηρώ ότι $f(1)=e+1+0-1-e \Leftrightarrow f(1)=0$, άρα η $x=1$ είναι (προφανής) ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική.

75) Να λύσετε την εξίσωση : $\ln x=x-1$.

Λύση :

Για κάθε $x>0$ είναι $\ln x=x-1\Leftrightarrow \ln x-x+1=0$. Έστω $f(x)=\ln x-x+1$, $D_f=(0,+\infty)$
Έχω να λύσω την εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow \ln x-x+1=0$, παρατηρώ ότι $f(1)=0$, άρα η $x=1$ είναι (προφανής) ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Για κάθε $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{x}=0\Leftrightarrow x=1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα

- Αν $x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$
- Αν $x>1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$

Οπότε είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, δηλ. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

76) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\Re$

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$. *(Θέμα Γ Πανελλήνιες 2010)*

Λύση :

i. $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $A_f=\Re$ και $f'(x)=2+\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+2x+2}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\Re$, αφού ισχύει $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in\Re$, καθώς $\Delta=-3<0$ και $\alpha=1>0$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$, δηλ. η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\Re$.

ii. $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Leftrightarrow 2x^2-6x+4=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln(x^4+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1)=6x-4+\ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1)=2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow f(x^2)=f(3x-2) \overset{f\uparrow\Rightarrow f\text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x^2=3x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

77)Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $x^2+6\ln x=4x-3$

ii. $x^2+4x+5=5e^x$

iii. $x\ln x=2x-e$.

78)Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $e^x=1-2x$

ii. $3x^2+2x=5-\ln x$

iii. $e^{x-1}+x^3=3-x$

79)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\dfrac{x^2+5}{2x^2+1}=x^2-4$.

80)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3\ln x+3$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3(\ln x+1)}{x}=4-x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή $f(x)<0$ ή $f(x)>0$
3) αποδεικνύουμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη
4) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έτσι η ανίσωση γίνεται $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(\rho)$
5) εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της f για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

81) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^x+3x^5-2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $2e^x+3x^5<2$
iii. Να λύσετε την ανίσωση $2e^{x^2-2x}-2e^{3x-6}>3(3x-6)^5-3(x^2-2x)^5$

Λύση :

i. $D_f=\Re$, $f'(x)=2e^x+15x^4>0$ για κάθε $x\in\Re$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\Re$.

ii. $2e^x+3x^5<2 \Leftrightarrow 2e^x+3x^5-2<0 \Leftrightarrow f(x)<0$ (1)

Παρατηρώ ότι $f(0)=2e^0+0-2 \Leftrightarrow f(0)=0$, άρα από (1) έχω : $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x<0$

iii. $2e^{x^2-2x}-2e^{3x-6}>3(3x-6)^5-3(x^2-2x)^5 \Leftrightarrow$

$2e^{x^2-2x}+3(x^2-2x)^5>2e^{3x-6}+3(3x-6)^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^{x^2-2x}+3(x^2-2x)^5-2>2e^{3x-6}+3(3x-6)^5-2 \Leftrightarrow f(x^2-2x)>f(3x-6) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$x^2-2x>3x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0$, έχω $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2,\acute{\eta},x=3$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Επειδή θέλω $x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

82)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^7-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^x>-x^7+1$.
iii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{2x^2-3}-e^{x^2+2x}<(x^2+2x)^7-(2x^2-3)^7$.

83)Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i. $e^{x-1}\le 1-\ln x$ ii. $e^x+2x<e^{-x}-x^3$ iii. $x^2+4x>\ln\frac{1}{x+1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής : $f(x) \geq g(x)$ ή $f(x) > g(x)$, με $x \in \Delta$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$
3) μελετάμε την h ως προς τη μονοτονία
4) οι παρακάτω ιδιότητες για την κατάλληλη τιμή του α μας οδηγούν στη ζητούμενη ανισότητα :
   - $x > a \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(a)$ ή
   - $x > a \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(a)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

84) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι : $\frac{e^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi$

Λύση :

i. $D_f = \Re$, $f'(x) = x^2 - 4x - 5$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1, ή, x = 5$

ii.

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	γν. αύξουσα		γν.φθινουσα		γν. αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (5,+\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (-\infty,-1]$ και για κάθε $x \in [5,+\infty)$
$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-1,5]$

iii. Πρέπει να αποδείξω ότι ισχύει η σχέση : $\frac{e^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi \Leftrightarrow$
$\frac{e^3}{3} - 2e^2 - 5e > \frac{\pi^3}{3} - 2\pi^2 - 5\pi \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{e^3}{3} - 2e^2 - 5e + 1 > \frac{\pi^3}{3} - 2\pi^2 - 5\pi + 1 \Leftrightarrow f(e) > f(\pi)$
Τα $e, \pi \in (-1,5)$ στο οποίο η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα θα ισχύει : $e < \pi \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi)$

85) Να αποδείξετε ότι : $x^2 - 1 \geq 2\ln x$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Λύση :
Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε $x^2 - 1 \geq 2\ln x \Leftrightarrow 2\ln x - x^2 + 1 \leq 0$.
Έστω $f(x) = 2\ln x - x^2 + 1$ με $x \in (0,+\infty)$. Θα δείξουμε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.
$f'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2-2x^2}{x} = \frac{2(1-x^2)}{x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & δεκτή \\ x = -1 & απορ. \end{cases}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν.φθινουσα

- Για $x \le 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \le f(1) \Leftrightarrow f(x) \le 0$
- Για $x \ge 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) \le f(1) \Leftrightarrow f(x) \le 0$

Συνεπώς για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \le 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

86)Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i. $e^{x-1} > 1 + \ln x$, για κάθε x>1,

ii. $\ln(x+1) < e^x - 1$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$

87) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x \ge 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

88)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $\alpha > \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha-\beta} > \frac{\beta}{\alpha}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

89)Δίνεται συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \Re$ με $f(1) = 0$ και $xf'(x) - 2\ln x > 0$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι : $f(x) > \ln^2 x$ για κάθε $x > 1$.

Λύση :

Για κάθε $x > 0$ έχουμε : $xf'(x) - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > \frac{2\ln x}{x} \Leftrightarrow f'(x) > 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) > 2\ln x \cdot (\ln x)' \Leftrightarrow f'(x) > (\ln^2 x)' \Leftrightarrow \left(f(x) - \ln^2 x\right)' > 0$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \ln^2 x$, $x > 0$. Τότε ισχύει : $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $g \uparrow (0,+\infty)$.

Οπότε για $x > 1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) - \ln^2 x > 0 \Leftrightarrow f(x) > \ln^2 x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

90) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)=1$ και $xf'(x)>2x^2+1$ για κάθε $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>x^2+\ln x$ για κάθε $x>1$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)-x^2=\ln x$.

91)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=0$. Να δείξετε ότι $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

(Θέμα 4ο 2005 Επαναληπτικές)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=f(x+c)-f(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

92)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $f(2017)=f(1)$ και $f'\uparrow\Re$. Να λύσετε :

i. την εξίσωση : $f(x+2016)-f(x)=0$

ii. την ανίσωση : $f(2x+2016)>f(2x)$

Λύση :

i. Έστω $F(x)=f(x+2016)-f(x)$, $x\in\Re$.

Έχω να λύσω την εξίσωση $f(x+2016)-f(x)=0\Leftrightarrow F(x)=0$ παρατηρώ ότι $F(1)=f(1+2016)-f(1)=0$, δηλ. έχω να λύσω την εξίσωση $F(x)=0\Leftrightarrow F(x)=F(1)$. *(αρκεί ν.δ.ο. $F\uparrow\Re\Rightarrow F:"1-1"$)*

Είναι : $F'(x)=f'(x+2016)-f'(x)$, $x\in\Re$.

Άρα : για $x<x+2016\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x+2016)\Leftrightarrow f'(x+2016)-f'(x)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F'(x)>0$ και F συνεχής στο $\Re$ ως πράξεις συνεχών, άρα $F\uparrow\Re\Rightarrow F:"1-1"$.

Τελικά $F(x)=0\Leftrightarrow F(x)=F(1)\overset{F"1-1"}{\Leftrightarrow}x=1$.

ii. $f(2x+2016)>f(2x)\Leftrightarrow f(2x+2016)-f(2x)>0\Leftrightarrow F(2x)>0\Leftrightarrow F(2x)>F(1)\overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 2x>1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

93)Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\Re$.

i. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$, όταν $x\in[0,+\infty)$.

(Θέμα Γ Πανελλήνιες 2016)

Λύση :

i. $A_f = \Re$, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \Re$ με

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \eta \\ e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από το $2x$ καθώς $e^{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \Re$. Άρα :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Άρα $\boxed{f \downarrow (-\infty, 0]}$ και $\boxed{f \uparrow [0, +\infty)}$.

Ακόμα : η f' παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 e^{x^2} \geq 0$ (*) για κάθε $x \in \Re$ και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x = 0$, όπου f' είναι συνεχής, άρα η $\boxed{f' \uparrow \Re}$.

(*) για κάθε $x \in \Re$ είναι $2(e^{x^2} - 1) \geq 0$ (από πριν) και $4x^2 e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

ii. Έστω $h(x) = f(x+3) - f(x)$, $x \in [0, +\infty)$,
h παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με : $h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$

Για $x \geq 0$ έχουμε $x < x+3 \overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x+3) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ και h συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών άρα h γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα «1-1» στο $[0, +\infty)$. Έτσι :

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \Leftrightarrow h(|\eta\mu x|) = h(x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = x \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$$

Καθώς : $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \Re$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

94)Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με $f(3) = f(2)$ και $f' \uparrow \Re$. Να λύσετε :

i. την εξίσωση : $f(x+1) - f(x) = 0$
ii. την ανίσωση : $f(5x+1) > f(5x)$
iii. την εξίσωση : $f(x^2+2) - f(x^2+1) = 0$

95)Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2+2)$, $x \in \Re$.

i. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(2x^4+2) - f(2x^2+2) = f(x^4+1) - f(x^2+1)$
iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f(x^4+2) + f(x^2+3) > f(x^4+1) + f(x^2+4)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ ΜΙΑ ΡΙΖΑ Η΄ ΜΙΑ ΑΚΡΙΒΩΣ ΡΙΖΑ

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει :

- Το πολύ μια ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- Το πολύ δυο ρίζες, αρκεί να δείξουμε ότι η f΄ είναι γνησίως μονότονη.
- Για να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα δείχνω πρώτα ότι έχει τουλάχιστον 1 ρίζα (με προφανή ή με Bolzano ή με σύνολο τιμών κτλ) και μετά ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

96) Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^2+2\ln x=2x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta=(1,2)$.

Λύση : $x^2+2\ln x=2x \Leftrightarrow x^2+2\ln x-2x=0$, έστω $f(x)=x^2+2\ln x-2x$ με $D_f=(0,+\infty)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta=(1,2)$.

Βήμα 1 : (Τουλάχιστον 1)

Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο $[1,2]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνέχων
- $f(1)=-1<0$, $f(2)=4+2\ln 2-4=2\ln 2>0$, άρα $f(1)\cdot f(2)<0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[1,2]$

Βήμα 2 : (Το πολύ 1)

$f'(x)=(x^2+2\ln x-2x)'=2x+\frac{2}{x}-2=\frac{2x^2+2-2x}{x}=\frac{2(x^2-x+1)}{x}>0$ γιατί το τριώνυμο x^2-x+1 έχει $\Delta=-3<0$, άρα ισχύει $x^2-x+1>0$. Δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in D_f=(0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=(0,+\infty)$. Άρα η ρίζα από το Θ. Bolzano είναι μοναδική.

97) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Λύση :

i. Είναι $A_f=(0,+\infty)$ και $f'(x)=\frac{1}{x}+e^{x-1}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα $f\uparrow(0,+\infty)$.

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_f=(0,+\infty)$, άρα $f(A_f)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)\overset{*}{=}(-\infty,+\infty)=\Re$

* $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+e^{x-1}-1)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+e^{x-1}-1)=+\infty$

Το $2017\in f(A_f)=\Re$, άρα η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $A_f=(0,+\infty)$ και επειδή $f\uparrow(0,+\infty)$ θα είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow \ln x+e^{x-1}-1=0$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$, άρα η $x=1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, και επειδή $f\uparrow(0,+\infty)$ θα είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

98)Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ.

i. $x^2+\ln(x-1)=4$

ii. $x^3+3x-1=0$ στο Δ=(0,1)

iii. $2x+\ln x=1$ στο Δ=(0,1)

iv. $x^3+x=\sigma\upsilon\nu x$ στο $\Delta=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

99) Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια το πολύ ρίζα.

i. $2x+1=\eta\mu x$

ii. $x^3-\lambda x^2+\lambda^2 x-2=0$, $\lambda\in\Re^*$

100) Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ.

i. $2x+\ln x=1$ στο Δ=(0,1)

ii. $3e^x+x^3=3x^2-3x$ στο $\Delta=(-1,0)$

101) Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+x\ln x-2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εν μόνο σημείο Μ της C_f με τετμημένη $\xi\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f σ' αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

102) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ για κάθε $x\in\Re$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση :

Έχω : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ (1). Η συνάρτηση $f^3(x)+f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμες, ομοίως και η συνάρτηση x^3+2x-5 είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x)+f(x))'=(x^3+2x-5)'\Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=3x^2+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=3x^2+2\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3x^2+2}{3f^2(x)+1}>0$ για κάθε $x\in\Re$, και η f είναι συνεχής στο $\Re$, άρα $f\uparrow\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

103) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x)+f(x)=e^{-x}-1$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(\ln x)=f(1-x)$.

104) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=8x^3-12x^2+8x-2$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1)
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^3+x)-f(2-\ln x)<0$.

105) Δίνεται μια συνάρτηση f, ορισμένη στο R, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα
iii. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία $45°$. *(Πανελλήνιες 2003)*

106) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+e^{f(x)}=1-x-x^3$, για κάθε $x\in\Re$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(2e^x+x)-f(2+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)=0$

107) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(e)=\dfrac{1}{e-1}$ και $xf'(x)+f(x)=\dfrac{1}{x}+f'(x)$ για κάθε $x>1$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την εξίσωση : $(2e^x+\sqrt{x}+1)^{e^x+1}=(e^x+2)^{2e^x+\sqrt{x}}$

108) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει : $f(0)=g(0)=0$ και $f'(x)=2xe^{-f(x)}$ και $e^xg'(x)=e^x+1$, για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε τους τύπους των f και g,
ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+g(x)$ ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $e^x[\ln(x^2+1)+x+1]\geq 1$.

109) Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύουν $f(2)=0$, $f'(0)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2+1)<0$
iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$, ώστε : $f(\xi)+4\xi=\xi^2+3$.

110) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f'(x)-2xf(x)=e^{x^2}$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(1)=e$.

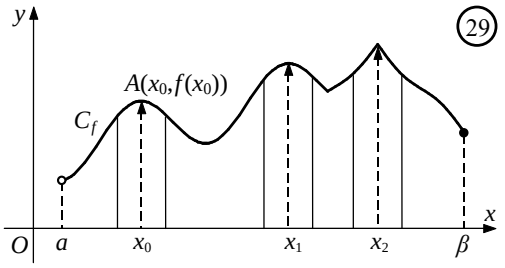
i. Να βρείτε τον τύπο της f
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x-(1-\ln x)^2}\leq\dfrac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$.

2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

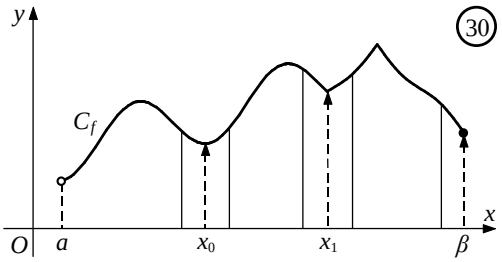
45. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο ; **(2012, 2015)**

Απάντηση :

α) Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f**.



β) Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f**.



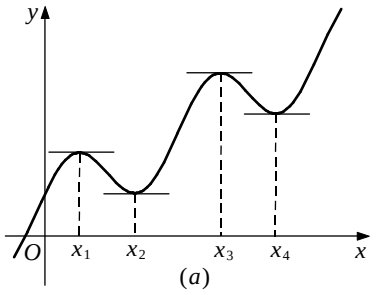
Σχόλια :

- Αν η ανισότητα $f(x) \le f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο,** το $f(x_0)$**.**

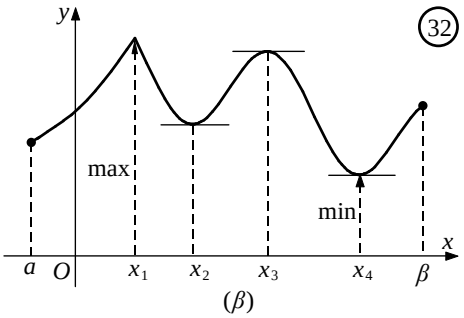
- Αν η ανισότητα $f(x) \ge f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.

- Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων.** Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα** αυτής.

- Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



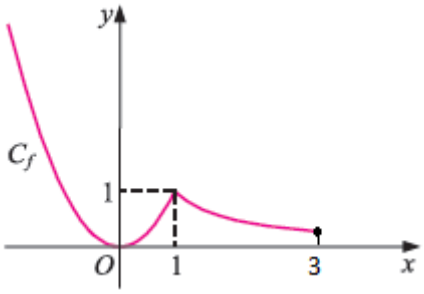
(α)



(β)

- Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

Για παράδειγμα : Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 \ , x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, 1<x\le 3 \end{cases}$



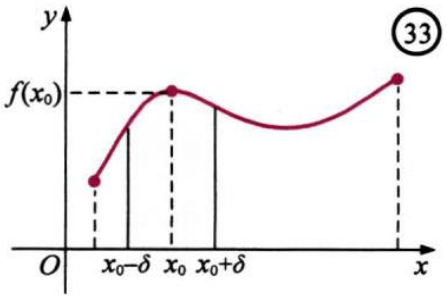
- στο $x_1=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο.
- στο $x_2=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=1$.
- στο $x_3=3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

ΘΕΩΡΗΜΑ Fermat (2004, 2011, 2013 Β΄ μόνο διατύπωση, 2016 Β΄, 2017 Β΄, 2019 μόνο διατύπωση)

46. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι : $f'(x_0)=0$

Απόδειξη :

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε: $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Άρα :

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$. (2)

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Γεωμετρική ερμηνεία :

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

47. α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ; **(2013 Β΄)**
β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

α) **Κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ λέγονται τα ε σ ω τ ε ρ ι κ ά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

β) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακοτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της). (Τα άκρα των κλειστών διαστημάτων)

48. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

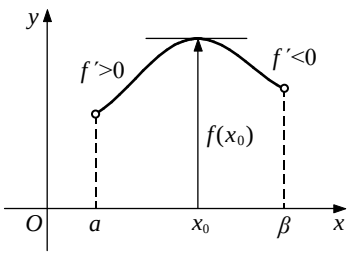
i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **(2016)**

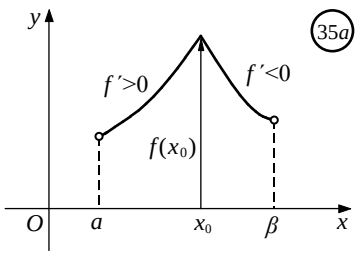
ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). **(2014 Β΄)**

Απόδειξη :

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. (1) Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)

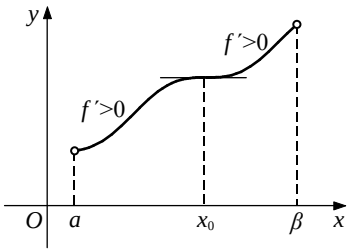


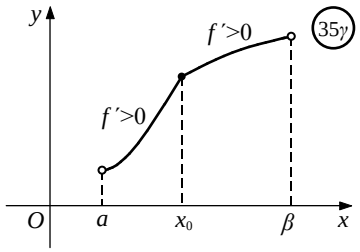


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

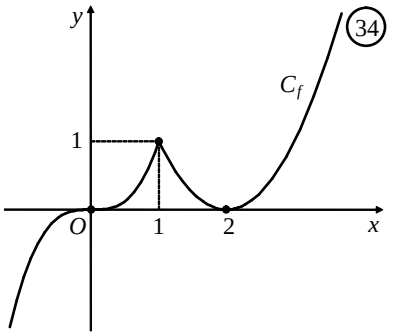
Παράδειγμα 1 : Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^3$ που είναι ορισμένη στο $\Re$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με $f'(x)=4x^3-12x^2$. Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι $x=0$ (διπλή) ή $x=3$, το δε πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f	↘		↘	**Ο.Ε.**	↗

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,3]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο για $x=3$, το $f(3)=-27$.

Παράδειγμα 2 : Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & , \quad x<1\\ (x-2)^2 & , \quad x\geq 1\end{cases}.$$



Η f είναι συνεχής στο $\Re$ και παραγωγίσιμη στο $\Re-\{1\}$,

με : $f'(x)=\begin{cases}3x^2 & , \quad x<1\\ 2(x-2) & , \quad x>1\end{cases}$.

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+
f	↗		↗	**Τ.Μ.**	↘	**Τ.Ε.**	↗

Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

Σχόλια :

• Όπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο (α,β), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f στο (α,β).

• Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8), η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της *f* στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.**

Παρατηρήσεις : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο ***ανοιχτό*** διάστημα Δ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

- Αν η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0)=0$.
- Αν $x_0\in\Delta$ και $f'(x_0)\neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.
- Αν για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $f'(x)\neq 0$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.
- Αν $x_0\in\Delta$ και $f'(x_0)=0$, τότε η f δεν παρουσιάζει υποχρεωτικά ακρότατο στο x_0.
- Αν $x_0\in\Delta$, τότε δεν είναι ισοδύναμες οι προτάσεις : «Η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0» και «Η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x»

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

➢ **(Θεώρημα Fermat)**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε : $f'(x_0)=0$.

➢ Οι πιθανές θέσεις που μπορεί να παρουσιάσει ακρότατα μια συνεχής συνάρτηση f είναι :

1)Τα **σημεία** που η **παράγωγος της f είναι ίση με 0**

2)Τα **σημεία** του πεδίου ορισμού της f στα οποία η **f δεν είναι παραγωγίσιμη** (συνήθως τα σημεία αλλαγής τύπου δικλαδης συνάρτησης)

3)Τα **άκρα των κλειστών διαστημάτων** που περιέχονται στο πεδίο ορισμού της f. Αν π.χ. το πεδίο ορισμού της f είναι [α,β] και η f είναι γνησίως αύξουσα τότε :

a)τοπικό ελάχιστο στο α το f(α).

b)τοπικό μέγιστο στο β το f(β).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ – ΠΙΘΑΝΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, η f παρουσιάζει μέγιστο Μ και ελάχιστο m και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[m,\mathrm{M}]$. Για την εύρεση του μέγιστου Μ και ελάχιστου m εργαζόμαστε ως εξής :

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της *f* στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.**

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+4$, $x\in[-1,2]$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f .

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Λύση :

i. Τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $[-1,2]$ είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,2]$ με $f'(x)=6x^2-6x$, οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0$ $ή$ $x=1$. Οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα 0 και 1.

ii. Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f στο διάστημα $[-1,2]$ είναι τα κρίσιμα σημεία της f και τα άκρα του διαστήματος $[-1,2]$. Δηλαδή οι αριθμοί : -1, 0, 1, $και$ 2.

iii. Η f είμαι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[-1,2]$, επομένως έχει σύνολο τιμών : $f(\Delta)=[m,\mathrm{M}]$, όπου m είναι η ελάχιστη τιμή της f, δηλαδή η μικρότερη τιμή της f στις θέσεις των πιθανών ακροτάτων και M είναι η μέγιστη τιμή της f, δηλαδή η μεγαλύτερη τιμή της f στις θέσεις των πιθανών ακροτάτων. Έχουμε :
$f(-1)=-1$, $f(0)=4$, $f(1)=1$ και $f(2)=8$, επομένως $m=-1$ και $\mathrm{M}=8$ δηλαδή $f(\Delta)=[-1,8]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3-6x^2+1$, $x\in[-2,2]$.
- i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
- ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot|x-1|$, $x\in[0,2]$.
- i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
- ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(1-x)\cdot e^{x-1} & ,0<x<1\\ 0 & ,x=1\\ \ln x & ,x>1\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^2-\beta x+1$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=3$ το -1.

Λύση :

Έχω : $f(x)=ax^2-\beta x+1$ με $D_f=\Re$ και $f'(x)=(ax^2-\beta x+1)'=2ax-\beta$

- το $x_0=3$ είναι εσωτερικό του $D_f=\Re$
- η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=3$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε :

$f'(3)=0\Leftrightarrow 6\alpha-\beta=0$ (1)

Επίσης επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=3$ το -1, είναι $f(3)=-1\Leftrightarrow 9\alpha-3\beta+1=-1\Leftrightarrow 9\alpha-3\beta=-2$ (2)

Από (1) και (2) έχω : $\begin{cases}6\alpha-\beta=0\\9\alpha-3\beta=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2}{9}\\\beta=\dfrac{4}{3}\end{cases}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^3-\beta x^2+2x$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$.

7) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=a\ln(x-1)-\beta x^2-4x+1$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=3$.

8) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^2+\beta x$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=1$ το f(1)= -1.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : Η f ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα τότε δουλεύουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο σημείο x_0 οπότε από Θ. Fermat ισχύει $f'(x_0)=0$ από όπου καταλήγουμε σε άτοπο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Λύση :

Έχω : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ (1). Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\Re$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\Re$, άρα από Θ. Fermat ισχύει : $f'(x_0)=0$. Η συνάρτηση $f^3(x)+f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων, ομοίως και η συνάρτηση x^3+2x-5 είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x)+f(x))'=(x^3+2x-5)'\Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=3x^2+2$ (2)

Στη (2) για $x=x_0$ έχω : $3f^2(x_0)\cdot f'(x_0)+f'(x_0)=3x_0^2+2\Leftrightarrow 3x_0^2+2=0$ αδύνατη. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2}{e^x}$ δεν έχει ακρότατα.

11) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3f(x)=x^3-3x^2+6x-2$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$. Αν ισχύει ότι $\alpha^2<2\beta$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΝΙΣΟΙΣΟΤΗΤΑ → FERMAT (ΚΡΥΦΟ FERMAT)

Όταν μας δίνεται δεδομένη μια ανισότητα της μορφής $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε :

- 1ον μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και έχουμε : $f(x) - g(x) \le 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- 2ον θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \Delta$, οπότε $h(x) \le 0$, $x \in \Delta$
- 3ον βρίσκουμε ένα x_0 για το οποίο ισχύει $h(x_0) = 0$, οπότε έχουμε : $h(x) \le h(x_0)$, $x \in \Delta$
- 4ον άρα η $h(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 και αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Fermat έχουμε : $h'(x_0) = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13) Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι : $\alpha \ln x - x^2 \le x - 2$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι α=3.

Λύση :

Για κάθε $x > 0$ είναι $\alpha \ln x - x^2 \le x - 2 \Leftrightarrow \alpha \ln x - x^2 - x + 2 \le 0$ (1).

Έστω $f(x) = \alpha \ln x - x^2 - x + 2$, $x > 0$, με $f'(x) = \frac{\alpha}{x} - 2x - 1$.

Η (1) γίνεται $\alpha \ln x - x^2 - x + 2 \le 0 \Leftrightarrow f(x) \le 0$ (2) όμως παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$

Άρα για κάθε $x > 0$: $(2) \Leftrightarrow f(x) \le 0 \Leftrightarrow f(x) \le f(1)$. Επομένως :

- η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1 \in (0,+\infty)$
- το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό του $(0,+\infty)$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε :

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \ne 1$. Αν $f(x) \ge 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$. *(Θέμα 3ο Πανελλήνιες 2009)*

Λύση :

Είναι $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $A_f = (-1,+\infty)$ και $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln\alpha - \frac{1}{x+1}$

Για κάθε $x > -1$ είναι $f(x) \ge 1$ (1) όμως παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$

Άρα για κάθε $x > -1$: $(1) \Leftrightarrow f(x) \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(0)$. Επομένως :

- η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0 \in (-1,+\infty)$
- το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό του $(-1,+\infty)$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε :

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \ln\alpha = \ln e \Leftrightarrow \alpha = e$.

15) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x^2-x+1)-f(1)\geq x-x^2$, για κάθε $x>0$, (1). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη με την ευθεία $(\zeta):y=-x$.

Λύση : Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$, για να ισχύει $(\varepsilon)//(\zeta):y=-x$, αρκεί να δείξω ότι $\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow f'(1)=-1$.

Για κάθε $x>0$, $(1)\Leftrightarrow f(x^2-x+1)-f(1)-x+x^2\geq 0$.

Έστω $g(x)=f(x^2-x+1)-f(1)-x+x^2$, $x>0$, άρα ισχύει $g(x)\geq 0$, για κάθε $x>0$. Παρατηρούμε ότι $g(1)=f(1)-f(1)-1+1=0$, δηλ. $g(x)\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq g(1)$, για κάθε $x>0$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$. Επομένως :

- η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$
- το $x_0=1$ είναι εσωτερικό του $(0,+\infty)$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε : $g'(1)=0$.

Έχουμε $g'(x)=(2x-1)\cdot f'(x^2-x+1)-1+2x$, άρα

$g'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)+1=0\Leftrightarrow f'(1)=-1$.

16) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)=\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|$, $\kappa\in\Re$. Να βρείτε την τιμή του κ και την $f(x)$.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$, $f(x)=\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|\geq 0$, παρατηρώ ότι $f(0)=|1-1|=0$, άρα $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in\Re$, δηλ.

- η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$
- το $x_0=0$ είναι εσωτερικό του $\Re$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε : $f'(0)=0$ (1).

Είναι : $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|}{x}\overset{x=|x|}{\underset{x>0}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|}{|x|}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\dfrac{e^x+(\kappa-1)x-1}{x}\right|=\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\dfrac{e^x-1}{x}+\kappa-1\right|\overset{*}{=}|1+\kappa-1|=|\kappa|$

$*\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{1}=e^0=1$.

Τελικά $f'(0)=0\Leftrightarrow|\kappa|=0\Leftrightarrow\kappa=0$ επομένως $f(x)=\left|e^x-x-1\right|$, $x\in\Re$.

Όμως από βασική ανισότητα για κάθε $x\in\Re$, $e^x\geq x+1\Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0$, άρα :

$f(x)=e^x-x-1$, $x\in\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17) Αν για κάθε x>0 ισχύει $\ln x + \frac{a}{x} \geq a$, να βρείτε το α.

18) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re \to \Re$, για την οποία ισχύει : $\ln(x^2+1) \geq f(x) - e^x$, για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της Α(0,1).

19) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re \to \Re$, για την οποία ισχύει : $(1+e^{1-x})f(x) + συνπx \geq 3$, για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της Α(1,2).

20) Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - \ln x$, ισχύει $f(x) \geq f(1)$ για κάθε x>0, να βρείτε το α.

21) Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύουν :
- $f(0)=1, \quad f(2)=3$
- $f^2(x) - 4f(x) + 3 \leq 0$, για κάθε $x \in \Re$.

i. Να αποδείξετε ότι : $f'(0) = f'(2) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$, τέτοιο, ώστε : $f''(\xi) = 0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΣ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(e^x - e\right)^2 \cdot (x-2)^2$, $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δυο θέσεις ολικού ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (1,2).

Λύση : Είναι $f(x) = \left(e^x - e\right)^2 \cdot (x-2)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = f(2) = 0$, δηλαδή $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in \Re$ και $f(x) \geq f(2)$ για κάθε $x \in \Re$ επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στα σημεία $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής παίρνει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή. Όμως στα άκρα $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ του διαστήματος $[1,2]$ η f έχει ελάχιστη τιμή, επομένως η μέγιστη τιμή θα είναι σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[1,2]$. Τελικά η $[1,2]$ έχει δυο θέσεις ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο (1,2).

23) Έστω $f:\mathrm{A}\to\Re$, μια συνάρτηση, με $\mathrm{A}=[1,2]$ και $f(\mathrm{A})=[-2,5]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(1)=2,\ f(2)=4$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση : Η f είναι συνεχής στο $\mathrm{A}=[1,2]$, άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Ε.Τ. έχει μέγιστο και ελάχιστο. Όμως $f(\mathrm{A})=[-2,5]\Leftrightarrow -2\le f(x)\le 5$ για κάθε $x\in\mathrm{A}=[1,2]$. Όμως $f(1)=2>-2\ \kappa\alpha\iota\ f(2)=4<5$, άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα $1,2$ του $\mathrm{A}=[1,2]$. Δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο σε εσωτερικά σημεία του $\mathrm{A}=[1,2]$. Έστω $x_1,x_2\in(1,2)$ με $x_1<x_2$ τα σημεία που η f παρουσιάζει ακρότατα (μέγιστο και ελάχιστο). Τότε :

- η f παρουσιάζει ακρότατα στα x_1,x_2
- τα x_1,x_2 είναι εσωτερικά του $\mathrm{A}=[1,2]$
- η f είναι παραγωγίσιμη στα x_1,x_2

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε : $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Επομένως για να δείξω ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$, θα εφαρμόσω Θ.Rolle για την f' στο $[x_1,x_2]$.

- η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2)
- $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Επομένως από Θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

24) Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-2)^2\cdot\ln^2 x$, $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δυο θέσεις ολικού ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (1,2).

25) Έστω $f:\mathrm{A}\to\Re$, μια συνάρτηση, με $\mathrm{A}=[0,1]$ και $f(\mathrm{A})=[-1,3]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(0)=1,\ f(1)=2$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Β. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ – ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Για να εξετάσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

i. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της D_f .
ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης.
iii. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$.
iv. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f στον οποίο πρέπει να περιέχονται το Π.Ο. της f καθώς και οι ρίζες της $f'(x)=0$.
v. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ είτε λύνοντας τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$ είτε βρίσκοντας το πρόσημο μιας τιμής της $f'(x)$ σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι ρίζες της.
vi. Συμπληρώνουμε το είδος της μονοτονίας της $f(x)$ ανάλογα με το πρόσημο της $f'(x)$. Ισχύει :
   - Αν $f'(x)>0$ τότε η $f(x)$ γνησίως αύξουσα
   - Αν $f'(x)<0$ τότε η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα

i. Αν η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν σε μια ρίζα της $f'(x)=0$, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο.
ii. Αν η $f'(x)$ δεν έχει ρίζες, διαστήματα μονοτονίας είναι τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της f.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-6x+1$
ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$
iii. $f(x)=xe^x$
iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Λύση :

i. $f(x)=x^2-6x+1,\ D_f=\Re,\ f'(x)=2x-6,\ f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3$

x	- ∞	3	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις πρωτοβάθμιες ανισώσεις, δηλ. δεξιά του 0 ομόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x)
Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,3]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[3,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=3$, το $f(3)=3^2-6\cdot3+1=-8$

ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$, $D_f=\Re$, $f'(x)=3x^2+6x-9$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x=-3,ή,x=1$

x	- ∞	-3		1	+ ∞
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις, δηλ. όταν Δ>0 και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, τότε για τα πρόσημα ισχύει ότι εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x^2)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in(-\infty,-3]$ και για κάθε $x\in[1,+\infty)$

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-3,1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[-3,1]$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-3$, το $f(-3)=34$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=1$, το $f(1)=2$

iii. $f(x)=xe^x$, $D_f=\Re$, $f'(x)=e^x+xe^x$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x+xe^x=0\Leftrightarrow e^x(1+x)=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x=0\Leftrightarrow x=-1$

x	- ∞	−1	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x+xe^x>0\Leftrightarrow e^x(1+x)>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x>0\Leftrightarrow x>-1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow e^x+xe^x<0\Leftrightarrow e^x(1+x)<0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x<0\Leftrightarrow x<-1$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,-1]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[-1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1$, το $f(-1)=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$.

iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \Leftrightarrow x=e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x)>0 \overset{\substack{x^2>0 \\ \gamma\iota\alpha \\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \\ x\in(0.+\infty)}}{\Longleftrightarrow} 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e \Leftrightarrow x<e$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}<0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x)<0 \overset{\substack{x^2>0 \\ \gamma\iota\alpha \\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \\ x\in(0.+\infty)}}{\Longleftrightarrow} 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e \Leftrightarrow x>e$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in(0,e]$

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[e,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=e$, το $f(e)=\dfrac{1}{e}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=-x^2+6x+1$

ii. $f(x)=x^3+3x^2+6x+1$

iii. $f(x)=x^3-x^2$ iv. $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ v. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ vii. $f(x)=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$

28) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

ii. $f(x)=-x^3+3x^2+1$

iii. $f(x)=2x^3-6x+5$ iv. $f(x)=x^3-x^2+x-5$ v. $f(x)=-x^3+x^2-2x+5$

29) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x-x+1$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g

ii. Για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+x$ να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$ και ότι δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη στη καμπύλη της f.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

31) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$

ii. $f(x)=e^x(x^2-5x+7)$

iii. $f(x)=e^x-x$

iv. $f(x)=e^x-ex$

v. $f(x)=\ln x-x$ vi. $f(x)=\ln(8x-x^2)$ vii. $f(x)=\ln(x^2-2x)$

viii. $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ ix. $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$ x. $f(x)=x\ln x$

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

33) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο αντίστοιχο διάστημα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-4x+1$ στο [1,4] ii. $f(x)=x^2-2x+2$ στο [-2,3]

iii. $f(x)=x^3-12x+7$ στο [0,3] iv. $f(x)=\ln x-x$ στο[1,e]

v. $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$ vi. $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

vii. $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$

34) Δίνετε η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2-9x+\lambda$, $x,\lambda\in\Re$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ, αν είναι γνωστό ότι το τοπικό ελάχιστο της f είναι αντίθετο από το τοπικό της μέγιστο.

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x+\lambda$, $x,\lambda\in\Re$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου λ, αν είναι γνωστό ότι το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

36) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=2x^3-3x^2+6\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\Re$. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=-2$ και είναι $f(-2)=98$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-6$ και $\beta=54$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (-1,2) (ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2004)

37) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^2+1-\ln x$.

i. Να βρείτε το ελάχιστο της g

ii. Για τη συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln x}{x}$ να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ και ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου :

- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει τύπο, αλλά δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- Βρίσκουμε την $f'(x)$ για $x < x_0$ και την $f'(x)$ για $x > x_0$ και τις μελετάμε ως προς το πρόσημο και τις ρίζες.
- Σχηματίζω πίνακα με το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f. Στην πρώτη γραμμή του πινάκα γραφώ τις ρίζες της $f'(x)$ και τα σημεία αλλαγής τύπου της f.
- Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0, τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, το $f(x_0)$.
- Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε για να εξετάσουμε αν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, έχουμε τις εξής περιπτώσεις :
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \le f(x_0)$, η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \ge f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \ge f(x_0)$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

38) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-3, x\le 1 \\ x^2-6x+7, x>1 \end{cases}$

Λύση : Πρώτα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=2$. Έχω :

$f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+4x-3)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-6x+7)=2$. Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$

- Για $x\in(-\infty,1)$ είναι $f'(x)=(x^2+4x-3)'=2x+4$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$
- Για $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)=(x^2-6x+7)'=2x-6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

Άρα τελικά :

x	- ∞	-2		1		3	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[1,3]$

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2,1]$ και $[3,+\infty)$

Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=-2$ το $f(x_1)=f(-2)=-7$ και στο $x_2=3$ το $f(x_2)=f(3)=-2$

Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3=1$ το $f(x_3)=f(1)=2$

39) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8, & x\le -1 \\ x^2-2x-2, & -1<x<3 \\ x^2-8x+14, & x\ge 3 \end{cases}$:

Λύση : Πρώτα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο -1 και στο 3. Έχουμε :

- $f(-1)=3$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+6x+8)=3$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-2x-2)=1$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο -1.
- $f(3)=-1$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-2x-2)=1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-8x+14)=-1$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο 3.
- Για $x\in(-\infty,1)$ είναι, $f'(x)=2x+6$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x+6=0\Leftrightarrow x=-3$
- Για $x\in(-1,3)$ είναι, $f'(x)=2x-2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$
- Για $x\in(3,+\infty)$ είναι, $f'(x)=2x-8$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-8=0\Leftrightarrow x=4$

Άρα τελικά :

x	$-\infty$	-3		-1		1		3		4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+	0	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

- $f\downarrow(-\infty,-3]$,
- $f\uparrow[-3,-1]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[-3,-1]$ (f συνεχής στο $(-3,-1)$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=3$)
- $f\downarrow(-1,1]$ αφού η f δεν είναι συνεχής στο -1
- $f\uparrow[1,3)$ αφού η f δεν είναι συνεχής στο 3
- $f\downarrow[3,4]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[3,4]$ (f συνεχής στο $(3,4)$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=-1$)
- $f\uparrow[4,+\infty)$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -3 το $f(-3)=-1$, στο 1 το $f(1)=-3$ και στο 4 το $f(4)=-2$.
- Στα σημεία -1 και 3 η f δεν είναι συνεχής. Έχουμε :
  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=3$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1<3=f(-1)$, άρα στο -1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.
  $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1>f(3)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-1=f(3)$, άρα στο 3 δεν μπορεί η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και γενικά τοπικό ακρότατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

40) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases}x^2+4x-3, x\le 1\\ x^2-6x+7, x>1\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3, x\le 3\\ x^2-8x+22, x>3\end{cases}$

iii. $f(x)=x^3-3x|x|$ iv. $f(x)=\begin{cases}x^2+6x+8, & x\le -1\\ x^2-2x-2, & -1<x<3\\ x^2-8x+14, & x\ge 3\end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

- Αν μια συνάρτηση $f:\Α\to\Re$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)=0$, δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, τότε το x_0 θα είναι και η μοναδική ρίζα και για κάθε $x\ne x_0$ είναι $f(x)>0$
- Αν μια συνάρτηση $f:\Α\to\Re$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 το $f(x_0)=0$, δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, τότε το x_0 θα είναι και η μοναδική ρίζα και για κάθε $x\ne x_0$ είναι $f(x)<0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-2x+e$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

Λύση :

i. $f(x)=x\ln x-2x+e$ με $D_f=(0,+\infty)$, έχω

$f'(x)=(x\ln x-2x+e)'=\ln x+1-2=\ln x-1$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

$f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x-1>0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow \ln x>\ln e\Leftrightarrow x>e$

$f'(x)<0\Leftrightarrow \ln x-1<0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow \ln x<\ln e\Leftrightarrow x<e$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,e)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. φθίνουσα στο $(0,e]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. αύξουσα στο $[e,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=e$, το $f(e)=e\ln e-2e+e=0$

ii. Από το i. ισχύει ότι $f(e)=0$ άρα η $x=e$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=e$ το $f(e)=0$, η $x=e$ είναι και μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}-2xe^{2x}-1$
   i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

43) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x+1$
   i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
   iii. Αν ισχύει $f(\alpha+\beta)=-f(3\alpha+4\beta)$, να βρείτε τα α,β.

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-x$
   i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΠΡΟΣΗΜΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ f

- Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $\mu>0$, τότε ισχύει ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.
- Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο $\mathrm{M}<0$, τότε ισχύει ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

45) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x+1}-2x-3$.
   i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο της.
   ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2e^{x+1}-x^2-3x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση :

i. Έχω : $f(x)=2e^{x+1}-2x-3$ με $D_f=\Re$, έχω $f'(x)=(2e^{x+1}-2x-3)'=2e^{x+1}-2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2=0\Leftrightarrow e^{x+1}=1\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

$f'(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2>0\Leftrightarrow e^{x+1}>1\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2<0\Leftrightarrow e^{x+1}<1\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. αύξουσα στο $[-1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1$, το $f(-1)=2e^0+2-3=1$

Άρα ισχύει $f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in D_f = \Re$, οπότε και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D_f = \Re$.

ii. Έχω : $g(x) = 2e^{x+1} - x^2 - 3x$ με $D_g = \Re$, επίσης έχω : $g'(x) = (2e^{x+1} - x^2 - 3x)' = 2e^{x+1} - 2x - 3 = f(x) > 0$ άρα g είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in D_g = \Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

46) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ex$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της. Στη συνέχεια να μελετήσετε τη $g(x) = 2e^{x-1} - x^2$ ως προς τη μονοτονία.

47) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της.

48) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - 2x + 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x\ln x - x^2 - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

49)

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$ και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\phi(x) = 2e^x + x^2 - 2x$ και να βρείτε το πρόσημο της.

iii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = e^x - 1$ και $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν κοινή εφαπτόμενη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9Α : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

- Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. Αντίστοιχα μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

- Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. Αντίστοιχα μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Αν θέλω να αποδείξω ότι ισχύει μια ανισότητα της μορφής $f(x) \ge g(x)$:
1ον Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
2ον Θεωρούμε το πρώτο μέλος συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$
3ον Βρίσκω τη μονοτονία της $h(x)$ και την εφαρμόζω στο αντίστοιχο διάστημα ώστε να αποδεδειχθεί η ανίσωση **ή**
3ον Βρίσκουμε το ολικό μέγιστο ή ελάχιστο της $h(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

50) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - x^2 + 2013$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f
ii. Να αποδείξετε ότι : $x^2 - 2\ln x \ge 1$ για κάθε $x > 0$.

Λύση :

i. $D_f = (0,+\infty)$, $f'(x) = \frac{2}{x} - 2x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 1, ή, x = -1$ απορρίπτεται.

x	0	1	+ ∞
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2x > 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow x(2-2x^2) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (-1,1)$ * Επειδή όμως πρέπει $x > 0$, άρα $x \in (0,1)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2x < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{x} < 0 \Leftrightarrow x(2-2x^2) < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2 - 2x^2 < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ * Επειδή όμως πρέπει $x > 0$, άρα $x \in (1,+\infty)$

*Για την ανίσωση $1 - x^2 > 0$, έχω $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	- ∞	−1		1	+ ∞
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 2012$

ii. Επειδή η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 2012$, τότε ισχύει : $f(x) \le f(1) \Leftrightarrow 2\ln x - x^2 + 2013 \le 2012 \Leftrightarrow 2\ln x - x^2 \le -1 \Leftrightarrow x^2 - 2\ln x \ge 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

51) Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες για τις διάφορες τιμές του x.

i. $e^x \ge x+1$ για $x \in \Re$
ii. $e^x - 1 \le xe^x$ για $x \in \Re$
iii. $e^{x-1} \ge 1 + \ln x$ για $x > 0$
iv. $2\ln x \le x^2 - 1$ για χ>0
v. $\ln x \ge 1 - \frac{1}{x}$ για $x > 0$
vi. $2e^x \ge 2 + 2x + x^2$ για $x \ge 0$ *(υπόδειξη : αν δεν είναι εύκολο να βρω το πρόσημο της f' , βρίσκω την f'' μετά το πρόσημο της f'' δηλ. τη μονοτονία της f' από εκεί το πρόσημο της f' άρα τη μονοτονία της f)*

52) Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες για τις διάφορες τιμές του x.

i. $e^x - xe^x \le 1$ για $x \in \Re$
ii. $e^x \ge x+1$ για χ<1
iii. $2\ln x \le x^2 - 1$ για χ>0
iv. $\ln x \le x - 1$ για χ>0
v. $x^x \ge e^{x-1}$ για χ>0 *(υπόδειξη : πρώτα λογαριθμίζω και τα 2 μέλη)*

53) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x - 2e^x$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f
ii. Να αποδείξετε ότι : $1 + xe^{x-1} \ge 2e^{x-1}$, για κάθε $x \in \Re$.

54) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot x^{-v}$, $v \in N^*$, $x > 0$

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f
ii. Να αποδείξετε ότι : $e^x \cdot v^v \ge x^v \cdot e^v$, $v \in N^*$, $x > 0$

55) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f
ii. Να αποδείξετε ότι : $x^e \le e^x$, για κάθε $x > 0$.

56) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

i. τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x\ln x}{x-1}$.
ii. Έστω $f : (0,+\infty) \to \Re$ μια συνάρτηση με $f(1) = 1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x) = x - \ln x$, $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

57) Έστω $f : \Re \to \Re$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x) = e^x - x$, $x \in \Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

58) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\alpha \in \Re$ για την οποία ισχύει : $3x^4 - 4x^3 + \alpha \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

59) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x\ln x - \lambda x + 1$, $\lambda \in \Re$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.
ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, f(x))$ όπου x η θέση ελαχίστου της f.
iii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει : $x\ln x \geq \lambda x - 1$ για κάθε $x > 0$.
iv. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x - 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x) = x\ln x$.

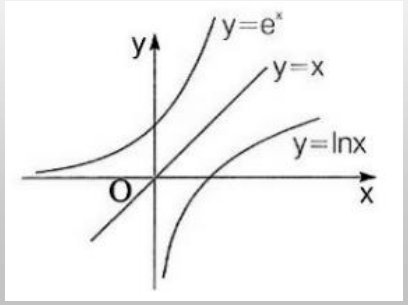
60) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = e^x - \lambda x$, $\lambda > 0$

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.
ii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει : $e^x \geq \lambda x$ για κάθε $x \in \Re$.
iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9Β : ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ $\ln x \leq x - 1$

- Η ανισότητα $\boxed{\ln x \leq x - 1}$ ισχύει για κάθε $x > 0$ και μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε (χωρίς απόδειξη) για να βρίσκουμε το πρόσημο μιας συνάρτησης. Στην παραπάνω ανισότητα το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x = 1$.

- Όπως μπορούμε να δούμε στην παρακάτω γραφική παράσταση, ισχύει ακόμα η παρακάτω ανίσωση (χρειάζεται απόδειξη) : $\boxed{\ln x < x < e^x}$ για κάθε $x > 0$.



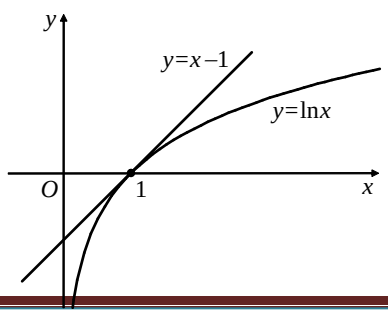
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

61) Να δείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.

Λύση :

Αρκεί να δείξουμε ότι $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Έστω $f(x) = x - 1 - \ln x$, $x > 0$

Έχουμε $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x = 1$.



Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0 min	↗	

επειδή η f για $x=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:
$f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow x-1-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq x-1$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=1$.

62) Να δείξετε ότι :

i. $\ln x<x$ για κάθε $x>0$ ii. $e^x>x$ για κάθε $x\in\Re$ iii. $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\Re$

iv. $e^x>\eta\mu x$ για κάθε $x>0$

Λύση :

i. Είναι $\ln x\leq x-1$ για κάθε $x>0$. Επίσης $x-1<x$ για κάθε $x>0$,
τελικά : $\ln x<x$ για κάθε $x>0$

ii. Είναι $\ln x\leq x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\Re$,
έχουμε : $\ln e^x\leq e^x-1\Leftrightarrow x\leq e^x-1\Leftrightarrow e^x\geq x+1$, για κάθε $x\in\Re$, και το ¨=¨ ισχύει
μόνο για $e^x=1\Leftrightarrow x=0$.
Άρα $e^x>x$ για κάθε $x\in\Re$. (καθώς $x+1>x$ για κάθε $x\in\Re$)

iii. Είναι $\ln x\leq x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\Re$,
έχουμε : $\ln e^x\leq e^x-1\Leftrightarrow x\leq e^x-1\Leftrightarrow e^x\geq x+1$, για κάθε $x\in\Re$, και το ¨=¨ ισχύει
μόνο για $e^x=1\Leftrightarrow x=0$.

iv. Είναι $\ln x\leq x-1$ για κάθε $x>0$. Άρα $\ln x<x\Leftrightarrow e^{\ln x}<e^x\Leftrightarrow x<e^x$, $x>0$
Επίσης γνωρίζουμε ότι : $|\eta\mu x|\leq|x|$ για κάθε $x\in\Re$ και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x=0$.
Άρα για $x>0$ είναι $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x\Rightarrow \eta\mu x<x$
Τελικά για κάθε $x>0$ είναι : $\left.\begin{matrix}x<e^x\\ \eta\mu x<x\end{matrix}\right\}\Rightarrow e^x>\eta\mu x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

63) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

64) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=\ln(x-\ln x)$.

65) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{e^x-x}$.

66) Να αποδείξετε ότι :

i. $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$, $x>0$

ii. $e^{x-1}\geq x$, $x\in\Re$

iii. $xe^{\frac{1}{x}}>x+1$, $x>0$

67) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

- $f(0)=1$
- $f^2(x)=e^x-x$ για κάθε $x\in\Re$

Να βρείτε τον τύπο της f .

68) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\ln(x+3)=x+2$

ii. $e^x-1=\ln(e^x-x)+x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΛΗΘΟΥΣ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ f(x)=0

Για να βρούμε το πλήθος ριζών της $f(x)=0$

1ον Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x)$, $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_\kappa$ και μετά τα αντίστοιχα σύνολα τιμών : $f(\Delta_1),f(\Delta_2),...,f(\Delta_\kappa)$

2ον Αν $0\in f(\Delta_\iota)$, τότε στο Δ_ι η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα.

3ον Αν $0\notin f(\Delta_\iota)$, τότε στο Δ_ι η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα.

Ομοίως αν έχω την εξίσωση f(x)=κ

1ον Αν $\kappa\in f(\Delta_\iota)$, τότε στο Δ_ι η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα.

2ον Αν $\kappa\notin f(\Delta_\iota)$, η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

69) Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το IR . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

i. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. *(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2002)*

Λύση :

i. Έστω $x_1,x_2\in D_g=\Re$ με

$$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right)\Rightarrow(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\overset{\text{'1–1'}}{\overset{f\circ g}{\Rightarrow}}x_1=x_2 .$$

Άρα η g είναι 1-1.

ii. $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)\overset{g:\text{'1–1'}}{\Leftrightarrow} f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$

Έστω $h(x)=x^3-3x+1$, θα δείξω ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. $h(x)=x^3-3x+1$, με $D_h=\Re$, $h'(x)=(x^3-3x+1)'=3x^2-3$

$h'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm1$

x	- ∞	-1		1	+ ∞
$h'(x)$	+	0	-	0	+
h	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$h'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και η h είναι συνεχής, άρα η h γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ και στο $\Delta_3=[1,+\infty)$
$h'(x)<0$ για κάθε $x\in(-3,1)$ και η h είναι συνεχής, άρα η h γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[-1,1]$

- Η h γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ άρα $h(\Delta_1)=(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(-1)]$, $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$, $h(-1)=3$
  Άρα $h(\Delta_1)=(-\infty,3]$. Το $0\in h(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ που είναι αρνητική.

- Η h γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_2=(-1,1)$ άρα $h(\Delta_2)=\big(h(1),h(-1)\big)=(-1,3)$, Το $0\in h(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta_2=(-1,1)$ (σε αυτή τη ρίζα δεν γνωρίζω το πρόσημο, μπορεί να είναι αρνητική αν ανήκει στο $(-1,0)$ ή θετική αν ανήκει στο $(0,1)$

- Η h γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_3=[1,+\infty)$ άρα $h(\Delta_3)=[h(1),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x))$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$, $h(1)=-1$
  Άρα $h(\Delta_3)=[-1,+\infty)$. Το $0\in h(\Delta_3)$ άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta_3=[1,+\infty)$ που είναι θετική.

Το μόνο που απομένει είναι να δείξω ότι ρίζα του $\Delta_2=[-1,1]$ είναι θετική, δηλαδή πρέπει να δείξω ότι ανήκει στο διάστημα $(0,1)$. Θ. Bolzano για την $h(x)$ στο $[0,1]$. Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, $h(0)=1$, $h(1)=-1$ άρα $h(0)h(1)<0$ από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Δηλαδή η ρίζα του $\Delta_2=[-1,1]$ είναι θετική και τελικά η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δυο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

70) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x\ln x, & x>0\\ 0 \quad , & x=0\end{cases}$.

i. Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής στο 0, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. *(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2008)*

Λύση :

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x+1=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\ln x+1>0\Leftrightarrow\ln x>-1\Leftrightarrow x>e^{-1}\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\ln x+1<0\Leftrightarrow\ln x<-1\Leftrightarrow x<e^{-1}\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{e}$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν.φθινουσα	ο.ε.	γν. αύξουσα

Άρα $f'(x)<0$ για $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ και f συνεχής στο 0, άρα $f\downarrow\left[0,\frac{1}{e}\right]$

$f'(x)>0$ για $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ δηλ. $f\uparrow\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε :

f γν. φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_1=\left[0,\frac{1}{e}\right]$, άρα $f(\Delta_1)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),f(0)\right]=\left[-\frac{1}{e},0\right]$

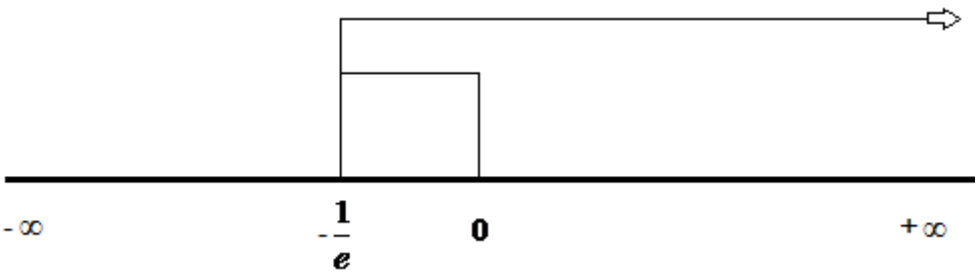
f γν. αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_2=\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, άρα

$f(\Delta_2)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$.

Τελικά το σύνολο τιμών είναι : $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

ii. Για κάθε $x>0$ είναι : $x=e^{\frac{\alpha}{x}}\Leftrightarrow\ln x=\ln e^{\frac{\alpha}{x}}\Leftrightarrow\ln x=\frac{\alpha}{x}\Leftrightarrow x\ln x=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$

Άρα έχουμε να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωση $f(x)=\alpha$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.
Το σύνολο τιμών είναι :



- αν $\alpha\in\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ δεν έχει καμία ρίζα.
- αν $\alpha\in\left(-\frac{1}{e},0\right)$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει δυο ρίζες.
- αν $\alpha\in(0,+\infty)$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μια ρίζα.
- αν $\alpha=-\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{e}$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=\frac{1}{e}$, καθώς στο $x_0=\frac{1}{e}$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$
- αν $\alpha=0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x\ln x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0 & \alpha\pi o\rho.\\ \eta\\ \ln x=0\Leftrightarrow x=1 & \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\end{cases}$

έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

71) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x+2$. Να βρείτε :
- i. Τη μονοτονία της f
- ii. Το σύνολο τιμών της f
- iii. Το πλήθος ριζών της f(x)=0

72) Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων :
- ii. $2x^3-6x+1=0$
- iii. $x^3-3x-1=0$

73) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\Re$, ώστε η εξίσωση $x^3-3x^2+\alpha=0$ να έχει μια ακριβώς ρίζα στο (0,2).

74) Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $x^3-3x^2-\alpha=0$.

75) Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $3x^4-4x^3-12x^2+3=\alpha$.

76) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x-2}-\ln(x-1)$
- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

77) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4\eta\mu x+3x^2-4x$
- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2010$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

78) Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)}=\dfrac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{x-1}}-\ln x$.
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

(4ο Θέμα Πανελλήνιες 2006)

79) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x-\lambda x$, $\lambda>0$.
- i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f
- ii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$, για την οποία ισχύει $e^x\geq\lambda x$, για κάθε $x\in\Re$.
- iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα ii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon):y=\lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$.

80) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\ln x-\lambda x$, $\lambda>0$.
- i. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f
- ii. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda>0$, για την οποία ισχύει $\ln x\leq\lambda x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
- iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα ii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon):y=\lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x)=\ln x$.

81) Δίνεται η συνάρτηση(x)=x^3–3x–2ημ^{2}θ όπου θ ε IR μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, κ ε Z

i. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο
ii. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2007)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 11 : ΥΠΑΡΞΗ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ

- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς ένα ακρότατο, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα και ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας.
- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς δυο ακρότατα, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες και ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

82) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$. Να δείξετε ότι η f έχει δυο, ακριβώς, τοπικά ακρότατα, και στη συνέχεια να βρείτε το είδος τους.

Λύση :

Αρχικά πρέπει $e^x-x\neq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\Re$. Αυτό αποδεικνύεται από τη βασική ανισότητα : $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\Re$, έχουμε : $\ln e^x\le e^x-1\Leftrightarrow x\le e^x-1\Leftrightarrow e^x\ge x+1$, για κάθε $x\in\Re$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1\Leftrightarrow x=0$. Άρα $e^x>x\Leftrightarrow e^x-x>0$ για κάθε $x\in\Re$. (καθώς $x+1>x$ για κάθε $x\in\Re$)

Τελικά $A_f=\Re$ και $f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$. Για να δείξω ότι η f έχει δυο, ακριβώς, τοπικά ακρότατα, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες όπου και αλλάζει το πρόσημο της f'.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}=0\Leftrightarrow 2e^x-xe^x-1=0$. Έστω $g(x)=2e^x-xe^x-1$, $x\in\Re$.

Επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in\Re$, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες. (εύρεση πλήθους ριζών για τη $g(x)=0$)

$g'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x(1-x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	γν. αύξουσα	ο.μ.	γν.φθίνουσα

Άρα $g'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και f συνεχής στο 1, άρα $g\uparrow(-\infty,1]$

$g'(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$ δηλ. $g\downarrow[1,+\infty)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε :

- g γν. αύξουσα και συνεχής στο $A_1=(-\infty.1]$, άρα $g(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}g(x),g(1)\right]$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2e^x - xe^x - 1\right) = -1$$

καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right) \overset{-\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{\frac{1}{e^x}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right) \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-e^{-x}}\right) = 0$.

Άρα : $g(\mathrm{A}_1) = (-1, e-1]$, το $0 \in g(\mathrm{A}_1) = (-1, e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathrm{A}_1 = (-\infty, 1]$.

Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_1 \in \mathrm{A}_1 = (-\infty, 1]$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = 0$.

- g γν. φθίνουσα και συνεχής στο $\mathrm{A}_2 = [1, +\infty)$, άρα $g(\mathrm{A}_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)\right]$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2e^x - xe^x - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x(2-x) - 1\right) = +\infty\cdot(-\infty) - 1 = -\infty$$

Άρα : $g(\mathrm{A}_2) = (-\infty, e-1]$, το $0 \in g(\mathrm{A}_2) = (-\infty, e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathrm{A}_2 = [1, +\infty)$.

Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_2 \in \mathrm{A}_2 = [1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_2) = 0$.

Τελικά έχουμε :

- Αν $x < 1$, Τότε για κάθε :

$$x < x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_1) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_1) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

- Αν $x > 1$, Τότε για κάθε :

$$x < x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_2) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x > x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_2) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

x	- ∞	x_1		1	x_2	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
f	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα

Τελικά όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η f παρουσιάζει ακριβώς δυο τοπικά ακρότατα, στο x_1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και στο x_2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

83) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1 + \dfrac{1}{x}$ με $x > 0$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο, και στη συνέχεια να βρείτε το είδος του.

84) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - 2x + 3$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο.

85) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $-\alpha$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 12 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Για να υπολογίσουμε το μέγιστο ή το ελάχιστο ενός μεγέθους που περιγράφεται μέσα από πρόβλημα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

i. Αν το πρόβλημα έχει γεωμετρική φύση, κατασκευάζουμε το σχήμα.
ii. βρίσκουμε τη συνάρτηση του μεγέθους που αναφέρεται το ακρότατο. Αν η συνάρτηση περιέχει δυο μεταβλητές, βρίσκουμε μια σχέση που τις συνδέει (από την εκφώνηση του προβλήματος ή από το σχήμα) και αντικαθιστούμε τη μια συνάρτηση της άλλης.
iii. Από την εκφώνηση του προβλήματος βρίσκουμε τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται η μεταβλητή, οι οποίοι καθορίζουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
iv. Τέλος κάνουμε μελέτη μονοτονίας και ακρότατων της συνάρτησης, απ' όπου προκύπτει και το αποτέλεσμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

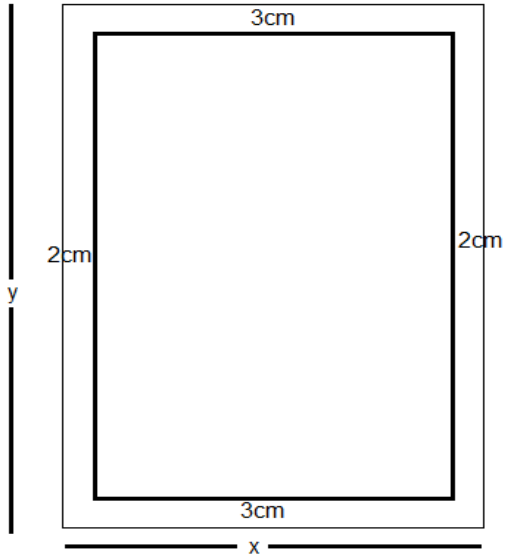
86) Θέλουμε να τυπώσουμε σελίδες εμβαδού $384cm^2$ έτσι, ώστε τα περιθώρια του κειμένου να είναι $3cm$ πάνω και κάτω και $2cm$ δεξιά και αριστερά. Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει κάθε σελίδα, ώστε το κείμενο να καταλαμβάνει τον μεγαλύτερο δυνατό χώρο της σελίδας.

Λύση :

Έστω ότι οι διαστάσεις της σελίδας είναι x,y. Τότε θα είναι $\mathrm{E}_{σελίδας} = 384 \Leftrightarrow xy = 384 \Leftrightarrow y = \dfrac{384}{x}$ (1)

Οι διαστάσεις του χώρου που καταλαμβάνει το κείμενο είναι $μήκος = x-2-2 = x-4$ και $ύψος = y-3-3 = y-6$. Άρα το εμβαδόν του χώρου που καταλαμβάνει το κείμενο είναι : $\mathrm{E}_{κειμένου} = (x-4)(y-6)$. Ψάχνουμε τις τιμές των x,y ώστε το $\mathrm{E}_{κειμένου}$ να γίνεται μέγιστο.

$$\mathrm{E}(x)_{κειμένου} \overset{(1)}{=} (x-4)\left(\frac{384}{x}-6\right) = 384-6x-\frac{1536}{x}+24 = 408-6x-\frac{1536}{x}.$$



Το πεδίο ορισμού προκύπτει ως εξής : το μικρότερο μήκος x είναι $x_{\min} = 2+2 = 4$. Για να βρω τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μήκος x θα πρέπει να λάβω υπόψη

ότι $xy=384\Leftrightarrow y=\frac{384}{x}$. Άρα όσο μεγαλώνει το x τόσο μικραίνει το y. Άρα το μέγιστο x το βρίσκω θέτοντας το μικρότερο y που είναι $y_{\min}=3+3=6$. Άρα $6=\frac{384}{x_{\max}}\Leftrightarrow x_{\max}=64$.

Άρα $D_{\text{Ε}_{κειμένου}}=(4,64)$

Θέλω να βρω τις τιμές του x για τις οποίες το $\text{Ε}(x)_{κειμένου}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

$\text{Ε}'(x)_{κειμένου}=\left(408-6x-\frac{1536}{x}\right)'=-6+\frac{1536}{x^2}$, $\text{Ε}'(x)_{κειμένου}=0\Leftrightarrow -6+\frac{1536}{x^2}=0\Leftrightarrow$

$\frac{1536}{x^2}=6\Leftrightarrow x^2=256\Leftrightarrow x=16,ή,x=-16$ απορ.

x	4	16	64
$\text{Ε}'(x)_{κειμένου}$	+	0	-
$\text{Ε}(x)_{κειμένου}$	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

$\text{Ε}'(x)_{κειμένου}>0\Leftrightarrow -6+\frac{1536}{x^2}>0\Leftrightarrow \frac{1536-6x^2}{x^2}>0\Leftrightarrow x^2(1536-6x^2)>0\Leftrightarrow 1536-6x^2>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 256-x^2>0\Leftrightarrow x\in(-16,16)$ * , όμως $D_{\text{Ε}_{κειμένου}}=(4,64)$ άρα $x\in(4,16)$

$\text{Ε}'(x)_{κειμένου}<0\Leftrightarrow -6+\frac{1536}{x^2}<0\Leftrightarrow \frac{1536-6x^2}{x^2}<0\Leftrightarrow x^2(1536-6x^2)<0\Leftrightarrow 1536-6x^2<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 256-x^2<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-16)\cup(16,+\infty)$ *, όμως $D_{\text{Ε}_{κειμένου}}=(4,64)$ άρα $x\in(16,64)$.

*Για την ανίσωση $256-x^2>0$, έχω $256-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 16$

x	- ∞	−16		16	+ ∞
$256-x^2$	-	0	+	0	-

Από το πινακάκι βλέπουμε ότι το $\text{Ε}(x)_{κειμένου}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $x=16$ την $\text{Ε}(16)_{κειμένου}=408-6\cdot 16-\frac{1536}{6}=216cm^2$. Άρα οι ζητούμενες διαστάσεις είναι $x=16cm$ και $y=\frac{384}{16}=24cm$.

87) Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\boldsymbol{\Pi(x)}$ κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $\boldsymbol{\Pi(x)=40000-6x}$. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 4000 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 1200 ευρώ για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Λύση :

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων παραγωγής είναι

$E(x)=x\Pi(x)=x(40000-6x)=-6x^2+40000x$.

Το κόστος από την παραγωγή x μονάδων είναι $K(x)=4000x$.

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι : $K_{ολ}(x)=4000x+1200x=5200x$.

Επομένως, το κέρδος της βιομηχανίας είναι

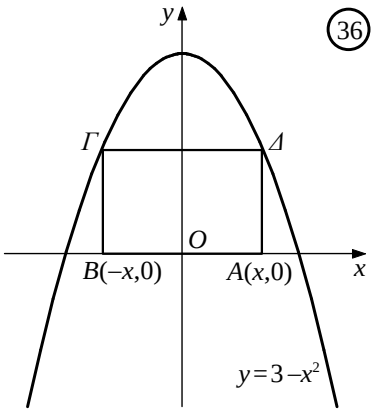
$$P(x)=E(x)-K_{ολ}(x)=-6x^2+40000x-5200x=-6x^2+34800x\,.$$

Έχουμε $P'(x)=-12x+34800$, οπότε η $P'(x)=0$ έχει ρίζα την $x=2900$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της *P* στο $(0,+\infty)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		2900		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	–	
$P(x)$		↗	50460 max	↘	

Επομένως, το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2900 μονάδες από το προϊόν αυτό και είναι ίσο με 50460 χιλιάδες ευρώ.

88) Να βρεθεί το $x\in[0,\sqrt{3}]$ έτσι, ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος να έχει μέγιστο εμβαδό.



36

Λύση :
Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι
$E(x)=(AB)(A\Delta)=2x(3-x^2)=-2x^3+6x$.
Έχουμε $E'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$.
Οι ρίζες της $E'(x)=0$ είναι οι $x=-1,\ x=1$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της *E* φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		1		$\sqrt{3}$
$E'(x)$		+	0	–	
$E(x)$	0 min	↗	4 max	↘	0 min

Άρα, η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν $x=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

89)Να βρείτε το σημείο της ευθείας y = 3χ-2 που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

90) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$ η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

91) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x\ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

92) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

93) Να βρείτε δυο αριθμούς x,y με σταθερό άθροισμα 10, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

94) Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 400τ.μ να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

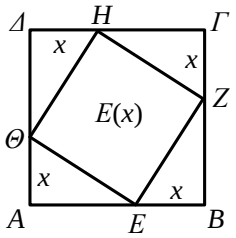
95) Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 14μ να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

96) Ένα σύρμα μήκους 1m κόβεται σε δυο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε ένα κύκλο και ένα τετράγωνο. Να βρείτε τη πλευρά του τετραγώνου και τη διάμετρο του κύκλου, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δυο σχημάτων να είναι ελάχιστο.

97) Με συρματόπλεγμα μήκους 80m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

98) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ,

i. να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.
ii. να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο.



99) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y=\sqrt{x^2+1}$ που έχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Α (3,0).

100) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης της $f(x)=\sqrt{3x^2+4}+3$ που η απόσταση του από το σημείου(0,3) να είναι ελάχιστη.

101) Ένας ιχθυοκαλλιεργητικής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μια θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις πλευρές πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) της θαλάσσιας περιοχής που θα περιφραχτεί δίνεται από τον τύπο : $\mathrm{E}(x)=-2x^2+600x$ (υποθέσουμε $0<x<300$)
ii. Να υπολογίσετε την τιμή x, ώστε το εμβαδόν της περιοχής να γίνεται μέγιστο
iii. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού. (2000)

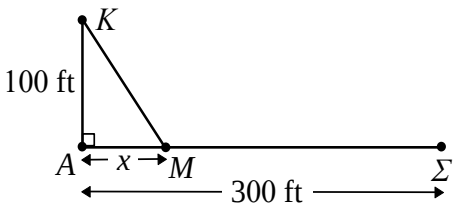
102) Η τιμή Ρ (σε χιλιάδες €) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά δίνεται από τον τύπο : $\mathrm{P}(t)=4+\dfrac{t-6}{t^2+\dfrac{25}{4}}$

i. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του.
ii. Να βρείτε το χρονικό διάστημα στο οποίο η τιμή του συνεχώς αυξάνεται
iii. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μεγίστη.
iv. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται χωρίς όμως να γίνει μικρότερη από την τιμή του τη στιγμή της εισαγωγής του. (2000)

103) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{9}{2},0\right)$.

i. Να βρείτε το σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.
ii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

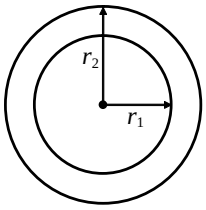
104) Ένας κολυμβητής *K* βρίσκεται στη θάλασσα 100ft[(1)] μακριά από το πλησιέστερο σημείο *A* μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του *Σ* βρίσκεται 300ft μακρυά από το σημείο *A*. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.



i. Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή *ΚΜΣ* του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο $\mathrm{T}(x)=\dfrac{\sqrt{100^2+x^2}}{3}+\dfrac{300-x}{5}$.

ii. Για ποια τιμή του *x* ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του

105) Έστω *E* το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε οτι τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $r_1=3\,\text{cm}$ και $r_2=5\,\text{cm}$ και ότι για $t>0$ η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s. Να βρείτε:



i. πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

ii. πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

106) Μία ώρα μετά τη λήψη *x* mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x)=x^2-\dfrac{x^3}{4}$, $0<x<3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς *x*, να γίνει μέγιστος.

107) Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σε έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση : $f(t)=\dfrac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, $t\geq 0$

όπου α και β είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετριέται σε ώρες. Η μεγίστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ιση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

i. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β

ii. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η συγκέντρωση είναι τουλάχιστον ιση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. (2000)

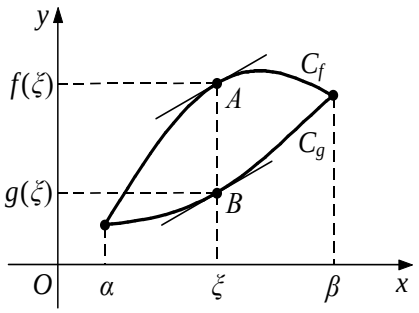
108) Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής *x* μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)=\dfrac{1}{3}x^3-20x^2+600x+1000$ χιλιάδες δραχμές, $0\leq x\leq 105$. Η είσπραξη από την πώληση των *x* μονάδων είναι $E(x)=420x-2x^2$ χιλιάδες δραχμές. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

(1) 1ft = 30,48 cm

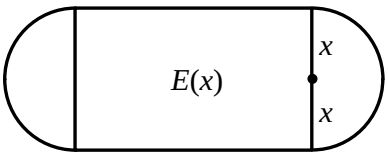
109) Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιομηχανία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο : $C(x) = x^3 - 9\nu x^2 + 5\nu^3$ σε δεκάδες ευρώ, x>0. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι 10-ν δεκάδες ευρώ. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

110) Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 100 χιλιάδες δραχμές το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 500 δρχ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα.

111) Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η καρακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή.
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες.



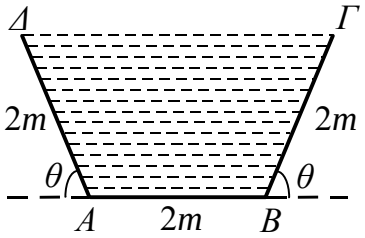
112) Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



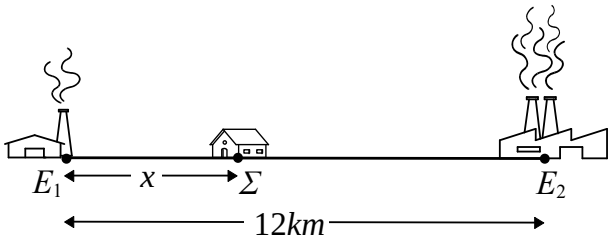
113) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με $E = 4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$

ii. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;



114) Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12km και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και $8P$ αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d, να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση.
(Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).



2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

49. ΟΡΙΣΜΟΣ (2006, 2010, 2014)
Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

Έστω μία συνάρτηση *f σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα *Δ* και *π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η* στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση *f* στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.
- Η συνάρτηση *f* στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

Σχόλιο :

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση *f* είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* σε κάθε σημείο του *Δ* βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

50. ΘΕΩΡΗΜΑ
Να διατυπώσετε το θεώρημα που αφορά τα κοίλα και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f .

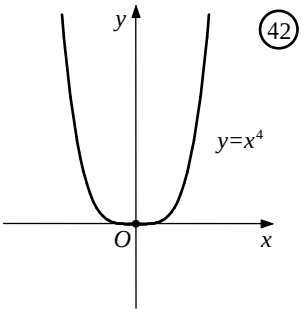
Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ό του Δ.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο R. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο R, αφού $f''(0) = 0$.



42

51. ΟΡΙΣΜΟΣ

Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Σχόλιο :

Όταν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η **f παρουσιάζει στο** x_0 **καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f διαπερνά την καμπύλη.

52. ΘΕΩΡΗΜΑ

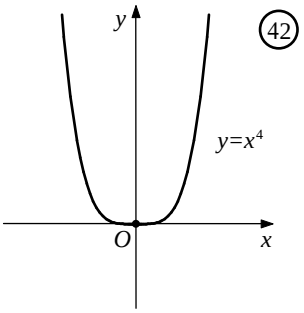
Ποιο θεώρημα αφορά τα σημεία καμπής μιας δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης f ;

Απάντηση :

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Ισχύει $f''(x) = 12x^2$ δηλ. $f''(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.



53. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

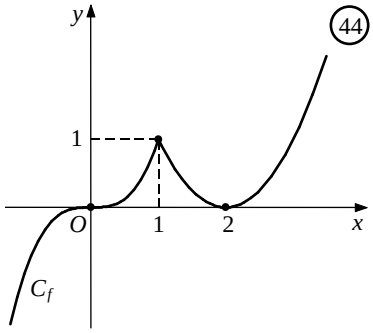
Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

i)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η** f'' **μηδενίζεται .**

ii)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η** f'' .

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & , \quad x<1\\ (x-2)^4 & , \quad x\geq 1\end{cases} \qquad (\Sigma\chi.\ 44)$$



Η *f* είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re-\{1\}$ με

$$f''(x)=\begin{cases}6x & , \quad x<1\\ 12(x-2)^2 & , \quad x>1\end{cases}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f''(x)$	–	0	+	0	+
$f(x)$	κοίλη	κυρτή	κυρτή	κυρτή	

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο $O(0, f(0))$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής είναι μόνο το 0, εκατέρωθεν του οποίου η f'' αλλάζει πρόσημο.

Μέθοδος – Κριτήριο : Πως καταλήγουμε στο ποιες από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f αποτελούν τελικά σημεία καμπής της ;

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Παρατηρήσεις :

- Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
  - (Αν f είναι κυρτή στο Δ) $\Leftrightarrow f'\uparrow$ στο εσωτερικό του Δ.
  - (Αν f είναι κοίλη στο Δ) $\Leftrightarrow f'\downarrow$ στο εσωτερικό του Δ.
- Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα Δ.
  - $\begin{cases}f''(x_0)=0\\ f''\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\zeta\varepsilon\iota\ \pi\rho\acute{o}\sigma\eta\mu o\ \varepsilon\kappa\alpha\tau\acute{\varepsilon}\rho\omega\theta\varepsilon\nu\ \tau o\upsilon\ x_0\end{cases}\Leftrightarrow (x_0\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \sigma.\kappa.)$
  - Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$.
  - Αν $f''(x_0)\neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο x_0.
  - Αν $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο Δ.
  - Πιθανές θέσεις σημείων καμπής είναι οι ρίζες της f'' στο Δ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΚΥΡΤΩΝ – ΚΟΙΛΩΝ & ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΜΠΗΣ

i. Βρίσκω το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

ii. Βρίσκω την $f'(x)$ και $f''(x)$

iii. Λύνω την εξίσωση $f''(x)=0$ και βρίσκω τα πρόσημα της $f''(x)$

iv. Κάνω πίνακα με το πρόσημο της $f''(x)$, στον οποίο θα συμπληρώσουμε την κυρτότητα της $f(x)$.

v. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_i στα οποία χωρίζεται το π.ο της f από τις ρίζες της $f''(x)$, ισχύει ότι :

- Αν $f''(x)>0$ στο εσωτερικό του Δ_i τότε η f είναι κυρτή στο Δ_i (συμβ. $\cup$)
- Αν $f''(x)<0$ στο εσωτερικό του Δ_i τότε η f είναι κοίλη στο Δ_i (συμβ. $\cap$)

vi. Αν η κυρτότητα της f αλλάζει σε ένα σημείο x_0, δηλαδή αν η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο x_0, τότε η f έχει σημείο καμπής στο x_0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

i. $f(x)=3x^5-5x^4+2$ ii. $f(x)=xe^{1-x}$

iii. $f(x)=\begin{cases}-3x^2+1, x<0\\ -x^3+3x^2+1, x\geq 0\end{cases}$

Λύση :

i. $f(x)=3x^5-5x^4+2$, με $D_f=\Re$, $f'(x)=(3x^5-5x^4+2)'=15x^4-20x^3$,
$f''(x)=(15x^4-20x^3)'=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$ έχω :
$f''(x)=0\Leftrightarrow 60x^2(x-1)=0\Leftrightarrow 60x^2=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$60x^2$	+	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+
$f''(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\cap$		$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,1]$, κυρτή στο $[1,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $A(1,f(1))\to A(1,0)$.

ii. $f(x)=xe^{1-x}$ με $D_f=\Re$, $f'(x)=(xe^{1-x})'=e^{1-x}-xe^{1-x}$,
$f''(x)=(e^{1-x}-xe^{1-x})'=-e^{1-x}-e^{1-x}+xe^{1-x}=xe^{1-x}-2e^{1-x}$, έχω :
$f''(x)=0\Leftrightarrow xe^{1-x}-2e^{1-x}=0\Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)=0\Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩	Σ.Κ.	∪

Για τα πρόσημα της $f''(x)$ έχω :

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} - 2e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} - 2e^{1-x} < 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Άρα όπως φαίνεται και από το πινακάκι η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $A(2, f(2)) \to A\left(2, \frac{2}{e}\right)$.

iii. $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1, x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0 \end{cases}$

- Για $x < 0$, $f(x) = -3x^2 + 1$, $f'(x) = -6x$, $f''(x) = -6 < 0$
- Για $x > 0$, $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$, $f'(x) = -3x^2 + 6x$, $f''(x) = -6x + 6$,
  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Θα εξετάσουμε αν η $f(x)$ έχει εφαπτομένη στο $x_0 = 0$, δηλαδή αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-3x^2 + 1 - 1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x^3 + 3x^2 + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2(-x+3)}{x} = 0$ άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+	0	-
$f(x)$	∩	Σ.Κ.	∪	Σ.Κ.	∩

Άρα όπως φαίνεται και από το πινακάκι η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και στο $[1,+\infty)$, κυρτή στο $[0,1]$ και έχει σημεία καμπής τα $A(0, f(0)) \to A(0,1)$ και $B(1, f(1)) \to B(1,3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x$ ii. $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 2x + 1$

iii. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ iv. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

3) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x) = e^x(x^2 + 1)$ ii. $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$

iii. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ iv. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

4) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x)=xe^{1-x}$ ii. $f(x)=x^2(2\ln x-5)$

iii. $f(x)=e^{-x^2}$ iv. $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

v. $f(x)=x\,|x|$ vi. $f(x)=\sqrt{|x|}$

5) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2+4, x\le 0\\ x^3-6x^2+4, x>0\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}x^3+6x^2-2, x\le 1\\ x^3-9x^2+13, x>1\end{cases}$

iii. $f(x)=\begin{cases}-3x^2+1 & , \ x<0\\ -x^3+3x^2+1 & , \ x\ge 0\end{cases}$ iv. $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & , \ x<0\\ \sqrt{x} & , \ x\ge 0\end{cases}$

6) Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

7) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$ έχει για κάθε τιμή του $\alpha\in\Re$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y=-x^2+2$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : Η f(x) ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Για να δείξω ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει σημεία καμπής, υποθέτω ότι υπάρχει x_0 που είναι θέση σημείο καμπής, οπότε αν η $f(x)$ είναι και δυο φορές παραγωγίσιμη, από θεώρημα (ερώτηση 52) θα ισχύει $f''(x_0)=0$ και με συνεπαγωγές καταλήγω σε άτοπο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) (Άσκηση 5 σελ. 279 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, για την οποία ισχύει : $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση : $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$ (1)

Η $f(x)$ δυο φορές παραγωγίσιμη άρα παραγωγίζω και τα δυο μέλη της (1) και έχω :

$(f^2(x)-2f(x)+x^2-3)'=0\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x=0$ (2)

παραγωγίζω και τα δυο μέλη της (2) και έχω : $(2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x)'=0 \Leftrightarrow$ $2f'(x)f'(x)+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0 \Leftrightarrow 2(f'(x))^2+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (f'(x))^2+f(x)f''(x)-f''(x)+1=0$ (3). Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στη θέση x_0, δηλ. το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής, και η f δυο φορές παραγωγίσιμη άρα ισχύει : $f''(x_0)=0$, στην (3) για $x=x_0$ έχω :

$(f'(x_0))^2+f(x_0)f''(x_0)-f''(x_0)+1=0 \overset{f''(x_0)=0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (f'(x_0))^2+1=0$ που είναι άτοπο, άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x)+e^x=3f(x)-\alpha^x$ για κάθε $x\in\Re$ όπου $0<\alpha\neq 1$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

11) Έστω μια συνάρτηση $f:(1,3)\to\Re$ η οποία είναι 2 φορές παραγωγισιμη και ισχύει $f^2(x)+xf(x)+x^2-3x+1=0$ για κάθε $x\in(1,3)$. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει καμπή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

- **(Δεδομένο σημείο καμπής)** Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και στο x_0 η f έχει σημείο καμπής τότε ισχύει : $f''(x_0)=0$. Επειδή όμως αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία, αλλά όχι και ικανή, πρέπει για κάθε τιμή της παραμέτρου που θα βρούμε, να εξετάσουμε αν πράγματι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής.
- **(Δεδομένη κυρτότητα)** Έστω η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Για να είναι:
  1. η f κυρτή στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$
  2. η f κοίλη στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x)\leq 0$ για κάθε $x\in\Delta$

  και η ισότητα και στις δυο περιπτώσεις να ισχύει για διακεκριμένες τιμές.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^5-(4\beta+2)x^3+(\alpha-1)x+1$ με $\alpha,\beta\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(1,-4)$.

Λύση : $f'(x)=5\alpha x^4-3(4\beta+2)x^2+\alpha-1$, $f''(x)=20\alpha x^3-6(4\beta+2)x$

Η $f(x)$ έχει σημείο καμπής στη θέση $x_0=1$ άρα : $f''(1)=0$ (1)

Το σημείο καμπής $A(1,-4)$ είναι σημείο της C_f άρα : $f(1)=-4$ (2)

(1) και (2) : $\begin{cases} f''(1)=0 \\ f(1)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha-6(4\beta+2)=0 \\ \alpha-(4\beta+2)+\alpha-1+1=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha-24\beta=12 \\ \alpha-4\beta-2+\alpha=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha - 6\beta = 3 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$. Τέλος επειδή η συνθήκη για το σ.κ. $f''(1) = 0$ είναι απαραίτητη όχι όμως και ικανή, πρέπει να ελέγξω αν οι παραπάνω τιμές είναι δεκτές. Έχω : $f''(x) = 20\alpha x^3 - 6(4\beta + 2)x \Leftrightarrow f''(x) = 60x^3 - 60x$,

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x = 0 \Leftrightarrow 60x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, ή, x = 1, ή, x = -1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$60x$	-		-	0	+		+
$x^2 - 1$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	∩	Σ.Κ.	∪	Σ.Κ.	∩	Σ.Κ.	∪

Άρα όπως φαίνεται και από το πινακάκι η $f(x)$ έχει σημείο καμπής στη θέση $x_0 = 1$ και άρα οι τιμές των α,β είναι δεκτές.

13)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ με $\alpha \in \Re$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\Re$.

Λύση :

$f'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 12x + 2$, $f''(x) = 12x^2 - 12\alpha x + 12$.

Για να είναι η $f(x)$ κυρτή στο $\Re$, πρέπει να ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12\alpha x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 \geq 0$, για το τριώνυμο που πρόεκυψε πρέπει να ισχύει : $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [-2,2]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

14)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \Re$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(-1,4)$.

15)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2 x^3 - 6\alpha x^2 + 5x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \Re$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(2,3)$.

16)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2 x^4 - 4\alpha x^3 + 6(2\alpha - 1)x^2 - 4x + 11$, με $\alpha \in \Re$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η C_f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$.

17)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$. Να βρείτε τις τιμές των α, β και γ, ώστε η C_f να έχει στο $x_1 = -1$ ακρότατο το 10 και στο $x_2 = 1$ να έχει σημείο καμπής.

18)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 + \lambda x^3 + (3\lambda - 9)x^2 - 7x + 4$ με $\lambda \in \Re$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R.

19)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^4 + 2(\lambda - 3)x^3 + 6\lambda x^2 - 3x + 5$ με $\lambda \in \Re$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται κάτω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \geq \lambda x + \beta$.
- Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \leq \lambda x + \beta$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f'\left(x^2+1\right) > e-1$.
iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
iv. Να αποδείξετε ότι $e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$ για κάθε $x > 0$.
v. Να λύσετε την εξίσωση : $\dfrac{f(x)-1}{e-1} = x$.
vi. Να λύσετε την εξίσωσης : $f\left(e^x\right) + e^x = e^{x+1} + 1$

Λύση :

i. $f(x) = e^x - \ln x$, με $D_f = (0,+\infty)$, $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in D_f = (0,+\infty)$, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ συνεπώς η $f(x)$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

ii. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει $x^2+1 \in (0,+\infty)$ που ισχύει για κάθε $x \in \Re$,έτσι : $f'\left(x^2+1\right) > e-1 \Leftrightarrow f'\left(x^2+1\right) > f'(1)$, η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ άρα η $f' \uparrow$, οπότε, $f'\left(x^2+1\right) > f'(1) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+1 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \Re - \{0\}$.

iii. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$, τότε $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y - e = (e-1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = ex - e - x + 1 \Leftrightarrow y = ex - x + 1$

iv. Η $f(x)$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = ex - x + 1$, με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(1, f(1))$. Δηλαδή για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει : $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq ex - x + 1 \Leftrightarrow e^x - \ln x \geq ex - x + 1 \Leftrightarrow e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$.

v. Η εξίσωση ορίζεται για $x \in (0,+\infty)$ και έχουμε : $\dfrac{f(x)-1}{e-1} = x \Leftrightarrow f(x) = (e-1)x + 1$, όμως η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = ex - x + 1$, με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(1, f(1))$. Δηλαδή για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \geq (e-1)x + 1$ και το «=» μόνο για $x = 1$. Τελικά : $f(x) = (e-1)x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

vi. Η εξίσωση ορίζεται για $e^x \in (0,+\infty) \Leftrightarrow x \in \Re$ και έχουμε : $f\left(e^x\right)+e^x = e^{x+1}+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f\left(e^x\right) = e^{x+1}-e^x+1 \Leftrightarrow$
$f\left(e^x\right) = e^x(e-1)+1 \overset{e^x=y>0}{\Leftrightarrow} f(y) = (e-1)y+1 \overset{v.}{\Leftrightarrow} y = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21)Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f της συνάρτησης $f(x) = e^x(x^2+3)$ σε οποιοδήποτε σημείο της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f εκτός του σημείου επαφής.

22)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x}+x^4$.
i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
iii. Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 1+2x-x^4$ για κάθε $x \in \Re$.

23)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2-4x+6)e^{x-1}$.
i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
iii. Να αποδείξετε ότι $e^{x-1} \geq \dfrac{x+2}{x^2-4x+6}$ για κάθε $x \in \Re$.

24)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\pi} - 2x^2 - x\ln x$.
i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
iii. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\pi} - x\ln x \leq 2x^2-6x+4$ για κάθε $x>0$.

25)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+a\ln x)^2$, με $\alpha \in \Re$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία : $(\zeta): 8x-2y+2011=0$.
i. Να βρείτε τον αριθμό α και την εξίσωση της (ε)
ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
iii. Να αποδείξετε ότι $3+(x+\ln x)^2 \geq 4x$ για κάθε $x>0$.

26)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln(\ln x)$.
i. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = e$.
iii. Να δείξετε ότι $\ln(\ln x) \leq \dfrac{x}{e}-1$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$.
iv. Να λυθεί η εξίσωση $e\ln x - e^{\frac{x}{e}} = 0$ στο διάστημα $(1,+\infty)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΜΠΗΣ

- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα και ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας.
- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς δυο σημείο καμπής, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες και ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-x)$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δυο, ακριβώς, σημεία καμπής.

Λύση :

Αρχικά πρέπει $e^x-x>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\Re$. Αυτό αποδεικνύεται από τη βασική ανισότητα : $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\Re$, έχουμε : $\ln e^x\le e^x-1\Leftrightarrow x\le e^x-1\Leftrightarrow e^x\ge x+1$, για κάθε $x\in\Re$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1\Leftrightarrow x=0$. Άρα $e^x>x\Leftrightarrow e^x-x>0$ για κάθε $x\in\Re$. (καθώς $x+1>x$ για κάθε $x\in\Re$)

Τελικά $A_f=\Re$ και $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, $f''(x)=\dfrac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$. Για να δείξω ότι η f έχει δυο, ακριβώς, σημεία καμπής, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες όπου και αλλάζει το πρόσημο της f''.

$f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}=0\Leftrightarrow 2e^x-xe^x-1=0$. Έστω $g(x)=2e^x-xe^x-1$, $x\in\Re$.

Επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in\Re$, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες. (εύρεση πλήθους ριζών για τη $g(x)=0$)

$g'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x(1-x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	γν. αύξουσα	ο.μ.	γν.φθίνουσα

Άρα $g'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και f συνεχής στο 1, άρα $g\uparrow(-\infty,1]$

$g'(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$ δηλ. $g\downarrow[1,+\infty)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε :

- g γν. αύξουσα και συνεχής στο $A_1=(-\infty,1]$, άρα $g(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-xe^x-1)=-1$

καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{\frac{1}{e^x}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-e^{-x}}\right)=0$.

Άρα : $g(\Delta_1)=(-1,e-1]$, το $0\in g(\Delta_1)=(-1,e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta_1=(-\infty,1]$.
Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_1\in\Delta_1=(-\infty,1]$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$.

- g γν. φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_2=[1,+\infty)$, άρα $g(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),g(1)\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x(2-x)-1\right)=+\infty\cdot(-\infty)-1=-\infty$$

Άρα : $g(\Delta_2)=(-\infty,e-1]$, το $0\in g(\Delta_2)=(-\infty,e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$.
Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_2\in\Delta_2=[1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_2)=0$.

Τελικά έχουμε :

- Αν $x<1$, Τότε για κάθε :

$$x<x_1\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(x_1)\Leftrightarrow g(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$$
$$x>x_1\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(x_1)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$$

- Αν $x>1$, Τότε για κάθε :

$$x<x_2\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(x_2)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$$
$$x>x_2\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(x_2)\Leftrightarrow g(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$$

x	- ∞	x_1		1	x_2	+ ∞
$f''(x)$	-	0	+	+	0	-
f	κοίλη	Σ.Κ.	κυρτή	κυρτή	Σ.Κ.	κοίλη

Τελικά όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η f παρουσιάζει ακριβώς δυο σημεία καμπής, στο x_1 και στο x_2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-x+e^x-\dfrac{x^2}{2}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

29) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x-x\ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(1,2)$ στο οποίο συνάρτηση f παρουσιάζει καμπή.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x(1-\ln x)$. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή σε ένα ακριβώς σημείο $x_0=\alpha$ το οποίο ανήκει στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ Θ.Μ.Τ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31) Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f:\Delta\to\Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$.

ii. $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$.

Λύση :

i. Αν $\alpha=\beta$, τότε $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow f(\alpha)+f(\alpha)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(\alpha)\geq 2f(\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)\geq f(\alpha)$ όπου ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$ τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$

- f συνεχής στο $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

- f συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Όμως η f κυρτή στο $\Re$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα :

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \overset{\beta-\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Αν $\alpha > \beta$ η απόδειξη είναι ανάλογη.

Άρα για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει : $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ii. Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x, x+1]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x, x+1]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$. Όμως $\xi \in (x, x+1)$ άρα $\xi < x+1$ (1). Θα πρέπει να πάρω f' και στα δυο μέλη της (1), πρέπει όμως να γνωρίζω τη μονοτονία της f'. Όμως η f κυρτή στο $\Re$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι η σχέση (1) θα γίνει : $(1) : \xi < x+1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

32) Έστω μια κοίλη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Re$

ii. $f'(x) < f(x) - f(x-1) < f'(x-1)$ για κάθε $x \in \Re$.

33) Έστω $f : [\alpha, +\infty) \to \Re$ μια συνάρτηση, η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι $f'(\alpha) < \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$.

34) Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \Re$, η οποία είναι κοίλη. Να δείξετε ότι $f(x) + f(3x) < 2f(2x)$, για κάθε $x > 0$.

35) Έστω μια συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \Re$, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(x) > 1$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι $x < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.

36)Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f : \Delta \to \Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$

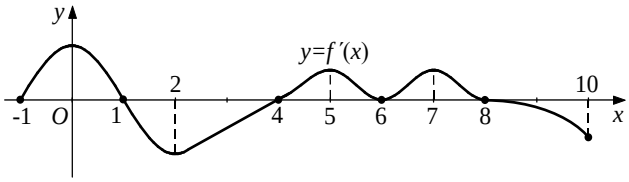
ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iii. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta}{\alpha + \beta} \geq \ln \frac{\alpha+\beta}{2}$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

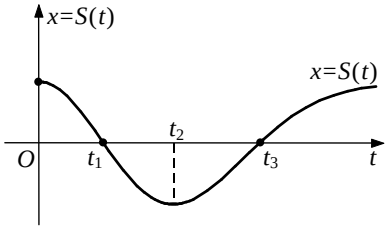
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

37) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

38) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:



i. Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.
ii. Πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

39) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0,f(0))$
iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
iv. Να αποδείξετε ότι $xf'(x)\le f(x)\le\frac{x}{2}$ για κάθε $x\in\Re$.
v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε : $2f(\xi)=(\xi-1)\sqrt{e^{\xi}}$

40)

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x+2x\ln x+x^2-3$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.
iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0=1$
iv. Να δείξετε ότι : $x+\ln x>\sqrt{4x-3}$ για κάθε x>1.

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1-x)-e^{-x}+1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

42)

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2-x-2\ln x$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο (1,2)
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ στο οποίο η συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x-x\ln x$ παρουσιάζει καμπή.

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L'HOSPITAL

54. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f; **(2010, 2015 Β΄)**

Απάντηση :

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f, αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

55. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$); **(2007, 2016 Β΄)**

Απάντηση :

Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$).

56. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$; **(2004 Β΄, 2005, 2011)**

Απάντηση :

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως αν $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

57. Με ποιες σχέσεις (τύπους) βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$;

Απάντηση :

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in R$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in R$, αντιστοίχως : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in R$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in R$.

Χρήσιμα σχόλια :

1. Αποδεικνύεται ότι:

—Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

—Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2.Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f **αναζητούμε:**

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f **δεν είναι συνεχής**.

—Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

Παρατηρήσεις :

- Η C_f μπορεί να έχει (ένα μόνο) κοινό σημείο με μια κατακόρυφη ασύμπτωτη της.
- Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.
- Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η (ε) μπορεί να την τέμνει σε ένα ή περισσότερα σημεία.

58. Να διατυπώσετε τα θεωρήματα του de L΄Hospital.

Απάντηση :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Σχόλιο :

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, $\dfrac{-\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για να βρούμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού, αν υπάρχει άκρο ανοιχτού διαστήματος x_0 (εκτός $\pm\infty$), τότε για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο x_0. Βρίσκω το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ή $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, αν κάποιο από αυτά τα όρια είναι $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Άρα για κατακόρυφες ασύμπτωτες ψάχνω στα ανοιχτά άκρα του πεδίου ορισμού της f και στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ii. $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x-4}$

Λύση :

i. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $D_f=\Re-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο $x_0=1$. Έχω : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon):x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

ii. $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x-4}$, $D_f=(2,4)\cup(4,+\infty)$ για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο $x_1=2$ και στο $x_2=4$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\ln(x-2)}{x-4}=+\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon_1):x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης : $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{\ln(x-2)}{x-4}=-\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon_2):x=4$ είναι και αυτή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. (αν η συνάρτηση ορίζεται και από τα δεξιά και από τα αριστερά του x_0 δεν παίζει ρόλο πιο από τα δυο πλευρικά όρια θα πάρω.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ii. $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}$ v. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-2x+1}$

iii. $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x^3-3x+2}$ iv. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}$ vi. $f(x)=\dfrac{x-5}{|x-2|}$

vii. $f(x)=\dfrac{3x+1}{3-x}$ viii. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-5x+6}$ ix. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x-1}, x\le 0\\ \dfrac{\ln x}{x}, x>0\end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για να βρούμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της. Για οριζόντια ασύμπτωτη θα ψάξω στο $\pm\infty$, εφόσον ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\in\Re$ τότε η ευθεία $(\varepsilon): y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Αντίστοιχα αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\in\Re$ τότε η ευθεία $(\varepsilon): y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης : $f(x)=\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}$.

Λύση :

$f(x)=\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}$, $D_f=\Re=(-\infty,+\infty)$, για οριζόντια ασύμπτωτη ψάχνω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4}{x^4}=2$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4}{x^4}=2$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{3x^2+7x+13}{x^2+2}$

ii. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2-2}{x+1}$

iii. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΛΑΓΙΕΣ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

➢ Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ (όχι $\pm\infty$) και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re$ (όχι $\pm\infty$)

➢ Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ (όχι $\pm\infty$) και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re$ (όχι $\pm\infty$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

- Η ασύμπτωτη $(\varepsilon):y=\lambda x+\beta$ είναι **οριζόντια** αν λ=0, ενώ αν $\lambda\neq0$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη. Αυτό σημαίνει ότι για πλάγιες – οριζόντιες μπορώ να ψάχνω ταυτόχρονα, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda=0$ οριζόντια, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\neq0$ πλάγια.
- Για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες ψάχνω στο $\pm\infty$, εφόσον ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε για την C_f δεν αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.
- Αν η ευθεία $(\varepsilon):y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η ε μπορεί να την τέμνει σε ένα ή περισσότερα σημεία.
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο κατά 2 βαθμούς του παρανομαστή, δεν έχουν πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}$ ii. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

Λύση :

i. $f(x)=\dfrac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}$, $D_f=\Re-\{2,3\}=(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$. Για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες θα ψάξω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Η ευθεία $(\varepsilon):y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ με :

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-9x+1}{x^3-5x^2+6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3-9x+1-2x(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6}\right]=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-9x+1-2x^3+10x^2-12x}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2-21x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2}{x^2} = 10$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x+10$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η $(\varepsilon): y = 2x+10$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ii. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$, $D_f = \Re = (-\infty,+\infty)$. Για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες θα ψάξω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

- Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+4x+5}-x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+5}-x)(\sqrt{x^2+4x+5}+x)}{\sqrt{x^2+4x+5}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+5-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)} = 2$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): y = x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} = -1$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2+4x+5}+x] =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+5}+x)(\sqrt{x^2+4x+5}-x)}{\sqrt{x^2+4x+5}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+5-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)} = -2$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y = -x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \dfrac{6x^2+2x+1}{2x-4}$ ii. $f(x) = \sqrt{x^2-2x+4}$ iii. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$ iv) $f(x) = \dfrac{\ln(9-x^2)}{x^2}$

7) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

ii. $f(x)=\dfrac{6x^3-5x^2+7}{2x^3+11x-13}$

iii. $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}-x$

iv. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x-1}$

v. $f(x)=3x-5+\dfrac{7}{e^x+x^2}$

8) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-x+5}{x-1}, x<1\\ \dfrac{6x-5}{2x-4}, 1\le x\ne 2\end{cases}$.

9) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-x+5}{x-2}, x<2\\ \sqrt{x^2+4x+13}, x\ge 2\end{cases}$

10) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x)=x-\left|e^x-1\right|$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Η ΕΥΘΕΙΑ $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ ΤΗΣ C_f - ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι:

1ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$ ή αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re$ ή αντίστοιχα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)=\dfrac{2x^2-6x+13}{x-1}$ όταν $x\to-\infty$.

Λύση :

1ος τρόπος : Η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-4$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-4)\right]=0$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-4)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+13}{x-1}-(2x-4)\right]=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+13-(x-1)(2x-4)}{x-1}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+13-2x^2+4x+2x-4}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{9}{x-1}\right]=0$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon):y=2x-4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

<u>2ος τρόπος :</u> Η ευθεία $(\varepsilon):y=2x-4$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=-4$

Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{2x^2-6x+13}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-6x+13}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

Επίσης : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+13}{x-1}-2x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+13-2x^2+2x}{x-1}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4x+13}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4x}{x}\right]=-4$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon):y=2x-4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-\beta x+9}{x-3}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon):y=3x-2$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x\to+\infty$.

<u>Λύση :</u> Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon):y=3x-2$ τότε :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=-2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\alpha x^2-\beta x+9}{x-3}}{x}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-\beta x+9}{x^2-3x}=3$ (1)

Αν $\alpha=0$, τότε $(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-\beta x+9}{x^2-3x}=3\Leftrightarrow(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\beta x+9}{x^2-3x}=3\Leftrightarrow 0=3$, άτοπο

Άρα είναι $\alpha\neq0$, οπότε έχουμε : $(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-\beta x+9}{x^2-3x}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2}{x^2}=3\Leftrightarrow\alpha=3$

Επίσης : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=-2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2-\beta x+9}{x-3}-3x\right]=-2$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-\beta x+9-3x^2+9x}{x-3}=-2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\beta x+9+9x}{x-3}=-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(9-\beta)}{x}=-2\Leftrightarrow 9-\beta=-2\Leftrightarrow\beta=11.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

13)Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πλάγιες ασύμπτωτες τις αντίστοιχες ευθείες :

i. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$ την $(\varepsilon): y=x+2$ όταν $x\to-\infty$

ii. $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{x-1}$ την $(\varepsilon): y=2x-3$ όταν $x\to+\infty$

iii. $f(x)=\sqrt{x^2+5}+x+3$ την $(\varepsilon): y=2x+3$ όταν $x\to+\infty$

14)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}$, με $\alpha,\beta\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές των α,β αν η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

15)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+\beta x+16}+x$. Να βρείτε :

i. τις τιμές των α,β αν η ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha x-5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii. το πεδίο ορισμού της f

iii. την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

16)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+5}+\alpha x$. Να βρείτε :

i. το α αν η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): 4x-2y+2011=0$

ii. τις ασύμπτωτες της C_f.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17)Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=3x+6$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$.

Λύση : Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y=3x+6$ τότε :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=6$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(f(x)-3x)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(f(x)-3x)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}\overset{x>0}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(f(x)-3x)}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(f(x)-3x)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-3x}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\dfrac{6}{2}=3$

18)Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=5x-2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\Re$, ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-5x^2-\lambda x+4}{\lambda f(x)+10x-2}=\dfrac{1}{4}$.

Λύση : Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y=5x-2$ τότε :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=5$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-5x]=-2$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-5x^2-\lambda x+4}{\lambda f(x)+10x-2}=\dfrac{1}{4}\overset{\div x}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-5x-\lambda+\dfrac{4}{x}}{\lambda\dfrac{f(x)}{x}+10-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\dfrac{-2-\lambda}{5\lambda+10}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\lambda+10=-8-4\lambda\Leftrightarrow 9\lambda=-18\Leftrightarrow\lambda=-2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19)Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=3x+5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)f(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$.

20)Έστω η ευθεία $(\varepsilon): y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

i. Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x\big)$

ii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$

(Θέμα Πανελληνίων)

21)Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί :

i. το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-4x^2+\sqrt{x^4+1}}{x^2f(x)-2x^3+x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}}$

ii. ο αριθμός $\lambda\in\Re$, ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-2x^2+\lambda x+13}{\lambda f(x)-4x+21}=\dfrac{4}{7}$.

22)Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\big[(x-1)f(x)-3x^2+x\big)\big]=2011$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

23)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-2x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}}=-3$. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη το $+\infty$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

KANONEΣ DE L´ HOSPITAL

Οι μεθοδολογίες και οι ασκήσεις για τους κανόνες De L´Hospital αναλύθηκαν στις σελίδες : 224 – 228

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

59. Με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πορεία που ακολουθούμε λέγεται μελέτη συνάρτησης. Ποια βήματα περιλαμβάνει ;

Απάντηση :

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της *f*.

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της *f*, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η *f* είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της *f*** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της *f*. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της *f*.

Σχόλιο :

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A* είναι **άρτια**, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι **περιττή**, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων *O*. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι **περιοδική** με περίοδο *T*, τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους *T*.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$.

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το R.

2. Η f είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3).$$

Οι ρίζες της f' είναι οι $x=3$, $x=0$ (διπλή) και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$				-16 T.E.	$\nearrow$	

Έχουμε επίσης

$$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2).$$

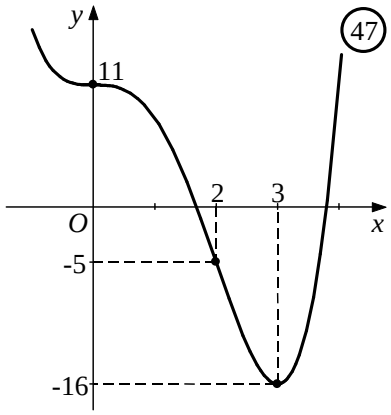
Οι ρίζες της f'' είναι οι $x=0$, $x=2$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		∪	11 Σ.Κ.	∩	-5 Σ.Κ.	∪	

4) Η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, αφού είναι πολυωνυμική τέταρτου βαθμού. Είναι όμως: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-4x^3+11)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-4x^3+11)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$.

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	11 Σ.Κ.	↘	-5 Σ.Κ.	↗	-16 Τ.Ε.	↗	$+\infty$



2. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $R-\{1\}$.

2. Η f είναι συνεχής ως ρητή.

3. Έχουμε $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-x+4}{x-1}\right)'=\dfrac{(2x-1)(x-1)-x^2+x-4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Οι ρίζες της f' είναι $-1,3$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-3 Τ.Μ.	↘		↘	5 Τ.Ε.	↗	

Έχουμε επίσης

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}=\frac{8}{(x-1)^3}.$$

Η f'' δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της δίνεται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		∩		∪	

4) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=1, \quad \text{οπότε} \quad \lambda=1$$

Και $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0, \quad \text{οπότε} \quad \beta=0.$$

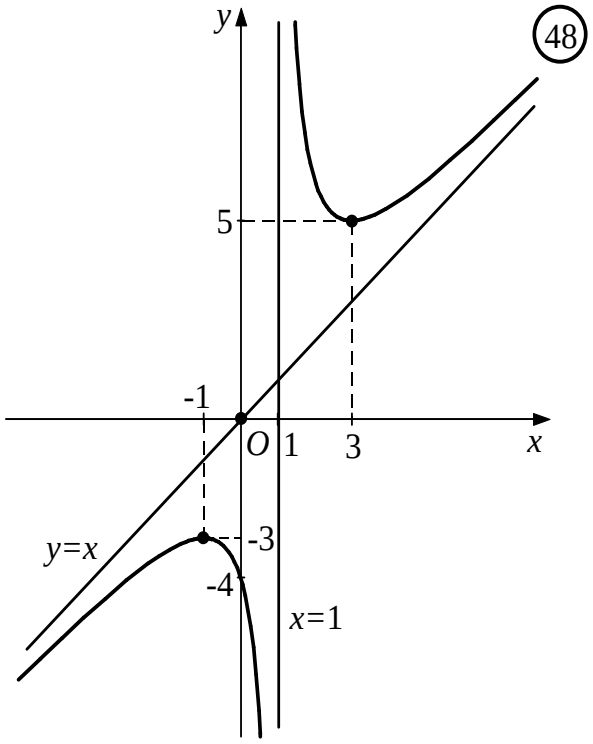
Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

Επίσης έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+4}{x-1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+4}{x-1}=+\infty$.

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3 T.M.	↘	$+\infty$	↘	5 T.E.	↗	$+\infty$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :
   i. $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$
   ii. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$
   iii. $f(x)=x^4-2x^2$.

2) Ομοίως τις συναρτήσεις :
   i. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$
   ii. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$.

3) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu x$ στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 2ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $xf'(x)>e^x-f(x)$ για κάθε $x\neq 0$.
   i. Να δείξετε ότι $f(x)>\dfrac{e^x-1}{x}$ για κάθε $x\neq 0$.
   ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   iii. Να δείξετε ότι $f(0)\geq 1$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$
   i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.
   ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha\in(1,e)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο α να είναι παράλληλη στον x΄x.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot e^{-2x}$
   i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής.
   iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

4) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}x^2\ln x, x>0\\ 0, x=0\end{cases}$.
   i. Να δείξετε ότι f είναι συνεχής .
   ii. Να βρείτε την $f'(0)$
   iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
   v. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   vi. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^2\ln x=\alpha$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sqrt{x}+\beta\ln x+\beta x$.
   i. Να βρείτε τα α,β ώστε το Α(1,3) να είναι σημείο καμπής της C_f.

   Για α=4 και β=-1 ,
   ii. Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.
   iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.
   iv. Να δείξετε ότι $4\sqrt{x}-\ln x\leq x+3$ για κάθε $x\geq 1$.

6) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f'(x)-f(x)=-4e^{-3x}$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=2$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $h(x)=e^{-x}f(x)-e^{-4x}$ είναι σταθερή στο R.

ii. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x}+\dfrac{1}{e^{3x}}$ για κάθε $x\in\Re$.

(ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2007)

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

iv. Να αποδείξετε ότι ισχύει f΄(x+1)>f(x+1)−f(x), για κάθε x > 0. (3ο Πανελλήνιες 2008)

8) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(1)=1$ και : $xf(x)+x^2f'(x)=1$ για κάθε $x>0$.

i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

v. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $ex=e^{ax}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\Re$.

9) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(e)=e^2$ και : $xf'(x)-2f(x)=x^2$ για κάθε $x>0$.

i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=x^2\ln x$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

v. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x=e^{\frac{a}{x^2}}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\Re$.

10) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(0)=0$ και : $f'(x)-f(x)=e^{x}$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=xe^{x}$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

11) Για μια πραγματική συνάρτηση *f*, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$, ισχύει ότι: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1). *(Θέμα 3ο Πανελλήνιες 2001)*

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$ όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

i. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι α=e
ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.
iii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞)
iv. αν β, γ $\in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2009)

13) Δίνεται συνάρτηση $f: \Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in \Re$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση : $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$ για κάθε $x \in \Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση : $g(x) = f(x) \cdot e^{-2x}$ είναι κυρτή στο R.
ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$. *(Θέμα Πανελληνίων)*

14) Έστω η συνάρτηση $f: \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει $f''(x) < -4f(x) + 4f'(x)$ για κάθε $x \in \Re$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$, $x \in \Re$.

i. Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη στο R.
ii. Αν η C_g εφάπτεται στον άξονα x΄x , να δείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Re$

15) Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει : $f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2e^x$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$
ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι η $(\varepsilon): y = 2x + 2$.
iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην ευθεία (ε) και η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

(Θέμα B study4exams)

16) Να δείξετε ότι :

i. $\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$ για κάθε $x>0$

ii. Η συνάρτηση $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

Επιπλέον :

iii. να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Θέμα Γ study4exams)

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\Re$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$ ισχύει $e^{2\alpha+\beta-1}-\ln(2\alpha+\beta)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln(\alpha+2\beta-1)\leq 2$, να υπολογίσετε τους $\alpha,\beta\in\Re$.

(Θέμα Γ study4exams)

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2+1)\ln x$, $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\ln x+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο ώστε το σημείο $\mathrm{A}(x_0,f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

(Θέμα Γ study4exams)

19) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+2)-5}{x-1}=6$

i. Να αποδείξετε ότι $f(3)=5$ και $f'(3)=6$

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)}$

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=xf(x)-3x-7\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\Re$, τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

iv. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει $g'(x)\leq f'(3)$, για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=x^6$, έχει το πολύ μια ρίζα μεγαλύτερη του 1.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

20) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(1)=0$
- $2\sqrt{1-x}\,f'(x)=1+\dfrac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$, $x\in(0,1]$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3 f^{-1}(x)\right)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $\mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right)$, με $x_0\in(0,1)$.

v. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

21) Έστω η συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to\Re$ με $f(2)=0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και κυρτή στο $(2,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6)=(7x-32)f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,5)$.

Αν επιπλέον ισχύει : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3}=\dfrac{1}{6}$

iii. Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$

iv. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

v. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

22) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*$ και ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{f(x)}{x}$, για κάθε $x\in\Re^*$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ x, & x=0\end{cases}$

ii. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ότι η ευθεία $(\varepsilon):y=\dfrac{1}{2}x+1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο κοινό της σημείο με τον άξονα y΄y.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

iv. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\Re$.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2+4x+3)e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\big(0, f(0)\big)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα : $(x^2+4x+3)e^x \geq 7x+3$, για κάθε $x \geq -4+\sqrt{3}$.

(Θέμα Γ study4exams)

24) Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ.

i. Να δείξετε ότι : $f(\alpha)+f(\beta) \geq 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.

Επιπλέον :

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2-x^2}{x+1}$, $x>-1$. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.

iii. Αν $\alpha > \dfrac{1}{e}$, $\beta > \dfrac{1}{e}$ να δείξετε ότι : $\dfrac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\dfrac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1} \geq 2\dfrac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$

(Θέμα Γ study4exams)

25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|1-\ln x|}{x}$, με $x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Αν η τετμημενη του σημείου $\mathrm{M}\big(x, f(x)\big)$ μεταβάλλεται με ρυθμό 1 μ/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $\mathrm{E}(t)$ του τριγώνου ΑΟΒ, όπου $\mathrm{A}(x,0), \mathrm{O}(0,0), \mathrm{B}\big(0, f(x)\big)$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0)=4$.

iii. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση $(1,1)$, τότε να αποδείξετε ότι : $x(t)=t+1$ και ότι η συνάρτηση $\mathrm{E}(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e-1,+\infty)$.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2012)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 2ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2019

1) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

2) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0,τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

3) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

4) Η συνάρτηση f με f΄(x) = – 2ημx+$\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ + 3, όπου x∈[$\frac{\pi}{2}$,π) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

5) Αν f΄(x) = g΄(x) + 3 για κάθε x∈Δ, τότε η συνάρτηση h(x)=f(x) – g(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

6) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

7) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο x_0∈[α, β] στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι f΄(x_0)=0.

8) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

9) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

10) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει f΄(x) = 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

11) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει f΄(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

12) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f΄΄(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

13) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

14) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και f΄(x_0)=0, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

15) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν f ΄ (x) > 0 στο (α, x_0) και f ΄ (x) < 0 στο (x_0, β), τότε το f (x_0) είναι τοπικό ελάχιστο της f .

16) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y = f(x), όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

17) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

18) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$

19) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

20) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.

21) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

22) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

23) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ, της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f, παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$.

24) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, όπου $x \in IR$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$.

25) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν :

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

26) Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

27) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

28) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο (α,x_o) και κοίλη στο (x_o,β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_o\ f(x_o))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

29) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ∈(α,β) τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

30)Έστω συνάρτηση f(x) = εφx.Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR_1=IR. – {x/συνx = 0} και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

31) Ισχύει ο τύπος $\left(3^x\right)' = x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε x ∈ IR .

32) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f(x_o)g'(x_o)-f'(x_o)g(x_o)}{[g(x_o)]^2}$$

33) Για κάθε x ≠ 0 ισχύει $\left[\ln|x|\right]' = \frac{1}{x}$

34) Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

35) Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \Re$, τότε το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

36) Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \Re$, τότε το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

37) Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ είναι +∞ ή –∞, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

38) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε f΄(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

39) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x) = g(x) για κάθε x∈Δ.

40) Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx με πεδίο ορισμού το R, τότε f ΄(x)= – συνx, για κάθε x∈R.

41) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

42) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει : f΄΄(x) > 0 για κάθε πραγματικό αριθμό x.

43) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

44) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

45) Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και
- f(α) = f(β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ∈ (α, β) τέτοιο, ώστε: f΄ (ξ) = 0.

46) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

47) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο (-1,0).

48) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει τρείς πραγματικές ρίζες.

49) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

50) Ισχύει : (συνx)΄ = ημx, $x \in R$.

51) Αν f(x) = α^x, α > 0, τότε ισχύει (α^x) ΄ = xα^{x-1} .

52) Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε πραγματικό αριθμό c, ισχύει ότι: $(cf(x))' = f'(x)$, για κάθε x ∈ Δ.

53) Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\Re$ συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, $f'(5) = 6$, $g(0) = 5$, $g'(0) = 1$, $g'(4) = 2$, τότε : $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$

54) Έστω P(x), Q(x) πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

55) Για κάθε $x \in \Re_1 = \Re - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ ισχύει: $(\varepsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

56) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

57) Για κάθε $x \in \Re_2 = \Re - \{x / \eta\mu x = 0\}$ ισχύει: $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

58) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

59) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει πάντα f(x) = g(x) για κάθε $x_0 \in \Delta$

60) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

61) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν f΄(x) > 0 στο (α,x_0) και f΄(x) < 0 στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

62) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει :

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

63) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

64) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

65) Η συνάρτηση f(x) = ln |x|, x ε $\mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει : $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

66) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

67) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, όπου $x_0 \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$

τότε : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

68) Αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

69) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

70) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

71) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

72) Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

73) Για κάθε συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

74) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο [α,β] με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$

75) Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

76) Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

77) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

78) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \Re$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
ΒΑΣΙΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Α΄

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(2017)***

«Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

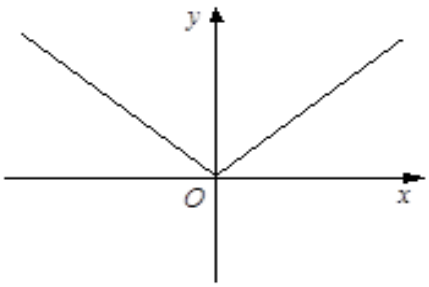
Απάντηση :

α. Ψ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1 \text{ ενώ, } \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.



2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(2019)***

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ με:

- συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει όταν η f είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1\ , & x < 0 \\ \\ 1\ , & x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

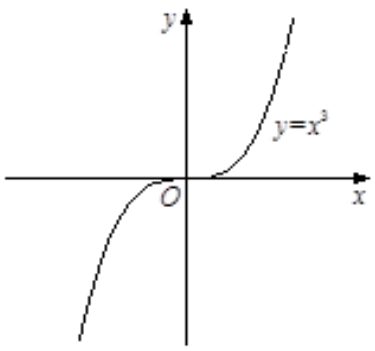
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$.



4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Ένα τοπικό μέγιστο δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο».

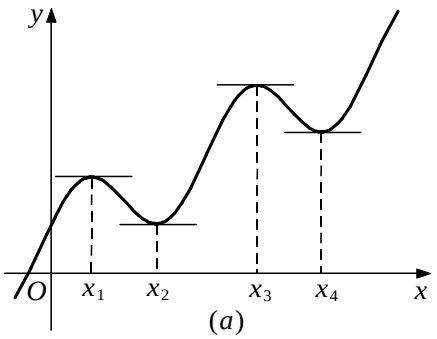
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι το τοπικό μέγιστο στη θέση x_1 είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο στη θέση x_4.



(a)

5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το μέγιστο αυτής».

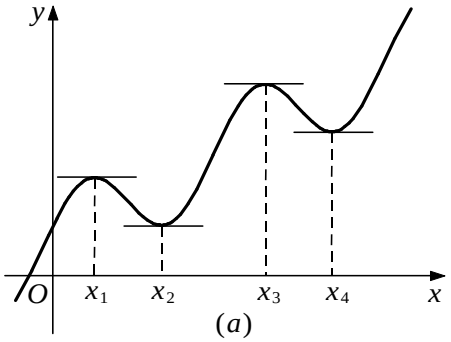
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Αυτό επιβεβαιώνεται στο παρακάτω σχήμα από το οποίο παρατηρούμε ότι στη θέση x_3, αν και έχουμε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, δεν είναι το μέγιστο της συνάρτησης αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



(a)

6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Re$, αν για κάποιο $x_0 \in \Re$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι υποχρεωτικά θέση τοπικού ακρότατου της f».

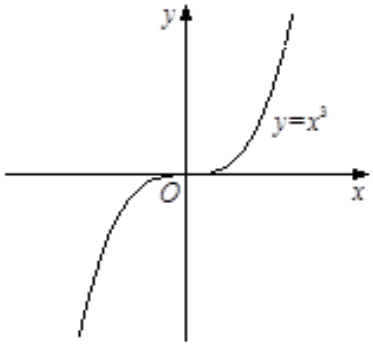
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2$. Η ρίζα της παραγώγου είναι το 0, δηλαδή $f'(0) = 0$. Εντούτοις, όπως φαίνεται στο σχήμα το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.



7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Για κάθε συνάρτηση f κυρτή στο Δ ισχύει $f''(x_0) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ».

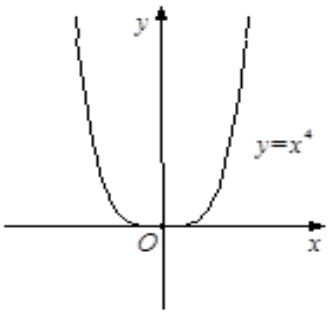
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\Re$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\Re$, αφού $f''(0) = 0$.



8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της f ».

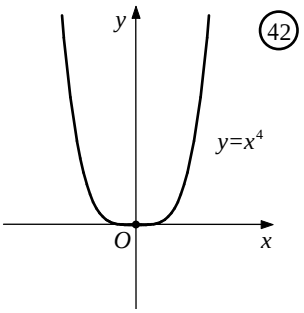
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). Ισχύει $f''(x)=12x^2$ δηλ. $f''(0)=0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.



42

3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

60. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της **f** στο **Δ** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Σχόλια :

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

61. Θεώρημα (2001 Β΄, 2003, 2015 Β΄)

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$,είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη :

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού
$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε , για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν οι σχέσεις $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε : $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

Παρατηρήσεις :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε η f έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει, διότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ, αλλά έχουν παράγουσα στο διάστημα αυτό.

  Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\,,\ x\neq 0\\ 0\qquad\qquad\qquad\ ,\ x=0\end{cases}$ δεν είναι συνεχής, αλλά έχει παράγουσα στο $\Re$ την $F(x)=\begin{cases}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\,,\ x\neq 0\\ 0\qquad\ ,\ x=0\end{cases}$
- Αν μια συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

62. Πίνακας των παραγουσών βασικών συναρτήσεων.

Απάντηση :

Συνάρτηση	Παράγουσα
$f(x)=0$	$F(x)=c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=1$	$F(x)=x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=x^{\alpha}$	$F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\ ,\ c\in\Re\ ,\ \alpha\neq-1$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$F(x)=\eta\mu x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\eta\mu x$	$F(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$F(x)=\varepsilon\phi x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x)=-\sigma\phi x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+c\ ,\ c\in\Re$
$f(x)=\alpha^x$	$F(x)=\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c\ ,\ c\in\Re$

Σχόλια :

- Οι τύποι αυτού του πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.
- Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε :
  - i. Η συνάρτηση F+G είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f+g
  - ii. Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ :

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της **f** στο **Δ** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ :

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$,είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $0 = (c)'$
- $c = (cx)'$
- $x^{\alpha} = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$, $\alpha \neq -1$
- $\frac{1}{x} = \left(\ln|x|\right)'$, $x \neq 0$
- $\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$, $x \neq 0$
- $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)'$
- $\eta\mu x = \left(-\sigma\upsilon\nu x\right)'$
- $\sigma\upsilon\nu x = \left(\eta\mu x\right)'$
- $e^x = \left(e^x\right)'$
- $\alpha^x = \left(\frac{\alpha^x}{\ln a}\right)'$
- $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \left(\varepsilon\phi x\right)'$
- $\frac{1}{\eta\mu^2 x} = \left(-\sigma\phi x\right)'$

- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$
- $f(x)+x\cdot f'(x)=\left(x\cdot f(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\left(\ln|f(x)|\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$
- $e^{f(x)}\cdot f'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'$
- $f^{\nu}(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ π.χ. $f(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'$
- $\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)=\left(\eta\mu f(x)\right)'$
- $\eta\mu f(x)\cdot f'(x)=\left(-\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=3x^2$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,2).
   Λύση :
   Είναι : $F(x)=3\dfrac{x^{2+1}}{2+1}+c=3\dfrac{x^3}{3}+c=x^3+c,\ \ x\in\Re, c\in\Re$
   Η C_F διέρχεται από το $\mathrm{A}(1,2)$ άρα : $F(1)=2\Leftrightarrow 1^3+c=2\Leftrightarrow c=1$.
   Άρα : $F(x)=x^3+1,\ \ x\in\Re$

2. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :
   (Παράγουσες Βασικών Συναρτήσεων)
   i. $f(x)=x^3+12x^2-6x-5$
   ii. $f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{x}+2e^x\ ,\ x>0$
   iii. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{5}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x\ ,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

iv. $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2}$, $x>0$

Λύση :

i. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+12\dfrac{x^3}{3}-6\dfrac{x^2}{2}-5x+c \Leftrightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}+4x^3-3x^2-5x+c$, $x\in\Re$, $c\in\Re$

ii. $F(x)=3\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2e^x+c \Leftrightarrow F(x)=3\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+2e^x+c \Leftrightarrow$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(x)=3\ln x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2e^x+c$, $x>0$, $c\in\Re$ $\left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}:\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\right)$

iii. $F(x)=3\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-5\sigma\phi x-\varepsilon\phi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=3\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-5\sigma\phi x-\varepsilon\phi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=6\sqrt{x}-5\sigma\phi x-\varepsilon\phi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c$ $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $c\in\Re$

$\left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}:\dfrac{3}{\sqrt{x}}=\dfrac{3}{x^{\frac{1}{2}}}=3x^{-\frac{1}{2}}\right)$

iv. Είναι : $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2}=2x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$, άρα :

$F(x)=x^2+\ln|x|+\dfrac{1}{x}+c \overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(x)=x^2+\ln x+\dfrac{1}{x}+c$ $x>0$, $c\in\Re$

3. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

(Παράγουσες Συναρτήσεων με εφαρμογή κανόνων παραγώγισης)

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x$

ii. $f(x)=\dfrac{2e^x-xe^x}{x^3}$, $x>0$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x(1+x\ln x)}{x}$, $x>0$

Λύση :

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x=(x^2)'\eta\mu x+x^2(\eta\mu x)'=(x^2\cdot\eta\mu x)'$

Άρα : $F(x)=x^2\cdot\eta\mu x+c$, $x\in\Re$, $c\in\Re$

ii. $f(x)=\dfrac{2e^x-xe^x}{x^3}=\dfrac{2xe^x-x^2e^x}{x^4}=-\dfrac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}=\left(-\dfrac{e^x}{x^2}\right)'$

Άρα : $F(x)=-\dfrac{e^x}{x^2}+c$ $x>0$, $c\in\Re$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x(1+x\ln x)}{x}=\dfrac{e^x+e^x x\ln x}{x}=\dfrac{e^x}{x}+e^x\ln x=e^x\dfrac{1}{x}+e^x\ln x=\left(e^x\ln x\right)'$

Άρα : $F(x)=e^x\ln x+c \quad x>0,\quad c\in\Re$

4. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :
(Παράγουσες Σύνθετων Συναρτήσεων)

i. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii. $f(x)=(x^2+3x+5)^6\cdot(2x+3)$

iii. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+2017}$

iv. $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}$

Λύση :

i. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}=(-\sigma\upsilon\nu x)'\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}=\left(-e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'$, άρα : $F(x)=-e^{\sigma\upsilon\nu x}+c \quad x\in\Re,\quad c\in\Re$

ii. $f(x)=(x^2+3x+5)^6\cdot(2x+3)=(x^2+3x+5)^6\cdot(x^2+3x+5)'=\left(\dfrac{\left(x^2+3x+5\right)^7}{7}\right)'$

Άρα : $F(x)=\dfrac{\left(x^2+3x+5\right)^7}{7}+c \quad x\in\Re,\quad c\in\Re.$

iii. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+2017}=\dfrac{\left(x^2-x+2017\right)'}{x^2-x+2017}=\left(\ln\left|x^2-x+2017\right|\right)'$

Άρα : $F(x)=\ln\left|x^2-x+2017\right|+c \quad x\in\Re,\quad c\in\Re.$

iv. $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=\dfrac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=\dfrac{2\eta\mu x\cdot(\eta\mu x)'}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=\dfrac{\left(1+\eta\mu^2 x\right)'}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=2\dfrac{\left(1+\eta\mu^2 x\right)'}{2\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=\left(2\sqrt{1+\eta\mu^2 x}\right)'$

Άρα : $F(x)=2\sqrt{1+\eta\mu^2 x}+c \quad x\in\Re,\quad c\in\Re.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=x^2$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1).

6. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=x$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,3).

7. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

v. $f(x)=x$

vi. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}\ ,\ x>0$

vii. $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ x>0$

viii. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}\ ,\ x>0$

8. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^3$

ii. $f(x)=\dfrac{1}{x^4}\ ,\ x>0$

iii. $f(x)=\sqrt[3]{x}$

iv. $f(x)=x\sqrt{x}$

9. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sigma\upsilon\nu x\ ,\ x>0$

ii. $f(x)=2e^x-\dfrac{3}{\eta\mu^2 x}\ ,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=3^{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2\ ,\ x>0$

10. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\eta\mu x-\dfrac{1}{x^2}+e^{-x}\ ,\ x>0$

ii. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\ ,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=2^x-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}\ ,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

11. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{3x^3+2x-1}{x^2}\ ,\ x>0$

ii. $f(x)=\dfrac{(3x-2)^2}{x^2}\ ,\ x<0$

iii. $f(x)=\dfrac{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^2 x-2}{\eta\mu^2 x}\ ,\ x\in(0,\pi)$

12. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$

ii. $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$

iii. $f(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}\ ,\ x>0$

iv. $f(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

v. $f(x)=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

vi. $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$

13. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+1)^2$

ii. $f(x)=(3x^2-2)(x^3-2x+1)^2$

iii. $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^3}$

iv. $f(x)=\dfrac{3x}{\left(x^2+3\right)^2}$

v. $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$

vi. $f(x)=x\sqrt{3x^2+2}$

vii. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\eta\mu x}$

viii. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ix. $f(x)=\sigma\upsilon\nu 3x-5e^{2x}$

x. $f(x)=2\eta\mu 3x-5\cdot 2^x$

xi. $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

xii. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

xiii. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

xiv. $f(x)=\dfrac{1}{x-1},\ x>1$

xv. $f(x)=\dfrac{1}{x+3},\ x>-3$

xvi. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

xvii. $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

2Α. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

14. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$, με $f(1)=7$ και F μια αρχική της f στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει : $F(x)=xf(x)-2x^3$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

15. Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $F(0)=0$ όπου F μια αρχική της f, για την οποία ισχύει : $2xF(x)+x^2f(x)=4x^3-f(x)$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

2Β. ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ – ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}(x-1)$ και F μια αρχική της f στο $\Re$ με $F(1)=0$.
   i. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $F\left(F'(x)-2015\right)=0$ έχει μοναδική ρίζα.
   iii. Να δείξετε ότι η F είναι κυρτή.
   iv. Να δείξετε ότι : $F(x-1)+F(x+1)>2F(x)$ για κάθε $x\in\Re$.

17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ και F μια αρχική της f, για την οποία ισχύει : $F(1-2x)+F(x^2+2)=x^4+5x^2+2x$ για κάθε $x\in\Re$.
   i. Να βρείτε τις τιμές $f(1),\ f(3)$.
   ii. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$, με $x_0\in(1,3)$.
   iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$, με $\xi_1<\xi_2$, ώστε : $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{3}{f'(\xi_2)}=2$.

18. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο $[0,1]$ με $F(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $2F\left(x^2-x\right)=-x(2x-1)f\left(x^2-x\right)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

19. Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ με $F(0)=0$. Αν ισχύει $F(x)\le e^x\ln(x+1)$, για κάθε $x>-1$, να δείξετε ότι C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$.

2Γ. ΟΡΙΑ

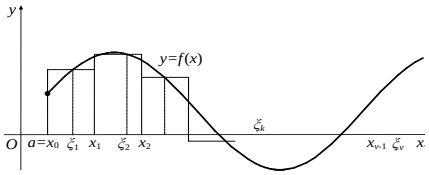
20. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$. Αν F μια παράγουσα της f στο $\Re$ με $F(0)=0$, να βρείτε τα όρια :
   i. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xF(x)}{(e^x-1)\eta\mu x}$
   ii. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{f(x)}$
   iii. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xF(x)}{e^x-x-1}$
   iv. $\lim\limits_{x\to0}\left[\left(e^{F^2(x)}-1\right)\ln|f(x)|\right]$

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

63. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_\nu = \beta$

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,...,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$.



Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ. Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

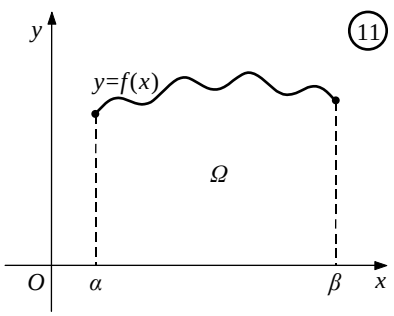
Σχόλιο :

- Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος *S* της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί *α* και *β* ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου.

- Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα *x* είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός.

Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος :

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της *f* τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$.



Επομένως,

Αν $f(x) \geq 0$, τότε $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

64. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Απάντηση :

α) Ισχύει ότι :

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

β) Έστω f,g **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu \in R$. Τότε ισχύουν:

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ και γενικά
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

γ) Αν η f είναι **συνεχής** σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_0^3 f(x)dx = 3$ και $\int_0^4 f(x)dx = 7$, τότε

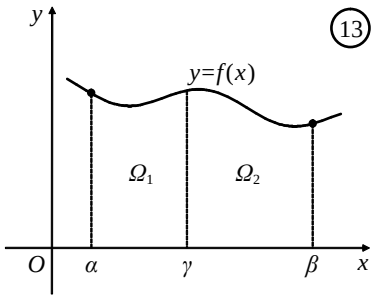
$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -3+7 = 4 .$$

Σημείωση :

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι: $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$

αφού $E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$, $E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

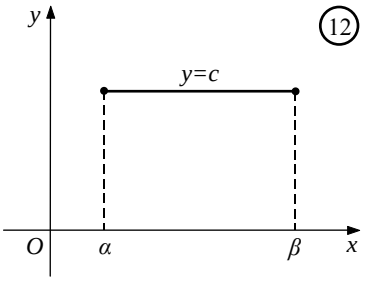
και $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.



δ) Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ ..

ε) Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c (Σχ. 12).

Δηλ. $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta - \alpha)$.



3.5 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

65. Έστω $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in\Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ. Ποια είναι η σχέση της F με την f ;

Απάντηση :

Η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in\Delta$, είναι συνεχής και είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

66. ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδης θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)
(2002, 2008 Β΄, 2010, 2013)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\Re$ τέτοιο, ώστε : $G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε : $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$

και άρα $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

67. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση :

α) Ισχύει ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

β) Ισχύει ότι: $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f,g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Α : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συμφώνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ) ισχύει :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \left[F(x)\right]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

I. $\int_\alpha^\beta 1dx = \left[x\right]_\alpha^\beta$

II. $\int_\alpha^\beta x^\kappa dx = \left[\frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_\alpha^\beta$

III. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_\alpha^\beta$

IV. $\int_\alpha^\beta e^x dx = \left[e^x\right]_\alpha^\beta$

V. $\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu x dx = \left[\eta\mu x\right]_\alpha^\beta$

VI. $\int_\alpha^\beta \eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta$

VII. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_\alpha^\beta$

VIII. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \left[\sqrt{x}\right]_\alpha^\beta$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Αν $\int_1^5 f(x)dx = 2$, $\int_2^5 f(x)dx = 3$ και $\int_1^7 f(x)dx = 5$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_5^2 f(x)dx$

ii. $\int_5^7 f(x)dx$

iii. $\int_1^2 f(x)dx$

iv. $\int_2^7 f(x)dx$

Λύση :

i. $\int_5^2 f(x)dx = -\int_2^5 f(x)dx = -3$

ii. $\int_5^7 f(x)dx = \int_5^1 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = -\int_1^5 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = -2 + 5 = 3$

iii. $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_5^2 f(x)dx = 2 - 3 = -1$

iv. $\int_2^7 f(x)dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_5^1 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = 3 - 2 + 5 = 6$

2) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^3 (4x-3)dx$ ii. $\int_2^3 (3x^2-2x+5)dx$ iii. $\int_0^1 (2xe^x+x^2e^x)dx$ iv. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}dx =$

Λύση :

i. $\int_1^3 (4x-3)dx = \left[4\frac{x^2}{2}-3x\right]_1^3 = \left[2x^2-3x\right]_1^3 = (18-9)-(2-3) = 9+1 = 10$

ii. $\int_2^3 (3x^2-2x+5)dx = \left[x^3-x^2+5x\right]_2^3 = (27-9+15)-(8-4+10) = 33-14 = 19$

iii. $\int_0^1 (2xe^x+x^2e^x)dx = \int_0^1 (x^2e^x)'dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 = e-0 = e$

iv. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(\eta\mu x)'x-\eta\mu x(x)'}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)'dx = \left[\frac{\eta\mu x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0-\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Αν $\int_1^3 f(x)dx = 5$, $\int_5^7 f(x)dx = 2$ και $\int_3^7 f(x)dx = 3$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_7^5 f(x)dx$

ii. $\int_3^5 f(x)dx$

iii. $\int_5^1 f(x)dx$

4) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 x^4dx$ ii. $\int_1^3 2x^3dx$ iii. $\int_1^2 \frac{2}{x^3}dx$ iv. $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx$ v. $\int_0^2 3\sqrt{x}dx$ vi. $\int_1^2 \sqrt[3]{x}dx$ vii. $\int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$

viii. $\int_0^1 \frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}dx$ ix. $\int_1^2 (4x-1)dx$ x. $\int_0^{\pi} (2e^x+\eta\mu x)dx$ xi. $\int_1^e (2x\ln x+x)dx$ xii. $\int_0^1 (x-e^x)dx$

5) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 (3x^2+2x+1)dx$ ii. $\int_1^2 (t+1)dt$ iii. $\int_0^2 (x^2+x+2)dx$ iv. $\int_0^{\pi} (2x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x)dx$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x+2\eta\mu x)dx$ vi. $\int_1^2 \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2}dx$ vii. $\int_1^4 \frac{2x^2-2x-3}{x}dx$ viii. $\int_0^2 (xe^x+e^x)dx$

ix. $\int_0^1 (2xe^x+x^2e^x)dx$ x. $\int_1^4 (2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}})dx$ xi. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}dx$

1Β. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε να ισχύει : $\int_{\alpha}^{3}(3x^2-\alpha x)dx=14$.

Λύση :

$$\int_{\alpha}^{3}(3x^2-\alpha x)dx=14\Leftrightarrow\left[x^3-\alpha\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{3}=14\Leftrightarrow 27-\alpha\frac{9}{2}-\left(\alpha^3-\alpha\frac{\alpha^2}{2}\right)=14\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27-\frac{9\alpha}{2}-\alpha^3+\frac{\alpha^3}{2}=14\Leftrightarrow 54-9\alpha-2\alpha^3+\alpha^3=28\Leftrightarrow\alpha^3+9\alpha-26=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+13)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-2=0\Leftrightarrow\alpha=2\\ \quad\eta\\ \alpha^2+2\alpha+13=0\quad\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\end{cases}.\ \text{Άρα}\ \alpha=2.$$

7) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re^*$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=\frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε την παράσταση : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{f(x)}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}dx$.

Λύση :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{f(x)}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\eta\mu x}{f(x)}+\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\eta\mu x\cdot f(x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx==\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(-\sigma\upsilon\nu x)'\cdot f(x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'\cdot f(x)-\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right)'dx=-\left[\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{\sigma\upsilon\nu 0}{f(0)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, ώστε να ισχύει : $\int_2^{\kappa}\frac{3x^2-1}{x^2+4}dx-\int_{\kappa}^{2}\frac{9-x^2}{x^2+4}dx=12$

9) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, ώστε να ισχύει : $\int_1^3\frac{e^x+x^3-x}{x^2+1}dx=\int_3^1\kappa dx+\int_3^1\frac{x^3+3x-e^x}{x^2+1}dx$

10) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε να ισχύει : $\int_{-1}^{\alpha}(\alpha x+3)dx=12$

11)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$, για την οποία ισχύει $\int_{-1}^{1} f(x)dx=12$, ενώ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1,f(1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=2x+2$. Να βρείτε τα α,β,γ.

12)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $f(1)=5$ και $\int_1^2\left(xf'(x)+f(x)\right)dx=1$. Να βρείτε :

i. την τιμή $f(2)$

ii. το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^2\left(3f(x)+xf'(x)\right)dx$

13)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $f'(1)+f(1)=0$ και $\int_0^1\frac{f''(x)-f(x)}{e^x}dx=2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(0,-5)$.

1Γ. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

14)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^2 f(t)\sigma\upsilon\nu x dt\right)dx=2$.

Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 f(t)dt$

ii. $\int_{-2}^{0}\left(\int_1^2 3t^2 f(x)dx\right)dt$

Λύση :

i. Έχω $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^2 f(t)\sigma\upsilon\nu x dt\right)dx=2\Leftrightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\left(\int_1^2 f(t)dt\right)dx=2$ (1)

Έστω $\int_1^2 f(t)dt=\lambda\in\Re$ τότε : Η (1) γίνεται : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\left(\int_1^2 f(t)dt\right)dx=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\lambda\sigma\upsilon\nu x dx=2\Leftrightarrow[\lambda\eta\mu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2\Leftrightarrow\lambda\eta\mu\pi-\lambda\eta\mu\frac{\pi}{2}=2\Leftrightarrow-\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=-2$

Δηλ. $\int_1^2 f(t)dt=-2$.

ii. $\int_{-2}^{0}\left(\int_1^2 3t^2 f(x)dx\right)dt=\int_{-2}^{0}3t^2\left(\int_1^2 f(x)dx\right)dt\overset{i.}{=}\int_{-2}^{0}3t^2\cdot(-2)dt=-\int_{-2}^{0}6t^2dt=\left[-2t^3\right]_{-2}^{0}=-16$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15)Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$.

i. Αν ισχύει ότι : $\int_1^2 t^2\left(\int_1^2 f(x)dx\right)dt=14$, τότε να βρείτε το $\int_1^2 f(x)dx$

ii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^3 g(x)dx=2$, τότε να βρείτε το : $\int_0^3\left(\int_1^2 f(t)g(x)dt\right)dx$

16)Αν ισχύει ότι $\int_4^5 f(x)dx=4$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_1^3\left(\int_4^5 xf(t)dt\right)dx$

17)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $I_1=\int_1^2\left(\int_3^x 4dt\right)dx$ και $I_2=\int_{-1}^2\left(\int_1^x 6t^2dt\right)dx$.

18)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)f(y)dy\right)dx-6\int_0^1 f(x)dx=-9$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 f(x)dx$

ii. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^1 f(t)\sigma\upsilon\nu 3xdt\right)dx$

1Δ. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

19) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\Re$ για την οποία ισχύει $f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt-45$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$. (4ο 2008)

Λύση : Έστω $\int_0^2 f(t)dt=\lambda\in\Re$, τότε $f(x)=(10x^3+3x)\lambda-45$

Άρα $\int_0^2 f(x)dx=\lambda\Leftrightarrow\int_0^2\left[(10x^3+3x)\lambda-45\right]dx=\lambda\Leftrightarrow\lambda\left[\frac{5x^4}{2}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^2-45[x]_0^2=\lambda\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 46\lambda-90=\lambda\Leftrightarrow\lambda=2$. Άρα $f(x)=20x^3+6x-45$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

20) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)=12x^2-2x\int_0^1 f(t)dt$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

21) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)=9x^2-\int_{-1}^1 2xf(t)dt$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

1Ε. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Όταν έχουμε μια συνάρτηση της μορφής : $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \alpha\nu\ \ x\le x_0 \\ f_2(x), & \alpha\nu\ \ x>x_0 \end{cases}$ τότε για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ με $\alpha<x_0<\beta$, εργαζόμαστε ως εξής :

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο x_0, καθώς για να έχει νόημα το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, πρέπει η f να είναι συνεχής στο [α,β] άρα και στο x_0. Στη συνέχεια έχουμε :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^{x_0} f_1(x)dx+\int_{x_0}^\beta f_2(x)dx=...$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & \alpha\nu\ \ x\le 0 \\ \eta\mu x, & \alpha\nu\ \ x>0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Λύση :

Για $x<0$ η $f(x)=x$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική,

Για $x>0$ η $f(x)=\eta\mu x$ είναι συνεχής ως τριγωνομετρική,

Στο $x_0=0$ είναι : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$ και $f(0)=0$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ επομένως η f είναι συνεχής για κάθε $x\in\Re$ άρα και στο [-π,π].

Έτσι : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} xdx+\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=$

$=-\frac{\pi^2}{2}+1+1=2-\frac{\pi^2}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3x^2+1, & \alpha\nu\ \ x\le 0 \\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & \alpha\nu\ \ x>0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & \alpha\nu\ \ x\le 1 \\ 3x^2-6x+8, & \alpha\nu\ \ x>1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

1ΣΤ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Συνήθως συναντάμε τη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$. Αρχικά λύνω την εξίσωση $f(x)=0$, βρίσκουμε το πρόσημο της f (με πινακάκι), βγάζουμε την απόλυτη τιμή, αν είναι απαραίτητο χωρίζουμε το [α,β], και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

25)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^2 (x^2-|x-1|)dx$

Λύση :

$\int_0^2 (x^2-|x-1|)dx$

Έχω : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

Άρα : έστω $f(x)=x^2-|x-1| \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+x-1, & x<1 \\ x^2-x+1, & x\geq 1 \end{cases}$

Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής, καθώς από την αρχική της μορφή η $f(x)=x^2-|x-1|$, είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Άρα : $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 (x^2+x-1)dx+\int_1^2 (x^2-x+1)dx=$

$$\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\left(\frac{8}{3}-2+2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

26) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^{10}|x+1|dx$ ii. $\int_{-2}^2|3x^2-3|dx$ ii. $\int_1^4|3x-x^2|dx$ iv. $\int_1^3|\ln x|dx$ v. $\int_0^3|x^2-3x+2|dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

I. $\int_\alpha^\beta e^{f(x)} f'(x)dx = \left[e^{f(x)}\right]_\alpha^\beta$

II. $\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \left[2\sqrt{f(x)}\right]_\alpha^\beta$

III. $\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[\ln|f(x)|\right]_\alpha^\beta$

IV. $\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \left[-\frac{1}{f(x)}\right]_\alpha^\beta$

V. $\int_\alpha^\beta f^\kappa(x) f'(x)dx = \left[\frac{(f(x))^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_\alpha^\beta$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αν το ολοκλήρωμα μας θυμίζει κάποια από τις παραπάνω μορφές ολοκληρωμάτων σύνθετων συναρτήσεων, τότε εφαρμόζουμε απευθείας τον αντίστοιχο τύπο. Συνήθως όμως οι συναρτήσεις μοιάζουν πολύ αλλά δεν είναι ίδιες. Τότε φτιάχνουμε την $f'(x)$ με κάποια απλή πράξη (π.χ. πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με ένα αριθμό) ώστε να αναχθούμε σε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 3x^2 e^{x^3+5}dx$ ii. $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ iii. $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1}dx$

iv. $\int_1^2 \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2}dx$ v. $\int_0^3 (2x-3)(x^2-3x)^5 dx$

Λύση :

i. $\int_0^1 3x^2 e^{x^3+5}dx = \int_0^1 (x^3+5)' e^{x^3+5}dx = \int_0^1 \left(e^{x^3+5}\right)' dx = \left[e^{x^3+5}\right]_0^1 = e^6 - e^5$

ii. $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = \int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{\sqrt{x^3+1}}dx = \int_0^1 (2\sqrt{x^3+1})'dx = \left[2\sqrt{x^3+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}-2$

iii. $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^2+5x+1)'}{x^2+5x+1}dx = \int_0^1 \left(\ln|x^2+5x+1|\right)' dx = \left[\ln|x^2+5x+1|\right]_0^1 = \ln 7$

iv. $\int_1^2 \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2}dx = \int_1^2 \frac{(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2}dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2+2x}\right)' dx = \left[-\frac{1}{x^2+2x}\right]_1^2 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{3} = \frac{5}{24}$

v. $\int_0^3 (2x-3)(x^2-3x)^5 dx = \int_0^3 (x^2-3x)'(x^2-3x)^5 dx = \int_0^3 \left(\frac{(x^2-3x)^6}{6}\right)' dx = \left[\frac{(x^2-3x)^6}{6}\right]_0^3 = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 2xe^{x^2+1}dx$ ii. $\int_0^2 x^2e^{x^3+1}dx$ iii. $\int_0^1 2e^{2x}dx$ iv. $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ v. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x+2}dx$

vi. $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx$ vii. $\int_0^1 \frac{4}{2x+1}dx$ viii. $\int_1^3 \frac{1}{3x-2}dx$ ix. $\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2}dx$ x. $\int_1^2 \frac{4}{(2x+1)^2}dx$

xi. $\int_{-1}^0 (x+1)^9dx$ xii. $\int_0^3 (x-1)^5dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3Α : ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$$

όπου $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι συνεχής συναρτήσεις στο [α,β]

Για να εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση, πρέπει το ολοκλήρωμα να έχει τη μορφή $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$ ή να το φέρουμε εμείς στη μορφή αυτή (η προς ολοκλήρωση συνάρτηση να μπορεί να πάρει τη μορφή γινομένου δυο συναρτήσεων) και στη συνέχεια η μια από τις δυο συναρτήσεις να γραφεί με τη μορφή παραγώγου. Ουσιαστικά χρειαζόμαστε την παράγουσα μιας εκ των δυο συναρτήσεων ώστε το ολοκλήρωμα να πάρει την επιθυμητή μορφή. Με παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίζονται ολοκληρώματα της μορφής :

1η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)e^{\kappa x+\lambda}dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $e^{\kappa x+\lambda}$

2η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\eta\mu(\alpha x)dx$, $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $\eta\mu x$ και της $\sigma\upsilon\nu x$ αντίστοιχα.

3η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\ln(\alpha x)dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $\mathrm{P}(x)$

4η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x)dx$, $\int_\alpha^\beta e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu(\beta x)dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $e^{\kappa x+\lambda}$. Σε αυτή την περίπτωση εμφανίζεται η ιδιομορφία ότι κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος εμφανίζεται σε κάποιο στάδιο ξανά το αρχικό ολοκλήρωμα. Έτσι θέτουμε το αρχικό ολοκλήρωμα με ένα γράμμα π.χ. I και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς I.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

29)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 xe^x dx$ ii. $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x} dx$

Λύση :

i. $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)'dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 (x)'e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e-(e-1) = 1$

ii. $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x} dx = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\int_0^1 x^2 (e^{-x})'dx = -\left[x^2 e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (x^2)'e^{-x} dx =$

$= -(e^{-1}) + \int_0^1 2xe^{-x} dx = -\frac{1}{e} - \int_0^1 2x(e^{-x})'dx = -\frac{1}{e} - \left[2xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x)'e^{-x} dx =$

$= -\frac{1}{e} - (2e^{-1}) + \int_0^1 2e^{-x} dx = -\frac{3}{e} - \left[2e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{3}{e} - (2e^{-1} - 2) = 2 - \frac{5}{e}$

30)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^\pi 2x\eta\mu 2x dx$

Λύση : $\int_0^\pi 2x\eta\mu 2x dx = \int_0^\pi 2x\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)' dx = \left[-2x\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2x)'\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)dx =$

$= \left[-x\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)dx = (-\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi) + \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu 2x dx = -\pi + \left[\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^\pi =$

$= -\pi + \frac{\eta\mu 2\pi}{2} - \frac{\eta\mu 0}{2} = -\pi$

31)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 (3x^2+1)\ln x dx$ ii. $\int_1^e \ln x dx$

Λύση :

i. $\int_1^2 (3x^2+1)\ln x dx = \int_1^2 (x^3+x)'\ln x dx = \left[(x^3+x)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 (x^3+x)(\ln x)'dx =$

$= 10\ln 2 - \int_1^2 (x^3+x)\frac{1}{x}dx = 10\ln 2 - \int_1^2 (x^2+1)dx = 10\ln 2 - \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^2 = 10\ln 2 - \left(\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-1\right) =$

$= 10\ln 2 - \frac{10}{3}$

ii. $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)'\ln x dx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'dx = e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e - \int_1^e 1dx =$

$e - \left[x\right]_1^e = e - e + 1 = 1$

32)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^\pi e^x \eta\mu x dx$

Λύση : Έχω : $I = \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx = \int_0^\pi (e^x)'\eta\mu x dx = \left[e^x\eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(\eta\mu x)'dx =$

$= e^\pi\eta\mu\pi - e^0\eta\mu 0 - \int_0^\pi e^x\sigma\upsilon\nu x dx = -\int_0^\pi (e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx = -\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx =$

$-(e^\pi\sigma\upsilon\nu\pi - e^0\sigma\upsilon\nu 0) + \int_0^\pi e^x(-\eta\mu x)dx = -(-e^\pi - 1) - \int_0^\pi e^x\eta\mu x dx = e^\pi + 1 - I$

Άρα : $I = e^\pi + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi+1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

33)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 2xe^x dx$ ii. $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ iii. $\int_0^1 3xe^x dx$ iv. $\int_1^2 (x+1)e^x dx$ v. $\int_0^2 (1-3x)e^x dx$

vi. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ vii. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ viii. $\int_0^1 (3x^2-2x+1)e^{2x} dx$

34)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx$ β. $\int_0^{\pi} x^2\sigma\upsilon\nu x dx$ γ. $\int_0^{\pi} x\eta\mu 2x dx$ iv. $\int_0^{\pi} 2x^2\eta\mu 2x dx$

35)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_1^2 x\ln x dx$ β. $\int_1^2 x\ln 2x dx$ γ. $\int_1^2 2x^2\ln x dx$ δ. $\int_1^2 (3x^2-4x)\ln x dx$

36)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sigma\upsilon\nu x dx$ β. $\int_0^{\pi} e^{2x}\sigma\upsilon\nu x dx$ γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\eta\mu 2x dx$ δ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sigma\upsilon\nu 2x dx$

3Β. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

37)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει : $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=2$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(\pi,f(\pi))$ έχει εξίσωση : $2x-\pi y-\pi=0$. Να βρείτε :

i. τις τιμές $f(\pi), f'(\pi)$ και $f(0)$

ii. το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\pi} xf''(x)dx$

Λύση :

i. Η ευθεία $(\varepsilon):2x-\pi y-\pi=0\Leftrightarrow(\varepsilon):y=\frac{2}{\pi}x-1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(\pi,f(\pi))$ αν : $\begin{cases} f'(\pi)=\frac{2}{\pi} \\ f(\pi)=\frac{2}{\pi}\pi-1\Leftrightarrow f(\pi)=1 \end{cases}$

Επίσης :

1ος τρόπος : $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=2\Leftrightarrow\int_0^{\pi}\left(f(x)\eta\mu x+f''(x)\eta\mu x\right)dx=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi}f''(x)\eta\mu x dx=2\Leftrightarrow\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\eta\mu x dx=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)(\eta\mu x)'dx=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+0-\int_0^{\pi}f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - \left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' dx = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 1$

2ος τρόπος :

$\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right)\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \left(f(x)\eta\mu x + f''(x)\eta\mu x\right) dx = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)' dx + \left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)(\eta\mu x)' dx = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[-f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)(-\sigma\upsilon\nu x) dx + \left[f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0\right] - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0\right) + \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 1$

ii. $\int_0^{\pi} xf''(x) dx = \left[xf'(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (x)' f'(x) dx = \pi f'(\pi) - 0 - \int_0^{\pi} f'(x) dx = \pi\frac{2}{\pi} - \left[f(x)\right]_0^{\pi} =$

$= 2 - f(\pi) + f(0) = 2 - 1 + 1 = 2$.

38)Έστω F μια παράγουσα στο $\Re$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 F(x) dx$. ***(Ολοκλήρωμα Παράγουσας F)***

Λύση :

Είναι : $F'(x) = f(x)$, $x \in \Re$.

Έχουμε : $I = \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (x)' F(x) dx = \left[xF(x)\right]_0^1 - \int_0^1 xF'(x) dx = F(1) - \int_0^1 xf(x) dx =$

$= 0 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = -\int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = -\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} dx = -\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = -\left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 - \sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39)Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(1) = 5$ και $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 xf'(x) dx$

40) Έστω οι συναρτήσεις f, g, με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι :

$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x)g''(x) - f''(x)g(x)\right) dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta))$.

41) Έστω F μια παράγουσα στο $\Re$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 F(x) dx$.

42)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της Α(1,2) και Β(3,9) τέμνονται στο σημείο Γ(4,11). Να βρείτε :

i. τις τιμές $f'(1), f'(3)$ ii. το ολοκλήρωμα : $\int_1^3 xf''(x)dx$

43)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει : $\int_1^3\int_0^2 xf(t)dtdx=12$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2,f(2))$ έχει εξίσωση : $2x-y-3=0$. Να υπολογίσετε :

i. τις τιμές $f(2), f'(2)$ ii. το $\int_0^2 f(x)dx$ iii. το $\int_0^2 x^2 f''(x)dx$

44)Δίνεται το ολοκλήρωμα : $I(\lambda)=\int_\lambda^1 \ln x^3 dx$ με λ>0

i. Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} I(\lambda)$.

45)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

46)Δίνεται το ολοκλήρωμα : $I(\lambda)=\int_1^\lambda\left(\frac{x}{e^x}-\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$ με λ>1

i. Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

3Γ. ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

47)Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_\nu=\int_0^1 x^\nu\cdot e^x dx$, με $\nu\in N^*$.

i. Να αποδείξετε ότι $I_\nu=e-\nu\cdot I_{\nu-1}$ για κάθε $\nu\geq 2$.

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 xe^x dx$ και $\int_0^1 x^4 e^x dx$

48)Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_\nu=\int_0^\pi x^\nu\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$, με $\nu\in N^*$.

i. Να αποδείξετε ότι $I_\nu=-\nu\pi^{\nu-1}-\nu(\nu-1)I_{\nu-2}$ για κάθε $\nu\geq 4$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x^5\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$

49) Αν $I_\nu=\int_0^1\frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}dt$, $\nu\in\mathrm{N}$,

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_\nu+I_{\nu+1}$, $\nu\in\mathrm{N}$

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)}dx$

- **1η περιπτωση :** Αν $\mathrm{P}(x)=\mu Q'(x)$ τότε : $I=\mu\left[\ln|Q(x)|\right]_{\alpha}^{\beta}$
- **2η περιπτωση :** Αν $\mathrm{Βαθμός}\ \mathrm{P}(x)<\mathrm{Βαθμός}\ Q(x)$ τότε :
  - ✓ Αν $\mathrm{Βαθμός}\ \mathrm{P}(x)=0\quad και\quad \mathrm{Βαθμός}\ Q(x)=1$ έχουμε : $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mu}{\alpha x+\beta}dx=\frac{\mu}{\alpha}\left[\ln|\alpha x+\beta|\right]_{\alpha}^{\beta}$
  - ✓ Αν $\mathrm{Βαθμός}\ \mathrm{P}(x)=1\quad και\quad \mathrm{Βαθμός}\ Q(x)=2$ με $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και $\alpha\neq 0$, $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ τότε : $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\kappa x+\lambda}{(\alpha_1 x-x_1)(\alpha_2 x-x_2)}dx$
    $=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{A}}{(\alpha_1 x-x_1)}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{B}}{(\alpha_2 x-x_2)}dx$
- **3η περιπτωση :** Αν $\mathrm{Βαθμός}\ \mathrm{P}(x)\geq\mathrm{Βαθμός}\ Q(x)$ τότε εκτελούμε την ευκλείδεια **διαίρεση** $\mathrm{P}(x):Q(x)$ και έτσι έχουμε : $\mathrm{P}(x)=Q(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

50)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+3}dx$ ii. $\int_0^1\frac{5}{3x+2}dx$ iiii. $\int_4^5\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$ iv. $\int_4^5\frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx$

Λύση :

i. $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+3}dx=\int_0^1\frac{(x^2+x+3)'}{x^2+x+3}dx=\left[\ln|x^2+x+3|\right]_0^1=\ln 5-\ln 3=\ln\frac{5}{3}$

ii. $\int_0^1\frac{5}{3x+2}dx=5\int_0^1\frac{1}{3x+2}dx=\frac{5}{3}\int_0^1\frac{(3x+2)'}{3x+2}dx=\frac{5}{3}\left[\ln|3x+2|\right]_0^1=\frac{5}{3}(\ln 5-\ln 2)=\frac{5}{3}\ln\frac{5}{2}$

iii. $\int_4^5\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$

Έχω $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{\mathrm{A}}{x-2}+\frac{\mathrm{B}}{x-3}\Leftrightarrow 2x+1=\mathrm{A}(x-3)+\mathrm{B}(x-2)\Leftrightarrow$

$2x+1=\mathrm{A}x-3\mathrm{A}+\mathrm{B}x-2\mathrm{B}\Leftrightarrow 2x+1=(\mathrm{A}+\mathrm{B})x-3\mathrm{A}-2\mathrm{B}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=2\\-3\mathrm{A}-2\mathrm{B}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\mathrm{A}+3\mathrm{B}=6\\-3\mathrm{A}-2\mathrm{B}=1\end{cases}$

άρα $\mathrm{B}=7$ και $\mathrm{A}+7=2\Leftrightarrow\mathrm{A}=-5$

Άρα $\int_4^5\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int_4^5\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}dx=$

$\int_4^5\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}\right)dx=-5\left[\ln|x-2|\right]_4^5+7\left[\ln|x-3|\right]_4^5=$

$-5(\ln 3-\ln 2)+7(\ln 2-\ln 1)=-5\ln 3+5\ln 2+7\ln 2=12\ln 2-5\ln 3$

iv. $\int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx$

Εκτελούμε τη διαίρεση : $(x^2-3x+7):(x^2-5x+6)$ και έχω : $x^2-3x+7=1\cdot(x^2-5x+6)+2x+1.$

Έτσι : $\int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx=\int_4^5 \frac{1\cdot(x^2-5x+6)+2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int_4^5 \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6}dx+\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=$

$=\int_4^5 1dx+\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx \overset{i.}{=} [x]_4^5+12\ln 2-5\ln 3=1+12\ln 2-5\ln 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

51)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx$ ii. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ iii. $\int_2^3 \frac{2}{x-1}dx$ iv. $\int_1^2 \frac{4}{5x+1}dx$

52)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_3^4 \frac{3x+2}{x^2-3x+2}dx$ ii. $\int_{-1}^0 \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$ iii. $\int_4^5 \frac{2}{x^2-1}dx$ iv. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

53) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx$ ii. $\int_3^4 \frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2}dx$ iii. $\int_1^4 \frac{x}{x+2}dx$ iv. $\int_0^1 \frac{2x}{3x+1}dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5Α : ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$ όπου $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι συνεχής συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta} f\big(g(x)\big)g'(x)dx$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ :

- Αν $I = \int_{\kappa}^{\lambda} (\alpha x+\beta)^{\nu} \cdot (\gamma x+\delta)^{\mu} dx$, $\nu \geq \mu$, θέτουμε $u = \alpha x+\beta$
- Αν $I = \int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt[\nu]{g(x)}\right)dx$, θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{g(x)}$
- Αν $I = \int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt[\nu_1]{\alpha x+\beta}, \sqrt[\nu_2]{\alpha x+\beta}\right)dx$, θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{\alpha x+\beta}$ οπού $\nu = \text{ΕΚΠ}(\nu_1,\nu_2)$
- Αν $I = \int_{\kappa}^{\lambda} f\left(e^{\alpha x}\right)dx$ θέτουμε $u = e^{\alpha x}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

54)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_{-2}^{-1}(x-1)(x+2)^4dx$ ii. $\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ iii. $\int_{1}^{64}\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ iv. $\int_{0}^{\ln 3}\frac{e^{2x}-2}{e^{x}+1}dx$

Λύση :

i. $\int_{-2}^{-1}(x-1)(x+2)^4dx$ θέτω $u = x+2$ άρα $du = dx$

Για $x = -2$ είναι $u = 0$

Για $x = -1$ είναι $u = 1$

Άρα : $\int_{-2}^{-1}(x-1)(x+2)^4dx = \int_{0}^{1}(x-1)u^4du \overset{u=x+2\Leftrightarrow x=u-2}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_{0}^{1}(u-2-1)u^4du = \int_{0}^{1}(u^5-3u^4)du =$

$= \left[\frac{u^6}{6}-3\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{13}{30}$

ii. $\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ θέτω $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow u^2 = x+1$ άρα $2udu = dx$

Για $x = 0$ είναι $u^2 = 1 \Leftrightarrow u = 1$ $(u = \sqrt{x+1}$ άρα $u \geq 0)$

Για $x = 3$ είναι $u^2 = 4 \Leftrightarrow u = 2$

Άρα : $\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_{1}^{2}\frac{x}{u}2udu = \int_{1}^{2}2xdu \overset{u^2=x+1\Leftrightarrow x=u^2-1}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_{1}^{2}2(u^2-1)du = 2\left[\frac{u^3}{3}-u\right]_1^2 = \frac{8}{3}.$

iii. $\int_{1}^{64}\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ θέτω $u = \sqrt[6]{x}$ άρα $u^3 = \sqrt{x}$, $u^2 = \sqrt[3]{x}$ και $u^6 = x$ άρα $6u^5du = dx$

Για $x = 1$ είναι $u = 1$

Για $x=64$ είναι $u=2$

Άρα : $\int_1^{64}\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\frac{u^6+u^2}{u^3}6u^5du=\int_1^2 6u^2(u^6+u^2)du=\int_1^2(6u^8+6u^4)du=$

$=6\left[\frac{u^9}{9}+\frac{u^5}{5}\right]_1^2=\frac{5668}{12}$

iv. $\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2x}-2}{e^x+1}dx$ θέτω $u=e^x$ άρα $du=e^xdx\Leftrightarrow dx=\frac{du}{e^x}$

Για $x=0$ είναι $u=1$

Για $x=\ln 3$ είναι $u=e^{\ln 3}=3$

Άρα : $\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2x}-2}{e^x+1}dx=\int_1^3\frac{u^2-2}{u+1}\frac{du}{e^x}=\int_1^3\frac{u^2-2}{u+1}\frac{du}{u}=\int_1^3\frac{u^2-2}{u^2+u}du$

Εκτελώ τη διαίρεση : $(u^2-2):(u^2+u)$ και εχω : $u^2-2=1(u^2+u)-u-2$

Άρα : $I=\int_1^3\frac{u^2-2}{u^2+u}du=\int_1^3\frac{u^2+u-u-2}{u^2+u}du=\int_1^3\frac{u^2+u}{u^2+u}du-\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du=$

$\int_1^3 1du-\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du=$

$=[u]_1^3-\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du==2-\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du$

Για το ολοκλήρωμα $I_2=\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du$ έχω :

$\frac{u+2}{u(u+1)}=\frac{\mathrm{A}}{u}+\frac{\mathrm{B}}{u+1}\Leftrightarrow u+2=\mathrm{A}(u+1)+\mathrm{B}u\Leftrightarrow u+2=(\mathrm{A}+\mathrm{B})u+\mathrm{A}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=1\\ \mathrm{A}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{A}=2\\ \mathrm{B}=-1\end{cases}$

Άρα : $I_2=\int_1^3\frac{u+2}{u^2+u}du\ \int_1^3\frac{u+2}{u(u+1)}du=\int_1^3\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\left[2\ln|u|\right]_1^3-\left[\ln|u+1|\right]_1^3=$

$=2\ln 3-\ln 4+\ln 2=\ln 9+\ln 2-\ln 4=\ln\frac{9}{2}$

Τελικά : $I=2-I_2=2-\ln\frac{9}{2}$.

55)**(Συνδυαστικό παραγοντικής – αλλαγής μεταβλητής)**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$.

Λύση :

$\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$ θέτω $u=9+x^2$ άρα $du=2xdx\Leftrightarrow dx=\frac{du}{2x}$

Για $x=0$ είναι $u=9$

Για $x=1$ είναι $u=10$ άρα έχω : $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx=\int_9^{10}x\ln u\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\int_9^{10}\ln udu=$

$\frac{1}{2}\int_9^{10}(u)'\ln udu=\frac{1}{2}[u\ln u]_9^{10}-\frac{1}{2}\int_9^{10}u(\ln u)'du=\frac{1}{2}(10\ln 10-9\ln 9)-\frac{1}{2}\int_9^{10}1du=$

$=\frac{1}{2}(10\ln 10-9\ln 9)-\frac{1}{2}[u]_9^{10}==\frac{1}{2}(10\ln 10-9\ln 9)-\frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

56)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$ ii. $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$ iii. $\int_0^1 (x+2)(x-1)^5 dx$ iv. $\int_0^{\pi} συν3xdx$

v. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ vi. $\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ vii. $\int_{-1}^2 xe^{x^2+1}dx$ viii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} συνx \cdot συν(ημx)dx$

57)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$ ii. $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ iii. $\int_0^{\pi} ημ\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$ iv. $\int_0^1 x(x^2-1)^{99}dx$

v. $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$ vi. $\int_0^1 \frac{x^2-2}{(x^3-6x+1)^2}dx$ vii. $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$ viii. $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx$

58) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}dx$ ii. $\int_0^1 e^{2x} συν e^x dx$ iii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν x \cdot e^{ημx}dx$ iv. $\int_0^{\pi} \frac{ημ2x}{συν^2 x+1}dx$

v. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ vi. $\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^2 dx$ vii. $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$ viii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ημ2x}{ημx+1}dx$ ix. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} ημ4xdx$

x. $\int_1^2 εφx \cdot \ln(συν x)dx$ xi. $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ xii. $\int_1^{e^{\pi}} \frac{ημ(\ln x)}{x}dx$ xiii. $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

59) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ ii. $\int_0^{\pi/2} [ημ(συνx+x)ημx - ημ(συνx+x)]dx$ iii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ημx} \cdot ημ2xdx$.

60)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει ότι : $\int_4^9 f(x)dx = 6$. Να υπολογίσετε το $I = \int_2^3 xf\left(x^2\right)dx$.

61)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re \to (1,+\infty)$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,5) και Β(3,9). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_1^3 \frac{4f'(x)}{f^2(x)+2f(x)-3}dx$.

62)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re \to (0,+\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1). Αν ισχύει : $\int_0^2 \left(xf''(x)+3f'(x)\right)dx = 6$ τότε :

i. Να βρείτε την τιμή $f(2)$

ii. Να βρείτε το $\int_0^2 \frac{2f'(x)}{f^2(x)+2f(x)}dx$

iii. Να αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$, ώστε $f'(\xi) = 1$.

5Β. ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ $x=\alpha+\beta-u$

Αν έχουμε ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το οποίο δεν υπολογίζεται με κάποια από τις γνωστές μεθόδους, τότε ίσως μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση : $x=\alpha+\beta-u$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63)Να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : i. $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$ ii. $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx$

Λύση :

Στο $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ θέτω $x=\alpha+\beta-u$, άρα $dx=(\alpha+\beta-u)'du\Leftrightarrow dx=-du$

Για $x=\alpha$ είναι $\alpha=\alpha+\beta-u\Leftrightarrow u=\beta$

Για $x=\beta$ είναι $\beta=\alpha+\beta-u\Leftrightarrow u=\alpha$

Άρα : $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\beta^\alpha -f(\alpha+\beta-u)du=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$

i. Στο $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$ θέτω $x=-1+1-u\Leftrightarrow x=-u$, άρα $dx=-du$

Για $x=-1$ είναι $u=1$

Για $x=1$ είναι $u=-1$

Άρα : $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_1^{-1}-\frac{(-u)^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2}{\frac{1}{e^u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2e^u}{e^u+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx$

Έτσι : $I_1+I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx\Leftrightarrow 2I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x^2e^x}{e^x+1}dx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(e^x+1)}{e^x+1}dx\Leftrightarrow 2I_1=\int_{-1}^{1}x^2dx\Leftrightarrow 2I_1=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\Leftrightarrow I_1=\frac{1}{3}$

ii. Στο $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx$ θέτω $x=0+\frac{\pi}{2}-u\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-u$, άρα $dx=-du$

Για $x=0$ είναι $u=\frac{\pi}{2}$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$

Άρα : $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\left(\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+1}\right)(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u+1}{\eta\mu u+1}\right)du=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x+1}\right)dx$

Έτσι : $I_2+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x+1}\right)dx\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)^{-1} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2I_2 = 0 \Leftrightarrow I_2 = 0 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

64)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

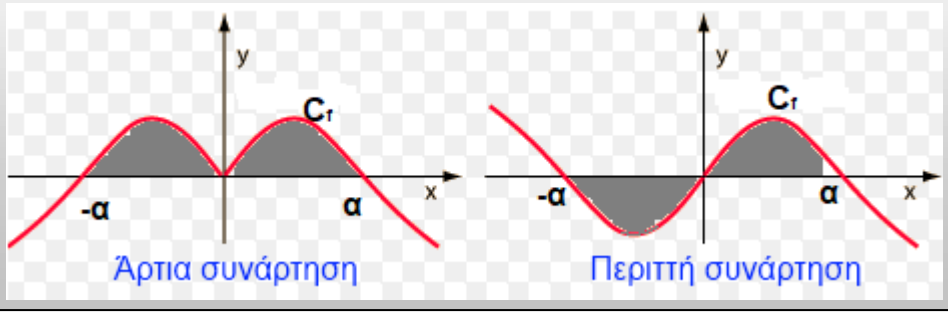
i. $\int_{-1}^{1} \frac{x^4+e^x}{e^x+1}dx$ ii. $\int_{-1}^{1} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ iii. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\varepsilon\phi^3 x+1}dx$

5Γ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΡΤΙΑΣ – ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Χαρακτηριστικό γνώρισμα της συγκεκριμένης περίπτωσης είναι η ολοκλήρωση σε συμμετρικό διάστημα : $[-\alpha,\alpha]$, $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$, δηλ. το ολοκλήρωμα έχει ***αντίθετα άκρα***.

Θα αποδείξουμε ότι :

- Αν η f είναι άρτια, τότε : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$
- Αν η f είναι περιττή, τότε : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65)Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$.

i. Αν η f είναι περιττή, τότε να δείξετε ότι ισχύει : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}dx$

Λύση :

i. Η $f:[-\alpha,\alpha]\to\Re$ είναι περιττή, άρα για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ ισχύει ότι : $f(-x) = -f(x)$

Στο $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$, θέτω $x = -u$, άρα $dx = -du$

Για $x = -\alpha$ είναι $u = \alpha$

Για $x = \alpha$ είναι $u = -\alpha$

Έτσι : $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u)(-du) = \int_{-a}^{a} f(-u)du = \int_{-a}^{a} -f(u)du = -\int_{-a}^{a} f(x)dx = -I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2I=0\Leftrightarrow I=0\Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$

ii. Έστω $f(x)=\dfrac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}$, με $x\in[-1,1]$. Για κάθε $x\in[-1,1]$ και $-x\in[-1,1]$

$$f(-x)=\frac{\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)}{1-x\eta\mu(-x)}=\frac{\ln\left(\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)}{1+x\eta\mu x}=\frac{\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)}{1+x\eta\mu x}=$$

$$=\frac{\ln 1-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}=-f(x)$$, άρα η f είναι περιττή

οπότε από i. $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}dx=0$.

66)Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$.

i. Αν η f είναι άρτια, τότε να δείξετε ότι ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{-1}^{1}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x+e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx$

Λύση :

i. Η $f:[-\alpha,\alpha]\to\Re$ είναι άρτια, άρα για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ ισχύει ότι : $f(-x)=f(x)$

Έτσι : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$ (1)

Στο $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ θέτω $x=-u$, άρα $dx=-du$

Για $x=-\alpha$ είναι $u=\alpha$

Για $x=0$ είναι $u=0$

Έτσι : $\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du)=\int_{0}^{a} f(-u)du=\int_{0}^{a} f(u)du=\int_{0}^{a} f(x)dx$

Άρα : $(1)\Leftrightarrow\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha} f(x)dx+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx\Leftrightarrow\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

ii. Είναι $I=\int_{-1}^{1}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x+e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}dx+\int_{-1}^{1}\dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx$ (1)

Έστω : $f(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}$, με $x\in[-1,1]$ και $-x\in[-1,1]$,

$f(-x)=\dfrac{-x\sigma\upsilon\nu(-x)}{1+e^{|-x|}}=\dfrac{-x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}=-f(x)$, άρα η f είναι περιττή.

και $g(x)=\dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}$, με $x\in[-1,1]$ και $-x\in[-1,1]$,

$g(-x)=\dfrac{e^{|-x|}}{1+e^{|-x|}}=\dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}=g(x)$, άρα η g είναι άρτια.

Έτσι : $(1)\Leftrightarrow I=\int_{-1}^{1}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}dx+\int_{-1}^{1}\dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx\Leftrightarrow I=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I=0+2\int_{0}^{1}\dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx\overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} I=2\int_{0}^{1}\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}dx\Leftrightarrow I=2\int_{0}^{1}\dfrac{(1+e^{x})'}{1+e^{x}}dx\Leftrightarrow I=2\left[\ln(1+e^{x})\right]_{0}^{1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I=2\left(\ln(1+e)-\ln 2\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

67)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_{-1}^{1}\frac{x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx$ ii. $\int_{-1}^{1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ iii. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\varepsilon\phi^3 x+1}dx$ iv. $\int_{-2}^{2}\frac{x^{15}\eta\mu^2 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx$

68)Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1,f(1))$ έχει εξίσωση $y=2x-5$. Να βρείτε :

i. τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$

ii. την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{N}(-1,f(-1))$

iii. το ολοκλήρωμα : $I=\int_{-1}^{1}\left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+x\cdot f''(x)\right)dx$

5Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής : $\int_{\alpha}^{\beta}\eta\mu^{\kappa}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\lambda}xdx$,

- αν το ημx είναι υψωμένο σε **περιττή** δύναμη τότε θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$
- αν το συνx είναι υψωμένο σε **περιττή** δύναμη τότε θέτουμε $u=\eta\mu x$
- Αν και το ημx και το συνx είναι υψωμένα σε **άρτια** δύναμη, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμου : $\eta\mu^2 x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

69)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^3 xdx$ ii. $\int_{0}^{\pi}\eta\mu^2 xdx$

iii. $\int_{0}^{\pi}\eta\mu^3 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 xdx$

Λύση :

i. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^3 xdx$, θέτω $u=\eta\mu x$, άρα $du=\sigma\upsilon\nu x dx\Leftrightarrow dx=\frac{du}{\sigma\upsilon\nu x}$

Για $x=0$ είναι $u=0$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=1$

Έτσι : $\int_{0}^{\pi}\sigma\upsilon\nu^3 xdx=\int_{0}^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{0}^{\pi}(1-\eta\mu^2 x)\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{0}^{1}(1-u^2)\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{du}{\sigma\upsilon\nu x}=$

$=\int_{0}^{1}(1-u^2)du=\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

ii. $\int_{0}^{\pi}\eta\mu^2 xdx=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1-\sigma\upsilon\nu 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

iii. $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx$, θέτω $u = \sigma\upsilon\nu x$, άρα $du = -\eta\mu x dx \Leftrightarrow dx = -\frac{du}{\eta\mu x}$

Για $x = 0$ είναι $u = 1$

Για $x = \pi$ είναι $u = -1$

Έτσι : $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu^2 x dx =$

$= \int_1^{-1} \eta\mu x \cdot (1-u^2)u^2 \cdot \left(-\frac{du}{\eta\mu x}\right) = -\int_1^{-1} \left(u^2 - u^4\right) du = \int_{-1}^{1} \left(u^2 - u^4\right) du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

70)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x dx$ ii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

71) Αν $I = \int_0^{\pi/2} x\eta\mu^2 x dx$, $J = \int_0^{\pi/2} x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$I + J$, $I - J$, I, J.

5Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

- Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής : $\int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 x^2}\right) dx$ θέτουμε $x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \eta\mu u$ με $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής : $\int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2}\right) dx$ θέτουμε $x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \varepsilon\phi u$ με $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- Αν σε ολοκλήρωμα εμφανίζεται (σε παρανομαστή) η παράσταση $\alpha^2 x^2 + \beta^2$, τότε συνήθως θέτουμε : $x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \varepsilon\phi u$ με $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

72)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ii. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} dx$

iii. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ iv. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ v. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ vi. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \cdot \sqrt{4 - \ln^2 x} dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx$, και δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της $f^{-1}(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής :

i. Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u) = x$ άρα είναι $dx = f'(u)du$

ii. Βρίσκουμε τα νέα άκρα ολοκλήρωσης και τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται : $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{\nu}^{\delta} uf'(u)du = [uf(u)]_{\gamma}^{\delta} - \int_{\nu}^{\delta} f(u)du...$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

73)Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, με τύπο : $f(x) = x^3 + x + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{3} f^{-1}(x)dx$.

Λύση :

i. $D_f = \Re$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \Re$, άρα η $f(x)$ είναι 1-1 και άρα είναι και αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$, είναι το σύνολο τιμών της $f(x)$. Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $D_f = \Re$, άρα $f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 + x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$

Άρα $f(\Delta) = (-\infty, +\infty) = \Re = D_{f^{-1}}$

ii. Στο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{3} f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u) = x$ άρα είναι $dx = f'(u)du$.

Για $x = -1$ είναι $f(u) = -1 \Leftrightarrow f(u) = f(-1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = -1$

Για $x = 3$ είναι $f(u) = 3 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = 1$

Άρα : $\int_{-1}^{3} f^{-1}(x)dx = \int_{-1}^{1} f^{-1}(f(u)) \cdot f'(u)du = \int_{-1}^{1} u(3u^2 + 1)du = \int_{-1}^{1} (3u^3 + u)du =$

$= \left[3\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

74)Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, με τύπο : $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{6} f^{-1}(x)dx$.

75)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, με $x \in \Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

76)Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $f(\Re)=\Re$, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)+2=x$, για κάθε $x\in\Re$. Να υπολογίσετε το $\int_0^4 f(x)dx$.

77)Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e})=2$ και : $xf'(x)\ln x+f(x)=0$ για κάθε $x>1$

i. Να βρείτε τον τύπο της f
ii. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx+\int_1^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{x}}dx$

78)Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ με $f(x)=e^{x^2}$

i. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^1\frac{1}{1+x+e^{x^2}}dx+\int_1^e\frac{1}{1+x+\sqrt{\ln x}}dx$.

79)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$, η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(2,5)$ και ισχύει : $\int_0^2 xf''(x)dx=0$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β.
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$, ώστε $f''(\xi)=0$.
iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_{-1}^5\left(\frac{1}{3}f\left(\frac{x+1}{3}\right)+f^{-1}(x)\right)dx$.

80)Θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x)=x-\ln x+e^x$, με $x\in(1,+\infty)$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$
ii. Να βρεθούν τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2005$ έχει μοναδική λύση στο $(1,+\infty)$
iv. Έστω $\Pi=\int_2^e f(x)dx+\int_{f(2)}^{f(e)}f^{-1}(x)dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi-2\ln 2$. (4ο Ομογενείς 2005)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΣΧΕΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Αν έχουμε μια συναρτησιακή σχέση :

- $f(x)+\gamma f\left(g(x)\right)=h(x)$ (1) και θέλουμε να υπολογίσουμε το $I=\int_{\kappa}^{\lambda} f(x)dx$ ή να δείξουμε μια σχέση που περιέχει αυτό, τότε λύνουμε την (1) ως προς $f(x)$, ολοκληρώνουμε και αλλάζουμε μεταβλητή και άκρα ολοκλήρωσης.
- $f\left(h_1(x)\right)+\gamma f\left(h_2(x)\right)=h_3(x)$ (2) τότε θέτουμε $y=h_1(x)$ και η (2) γίνεται $f(y)+\gamma f\left(g(y)\right)=h(y)$ ή $f(x)+\gamma f\left(g(x)\right)=h(x)$ που είναι η (1).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

81) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,5]\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)+f(6-x)=3$ για κάθε $x\in[1,5]$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^5 f(x)dx$.

Λύση : Για κάθε $x\in[1,5]$ είναι : $f(x)+f(6-x)=3\Leftrightarrow f(x)=3-f(6-x)$ (1)

Άρα : $\int_1^5 f(x)dx\overset{(1)}{=}\int_1^5\left(3-f(6-x)\right)dx=\int_1^5 3dx-\int_1^5 f(6-x)dx=\left[3x\right]_1^5-\int_1^5 f(6-x)dx=12-\int_1^5 f(6-x)dx$

Δηλ. $\int_1^5 f(x)dx=12-\int_1^5 f(6-x)dx$ (2)

Για το $\int_1^5 f(6-x)dx$ θέτω $6-x=u$ άρα $-dx=du\Leftrightarrow dx=-du$

Όταν $x=1$ το $u=5$, ενώ όταν $x=5$ το $u=1$

Άρα $\int_1^5 f(6-x)dx=\int_5^1 f(u)(-du)=\int_1^5 f(u)du=\int_1^5 f(x)dx$

Τελικά η (2) γίνεται : $\int_1^5 f(x)dx=12-\int_1^5 f(6-x)dx\Leftrightarrow\int_1^5 f(x)dx=12-\int_1^5 f(x)dx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_1^5 f(x)dx=12\Leftrightarrow\int_1^5 f(x)dx=6$.

82) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(2-x)+f(x-3)=2$ για κάθε $x\in\Re$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 f(x)dx$.

Λύση : Για κάθε $x\in\Re$ είναι $f(2-x)+f(x-3)=2$ (1)

Θέτω $2-x=y\Leftrightarrow x=2-y$ άρα η (1) γίνεται : $f(y)+f(2-y-3)=2\Leftrightarrow$

$f(y)+f(-1-y)=2$ ή $f(x)=2-f(-1-x)$ (2)

Άρα :

$\int_{-1}^0 f(x)dx\overset{(2)}{=}\int_{-1}^0\left(2-f(-1-x)\right)dx=\int_{-1}^0 2dx-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx=\left[2x\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx=2-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx$

Δηλ. $\int_{-1}^0 f(x)dx=2-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx$ (3)

Για το $\int_{-1}^0 f(-1-x)dx$ θέτω $-1-x=u$ άρα $-dx=du\Leftrightarrow dx=-du$

Όταν $x=-1$ το $u=0$, ενώ όταν $x=0$ το $u=-1$

Άρα $\int_{-1}^0 f(-1-x)dx=\int_0^{-1} f(u)(-du)=\int_{-1}^0 f(u)du=\int_{-1}^0 f(x)dx$

Τελικά η (3) γίνεται : $\int_{-1}^0 f(x)dx=2-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx\Leftrightarrow\int_{-1}^0 f(x)dx=2-\int_{-1}^0 f(x)dx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_{-1}^0 f(x)dx=2\Leftrightarrow\int_{-1}^0 f(x)dx=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

83)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)+f(-x)=x^2\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\Re$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

84)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(2-x)+f(x+2)=1$ για κάθε $x\in\Re$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^4 f(x)dx$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Στα ολοκληρώματα ισχύουν οι παρακάτω ανισοτικές σχέσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Αν $f(x)\geq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$

(αν η f δεν είναι παντού 0 τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Αν $f(x)\geq g(x)$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$

(αν η f,g δεν είναι ισες τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : $m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq \mathrm{M}(\beta-\alpha)$

Απόδειξη :

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο $[a,\beta]$. Τότε ισχύει ότι : $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[a,\beta]$

Οπότε : $\int_\alpha^\beta m dx\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\int_\alpha^\beta M dx$ δηλαδή : $m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$

Για να αποδείξουμε ανισότητες στα ολοκληρώματα, συχνά χρησιμοποιούμε :

- Τις βασικές ανισότητες :
  - $f^2(x)\geq 0$
  - $|\eta\mu x|\leq|x|$
  - $\ln x\leq x-1,\ x>0$
  - $e^x\geq x+1,\ x\in\Re$
- Τις ανισότητες $\min f\leq f(x)\leq\max f,\ x\in[\alpha,\beta]$
- Τις ανισότητες που προκύπτουν από τη μονοτονία της f και τις σχέσεις $\alpha\leq x\leq\beta$
- Τις ανισότητες που προκύπτουν από το Θ.Μ.Τ. και τη μονοτονία της f'
- Την ανισότητα που προκύπτει από την κυρτότητα μιας συνάρτησης και την εφαπτομένη της σε ένα σημείο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

85) Δίνεται συνεχής συνάρτηση : $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(2)=1$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_1^3\left(f^2(x)-6f(x)+9\right)dx>0$

ii. $\int_1^3 f^2(x)dx>4\int_1^3 f(x)dx-8$.

Λύση :

i. Παρατηρούμε ότι : $\int_1^3\left(f^2(x)-6f(x)+9\right)dx=\int_1^3\left(f(x)-3\right)^2dx$

Η συνάρτηση : $g(x)=\left(f(x)-3\right)^2$ είναι συνεχής στο $[1,3]$ και ισχύει : $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,3]$. Επίσης η g δεν είναι παντού ίση με το μηδέν στο $[1,3]$, καθώς $g(2)=\left(f(2)-3\right)^2=4\neq 0$, επομένως : $\int_1^3 g(x)dx>0\Leftrightarrow\int_1^3\left(f^2(x)-6f(x)+9\right)dx>0$

ii. Έχουμε : $\int_1^3 f^2(x)dx>4\int_1^3 f(x)dx-8\Leftrightarrow\int_1^3 f^2(x)dx-\int_1^3 4f(x)dx+8>0\overset{*}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow\int_1^3\left(f^2(x)-4f(x)+4\right)>0\Leftrightarrow\int_1^3\left(f(x)-2\right)^2>0$. Η ανισότητα αυτή ισχύει, καθώς η συνάρτηση : $h(x)=\left(f(x)-2\right)^2$ είναι συνεχής στο $[1,3]$ και ισχύει : $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,3]$. Επίσης η h δεν είναι παντού ίση με το μηδέν στο $[1,3]$, καθώς $h(2)=\left(f(2)-2\right)^2=1\neq 0$.

(*) Γενικά ισχύει ότι : $c=\int_\alpha^\beta\frac{c}{\beta-\alpha}dx$, άρα εδώ $8=\int_1^3\frac{8}{3-1}dx=\int_1^3 4dx$.

86) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με τύπο $f(x)=x+\frac{1}{x}-2$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ii. $\int_1^3\left(x+\frac{1}{x}\right)dx>4$

Λύση :

i. 1ος Τρόπος : για κάθε $x>0$, $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

Για κάθε $x>0$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	↘		0 min	↗	

Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=0$, δηλαδή για κάθε $x>0$, $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

2ος Τρόπος : $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}-2\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

ii. Είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$ και το ''='' ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι : $\int_1^3 f(x)dx>0 \Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx>0 \Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\frac{1}{x}\right)dx-\int_1^3 2dx>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\frac{1}{x}\right)dx>\int_1^3 2dx \Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\frac{1}{x}\right)dx>[2x]_1^3 \Leftrightarrow \int_1^3\left(x+\frac{1}{x}\right)dx>4$.

87) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)\cdot e^x dx>\frac{27}{8}$.

Λύση :

i. $A_f=(0,+\infty)$ και για κάθε $x>0$ έχουμε : $f(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$

Για κάθε $x>0$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-1)}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	↘		0 min	↗	

Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=1$, δηλαδή για κάθε $x>0$, $f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

ii. Για κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ έχουμε :

- $f(x)\geq 1$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.
- $e^x\geq x+1$ (2) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, (εδώ το $0\notin\left[\frac{1}{2},2\right]$)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε $f(x)\cdot e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ και η ισότητα δεν ισχύει ούτε για $x=1$, άρα :

$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)\cdot e^x dx>\int_{\frac{1}{2}}^2 (x+1)dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)\cdot e^x dx>\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{\frac{1}{2}}^2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)\cdot e^x dx>\frac{27}{8}$.

88) Να αποδείξετε ότι :

i. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x^2)\le x^2$ για κάθε $x\in\Re$

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx<\frac{1}{3}$

Λύση :

i.

ii. Για κάθε $x>0$ ισχύει η ανισότητα $\ln x\le x-1$. Αν θέσω όπου x το $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\Re$, έχω $\ln(x^2+1)\le x^2+1-1\Leftrightarrow \ln(x^2+1)\le x^2$, για κάθε $x\in\Re$

iii. Στην ανισότητα $\ln x\le x-1$ το ''='' ισχύει μόνο για $x=1$

Άρα για κάθε $x\in[0,1]$, $\ln(x^2+1)\le x^2$ και το ''='' ισχύει μόνο για $x^2+1=1\Leftrightarrow x=0$

έτσι : $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx<\int_0^1 x^2dx\Leftrightarrow \int_0^1 \ln(1+x^2)dx<\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\Leftrightarrow \int_0^1 \ln(1+x^2)dx<\frac{1}{3}$.

89) Να αποδείξετε ότι : $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx\ge 1$.

Λύση :

Είναι αδύνατον να υπολογίσουμε το $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx$, για αυτό θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $\frac{e^x}{x+1}\ge g(x)$ και μετά να ολοκληρώσουμε. Για κάθε $x\in\Re$ (άρα και για $x\in[0,1]$) ισχύει : $e^x\ge x+1\overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow}\frac{e^x}{x+1}\ge 1$, έτσι έχουμε : $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx\ge\int_0^1 1dx\Leftrightarrow\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx\ge[x]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx\ge 1$.

90) Έστω η συνάρτηση $f:[1,e]\to\Re$ με τύπο $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι $0\le\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx\le 1-\frac{1}{e}$

Λύση :

i. Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$ και $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(1,e)$ άρα η $f\uparrow[1,e]$, οπότε στο $x_1=1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1)=0$, ενώ στο $x_2=e$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}$.

ii. Για κάθε $x\in[1,e]$, είναι : $\min f\le f(x)\le\max f\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{e}$, άρα

$\int_1^e 0dx\le\int_1^e f(x)dx\le\int_1^e\frac{1}{e}dx\Leftrightarrow 0\le\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx\le\left[\frac{1}{e}x\right]_1^e\Leftrightarrow\int_1^e 0dx\le\int_1^e f(x)dx\le 1-\frac{1}{e}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

91) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f(x)dx=1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x)-2f(x)+1\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$

ii. $\int_0^1 f^2(x)dx\geq 1$

92) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f^2(x)dx=1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x)-2f(x)e^x+e^{2x}\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$

ii. $\int_0^1 e^x f(x)dx\leq\frac{e^2+1}{4}$

93) Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{e^x}{x^2+1}\geq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$ ii. $\int_0^1 e^x dx\geq\int_0^1(x^2+1)dx$

94) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με τύπο : $f(x)=2-e^{-x^2}$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1\left(2-e^{-x^2}\right)dx\geq 2$

95) Δίνεται η συνάρτηση $f:(-2,+\infty)\to\Re$ με τύπο : $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο [1,2]

iii. Να αποδείξετε ότι $0\leq\int_1^2\frac{x-1}{x+2}dx\leq\frac{1}{4}$

96) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ με τύπο : $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $0\leq\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx\leq\ln 2$

97) Να αποδείξετε ότι $1\leq\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx\leq\sqrt{2}$

98) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\varepsilon\varphi x>x$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{3}{\pi}$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ και

ii. $\frac{\sqrt{3}}{4}\leq\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\eta\mu x}{x}dx\leq\frac{1}{2}$.

99) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \Re$, να αποδείξετε ότι:

i. $1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και

ii. $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x}dx \leq 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Αν $f(x) \geq 0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε : $f(x)=0$

Απόδειξη :

Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_0) \neq 0$. Τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $f(x) \geq 0$, προκύπτει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ που είναι αδύνατο. Άρα για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $f(x)=0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

100) Δίνεται συνεχής συνάρτηση : $f:[1,3] \to \Re$ για την οποία ισχύει : $\int_1^3 f^2(x)dx = 6\int_1^3 xf(x)dx - 78$. Να βρείτε :

i. $\int_1^3 9x^2dx$

ii. τον τύπο της f.

Λύση :

i. $\int_1^3 9x^2dx = \left[3x^3\right]_1^3 = 81-3 = 78$

ii. Έχουμε : $\int_1^3 f^2(x)dx = 6\int_1^3 xf(x)dx - 78 \Leftrightarrow \int_1^3 f^2(x)dx - \int_1^3 6xf(x)dx + \int_1^3 9x^2dx = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^3 \left(f^2(x) - 6xf(x) + 9x^2\right)dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^3 \left(f(x)-3x\right)^2 dx = 0$

Η συνάρτηση : $g(x) = \left(f(x)-3x\right)^2$ είναι συνεχής στο $[1,3]$, ισχύει : $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,3]$ και $\int_1^3 \left(f(x)-3x\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x)dx = 0$. Άρα για κάθε $x \in [1,3]$ είναι :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)-3x\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)=3x,\ x \in [1,3]$.

Αυτό ισχύει καθώς έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [1,3]$ τέτοιο, ώστε να είναι $g(x_0) \neq 0$. Τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,3]$ και για κάθε $x \in [1,3]$ είναι $g(x) \geq 0$, προκύπτει ότι $\int_\alpha^\beta g(x)dx > 0$ που είναι αδύνατο. Άρα για κάθε $x \in [1,3]$ είναι $g(x)=0$.

101) Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,1]\to\Re$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^1 \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Λύση :

$\int_0^1 \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=\int_0^1 2f(x)\cdot g(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1\left(f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)\right)dx=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)^2dx=0$, η συνάρτηση $h(x)=\left(f(x)-g(x)\right)^2$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $h(x)=\left(f(x)-g(x)\right)^2\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και $\int_0^1 h(x)dx=0$, άρα για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $h(x)=0\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)^2=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

102) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\nu x}$, $x\in\Re$, $\nu\in N^*$.

i. Να μελετήσετε την f, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

ii. Να αποδείξετε ότι $2\leq e^2\nu^2\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}}xe^{-\nu x}dx\leq e$ (1993)

103) Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο R, δυο φορές παραγωγισιμη, με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$. Έστω $\alpha,\beta\in\Re$ με α<β. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)-f(\alpha)\leq f'^2(\beta)(x-\alpha)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ii. $2\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq f'(\beta)(\beta-\alpha)^2+2f(\alpha)(\beta-\alpha)$. (1997)

104) Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\frac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$

i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 f(t)dt$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$, x>0..

ii. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}}\leq e^{\frac{t}{x^2}}\leq e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε $t\in[1,4]$ και x>0.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ (1999)

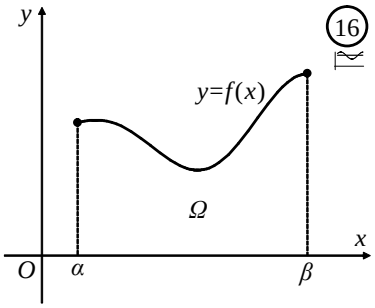
105) Να δείξετε ότι $\int_e^x\frac{\ln x}{\ln t}dt>x-e\ln x$, για κάθε $x>e$.

3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

68. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, όταν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής .

Απάντηση :

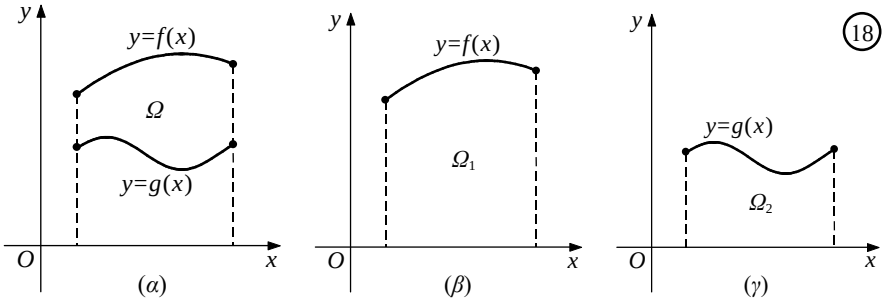
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.



69. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, όταν $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς.

Απάντηση :

Έστω δυο συνεχείς συναρτήσεις f και g, στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 18α).



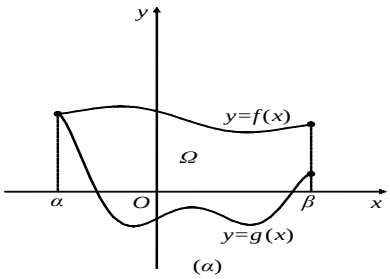
Παρατηρούμε ότι $E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

Επομένως, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

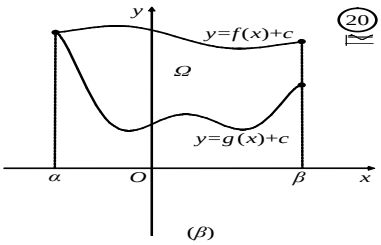
70. Να αποδείξετε ότι αν για τις συναρτήσεις f,g είναι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ δίνεται από τον τύπο: $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

Απόδειξη :

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in R$ τέτοιος, ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' .



(α)



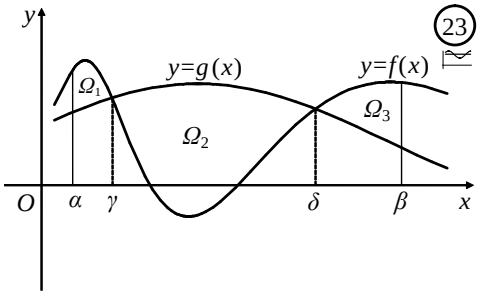
(β)

Επομένως, θα έχουμε: $E(\Omega)=E(\Omega')=\int_\alpha^\beta[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$. Άρα $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$.

71. Να αποδείξετε ότι όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$.

Απόδειξη :

Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1,Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή,



23

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=\int_\alpha^\gamma(f(x)-g(x))dx$$

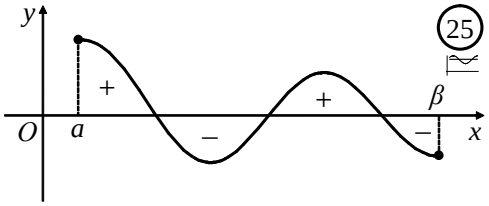
$$+\int_\gamma^\delta(g(x)-f(x))dx+\int_\delta^\beta(f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_\alpha^\gamma|f(x)-g(x)|dx+\int_\gamma^\delta|f(x)-g(x)|dx+\int_\delta^\beta|f(x)-g(x)|dx=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$$

Επομένως, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$

Σχόλιο

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25).

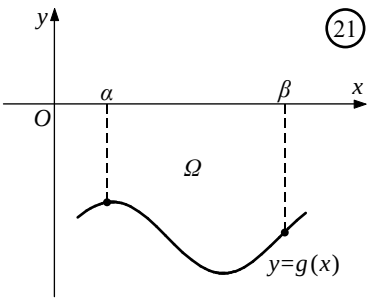


25

72. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με: $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Απόδειξη :

Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$ $=\int_\alpha^\beta[-g(x)]dx=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$. Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε: $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$



21

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΜΕΤΑΞΥ C_f , $x'x$, $x=\alpha$, $x=\beta$

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$$

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$, και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, εργαζόμαστε ως εξής :

1ον Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο [α,β]

2ον Βρίσκουμε το πρόσημο της f στο [α,β], λύνοντας την εξίσωση $f(x)=0$ στο [α,β] και σχηματίζοντας πίνακα με το πρόσημο της f στο [α,β], με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζουμε το αντίστοιχο εμβαδόν. Για άκρα ολοκλήρωσης παίρνουμε τα α,β.

Σε άλλες περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το πρόσημο της f με τη βοήθεια της μονοτονίας της συνάρτησης f .

- Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται με:

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

- Αν $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται με:

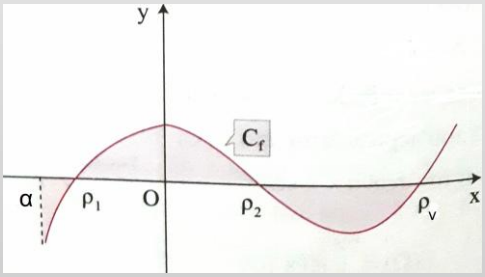
$$E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

- Αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β], τότε βρίσκουμε τις ρίζες $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$ της εξίσωσης $f(x)=0$ στο [α,β], $(\rho_1<\rho_2<...<\rho_\nu)$ και από τον πίνακα προσήμων το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

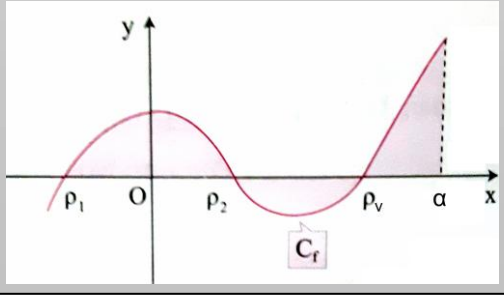
$$E=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx=\int_{\alpha}^{\rho_1}|f(x)|dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}|f(x)|dx+\int_{\rho_2}^{\beta}|f(x)|dx=\int_{\alpha}^{\rho_1}f(x)dx-\int_{\rho_1}^{\rho_2}f(x)dx+\int_{\rho_2}^{\beta}f(x)dx=...$$

- Αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, τότε υπολογίζω το αντίστοιχο εμβαδόν ανάμεσα στις ρίζες της $f(x)=0$ δηλ. για άκρα ολοκλήρωσης παίρνω τις ρίζες.
- Αν δίνεται μόνο μια κατακόρυφη ευθεία $x=\alpha$ και ρ_1 η μικρότερη ρίζα, ρ_ν η μεγαλύτερη ρίζα τότε :

  Αν $\alpha<\rho_1$ τότε : $E=\int_{\alpha}^{\rho_\nu}|f(x)|dx$



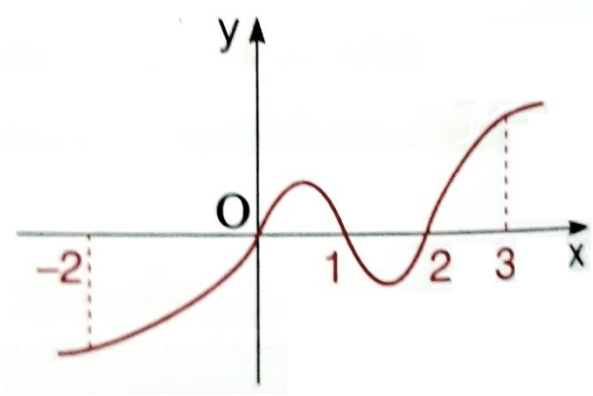
  Αν $\alpha>\rho_\nu$ τότε : $E=\int_{\rho_1}^{\alpha}|f(x)|dx$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\Re\to\Re$ η οποία είναι συνεχής και ισχύουν :

$\int_{-2}^{0} f(x)dx=-5$, $\int_{0}^{1} f(x)dx=2$, $\int_{1}^{2} f(x)dx=-3$, $\int_{2}^{3} f(x)dx=4$



Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη C_f

i. τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=0$, $x=1$
ii. τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία $x=-2$
iii. τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$, $x=3$
iv. τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=-2$
v. τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=3$
vi. τον άξονα x΄x.

Λύση :

Η f είναι συνεχής στο $\Re$, άρα και σε κάθε διάστημα αυτού.

Ο πίνακας προσήμων της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

i. Επειδή $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$, είναι $E(\Omega)=\int_{0}^{1} f(x)dx=2$

ii. Επειδή $f(x)\leq 0$, για κάθε $x\in[-2,0]$, είναι $E(\Omega)=-\int_{-2}^{0} f(x)dx=5$

iii. Από τον πίνακα προσήμων της f, έχουμε $E(\Omega)=-\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3} f(x)dx=3+4=7$

iv. Από τον πίνακα προσήμων της f, έχουμε $E(\Omega)=-\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{2} f(x)dx=5+2+3=10$

v. Από τον πίνακα προσήμων της f, έχουμε $E(\Omega)=\int_{0}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3} f(x)dx=2+3+4=9$

vi. Από τον πίνακα προσήμων της f, έχουμε $E(\Omega)=\int_{0}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{2} f(x)dx=2+3=5$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2-18x+24$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=5$.

Λύση :

$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+24 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$

x	$-\infty$ 1	2		4	5 $+\infty$
$f(x)=3x^2-18x+24$	+	0	-	0	+

Η f είναι συνεχής στο [1,5] και σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων έχουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^5 |f(x)|dx=\int_1^2 f(x)dx-\int_2^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx=$

$=\int_1^2 (3x^2-18x+24)dx-\int_2^4 (3x^2-18x+24)dx+\int_4^5 (3x^2-18x+24)dx=$

$=\left[x^3-9x^2+24x\right]_1^2-\left[x^3-9x^2+24x\right]_2^4+\left[x^3-9x^2+24x\right]_4^5=$

$=(20-16)-(16-20)+(20-16)=12$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$ και F μια παράγουσα της f στο $\Re$ με $F(1)=0$.

i. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_F, την ευθεία $x=1$ και τους άξονες x΄x και y΄y. ***(Εμβαδόν Παράγουσας)***

Λύση :

i. F παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\Re$ με $F'(x)=f(x)=e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in\Re$, άρα $F\uparrow\Re$.

ii. $F(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=F(1) \overset{F\uparrow\Rightarrow F\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} x=1$

Για $x>1 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x)>F(1) \Leftrightarrow F(x)>0$

Για $x<1 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x)<F(1) \Leftrightarrow F(x)<0$

Έτσι :

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$F((x)$	-	0	+

Η f είναι συνεχής στο [0,1] και σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων έχουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1 |F(x)|dx=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 (x)'F(x)dx=$

$=-\left(\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx\right)=-\left(F(1)-\int_0^1 xf(x)dx\right)=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2}\right)'dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}\tau.\mu.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x-2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=-2$, $x=3$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=3$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x^2-x+2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+4x-3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=2$, $x=5$. *(ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ)*

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=4$. *(ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ)*

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+4+\dfrac{1}{2x+4}$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=0$, $x=1$. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2002)

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln x$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένα σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και την ευθεία $x=x_0$, όπου x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.

(ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2001)

12) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} e^x-e, x<1 \\ \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}, x\geq 1 \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=0$, $x=e$. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ)

13) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} ax^2, x\le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, x>3 \end{cases}$

i. Αν η f είναι συνεχής να αποδείξετε ότι $a=-\dfrac{1}{9}$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M(4,f(4))

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=2$. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2001)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΜΕΤΑΞΥ C_f, C_g, $x=\alpha$, $x=\beta$

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

Έστω f,g δυο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β]. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, εργαζόμαστε ως εξής :

1ον θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$

2ον λύνουμε την εξίσωση $h(x)=0$ στο [α,β]

3ον σχηματίζουμε πίνακα με το πρόσημο της h στο [α,β], με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζουμε το αντίστοιχο εμβαδόν. Για άκρα ολοκλήρωσης παίρνουμε τα α,β.

Αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, τότε υπολογίζω το αντίστοιχο εμβαδόν ανάμεσα στις ρίζες της $h(x)=0$ δηλ. για άκρα ολοκλήρωσης παίρνω τις ρίζες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

14) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=1-x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=-1$, $x=1$.

Λύση : Έστω $h(x)=f(x)-g(x)\Leftrightarrow h(x)=e^x+x-1$, με $\mathrm{A}_h=\Re$ η οποία είναι συνεχής το [-1,1] άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-1}^{1}\left|h(x)\right|dx$.

Έχω $h(x)=0\Leftrightarrow e^x+x-1=0$, παρατηρώ ότι η $x=0$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$, και για κάθε $x\in\Re$, $h'(x)=e^x+1>0$, άρα η $h\uparrow\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\Re$, οπότε και η $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

x	$-\infty$ -1	0	1 $+\infty$
$h(x)=e^x+x-1$	−		+

Τα πρόσημα του παραπάνω πίνακα προκύπτουν ως εξής :

- $x<0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)<h(0) \Leftrightarrow h(x)<0$
- $x>0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(0) \Leftrightarrow h(x)>0$

Άρα τελικά : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-1}^{1}|h(x)|dx=-\int_{-1}^{0}h(x)dx+\int_{0}^{1}h(x)dx=-\int_{-1}^{0}(e^x+x-1)dx+\int_{0}^{1}(e^x+x-1)dx=$

$=-\left[e^x+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x+\frac{x^2}{2}-x\right]_{0}^{1}=-1+\frac{1}{e}+\frac{1}{2}+1+e+\frac{1}{2}-1-1=\frac{1}{e}+e-1$ τ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-4x-5$ και $g(x)=x+1$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=-2$, $x=2$.

16) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

17) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3+x$ και $g(x)=3x^2-x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g .

18) Να δείξετε ότι για κάθε $x\geq 0$ ισχύει : $e^{3x}\geq x+1$. Στη συνέχεια αν δίνονται $f(x)=e^x$ και $g(x)=e^{-2x}(x+1)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από τη C_f, τη C_g, τον άξονα y΄y και την ευθεία $x=1$.

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta\in\Re$ μια σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία με εξίσωση $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$. (ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΜΕΤΑΞΥ C_f ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται κάτω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \geq \lambda x + \beta$.
- Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \leq \lambda x + \beta$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1, f(1))$

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τον άξονα $y'y$.

Λύση :

i. $\mathrm{A}_f = [0,+\infty)$, και $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, άρα $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $x > 0$.

Άρα η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1, f(1))$ θα έχει εξίσωση :

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - 1 = \frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ii. C_f, $(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ και $y'y$ δηλ. η ευθεία $x = 0$

Έστω $h(x) = f(x) - y \Leftrightarrow h(x) = \sqrt[3]{x} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$,

Για το πρόσημο της $h(x)$, θα χρησιμοποιήσουμε την κυρτότητα της f . Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0$ και η f είναι συνεχής στο $x = 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $\mathrm{A}_f = [0,+\infty)$ και άρα η εφαπτομένη (ε) της C_f βρίσκεται πάνω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει ότι : $f(x) \leq y \Leftrightarrow h(x) \leq 0$ και το «=» μόνο για $x = 1$.

Χρειαζόμαστε άλλη μια κατακόρυφη ευθεία η οποία θα προκύψει από τη λύση της εξίσωσης : $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow x = 1$, καθώς η C_f και η (ε) έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $\mathrm{M}(1, f(1))$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, οπότε :

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 |h(x)|dx = -\int_0^1 h(x)dx = -\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - x^{\frac{1}{3}}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{12} \text{ τ.μ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}\left(-1, f(-1)\right)$

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τον άξονα $y'y$.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+5$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): x-2y+11=0$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τον άξονα $y'y$.

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\Re$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (0,f(0))

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες y=x και y=1.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+\alpha$, με $\alpha\in\Re$. Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2, τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $y_0=-3$, τότε :

i. Να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\dfrac{3}{5}$.

25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+2$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο M(2,f(2))

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε), τους άξονες x΄x και $y'y$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΚΛΕΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Για να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που σχηματίζεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών ή περισσοτέρων συναρτήσεων, εργαζόμαστε ως εξής :
1ον βρίσκουμε τα σημεία που τέμνονται ανά δυο οι γραφικές παραστάσεις
2ον σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων
3ον χωρίζουμε το χωρίο Ω με κατακόρυφες ευθείες σε επιμέρους χωρία τα οποία σχηματίζονται από δυο μόνο γραφικές παραστάσεις
4ον υπολογίζουμε το εμβαδόν καθενός από τα παραπάνω χωρία και το άθροισμα τους είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της, $f(x)=\ln x$ τον άξονα των x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(e,1)$.

Λύση :

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(e,1)$ είναι $(\varepsilon): y-1=f'(e)(x-e)$.

Επειδή $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, έχουμε $f'(e)=\frac{1}{e}$. Επομένως,

$$(\varepsilon): y-1=\frac{1}{e}(x-e) \Leftrightarrow (\varepsilon): y=\frac{1}{e}x .$$

Έχω εμβαδόν ανάμεσα στη C_f, την $(\varepsilon): y=\frac{1}{e}x$ και τον x΄x δηλ. τρεις συναρτήσεις,

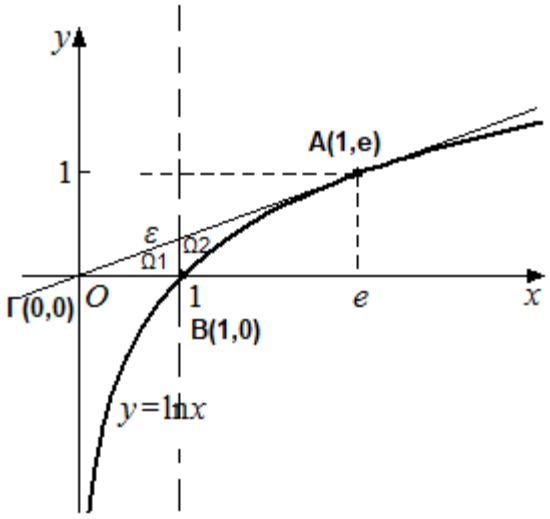
$f(x)=\ln x,\ g(x)=\frac{1}{e}x,\ h(x)=0$.

- Για σημεία τομής C_f και C_g : $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=e$ δηλ. $\mathrm{A}(e,f(e)) \to \mathrm{A}(e,1)$

  Καθώς η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$, επομένως η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(e,1)$, βρίσκεται πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και το «=» μόνο για $x=e$.

- Για σημεία τομής C_f και C_h : $f(x)=h(x) \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ δηλ. $\mathrm{B}(1,f(1)) \to \mathrm{B}(1,0)$

- Για σημεία τομής C_g και C_h : $g(x)=h(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e}x=0 \Leftrightarrow x=0$ δηλ. $\Gamma(1,g(0)) \to \Gamma(0,0)$



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα :

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=\int_0^1\frac{1}{e}xdx+\int_1^e\left(\frac{1}{e}x-\ln x\right)dx=\int_0^1\frac{1}{e}xdx+\int_1^e\frac{1}{e}xdx-\int_1^e\ln xdx=$$

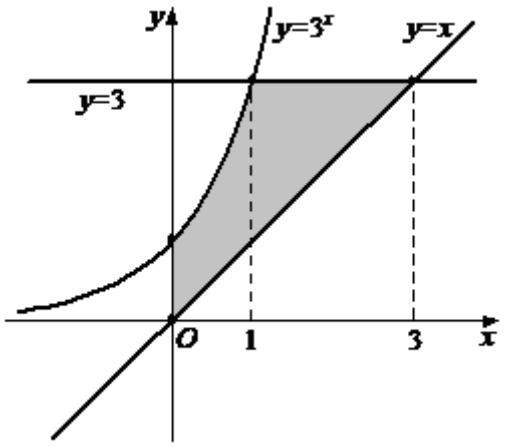
$$=\left[\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}\right]_1^e-\int_1^e(x)'\ln xdx=\frac{1}{2e}+\frac{e^2}{2e}-\frac{1}{2e}-\left[x\ln x\right]_1^e+\int_1^e 1dx=\frac{e-2}{2}\tau.\mu.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

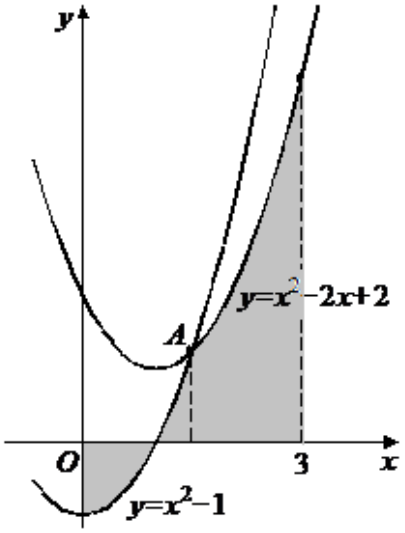
27) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-2$ και $h(x)=-x+2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.

28) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$, με $x>0$, $g(x)=\sqrt{x}$ και $h(x)=\frac{3x-4}{4}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.

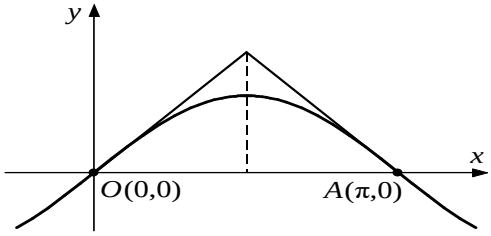
29) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



30) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$



i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία $O(0,0)$ και $A(\pi,0)$.

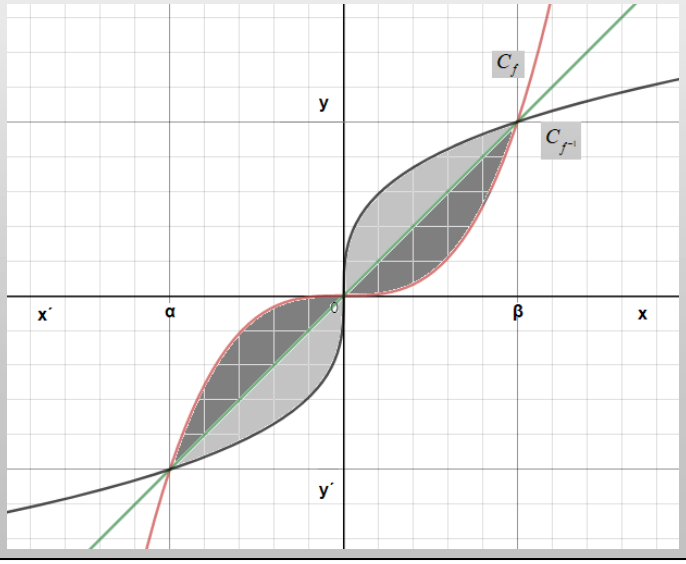
ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις εφαπτόμενες στα σημεία O και A.

32) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln\dfrac{1}{x}$ και την ευθεία $y = \ln 2$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Η f είναι 1-1, οπότε ορίζεται η $f^{-1}(x)$.

- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=f(\alpha)$, $x=f(\beta)$ είναι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\left|f^{-1}(x)\right|dx$. Αν θέσουμε $x=f(u)$, προκύπτει ότι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f^{-1}\left(f(u)\right)\right|f'(u)du=\int_{\alpha}^{\beta}|u|f'(u)du=\ldots$
- Επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ευθείας y=x. Ισχύει λοιπόν ότι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx=2\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-x\right|dx$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τις ευθείες $x=1$, $x=e+1$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση :

i. Για κάθε $x\in \mathrm{A}_f=(0,+\infty)$ είναι $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}_f=(0,+\infty)$, οπότε είναι 1-1 άρα και αντιστρέψιμη με $\mathrm{A}_{f^{-1}}=f\left(\mathrm{A}_f\right)\overset{f\uparrow\&\,\text{συνεχής}}{=}\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\Re$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^{e+1}\left|f^{-1}(x)\right|dx$

Θέτω $x=f(u)$ άρα $dx=f'(u)du$

Για $x=1$ είναι $f(u)=1\Leftrightarrow f(u)=f(1)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}u=1$

Για $x=e+1$ είναι $f(u)=e+1\Leftrightarrow f(u)=f(e)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}u=e$

Άρα τελικά : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^{e+1}\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_1^{e}\left|f^{-1}\left(f(u)\right)\right|\cdot f'(u)du=\int_1^{e}|u|\cdot f'(u)du\overset{u\in[1,e]}{=}$

$=\int_1^{e}uf'(u)du=\int_1^{e}u\left(1+\frac{1}{u}\right)du=\int_1^{e}(u+1)du=\left[\frac{u^2}{2}+u\right]_1^{e}=\frac{e^2}{2}+e-\frac{1}{2}-1=\frac{e^2+2e-3}{2}$ τ.μ.

34) Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[0,\frac{1}{4}\right]\to\Re$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x}-x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$

Λύση :

i. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, και για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ είναι : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, άρα είναι και 1-1 και άρα αντιστρέψιμη.

ii. Επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x, για να βρω τα κοινά σημεία της των C_f και $C_{f^{-1}}$, αρκεί να βρω τα κοινά σημεία των C_f και y=x. Έτσι έχουμε : $f(x)=x\Leftrightarrow\sqrt{x}-x=x\Leftrightarrow\sqrt{x}=2x$ πρέπει $2x\ge0\Leftrightarrow x\ge0$.

Έτσι : $\sqrt{x}=2x\Leftrightarrow x=4x^2\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{1}{4}$ δεκτές. Επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ευθείας y=x. Έστω $h(x)=f(x)-x$, είναι $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{1}{4}$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$h(x)$	−	0	+	0	−

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ και το πρόσημό της φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, έτσι έχουμε :

$\mathrm{E}(\Omega)=2\int_0^{\frac{1}{4}}\left|f(x)-x\right|dx=2\int_0^{\frac{1}{4}}\left|h(x)\right|dx=2\int_0^{\frac{1}{4}}h(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{4}}(\sqrt{x}-2x)dx=$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}} - 2x\right)dx = 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x^2\right]_0^{\frac{1}{4}} = 2\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x^2\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{24}$$ τ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 2$.
   i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
   ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

36) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
   i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
   ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$

37) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$.
   i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
   ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τις ευθείες $x = 1$, $x = e + 1$ και τον άξονα $x'x$.

38) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.
   i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
   ii. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
   iii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.
   iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3. *(3ο 2003)*

39) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$ με $x \geq 2$.
   i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
   ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.
   iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x.
   iv. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}. *(Θέμα 2ο Πανελλήνιες 2006)*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΧΩΡΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

40) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, με $x>0$, και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e^2$. Να βρείτε ευθεία $x=\lambda$ η οποία να χωρίζει το Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3x^2+6x$ και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x. Να βρείτε ευθεία $y=ax$, με $\alpha>0$, η οποία χωρίζει το Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

42) Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ και την ευθεία $y=5$ χωρίζεται από την ευθεία $y=\alpha^2+1$, $\alpha>0$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α.

43) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{x}$.
   i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της στο σημείο $(1,1)$ και τον άξονα των x.
   ii. Να βρείτε την ευθεία $x=\alpha$, η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

44) Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x-3)$.
   i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία A,B που η C_f τέμνει τον άξονα των x.
   ii. Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7: ΟΡΙΟ ΕΜΒΑΔΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

45) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$, με $x>0$. Να βρείτε :
   i. Το εμβαδόν $\mathrm{E}(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, με $\lambda>0$ και $\lambda\neq 1$.
   ii. Το όρια $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{E}(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{E}(\lambda)$.

46) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\frac{e}{x}$, $g(x)=\ln x$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν, $\mathrm{E}(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$, τον άξονα των x και την ευθεία $x=\lambda$, $\lambda>e$.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{E}(\lambda)$.

47) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$.

i. Να δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

ii. Να δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y=\lambda e x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

iii. Να δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $\mathrm{E}(\lambda)=\frac{e-2}{2\lambda}$.

iv. Να υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot\mathrm{E}(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$. *(Θέμα 3ο Πανελλήνιες 2005)*

48) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{6x^3+1}{2x^2}$.

i. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ασύμπτωτη την ίδια ευθεία (ε), την οποία και να βρείτε.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$, με α>1

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{E}(\alpha)$. (Θέμα εξετάσεων)

49) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και : $f(x)+f'(x)=2xe^{-x}$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία $x=\alpha$, με α>0.

v. Να βρείτε το $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{E}(\alpha)$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 3ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(x)=\ln x-1$.
   i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda$ με $\lambda>0$ και $\lambda\neq e$.
   ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{E}(\lambda)$
   iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}\left(e^2, f(e^2)\right)$
   iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα x΄x. ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3+x-2$.
   i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
   iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}
   iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$ ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2e}{x}+2\ln x,\quad x>0$
   i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\geq e^{x-e}$ για κάθε $x>0$
   iii. Αν ισχύει $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x>0$ όπου $\lambda>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda=e$.
   iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e}{x}+\ln x+1,\quad x>0$
   i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.
   iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=3^{\xi-1}$.
   iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

5) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = -2 + \frac{2}{x}$ και $g(x) = 3\ln x$ με $x > 0$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$, με $0 < \lambda \neq 1$.

iii. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathrm{E}(\lambda)$

iv. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \mathrm{E}(\lambda)$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \lambda x + 3, \quad x > 0, \quad \lambda \in \Re$

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(1, f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x$ να υπολογίσετε το λ.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη (ε) του προηγούμενου ερωτήματος και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 2$ με $x > 0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda^4 = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda} - 1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda > 0$.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^4 f^{-1}(x)dx$.

8) Έστω δυο συναρτήσεις $f, g : (0,+\infty) \to \Re$ οι οποίες είναι δυο φορές παραγωγίσιμες με $f''(x) = g''(x) - \frac{1}{x^2}$ για κάθε x>0. Αν οι εφαπτομένες στο κοινό σημείο τους με τετμημενη $x_0 = 1$ είναι παράλληλες να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την C_g και την ευθεία x=e.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \frac{e^x}{1 + e^x}$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon) : y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, την (ε), τον άξονα y΄y και την ευθεία x=α, α<0.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathrm{E}(\alpha)$

iv. Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 2μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε(α) τη χρονική στιγμή που είναι α=-ln2.

10) Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(1)=0$ και $xf'(x)-2\ln x>0$ για κάθε $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)>\ln^2 x$ για κάθε $x>1$.

ii. Αν Ε(λ) το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=λ, λ>1, να αποδείξετε ότι : $E(\lambda)>\lambda\ln^2\lambda-2\lambda\ln\lambda+2\lambda-2$ και μετά να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$.

i. Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τις ευθείες x=1 και x=2.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τον άξονα x΄x.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε):y=x είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τις ευθείες x=2 και x=λ, λ>2.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) τον άξονα x΄x και την ευθεία x=α, α>0.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{a\to+\infty}E(\alpha)$

iv. Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 3μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του Ε(α) τη χρονική στιγμή που είναι α=1.

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x}$ και η ευθεία (ε):y=x.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία ε είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και την ευθεία x=λ, 0<λ<e.

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=λ , λ>1.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 3ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2019

1) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι f(x)≥0 για κάθε x∈[α,β].

2) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\,g(x)\,dx .$$

3) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$

4) Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και λ ∈ IR *, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

5) Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

6) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$

7) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε x ∈ [α, β] ισχύει f(x) ≥ 0 τότε :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

8) Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g'(x)dx$$

9) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α,β,γ∈Δ τότε ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

10) Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

11) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x) < 0 για κάθε x∈[α, β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα x'x είναι : $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

12) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει f(x)≥0 για κάθε x∈[α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

13)Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

14) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \Re$, αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

15) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε x∈[α,β], και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2019

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΕΛ. 173

1)Σ 2)Λ 3)Λ 4)Λ 5)Σ 6)Λ 7)Σ 8)Λ 9)Σ 10)Λ 11)Σ 12)Σ 13)Σ 14)Σ 15)Σ
16)Σ 17)Σ 18)Σ 19)Λ 20)Σ 21)Σ 22)Σ 23)Σ 24)Σ 25)Σ 26)Σ 27)Σ 28)Λ 29)Σ
30)Σ 31)Σ 32)Σ 33)Σ 34)Σ 35)Λ 36)Σ 37)Σ 38)Σ 39)Λ 40)Λ 41)Λ 42)Σ 43)Σ
44)Λ 45)Σ 46)Σ 47)Σ 48)Λ 49)Λ 50)Λ 51)Σ 52)Σ 53)Λ 54)Σ 55)Λ 56)Σ 57)Λ
58)Λ 59)Λ 60)Λ 61)Λ 62)Σ 63)Λ 64)Σ 65)Σ 66)Λ 67)Λ 68)Λ 69)Λ 70)Σ 71)Σ
72)Λ 73)Λ 74)Σ 75)Σ 76)Σ 77)Λ 78)Σ 79)Σ 80)Σ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΕΛ. 389

1)Λ 2)Λ 3)Σ 4)Σ 5)Λ 6)Σ 7)Λ 8)Σ 9)Λ 10)Λ 11)Σ 12)Σ 13)Λ 14)Λ 15)Λ
16)Σ 17)Λ 18)Λ 19)Λ 20)Λ 21)Σ 22)Λ 23)Σ 24)Σ 25)Σ 26)Λ 27)Σ 28)Λ 29)Σ
30)Σ 31)Λ 32)Λ 33)Σ 34)Σ 35)Λ 36)Σ 37)Λ 38)Λ 39)Λ 40)Λ 41)Λ 42)Λ
43)Λ 44)Σ 45)Σ 46)Λ 47)Σ 48)Λ 49)Σ 50)Λ 51)Λ 52)Λ 53)Σ 54)Λ 55)Λ
56)Λ 57)Λ 58)Σ 59)Λ 60)Σ 61)Σ 62)Λ 63)Σ 64)Λ 65)Σ 66)Λ 67)Σ 68)Σ 69)Λ
70)Λ 71)Λ 72)Λ 73)Λ 74)Σ 75)Λ 76)Λ 77)Λ 78)Λ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΕΛ. 465

1)Λ 2)Σ 3)Σ 4)Σ 5)Σ 6)Λ 7)Λ 8)Λ 9)Σ 10)Σ 11)Λ 12)Σ 13)Λ 14)Λ 15)Σ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} \left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f\left(f(x)\right) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ (μονάδες 4) και $f'(0) = 1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^{\pi}} \dfrac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$. **Μονάδες 6**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1.$

β) Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

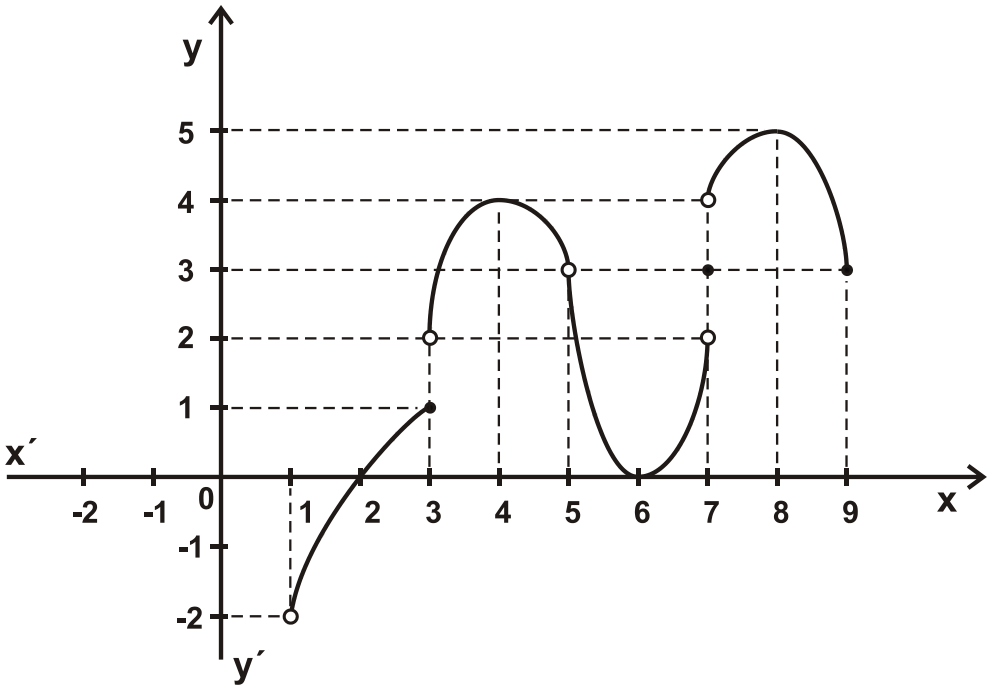
ε) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

$$\text{αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0 \text{ , τότε } f(x) > 0 \text{ στο } [\alpha,\beta].$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_o του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_o)=0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$, $x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx\ .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1 & ,0<x<1\\ 1 & ,x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1} & ,x>1\end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Μονάδες 8

Δ3. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

(μονάδες 3)

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_o$, όπου x_o η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E=\frac{-x_o^{\,2}-2x_o+2}{2}.$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2), \quad \text{για κάθε } x>1.$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.**»**

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ell nx,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1.$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $(\varepsilon_1)\colon\ y=-x$ και $(\varepsilon_2)\colon\ y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e-1-\pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}, x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o) = 0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_o) = 0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να *γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α,β).

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1}.

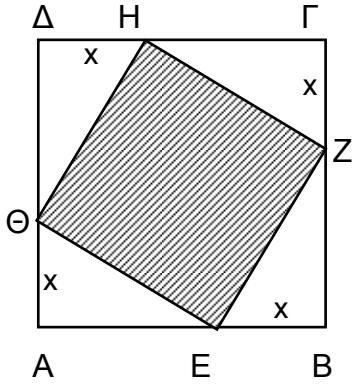
δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν f(α) = f(β), τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=2x^2-4x+4,\ 0\le x\le 2$$

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

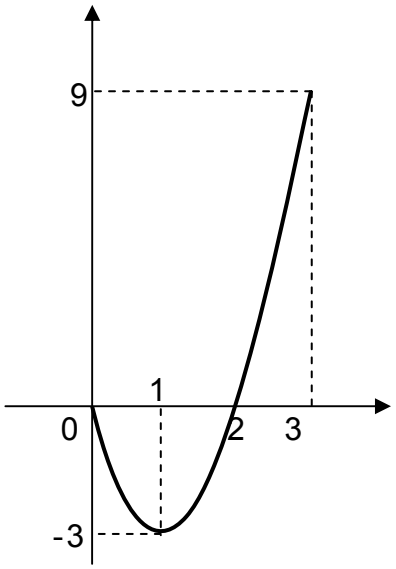
Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_o\in[0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_o)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_o}+1$ cm^2.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0)=2$, $f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2,\ f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\eta\mu x}{x}+\alpha, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ 2, & x=0 \\ x^3-3x^2+2, & x>0. \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0,2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $\pi<\int_{\frac{-\pi}{2}}^{2} f(x)\,dx<\frac{3\pi}{2}-1$.

Μονάδες 7

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\frac{-\pi}{2}\cdot x)=f(\frac{-\pi}{2}\cdot e^{-x})$ έχει μοναδική λύση στο (0,1).

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη.**»**

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.**)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha = 2$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15} .$$

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

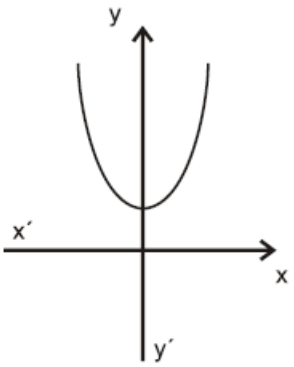
Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η f ′(x) διατηρεί πρόσημο στο $(α, x_o)∪(x_o, β)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

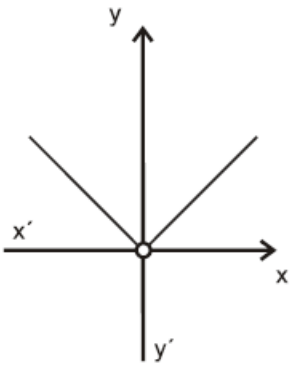
Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 4

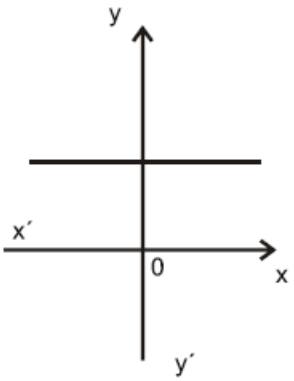
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



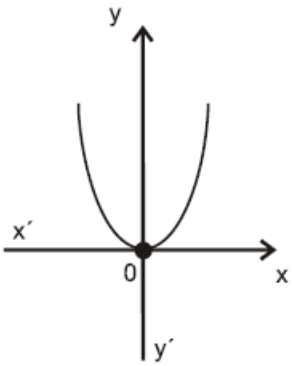
(f)



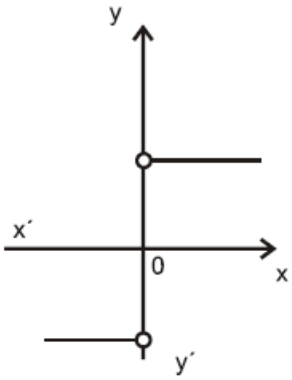
(g)



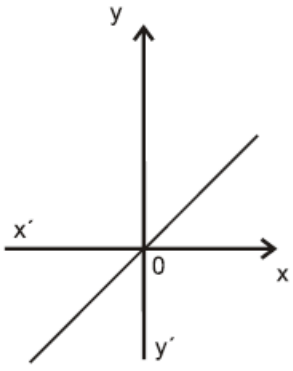
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f,g:(0, +∞) → ℝ, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)] = 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f: ℝ → ℝ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση f: ℝ → ℝ είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3], τότε ορίζεται η f ο g με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3].

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2+1, & x \le 1 \end{cases}$

Β1. Να υπολογίσετε το α∈ ℝ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι α = 1 .

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f : [0, π] →ℝ, με τύπο: f(x) = 2ημx − x .

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε x_0∈[0, π] η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x dx$.

Μονάδες 8

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f(x)-f(2x))\cdot \ln x\right]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: (0, +∞) → ℝ, με τύπο: $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) > \dfrac{x}{x+1}$, για κάθε x > 0.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα (0, 1).

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε x > 0.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-1} + \dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \dfrac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0$, όπου 0 < α < 1, έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα (0, 1) και μία στο διάστημα (1, 2).

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα (0, +∞) με F(e) = e·ln2, να αποδείξετε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

Μονάδες 5

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

β) **i.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.* ***Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A.

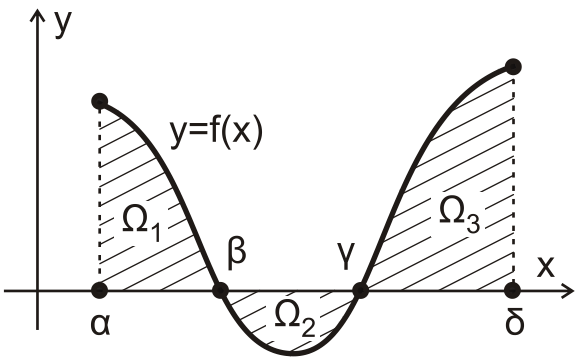
(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.



Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι

$E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$,

τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με:

α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ell n(x-2)$, $x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1. \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x),\ x\geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\overset{\Delta}{MOK}$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\,\ell n(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon):y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ell n(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ