

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Τοπικά Ακρότατα - Θεώρημα Fermat

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

10 Φεβρουαρίου 2014

- 1.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.

(β') Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ') Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f .

(δ') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

- 2.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 3]$ με $f(1) = 2$, $f(3) = 4$ και $f'([1, 3]) = [-1, 5]$. Να αποδείξετε ότι:

(α') υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in (1, 3)$ με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0,$$

(β') υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

- 3.** Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) > 0 \text{ και } f^3(x) - 4x^2 f(x) = x^8 + 8.$$

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:

(α') να αποδείξετε ότι $x_0 = 0$,

(β') να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

- 4.** Αν $0 < \alpha \neq 1$ και ισχύει

$$\alpha^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

- 5.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει δύο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

6. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \text{ όπου } \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ με } \beta^2 < 3\gamma.$$

Να αποδείξετε ότι:

- (α) η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα,
- (β) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
- (γ) υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

(Εξετάσεις 2001 Ενιαίου Λυκείου)

7. (α) Να αποδείξετε ότι: $e^{-x} \geq 1 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 (β) Να αποδείξετε ότι: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.
 (γ) Να αποδείξετε ότι $e^{x-1} - \ln x \geq 1$, για κάθε $x > 0$.
8. (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
 (β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
9. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ και } f(\alpha) = f(\beta) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf'(x) + 2f(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } f(1) = 0.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$.
- (β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- (γ) Να αποδείξετε ότι $x^{2e} \leq e^{x^2}$, για κάθε $x > 0$.