

Φυλλάδιο Άλγεβρας

Για την Β Λυκείου

ΤΕΥΧΟΣ Α

Βλαχάκης Γιάννης

Περιεχόμενα

1	ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	5
1.1	ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	6
1.2	ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ	7
1.3	ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ	12
1.4	ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΡΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ	15
1.5	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	18
2	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	21
2.1	ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	22
2.2	ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	29
2.3	ΑΡΤΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	35
2.4	ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ	46
3	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ	59
3.1	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ	60
3.2	Ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ	63
3.3	ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ	78
3.4	ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	84
3.5	ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	90

Κεφάλαιο 1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ορισμός: 1.1 Κάθε εξίσωση της μορφής:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$ ονομάζεται γραμμική εξίσωση με αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ορισμός: 1.2 Ένα σύνολο από m γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους ονομάζεται γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους ή απλά γραμμικό σύστημα $m \times n$.

Ορισμός: 1.3 Κάθε n -άδα αριθμών που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του συστήματος λέγεται λύση του συστήματος.

ΠΩΣ ΛΥΝΟΥΜΕ ΕΝΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα μπορούμε να κάνουμε συνδυασμούς από τις παρακάτω κινήσεις:

ΚΙΝΗΣΗ 1: Μπορούμε να αλλάξουμε αμοιβαία την θέση δύο εξισώσεων του συστήματος. Αυτό θα το συμβολίζουμε: $E_i \leftrightarrow E_j$

ΚΙΝΗΣΗ 2: Μπορούμε να αντικαταστήσουμε οποιαδήποτε εξίσωση του συστήματος με την ίδια εξίσωση αφού την έχουμε πολλαπλασιάσει με έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό λ . Αυτό θα το συμβολίζουμε: $E_i \leftrightarrow \lambda E_i$

ΚΙΝΗΣΗ 3: Μπορούμε να αντικαταστήσουμε οποιαδήποτε εξίσωση του συστήματος με την ίδια εξίσωση συν μία άλλη εξίσωση του συστήματος που την έχουμε πολλαπλασιάσει με έναν πραγματικό αριθμό λ . Αυτό θα το συμβολίζουμε: $E_i \leftrightarrow E_i + \lambda E_j$

1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ

Ορισμός: 1.4 Κάθε εξίσωση της μορφής:

$$ax + by = c$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x και y .

Κάθε γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους, όπου ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς a και b είναι διαφορετικός του μηδέν, παριστάνει σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων μία ευθεία. Στην περίπτωση αυτή κάθε ζεύγος που είναι λύση της εξίσωσης αποτελεί τις συντεταγμένες ενός σημείου της ευθείας. Επομένως όταν λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους προσπαθούμε να εντοπίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματός μας. Με άλλα λόγια προσπαθούμε να βρούμε την σχετική θέση των δύο αυτών ευθειών. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα τέτοιο γραμμικό σύστημα, τρία πράγματα μπορεί να συμβούν:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Οι δύο ευθείες τέμνονται και τότε το σύστημά μας θα έχει μία μοναδική λύση.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και τότε το σύστημά μας δεν έχει καμία λύση, όπως λέμε είναι αδύνατο.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Οι δύο ευθείες ταυτίζονται και τότε το σύστημά μας έχει άπειρες λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.1 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x + y = -15 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.2 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x - \frac{3y}{4} = -\frac{1}{2} \\ 3(x - 1) + y = -1 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.3 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 4x + 15y = 17 \\ -x + 5y = -13 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 5x + 4y = -14 \\ 3x + 6y = 6 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -5x + 5y = -10 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.4 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 3x + 2y = 26 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 6x + 2y = -2 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ -x - 2y = 5 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.5 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{x+y-5}{2} - \frac{y-x}{3} = 0 \\ 3(x-y-7) - 2(2-x-y) = 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} \frac{x+5}{2} - \frac{6-y}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{5y-2}{6} = \frac{7}{4} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.6 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 5x + y = -1 \\ 10x + 2y = -2 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 5x - y = 10 \\ 15x - 3y = 30 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x - 4y = 8 - x \\ x - 2y = 4 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.7 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} -x + 3y = 9 \\ -2x + 6y = -18 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - \frac{y}{2} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x - 2(y + 1) = y + 4 \\ \frac{x}{3} - y = \frac{7}{3} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.8 (★) Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$$

με αγνώστους x, y και παράμετρο k .

1. Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$.
2. Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$.

■

Άσκηση: 1.9 (★) Δίνονται οι ευθείες:

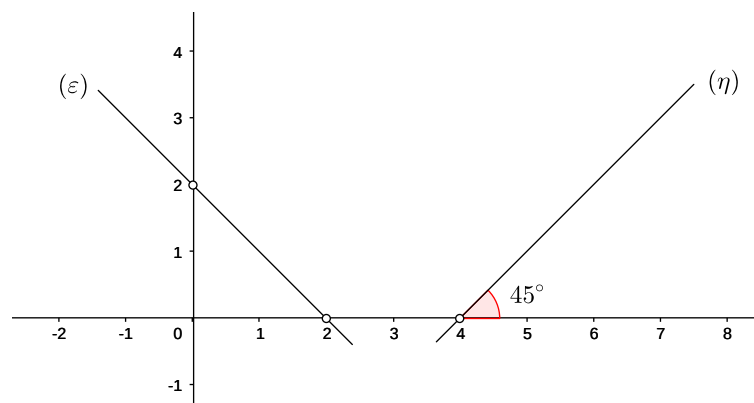
$$(\varepsilon_1) : 2x + y = 6 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : x - 2y = -2$$

1. Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M .
2. Ναδειχθεί ότι η ευθεία $(\varepsilon_3) : 3x + y = 8$ διέρχεται από το M .

■

Άσκηση: 1.10

1. Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η) .



2. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) .

■

Άσκηση: 1.11 (★) Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

1. Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0, 4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

2. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.
3. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών:

$$(\varepsilon_1) : 3x + 2y = 8 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 2x - y = 3$$

Άσκηση: 1.12

1. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

2. Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1) : 5x - y = -1$ και $(\varepsilon_2) : 3x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

Άσκηση: 1.13 (★)

1. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$$

2. Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1) : 5x - y = 5$ και $(\varepsilon_2) : -5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

Άσκηση: 1.14 (★) Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20€ και 50€. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20€ και 50€ αντίστοιχα.

1. α'. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$1. y = 15 - x \quad 2. y - x = 15$$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- β'. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480€. Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

$$3. 50y - 20x = 480 \quad 4. 20x + 50y = 480$$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα (1α) και (1β) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20€ και 50€ κατάθεσε ο Κώστας.

Άσκηση: 1.15 (★) Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

1. Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

$$A. \begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} \quad B. \begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

$$Γ. \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} \quad Δ. \begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

2. Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο προηγούμενο ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

■

Άσκηση: 1.16 Στο δημοτικό parking μίας πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους είναι 2700.

1. Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
2. Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

■

1.3 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Μία εύκολη μέθοδος για να λυθεί ένα γραμμικό σύστημα 2×2 είναι η μέθοδος των οριζουσών. Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Τότε υπολογίζουμε πρώτα τρεις ορίζουσες:

Την ορίζουσα του συστήματος: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$

Την ορίζουσα του αγνώστου y : $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$

Στην συνέχεια έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right)$$

- Αν $D = 0$ και μία τουλάχιστον από τις δύο άλλες ορίζουσες είναι διαφορετική του μηδενός, το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $D = D_x = D_y = 0$, το σύστημα μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή να είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.17 Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 7 - \lambda \\ 8x + 3y = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D , D_x και D_y .
2. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ μοναδική λύση, (x_0, y_0) , την οποία και να βρείτε.
3. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε να ισχύει:

$$x_0 - y_0 = 5$$

■

Άσκηση: 1.18 Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.19 Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda^2 x + 2y = \lambda + 4 \\ \lambda x + y = \lambda + 1 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.20 Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.21 Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x - y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda - 2)y = 2 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.22 Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda(x+1) = y+1 \\ 4x = \lambda(y-1) \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.23 Δίνονται τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} (a+1)x - \beta y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} x + (\beta+2)y = a^2 + 1 \\ x - (a-1)y = \beta^3 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα (Σ_1) έχει άπειρες λύσεις, τότε το σύστημα (Σ_2) είναι αδύνατο.

■

Άσκηση: 1.24 Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x και y ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$$

Να λύσετε το σύστημα.

■

1.4 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΡΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους ακολουθούμε τους κανόνες που περιγράψαμε για τα γραμμικά συστήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.25 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x - y + \omega = -1 \\ x + y + \omega = 1 \\ x + 2y + 4\omega = 8 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} -3x + y + z = 1 \\ -x + 3y - z = 3 \\ x + y - 3z = 9 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.26 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x + 2y + \omega = 2 \\ x + y + 2\omega = -1 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x - 12y - \omega = -6 \\ x + 2y + \omega = 4 \\ 3x - y + 2\omega = 7 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.27 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \\ -2x - y + z = 1 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 9y - 5z = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.28 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x + 2y - 5\omega = 6 \\ -2x + y + 2\omega = 5 \\ -3x + 3y - 4\omega = 8 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = -2 \\ -x + 2y + 6z = 4 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.29 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + 2y + 3z = 16 \\ x + 3y + 4z = 21 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ -x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 1.30 Για τις ηλικίες των μελών μίας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω: Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού, ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού είναι ίσος με $\frac{11}{3}$ και επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

1. Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.
2. Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

Άσκηση: 1.31 Μία παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλνει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα

φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0.3€. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3.8€. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3.55€. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4.05€. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1 ^ο	2	4	0	0,3€	3.8€
2 ^ο	1	2	3	0.3€	3.55€
3 ^ο	3	0	3	0.3€	4.05€
4 ^ο	2	2	1	0.3€	
				Σύνολο	

1. Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.
2. Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν.
3. Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερεις φίλοι για την παραγγελία τους;

■

1.5 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ορισμός: 1.5 Ένα σύστημα λέγεται μη γραμμικό αν μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις του είναι μη γραμμική εξίσωση.

Για να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα, εκτός από τις μεθόδους που αναπτύξαμε για τα γραμμικά συστήματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την μέθοδο της αντικατάστασης:

Μπορούμε να λύσουμε μία εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και το αποτέλεσμα να το αντικαταστήσουμε σε όλες τις άλλες εξισώσεις του συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.32 Να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x^2 - 4y^2 = 5 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.33 Να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.34 Να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} -4x^2 + y^2 = 5 \\ 2x^2 - y^2 = -7 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.35 Να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} x - y = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 11 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.36 Να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} (y - 2x)(x + y) = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} 2|x| - 3|y| = 13 \\ |x| - 2|y| = 5 \end{cases}$$

■

Άσκηση: 1.37 Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρόνων είναι τα παιδιά του, απάντησε ως εξής:

- i. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14.
- ii. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24.
- iii. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.
 1. Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία (i) και (ii) που έδωσε ο Κώστας.
 2. Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

■

Άσκηση: 1.38 Δύο μαθητές, ο Γιάννης και η Ειρήνη, ρωτούν τον υπεύθυνο καθηγητή του τμήματός τους πόσες αδικαιολόγητες απουσίες έχουν και εκείνος τους απαντά ότι ο λόγος των απουσιών του Γιάννη προς τις απουσίες της Ειρήνης είναι $\frac{4}{7}$, ενώ χωρίς τις 9 τελευταίες απουσίες τους είναι ίσος με $\frac{1}{2}$. Να βρείτε τις απουσίες των δύο μαθητών.

■

Κεφάλαιο 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

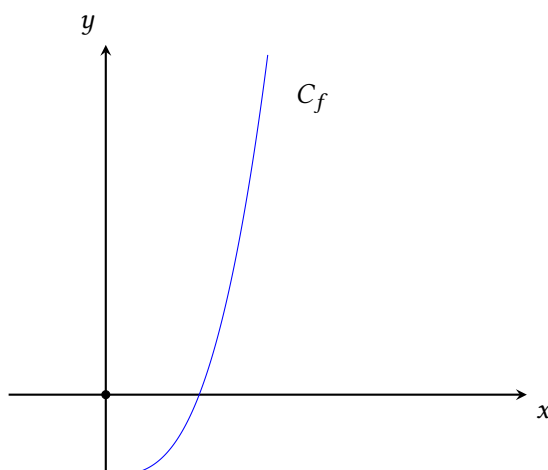
2.1 MONOTONIA KAI AKROTATA SYNARTHSEΩN

Ορισμός: 2.1 Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει:

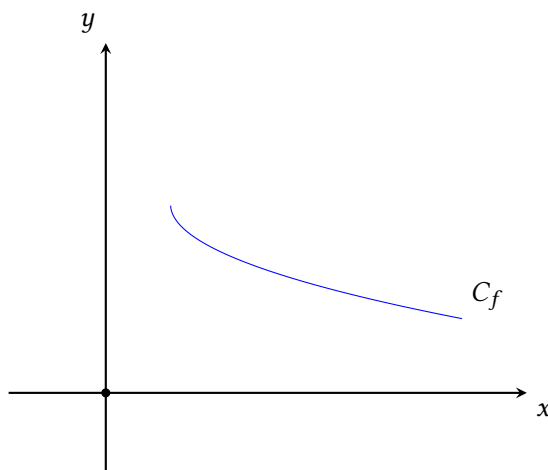
$$f(x_1) < f(x_2)$$

Ορισμός: 2.2 Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ , αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$



Σχήμα 2.1: Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.



Σχήμα 2.2: Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Π Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , θα λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη** στο Δ .



Μπορούμε να ελέγξουμε την μονοτονία μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ χρησιμοποιώντας τον λόγο:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

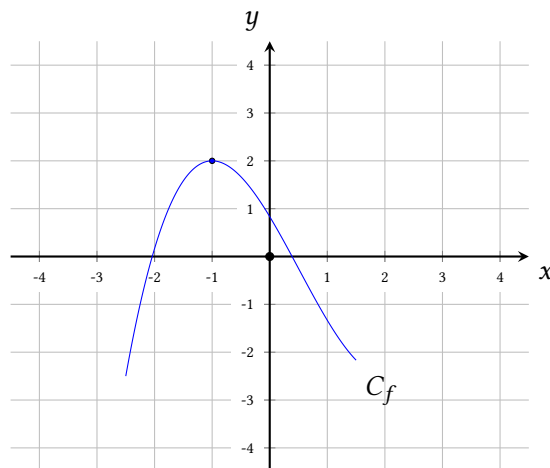
Ειδικότερα:

- αν $\lambda > 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .
- αν $\lambda < 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A .

Ορισμός: 2.3 Θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** το $f(x_0)$, αν ισχύει:

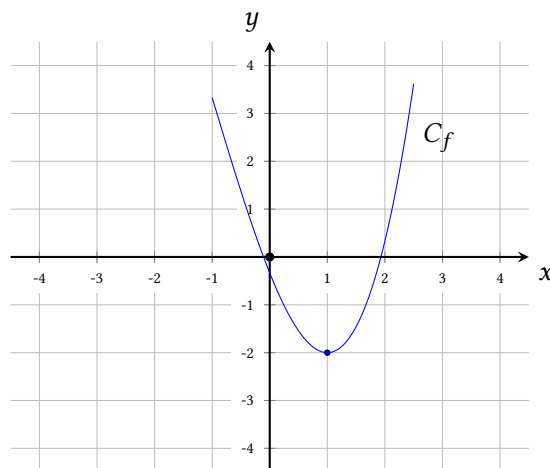
$$f(x) \leq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in A$$



Σχήμα 2.3: Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ μέγιστο ίσο με 2.

Ορισμός: 2.4 Θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** το $f(x_0)$, αν ισχύει:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in A$$



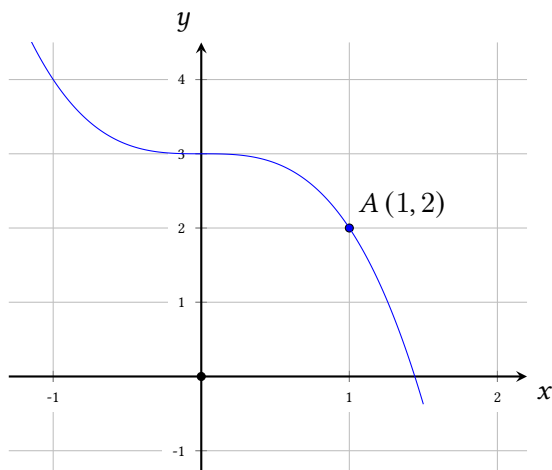
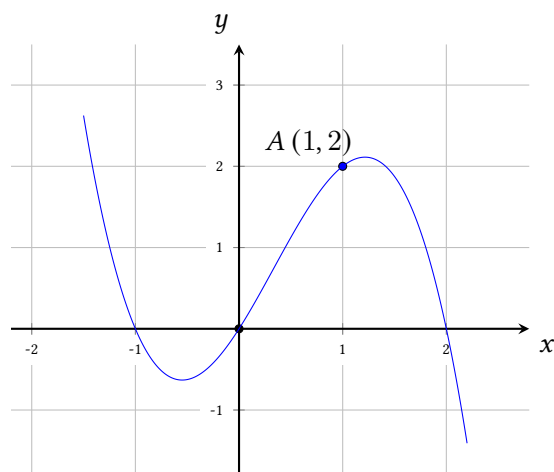
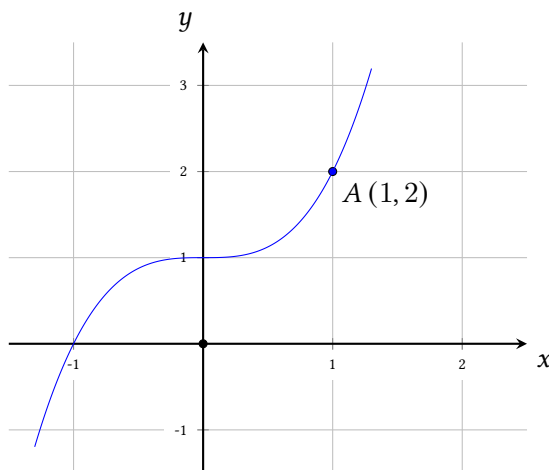
Σχήμα 2.4: Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ελάχιστο ίσο με -2 .

Π Τα (ολικά) μέγιστα και τα (ολικά) ελάχιστα μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα A λέγονται **ολικά ακρότατα** της f .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

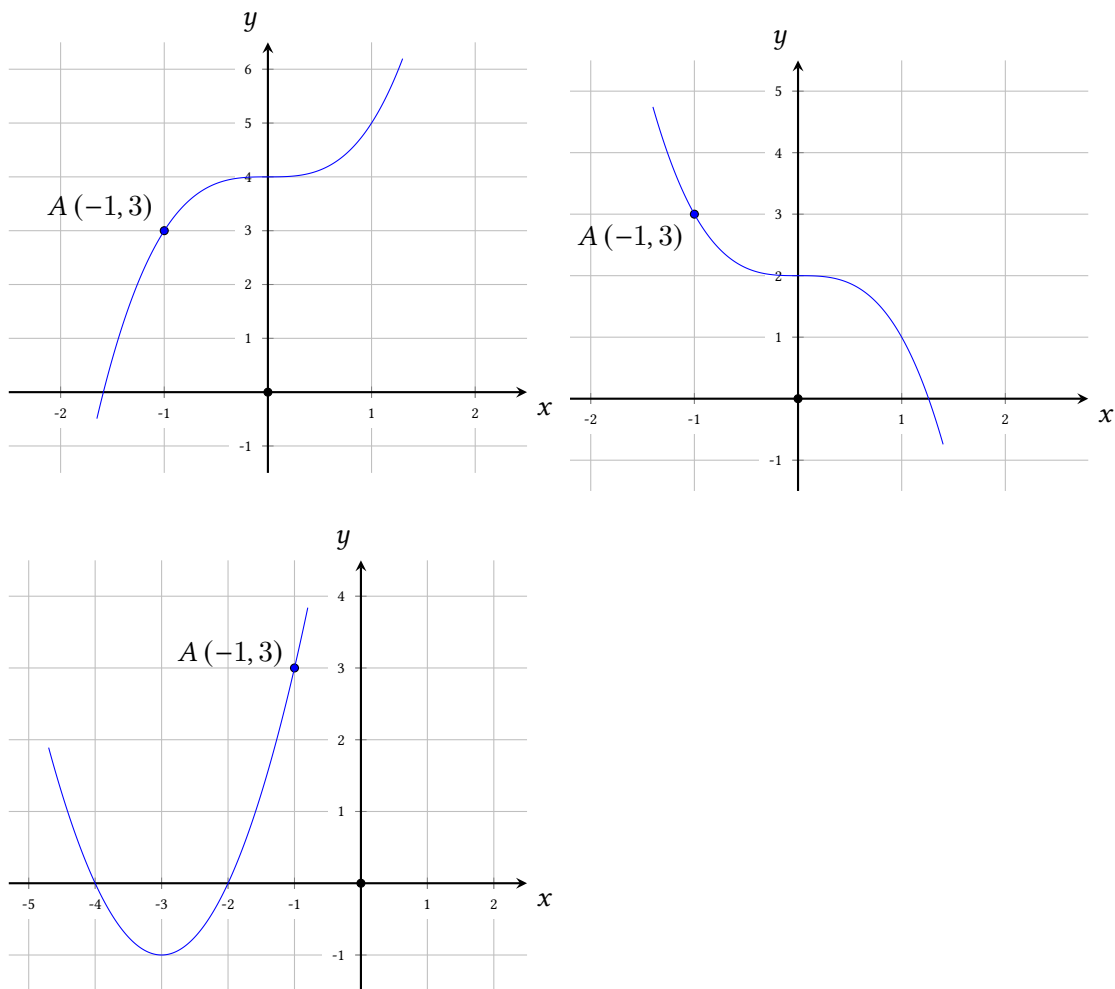
Άσκηση: 2.1 (★) Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

1. Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Άσκηση: 2.2 (★) Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.

1. Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



■

Άσκηση: 2.3 Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$f(1) \quad , \quad f(\sqrt{2} - 1) \quad \text{και} \quad f(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

■

Άσκηση: 2.4 Μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$f(\pi) \quad , \quad f(3) \quad \text{και} \quad f\left(\frac{16}{5}\right)$$

■

Άσκηση: 2.5 Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x) = 2x^3 + 1$

ii) $f(x) = \sqrt{x-2}$

iii) $f(x) = -x^3 - x + 1$

■

Άσκηση: 2.6 Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

- i) $f(x) = x^2 + 1$ ii) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ iii) $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ ■

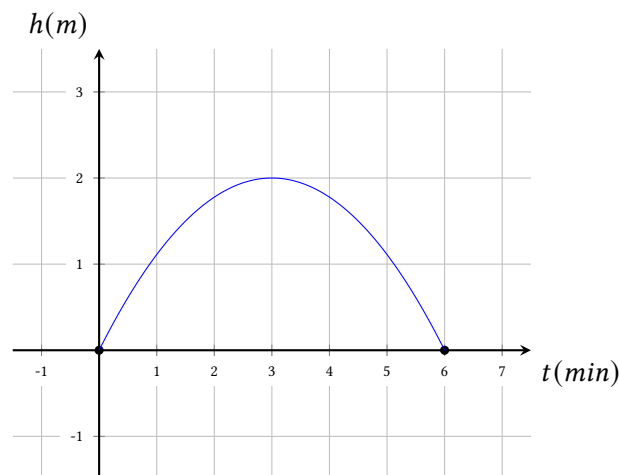
Άσκηση: 2.7 Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ . ■

Άσκηση: 2.8 Έστω δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ . ■

Άσκηση: 2.9 Η γραφική παράσταση μίας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(4, 9)$.

1. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .
 2. Να λύσετε την ανίσωση: $f(5 - 3x) < 2$
-

Άσκηση: 2.10 (★) Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t .



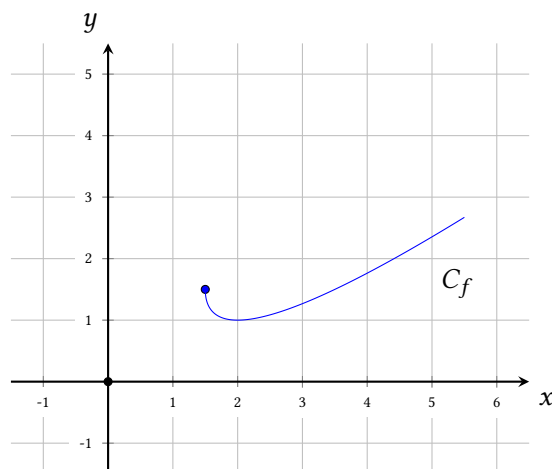
Να βρείτε:

1. Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει $1m$ από το έδαφος.
 2. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.
 3. Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.
-

Άσκηση: 2.11 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x - \sqrt{2x - 3}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.
3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι:
 - α'. γνησίως φθίνουσα.
 - β'. γνησίως αύξουσα.

■

Άσκηση: 2.12 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι: $f(x) \leq 1$
2. Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

■

Άσκηση: 2.13 Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = 2|x - 1| - 1$ ii) $f(x) = -2x + 3, x \in [2, 3]$ iii) $f(x) = x^2 - 4x - 3$

■

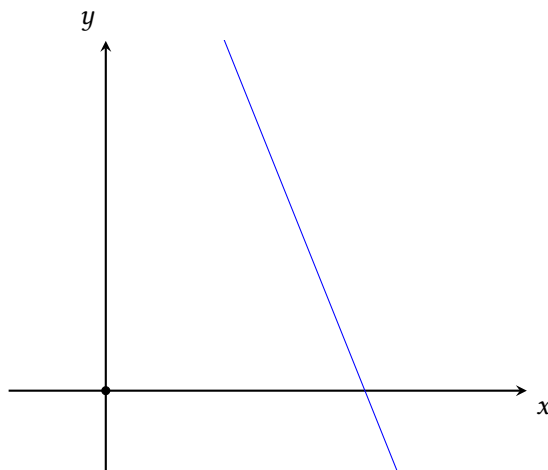
Άσκηση: 2.14 Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$ ii) $f(x) = x^2 - 6x + 3, x \in [0, 2]$ iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

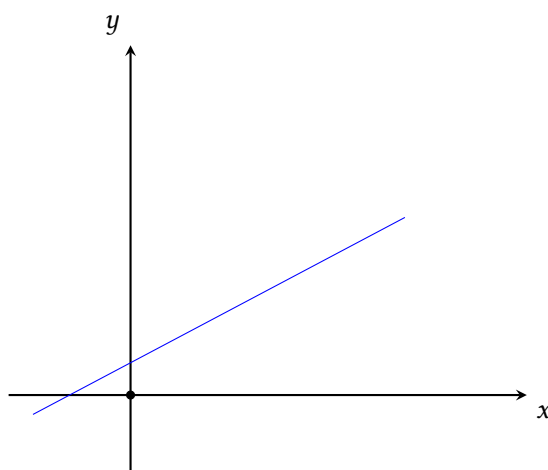
■

2.2 ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

(Α) Η γραμμική συνάρτηση συνάρτηση $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$



Σχήμα 2.5: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $a < 0$. Η ευθεία σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

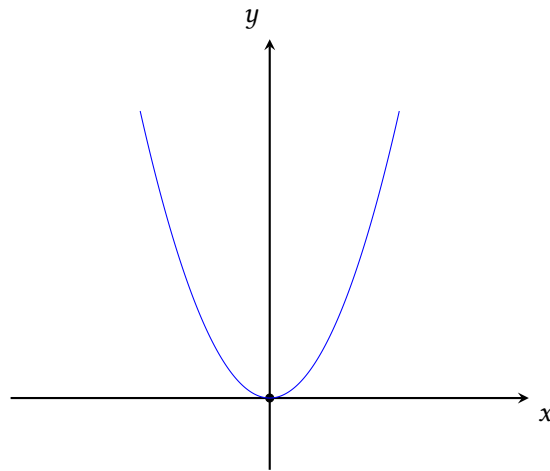


Σχήμα 2.6: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $a > 0$. Η ευθεία σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

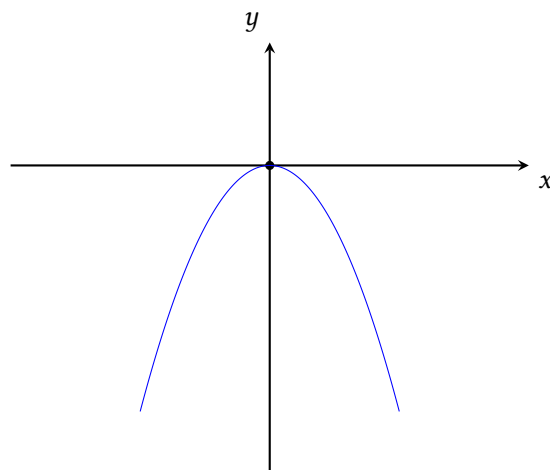
Στην ειδική περίπτωση που $a = 0$, η συνάρτηση παίρνει την μορφή $f(x) = b$ και λέγεται σταθερή συνάρτηση. Η γραφική της παράσταση είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$.

(B) Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης λέγεται *παραβολή*.

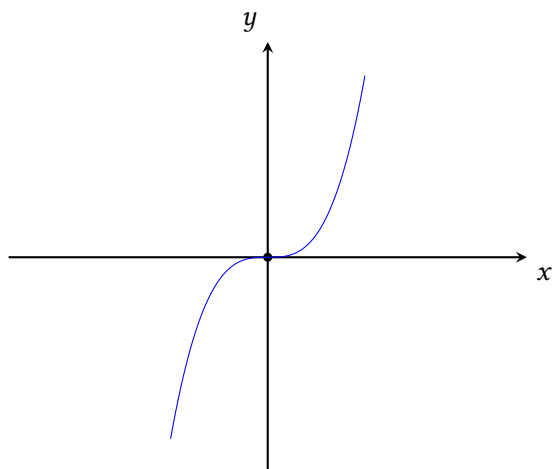


Σχήμα 2.7: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $a > 0$.

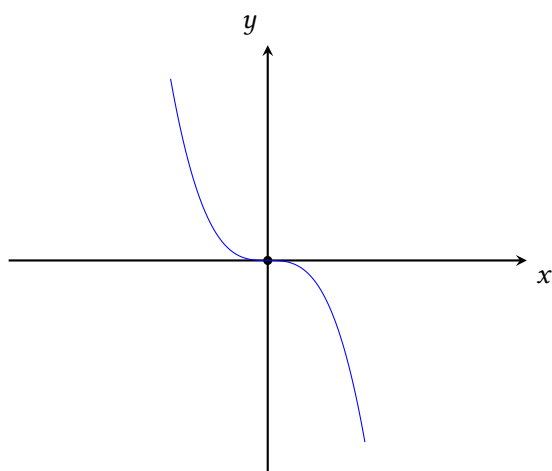


Σχήμα 2.8: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $a < 0$.

(Γ) Η συνάρτηση $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$



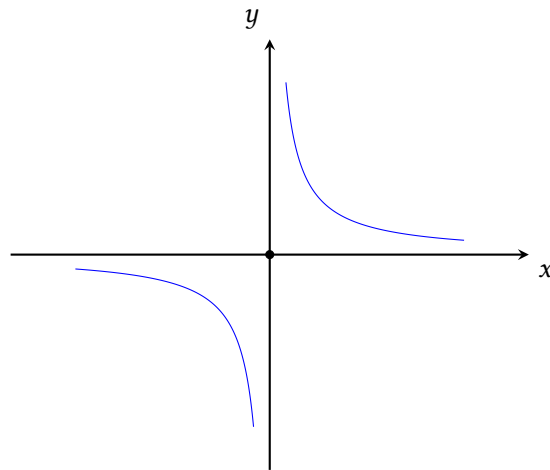
Σχήμα 2.9: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $a > 0$.



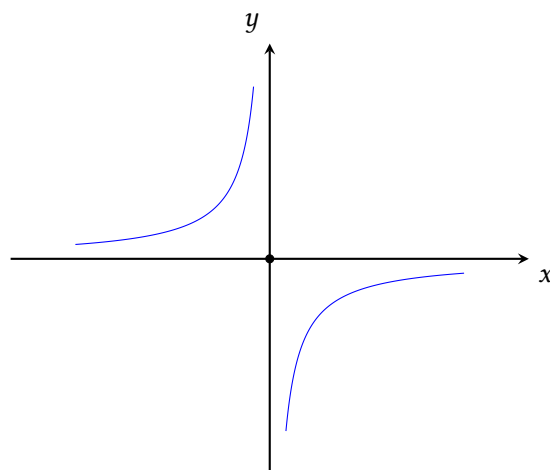
Σχήμα 2.10: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $a < 0$.

(Δ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης λέγεται *υπερβολή*.

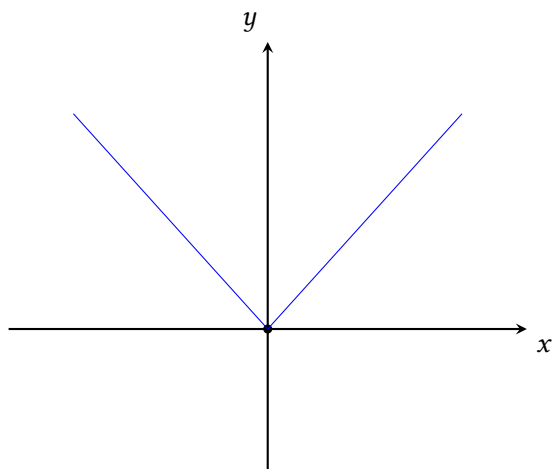


Σχήμα 2.11: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $a > 0$.



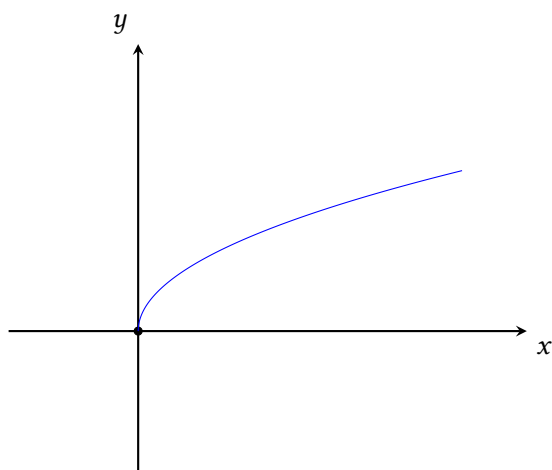
Σχήμα 2.12: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $a < 0$.

(Ε) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$



Σχήμα 2.13: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτελείται από δύο ημιευθείες που διχοτομούν την πρώτη και δεύτερη γωνία των αξόνων.

(ΣΤ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$



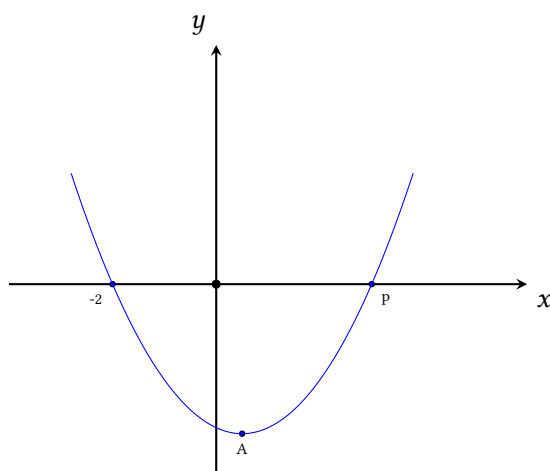
Σχήμα 2.14: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι επίσης παραβολή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.15 Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο παρακάτω σχήμα



Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{8}\right)$ και τέμνει τον άξονα x' στα σημεία $(-2, 0)$ και $(p, 0)$.

1. Βρείτε την τιμή του p .
2. Βρείτε τις τιμές των a, b, c .
3. Γράψτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .

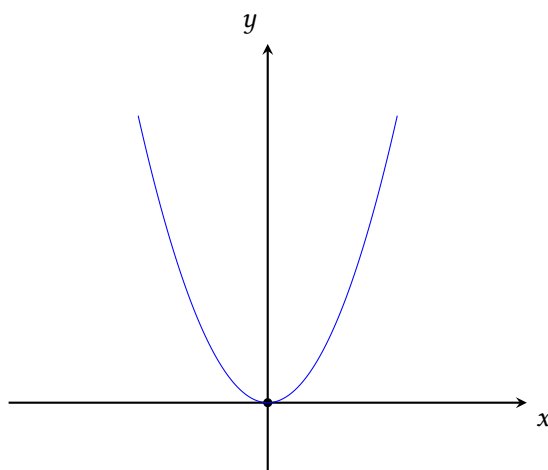
■

2.3 ΑΡΤΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός: 2.5 Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι η f είναι **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

Π Η γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

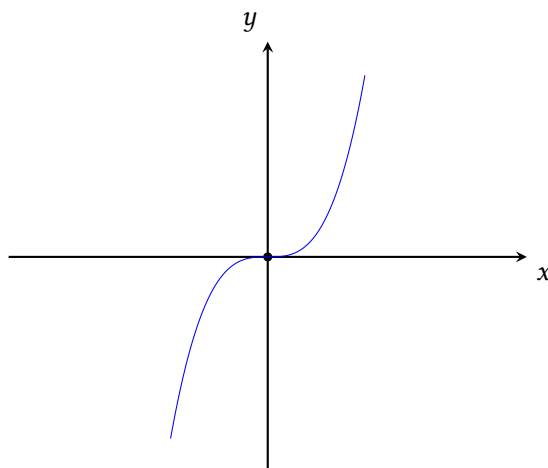


Σχήμα 2.15: Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι άρτια συνάρτηση. Η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Ορισμός: 2.6 Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι η f είναι **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Π Η γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 2.16: Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι περιττή συνάρτηση. Η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.16 (★) Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

$$f(-1) = 2 \quad \text{και} \quad f(1) = 0$$

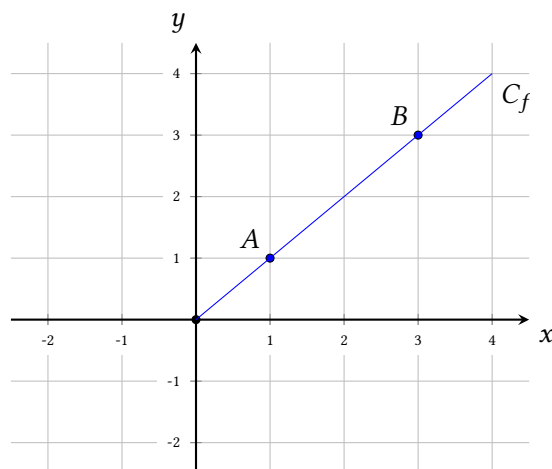
Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

1. Γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια .
2. Γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή.
3. Γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

■

Άσκηση: 2.17 (★) Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1, 1)$, $B(3, 3)$.

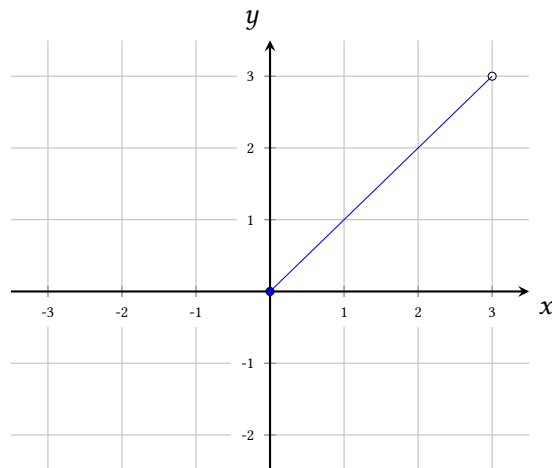
1. Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B .
 - i) είναι σταθερή συνάρτηση
 - ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση
2. Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από τα A, B και είναι περιττή.



■

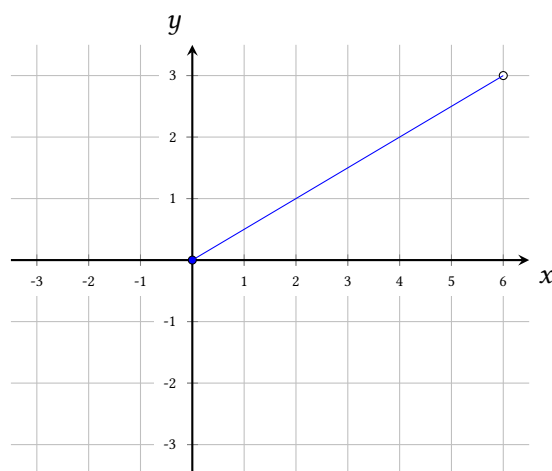
Άσκηση: 2.18 (★) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(a, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

1. Να βρείτε την τιμή του a .
2. Να βρείτε το $f(-2)$.
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.



Άσκηση: 2.19 (★) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(a, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

1. Να βρείτε την τιμή του a .
2. Να βρείτε το $f(-4)$.
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6)$. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.



Άσκηση: 2.20 Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

- i) $f(x) = x^3 + x$ ii) $f(x) = x^4 - x^2$ iii) $f(x) = |x| + 1$

Άσκηση: 2.21 Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

- i) $f(x) = x^2 + |x|$ ii) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$ iii) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Άσκηση: 2.22 Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & , \quad x \leq 0 \\ x + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

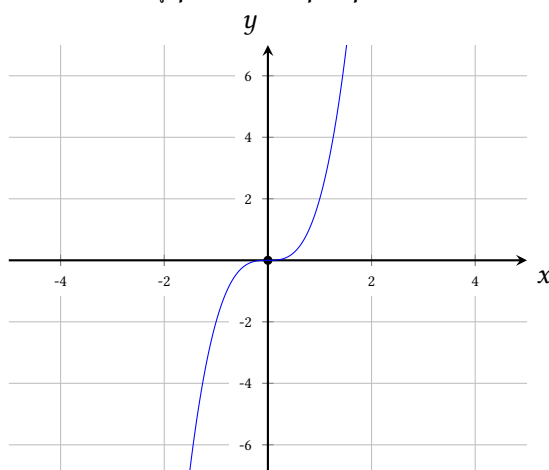
■

Άσκηση: 2.23 Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι περιττή και το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της, τότε ισχύει: $f(0) = 0$.

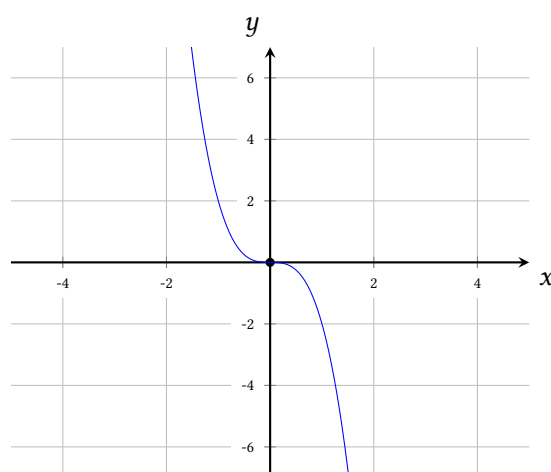
■

Άσκηση: 2.24 (★) Δίνεται το σημείο $A(-2, 8)$ το οποίο ανήκει στην γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f .

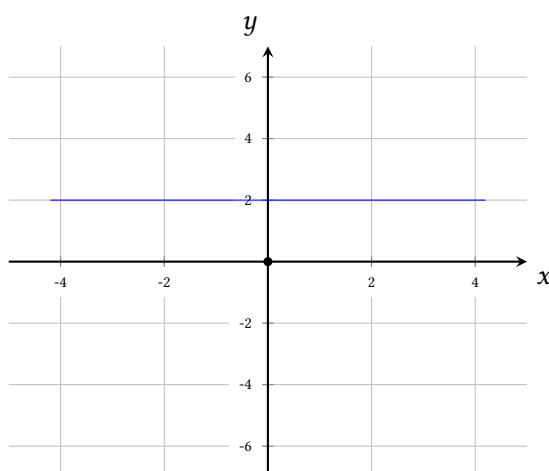
1. Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στην γραφική παράσταση της f .
2. Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
3. Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση f , να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



Γραφική παράσταση (α)



Γραφική παράσταση (β)

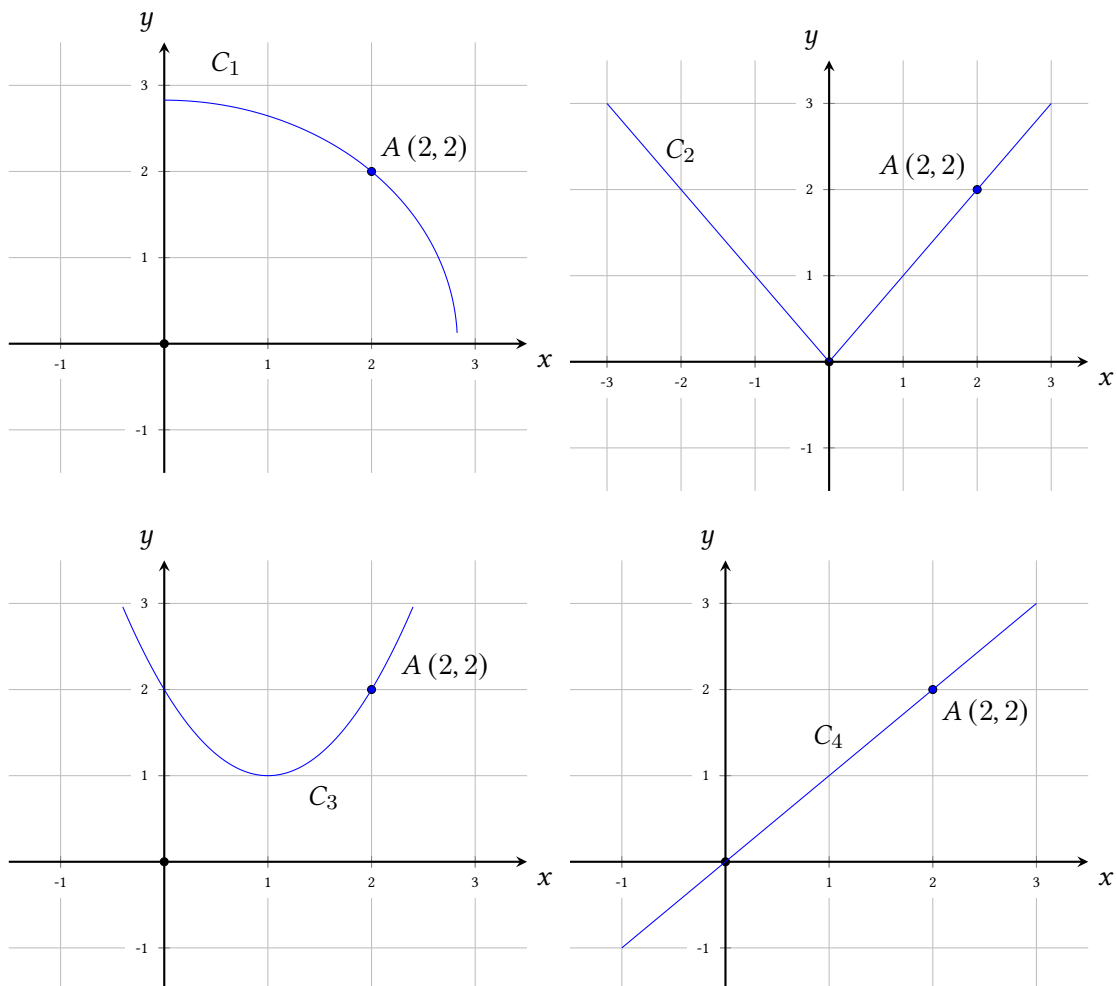


Γραφική παράσταση (γ)

■

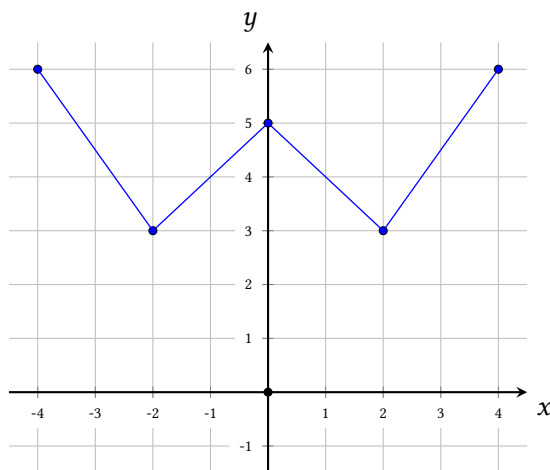
Άσκηση: 2.25 (★) Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:

1. Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.
2. Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμιάς συνάρτησης.

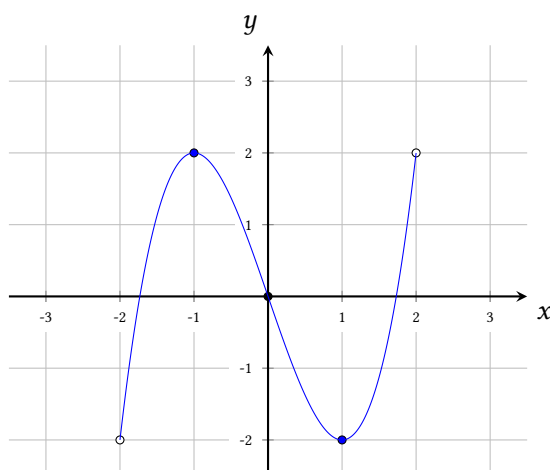


Άσκηση: 2.26 (★) Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4, 4]$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

1. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.
2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
3. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.

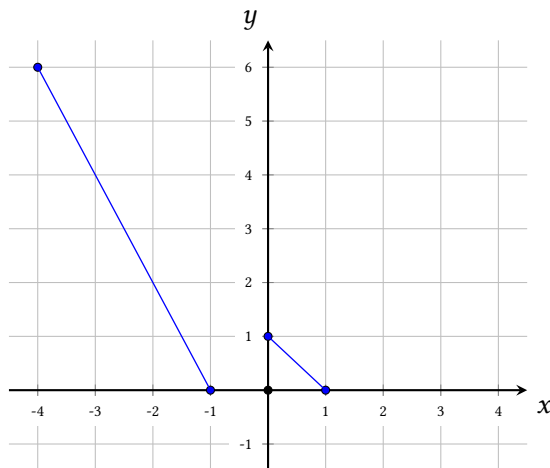


Άσκηση: 2.27 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.



1. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.
3. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

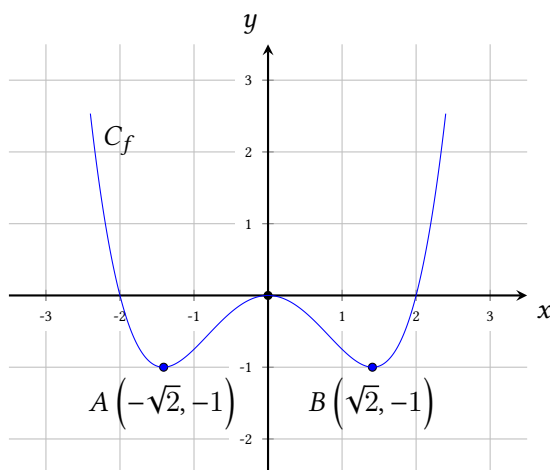
Άσκηση: 2.28 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.



1. Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .
2. Να βρείτε:
 - α'. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - β'. την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

■

Άσκηση: 2.29 (★) Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

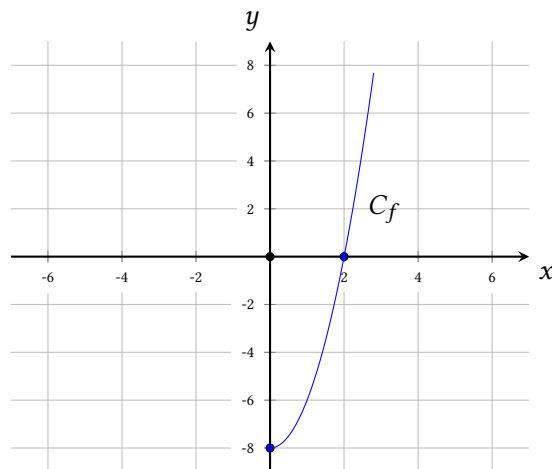


1. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.
2. Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A(-\sqrt{2}, -1)$ και $B(\sqrt{2}, -1)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
3. Να λύσετε γραφικά την εξίσωση: $f(x) = 0$

■

Άσκηση: 2.30 (★) Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μίας

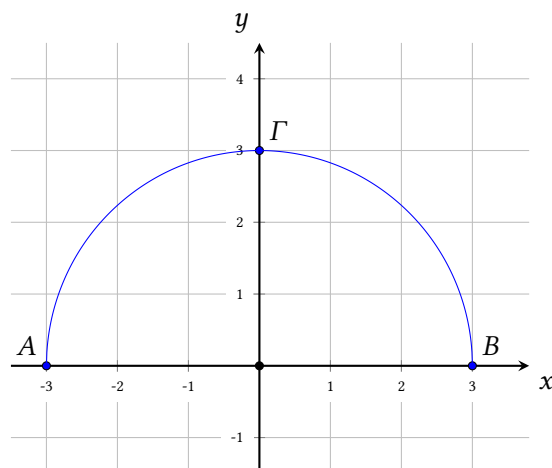
άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



1. Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Να βρείτε:
 - α'. τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
 - β'. το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

■

Άσκηση: 2.31 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.



1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.
3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.

■

Άσκηση: 2.32 (★★) Θεωρούμε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

1. Να αποδείξετε ότι: $f(-1) < f(2)$.
2. Να αποδείξετε ότι: $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in [-3, 3]$.
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.
4. Παρακάτω δίνονται τέσσερις τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να επιλέξετε τον σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

ii) $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$

iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

iv) $f(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$

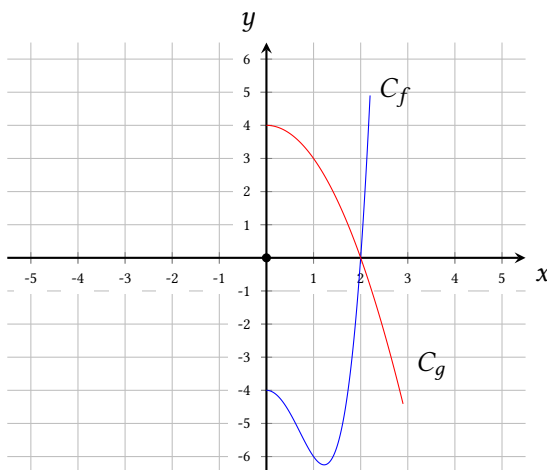
■

Άσκηση: 2.33 (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4 \text{ και } g(x) = -x^2 + 4$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι: $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

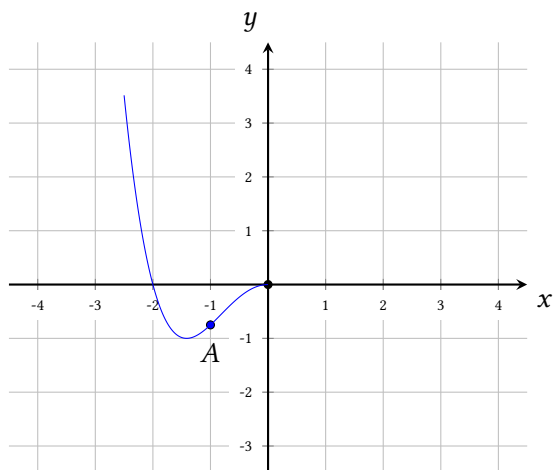
3. Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:
 - α'. την εξίσωση: $f(x) = g(x)$
 - β'. την ανίσωση: $f(x) < g(x)$

■

Άσκηση: 2.34 (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}$$

και το σημείο $A(-1, -\frac{3}{4})$ αυτής.



1. Να δείξετε ότι $a = -1$.
2. Για $a = -1$:
 - α'. Να αποδείξετε ότι: $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - β'. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$.
3. Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του (β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f .

■

2.4 ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΚΑΝΟΝΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Κανόνας 1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + k$, όπου $k > 0$, προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα πάνω.

Κανόνας 2: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) - k$, όπου $k > 0$, προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα κάτω.

Κανόνας 3: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x + k)$, όπου $k > 0$, προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα αριστερά.

Κανόνας 4: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x - k)$, όπου $k > 0$, προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά k μονάδες προς τα δεξιά.

Κανόνας 5: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -f(x)$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ως προς τον άξονα $x'x$.

Κανόνας 6: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(-x)$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ως προς τον άξονα $y'y$.

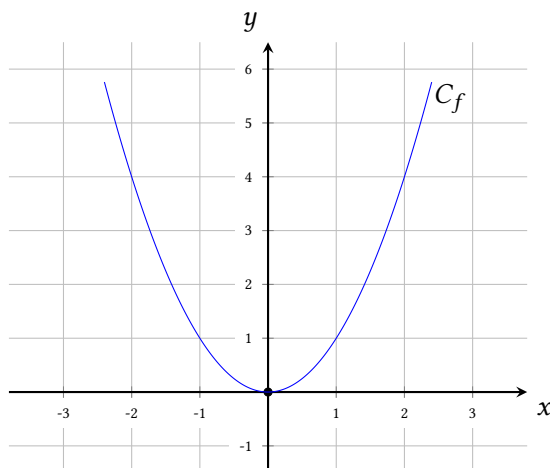
Κανόνας 7: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Κανόνας 8: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(|x|)$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται στο πρώτο και στο τέταρτο τεταρτημόριο και από τα συμμετρικά των τμημάτων αυτών ως προς τον άξονα $y'y$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.35 (★) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης:

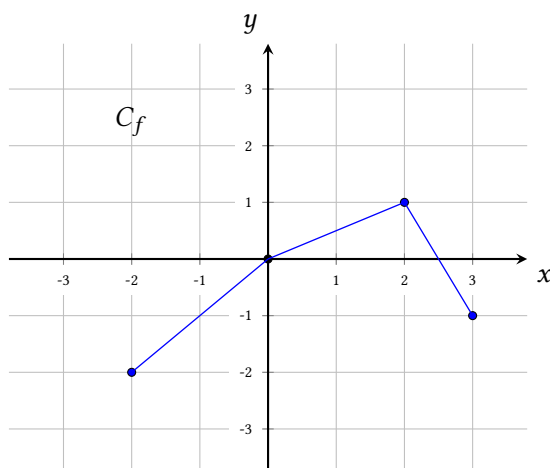
$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$



1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μία μονάδα, προς τα πάνω.
2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $\varphi(x)$.
3. Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi(x)$.

■

Άσκηση: 2.36 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 3]$.



Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- i) $g(x) = f(x-1)$, $x \in [-1, 4]$
- ii) $h(x) = -f(x+2)$, $x \in [-4, 1]$
- iii) $\varphi(x) = |f(x)| + 1$, $x \in [-2, 3]$

■

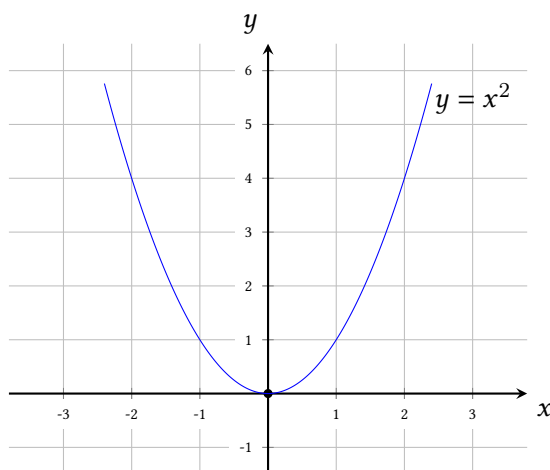
Άσκηση: 2.37 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η f γράφεται στην μορφή:

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1$$

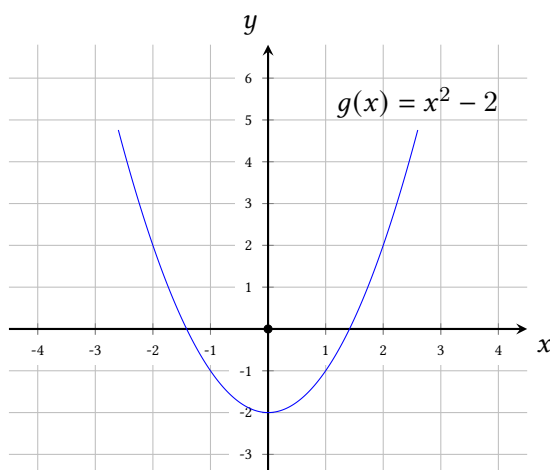
2. Να αναφέρετε τις μετατοπίσεις της $y = x^2$ ώστε να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί.



■

Άσκηση: 2.38 (★) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

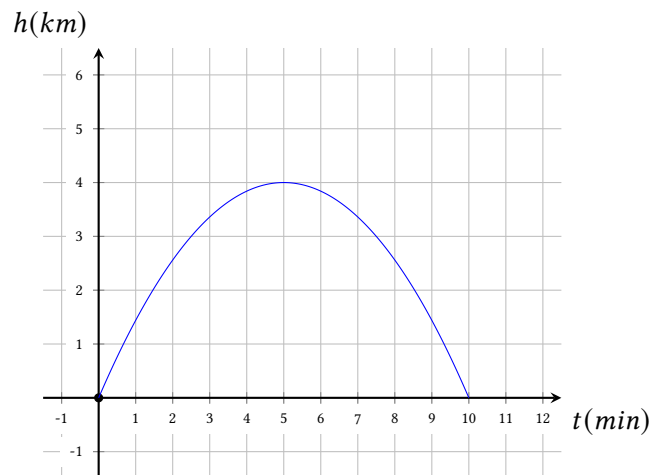
$$g(x) = x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$



1. Με βάση την γραφική της παράσταση,
 α'. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.
 β'. να βρείτε το ελάχιστο της g και την θέση αυτού.

2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Άσκηση: 2.39 (★) Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



1. Να βρείτε:
 - α'. Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου.
 - β'. Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.
2. Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1 km .
 - α'. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.
 - β'. Να βρείτε το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

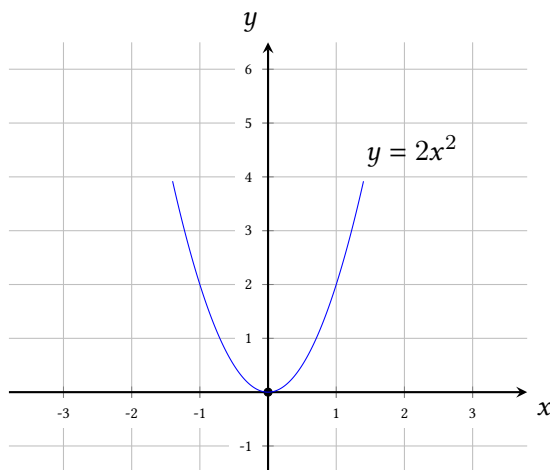
Άσκηση: 2.40 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 19, \quad x \in \mathbb{R}$$

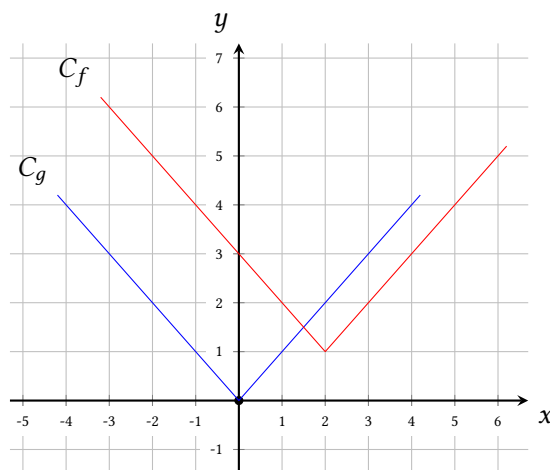
1. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται στην μορφή:

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$$

2. Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πως αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .



Άσκηση: 2.41 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από την γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.



Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

1. Τα διαστήματα μονοτονίας της f , το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.
2. Αν $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i) $f(x) = |x + 2| + 1$

ii) $f(x) = |x - 2| - 1$

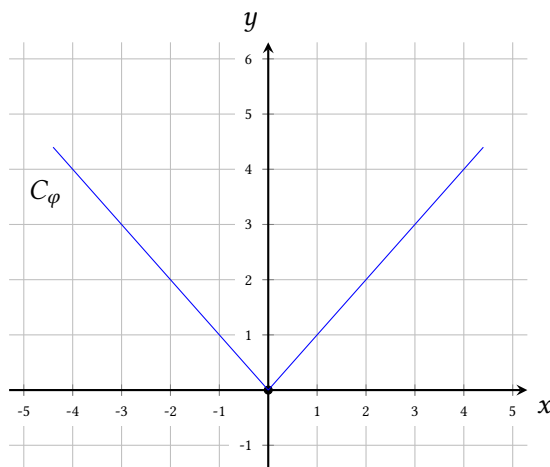
iii) $f(x) = |x + 2| - 1$

iv) $f(x) = |x - 2| + 1$

Άσκηση: 2.42 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$\varphi(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

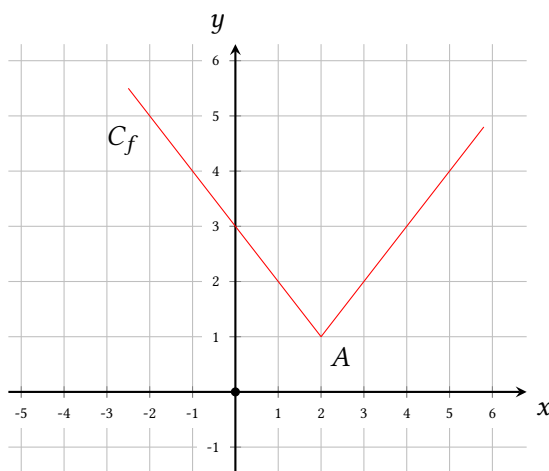
με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα.



Δίνονται επιπλέον οι συναρτήσεις:

$$g(x) = |x - 2|, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(x) = |x - 2| + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της φ .
2. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f , η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

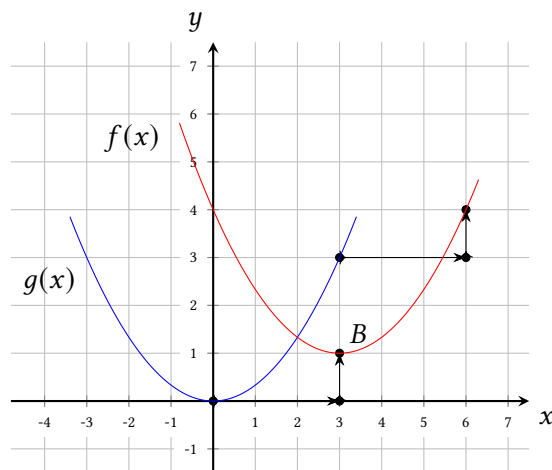
- α'. τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.
- β'. το ολικό ακρότατο της f και την θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

■

Άσκηση: 2.43 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

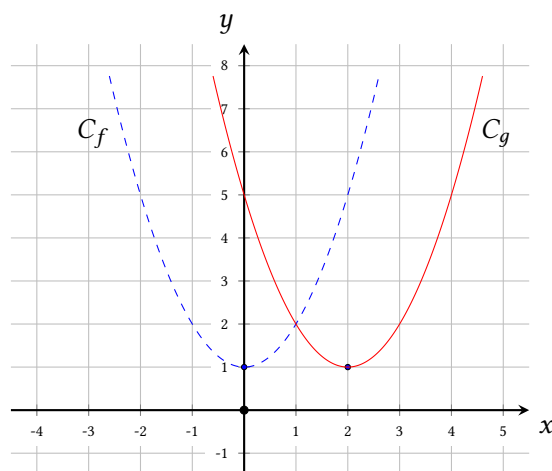
και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά τρεις μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.



- Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.
 - $f(x) = g(x+3) + 1$
 - $f(x) = g(x+3) - 1$
 - $f(x) = g(x-3) + 1$
 - $f(x) = g(x-3) - 1$
- Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.
- Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

■

Άσκηση: 2.44 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.



- Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ;
 - Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

■

Άσκηση: 2.45 Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = mx^2 - 2mx, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } m \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία $y = mx - 9$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο.

1. Να δείξετε ότι $m = 4$.

Η συνάρτηση f μπορεί να γραφεί στην μορφή: $f(x) = 4(x - b)(x - c)$, όπου $b, c \in \mathbb{R}$.

2. Βρείτε τις τιμές των b και c .

Η συνάρτηση f μπορεί να γραφεί στην μορφή: $f(x) = 4(x - a)^2 + d$, όπου $a, d \in \mathbb{R}$.

3. Βρείτε τις τιμές των a και d .
4. Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η f είναι ταυτόχρονα αρνητική και γνησίως αύξουσα.

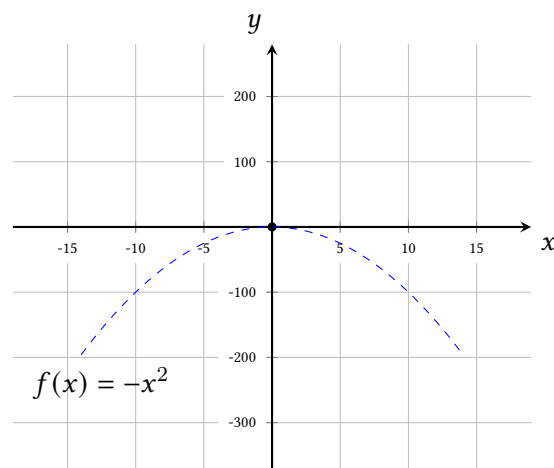
■

Άσκηση: 2.46 Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους $40m$ για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν έναν κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

1. Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο $40m$. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.
2. Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο $40m$, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x .
3. Να δείξετε ότι:

$$E(x) = -(x - 10)^2 + 100$$

Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$, να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $E(x)$. Από την γραφική παράσταση της $E(x)$, να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.



■

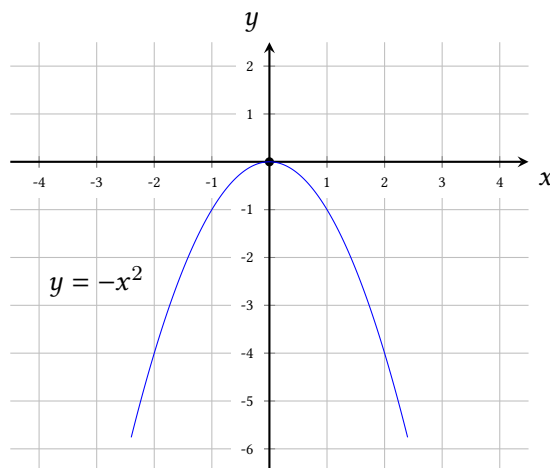
Άσκηση: 2.47 (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = -x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(x) = -x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = -(x-1)^2 + 2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και στην συνέχεια, με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .



2. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να βρείτε:
- α'. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
 - β'. το ολικό ακρότατο της f καθώς και την θέση του.
 - γ'. το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \kappa, \quad \kappa < 2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

■

Άσκηση: 2.48 (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(x) = 3x^2 - 6x + 8, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
2. Να αποδείξετε ότι:

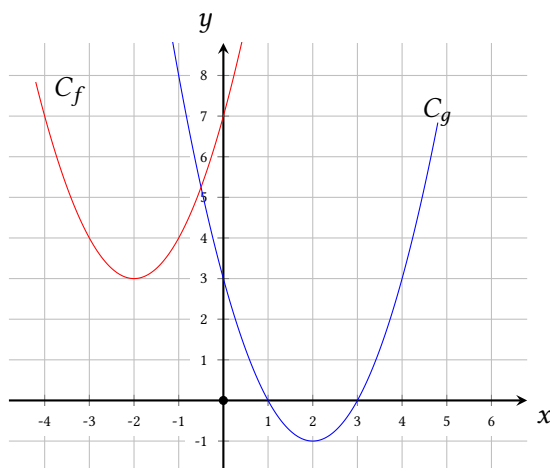
$$f(x) = 3(x-1)^2 + 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

Στην συνέχεια, με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

3. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να βρείτε:
- α'. τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f .
 - β'. το ολικό ακρότατο της f και την θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

γ'. το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Άσκηση: 2.49 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



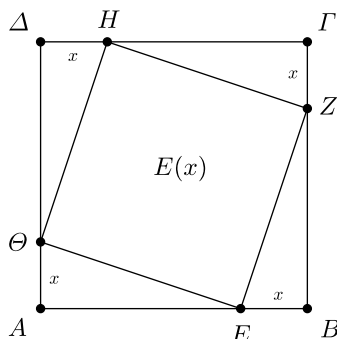
Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από την γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Στηριζόμενοι στο σχήμα που σας δίνεται:

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακροτάτου της f και την τιμή του.
2. Να βρείτε μέσω ποιών μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g .

Άσκηση: 2.50 (★★) Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2cm , παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία E, Z, H, Θ των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$, αντίστοιχα, ώστε:

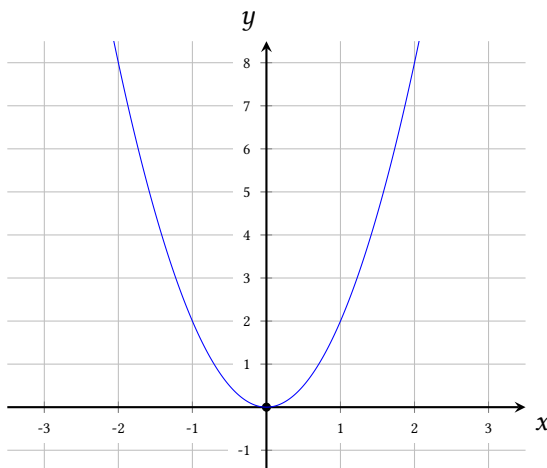
$$EB = Z\Gamma = H\Delta = \Theta A = x$$

και σχηματίζεται το τετράγωνο $EZH\Theta$.



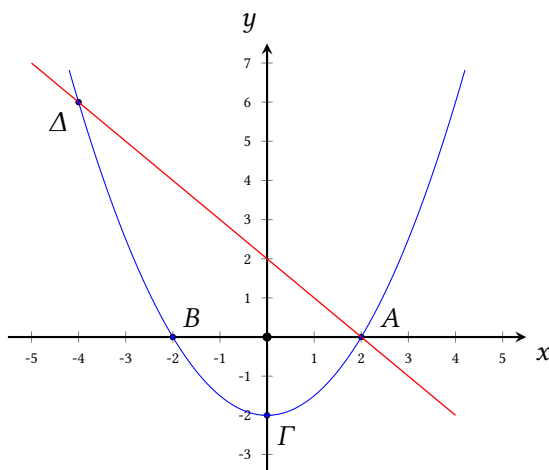
1. Να εκφράσετε την πλευρά EZ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x .

2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ συναρτήσει της πλευράς x δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = 2(x-1)^2 + 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.
3. Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτήν, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του $EZH\Theta$ να γίνεται ελάχιστο.



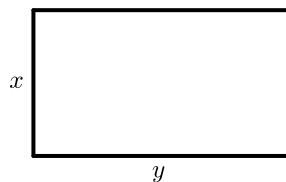
4. Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία E, Z, H, Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο;

Άσκηση: 2.51 (★★) Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων, μίας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



1. Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ , να βρείτε τις τιμές των a, b, γ .
2. Αν $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.
3. Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4.5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Άσκηση: 2.52 (★★) Με συρματοπλέγμα μήκους $20m$ θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

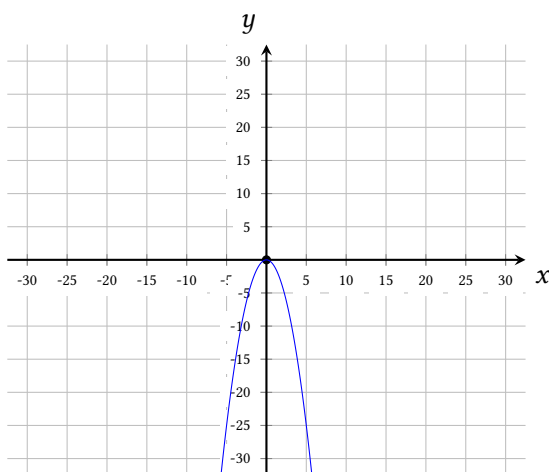


1. Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x .
2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από την συνάρτηση:

$$E(x) = -(x - 5)^2 + 25$$

και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

3. Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτήν, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.



4. Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα (γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.

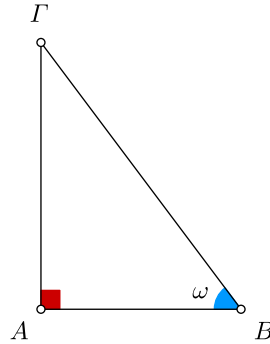
■

Κεφάλαιο 3

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και μία οξεία γωνία του ω .



Τότε ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη ως εξής:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

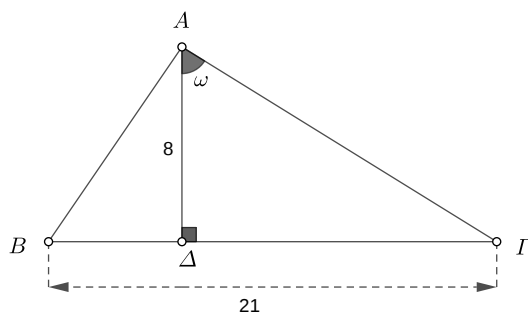
$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

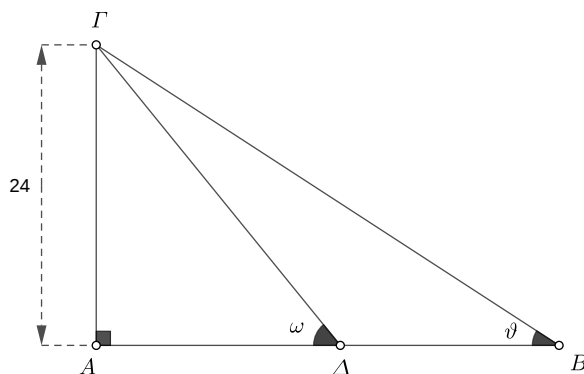
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.1 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με ύψος $A\Delta$. Αν $B\Gamma = 21$, $A\Delta = 8$ και $\sigma\varphi B = \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε:

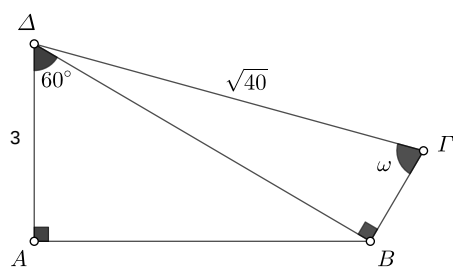
1. Τα τμήματα $B\Delta$ και $A\Gamma$.
2. Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



Άσκηση: 3.2 Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $A\Gamma = 24$. Αν γνωρίζετε ότι $\varepsilon\varphi\omega = 0.8$ και $\varepsilon\varphi\vartheta = 0.6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $B\Delta$.

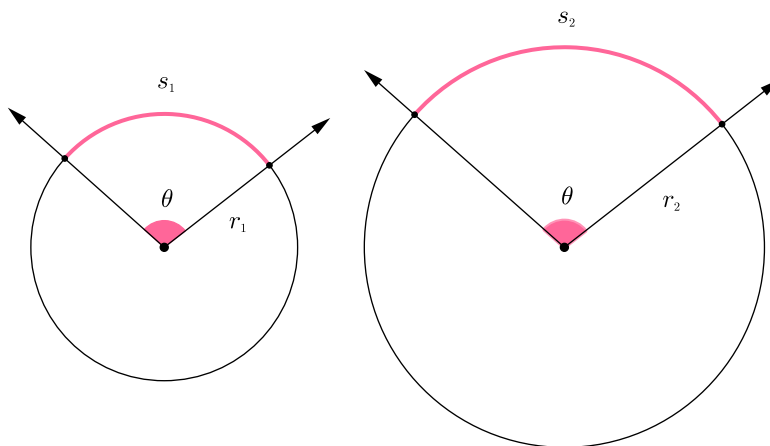


Άσκηση: 3.3 Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια με $A\Delta = 3$, $\Gamma\Delta = \sqrt{40}$ και $\hat{A}\Delta B = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



3.2 Ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Εκτός από την μέθοδο μέτρησης γωνιών με μοίρες, υπάρχει και μία άλλη που είναι πιο φυσική. Θεωρούμε μία γωνία που η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου (όπως λέμε η γωνία είναι **επίκεντρη**) και της οποίας οι πλευρές τέμνουν τον κύκλο, ορίζοντας σε αυτόν ένα **τόξο του κύκλου**. Στο σχήμα που ακολουθεί δείχνουμε δύο κύκλους με διαφορετικές ακτίνες ($r_1 < r_2$) στους οποίους έχουμε σχεδιάσει επίκεντρη γωνία θ ίδιου μεγέθους και η οποία ορίζει στους κύκλους τα τόξα s_1 και s_2 .



Ανεξάρτητα από το μέγεθος του κύκλου, ο λόγος του μήκους του τόξου (s) προς την ακτίνα (r) για έναν δοσμένο κύκλο είναι σταθερός. Δηλαδή:

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \text{σταθερό}$$

Επιπλέον, επειδή ο λόγος αυτός είναι ο λόγος ενός μήκους (του τόξου) προς ένα άλλο μήκος (της ακτίνας), θα είναι ίσος με έναν πραγματικό αριθμό και δεν θα έχει μονάδες μέτρησης.

Ο λόγος $\frac{s}{r}$ δείχνει πόσα μήκη ακτίνας χωράνε στο μήκος του τόξου. Αυτό οδήγησε στο όνομα **ακτίνιο** με τον εξής ορισμό.

Ορισμός: 3.1 Ένα **ακτίνιο** (1 rad) είναι το μέτρο (μέγεθος) μίας επίκεντρης γωνίας θ ενός κύκλου η οποία ορίζει τόξο s στον κύκλο αυτόν που το μέγεθός του είναι ίσο με την ακτίνα r του κύκλου.

Π Αν μία γωνία έχει μέτρο μ° και $a \text{ rad}$, τότε η σχέση μεταξύ τους δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

Π Σε έναν κύκλο με ακτίνα r , αν μία επίκεντρη γωνία του θ ορίζει πάνω στον κύκλο ένα τόξο με μήκος s , τότε ισχύει:

$$s = r\theta$$

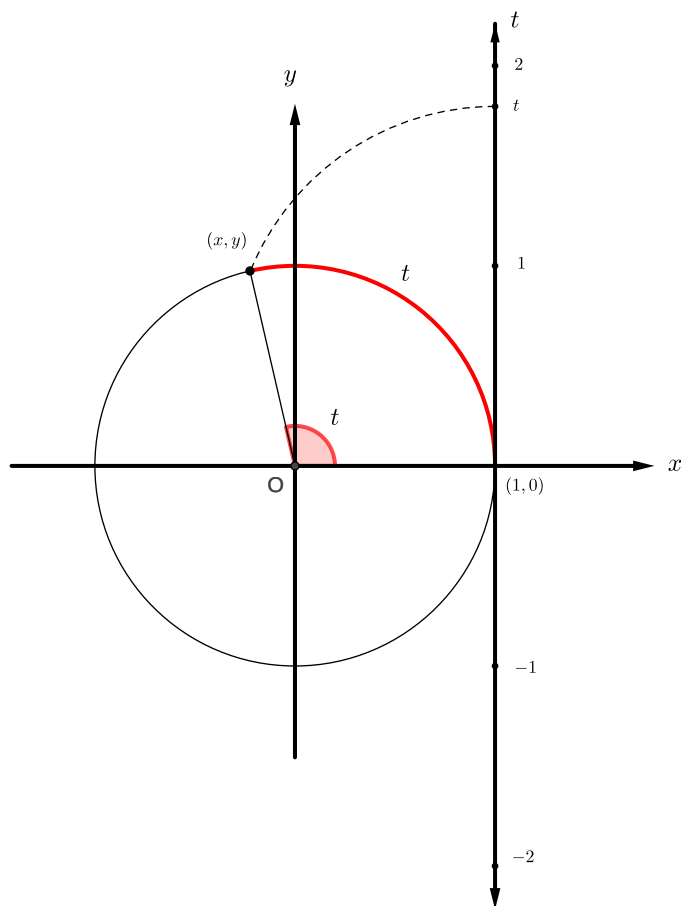
Π Σε έναν κύκλο με ακτίνα r , το εμβαδόν E του κυκλικού τομέα που ορίζεται από μία επίκεντρη γωνία θ μετρημένη σε rad δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}r^2\theta$$

Ορισμός: 3.2 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και με ακτίνα $r = 1$ λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**. Η εξίσωση του κύκλου αυτού είναι:

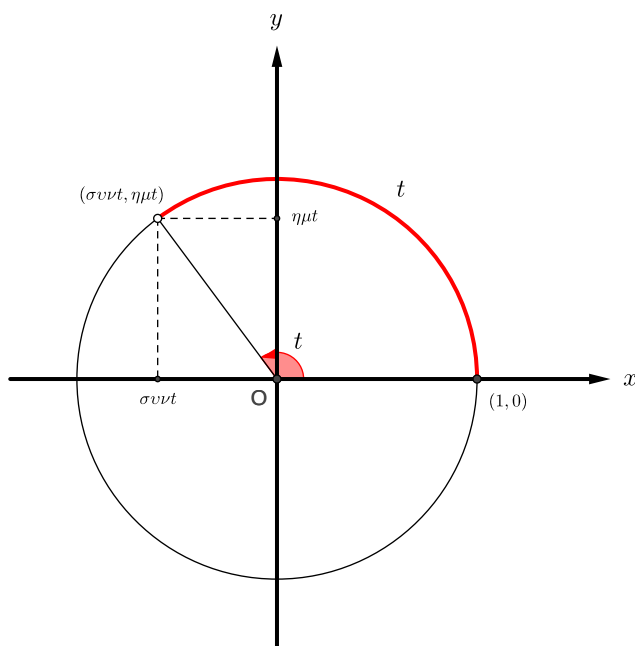
$$x^2 + y^2 = 1$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η ευθεία των πραγματικών αριθμών εφάπτεται στον μοναδιαίο κύκλο στο σημείο του $(1, 0)$. Το μηδέν της ευθείας των πραγματικών αριθμών ταυτίζεται με το σημείο $(1, 0)$ του κύκλου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Από τις ιδιότητες των κύκλων, η ευθεία των πραγματικών αριθμών στην θέση αυτή, θα είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.



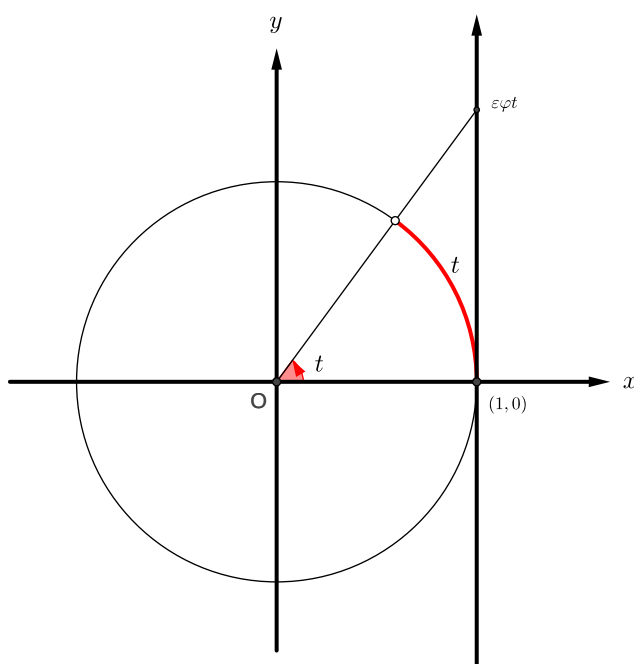
Ας φανταστούμε τώρα ότι η ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι ελαστική, σαν μία χορδή και μπορεί να τυλιχτεί γύρω από τον κύκλο, με το μηδέν να παραμένει σταθερό στο σημείο $(1, 0)$. Όταν το επάνω μέρος της χορδής τυλίγεται γύρω από τον κύκλο, η κίνηση είναι αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού ($t > 0$), ενώ όταν το κάτω μέρος τυλίγεται γύρω από τον κύκλο, η κίνηση είναι ίδια με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού ($t < 0$). Όσο η χορδή τυλίγεται γύρω από τον κύκλο, κάθε πραγματικός αριθμός t πάνω στην ευθεία απεικονίζεται σε ένα σημείο (x, y) του κύκλου. Ο κύκλος με την κατασκευή αυτή μετατρέπεται σε **τριγωνομετρικό κύκλο**.

Στον τριγωνομετρικό κύκλο, σε κάθε πραγματικό αριθμό t αντιστοιχεί ένα σημείο πάνω στον κύκλο. Η τετμημένη του σημείου αυτού ορίζεται να είναι το $\sin t$, ενώ η τεταγμένη του σημείου ορίζεται να είναι το $\eta\mu t$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



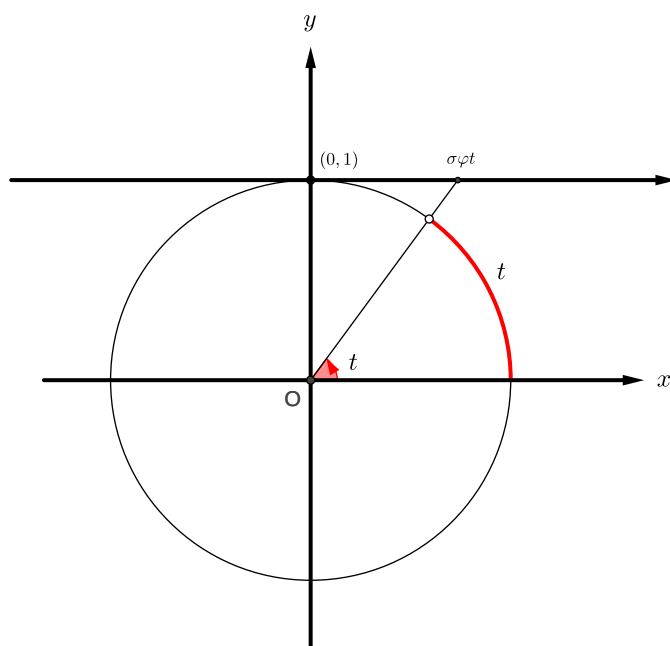
Στο επίπεδο του τριγωνομετρικού κύκλου θεωρούμε έναν ακόμα άξονα πραγματικών αριθμών που το μηδέν του ταυτίζεται με το σημείο $(1, 0)$. Ενώνουμε το κέντρο του τριγωνομετρικού κύκλου με το σημείο του κύκλου που αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό t και βρίσκουμε το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα που ορίσαμε. Ο αριθμός που αντιστοιχεί στον άξονα αυτόν ορίζεται ως η $\epsilon\varphi t$ και ισχύει ότι:

$$\epsilon\varphi t = \frac{\eta\mu t}{\sin t}$$



Στο επίπεδο του τριγωνομετρικού κύκλου θεωρούμε έναν ακόμα άξονα πραγματικών αριθμών που το μηδέν του ταυτίζεται με το σημείο $(0, 1)$. Ενώνουμε το κέντρο του τριγωνομετρικού κύκλου με το σημείο του κύκλου που αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό t και βρίσκουμε το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα που ορίσαμε. Ο αριθμός που αντιστοιχεί στον άξονα αυτόν ορίζεται ως η $\sigma\varphi t$ και ισχύει ότι:

$$\sigma\varphi t = \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t}$$



Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών για κάποιες γωνίες.

Γωνία σε μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Γωνία σε ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Ημίτονο	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Συνημίτονο	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Εφαπτομένη	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0
Συνεφαπτομένη	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-

Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι:

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ισχύει:

$$\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ και $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ισχύει:

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ισχύει:

$$\eta\mu^2 x = \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2 x}$$

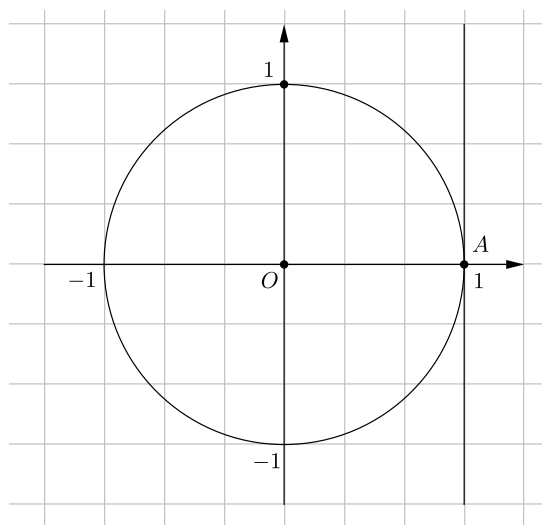
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.4 (★) Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο $\widehat{AB}$ με μήκος ίσο με 2ρ .

1. Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο $\widehat{AB}$, επίκεντρη γωνία ω .
2. Αν $\omega = 2$ ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω .

■

Άσκηση: 3.5 (★) Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A .



1. Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία B, Γ, Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $\widehat{AB} = 1rad$, $\widehat{A\Gamma} = 2rad$ και $\widehat{A\Delta} = 4rad$.
2. Για κάθε ένα τόξο του (α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

■

Άσκηση: 3.6 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$S = \eta\mu 30^\circ + 2\sigma\upsilon\nu 30^\circ - 3\epsilon\varphi 30^\circ$$

■

Άσκηση: 3.7 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$T = 2\eta\mu \frac{\pi}{6} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} + 3\epsilon\varphi \frac{\pi}{6} - 2\eta\mu \frac{\pi}{3}$$

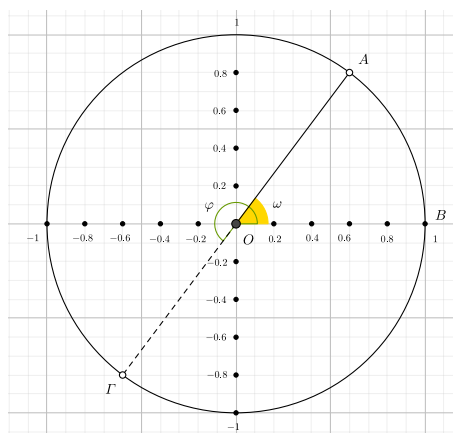
■

Άσκηση: 3.8 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$J = \eta \mu^2 60^\circ + \frac{1}{\varepsilon \varphi^2 \frac{\pi}{6}} + \frac{1}{8 \sigma \nu^2 \frac{\pi}{4}}$$

■

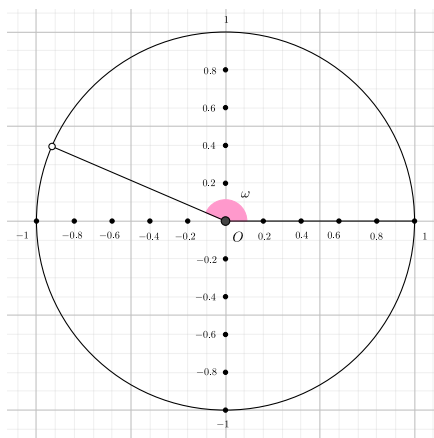
Άσκηση: 3.9 (★) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\omega = \widehat{BOA}$.



1. Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma \nu \omega = \frac{3}{5}$
2. Η προέκταση του τμήματος AO τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ , όπως φαίνεται στο σχήμα.
 α'. Να εκφράσετε την γωνία $\varphi = \widehat{BO\Gamma}$ με την βοήθεια της γωνίας ω .
 β'. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\sigma \nu \varphi$.

■

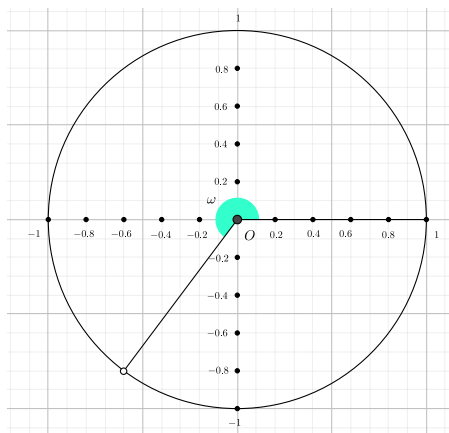
Άσκηση: 3.10 (★) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία ω , για την οποία ισχύει $\eta \mu \omega = 0.4$.



1. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\omega$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

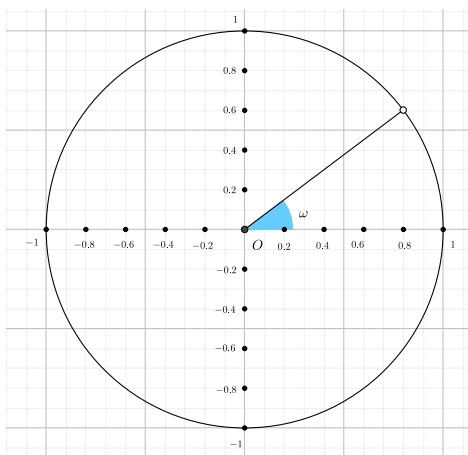
2. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$.

Άσκηση: 3.11 (★) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία ω .



1. Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$
2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:
 $\alpha'. \eta\mu\omega$
 $\beta'. \epsilon\varphi\omega$

Άσκηση: 3.12 (★) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία ω για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = 0.8$



1. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι -0.8 . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα με την γωνία ω .

Άσκηση: 3.13 Αν $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω . ■

Άσκηση: 3.14 Αν $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{5}$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ . ■

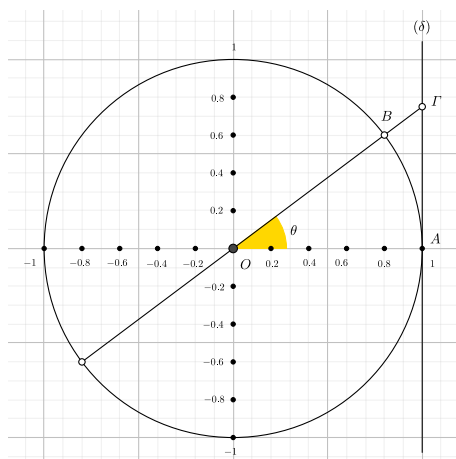
Άσκηση: 3.15 (★)

1. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.
2. Έστω θ μία γωνία με $\theta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$. ■

Άσκηση: 3.16 (★) Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A . Η τελική πλευρά OB της θετικής γωνίας $\hat{AOB} = \theta$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ . Γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$$

1. Με την βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό $\sigma\upsilon\nu\theta$ και στην συνέχεια τον αριθμό $\epsilon\varphi\theta$.
2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων B και Γ .

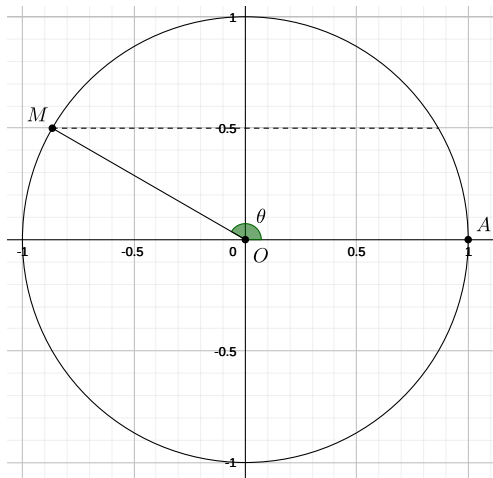


Άσκηση: 3.17 (★) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu A = -\frac{3}{5}$

1. Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.
2. Να βρείτε το $\eta\mu A$. ■

Άσκηση: 3.18 (★) Στον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος θεωρούμε το σημείο $M(x, \frac{1}{2})$

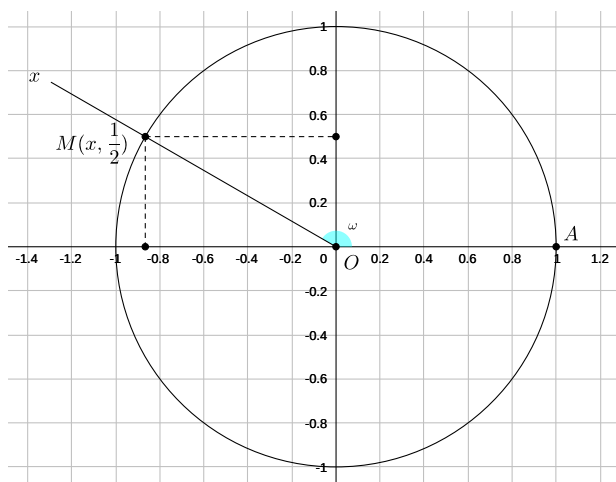
και την γωνία θ με $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ η οποία έχει αρχική πλευρά την OA και τελική την OM .



1. Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$
2. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ .
3. Να βρείτε την γωνία θ .

■

Άσκηση: 3.19 (★) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $A\hat{O}x = \omega$, όπου $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και το σημείο $M(x, \frac{1}{2})$.

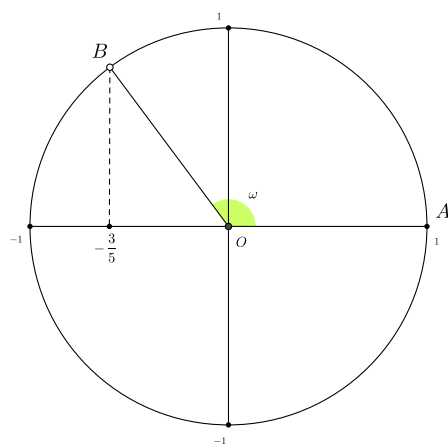


1. Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M ;
2. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

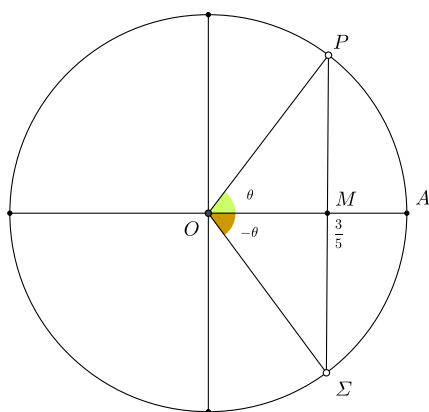
■

Άσκηση: 3.20 (★)

1. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του παρακάτω σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.



Άσκηση: 3.21 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.



1. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin\theta = \frac{3}{5}$
2. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.
3. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

Άσκηση: 3.22 (★) Δίνεται γωνία ω , με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\sin\omega = -\frac{4}{5}$

Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$

Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

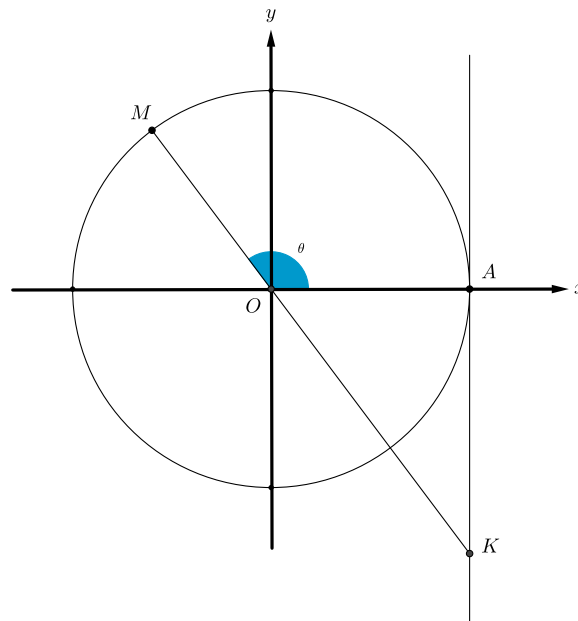
$$A = \frac{\eta\mu\omega + \sin\omega}{1 + \epsilon\varphi\omega}$$

Άσκηση: 3.23 Αν $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ και $3\eta\mu^2\varphi - 1 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$L = \frac{\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi}{\varepsilon\varphi\varphi}$$

■

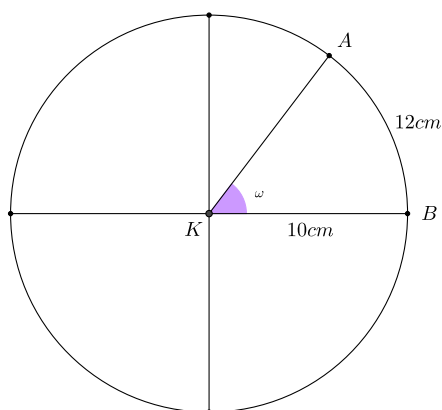
Άσκηση: 3.24 (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μία γωνία $\theta = \widehat{AOM}$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K .



1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta$, $\varepsilon\varphi\theta$, $\sigma\varphi\theta$.
2. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K .
3. Έστω μία γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$.
4. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ϕ έχει την τελική πλευρά της στο δεύτερο τεταρτημόριο.
5. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \phi$.

■

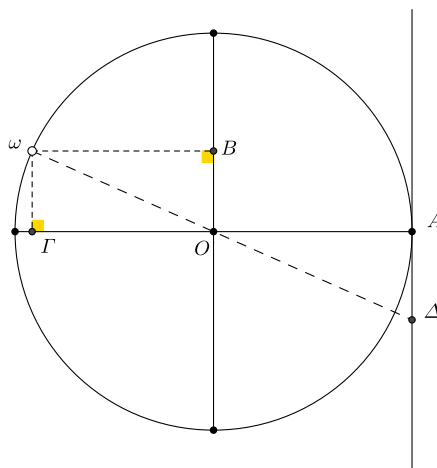
Άσκηση: 3.25 (★) Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο K και ακτίνα 10cm . Επίσης δίνεται το τόξο $\widehat{AB}$ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .



1. α'. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι $1.2rad$
 β'. Με χρήση του προηγούμενου ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.
2. Αν $\sin \omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.
 (Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$).

■

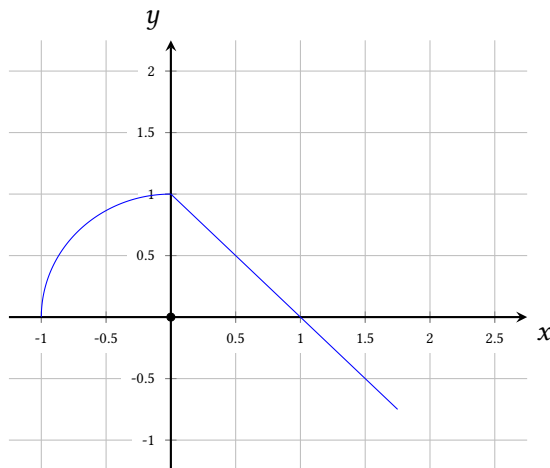
Άσκηση: 3.26 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος με κέντρο O με τους άξονες ημιτόνων, συνημιτόνων και εφαπτομένων καθώς και τον αριθμό ω τοποθετημένο πάνω στον κύκλο. Για τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων OB και OG ισχύει $2OG = 3OB$.



1. Να υπολογίσετε το $\eta\mu\omega$ και το $\sin\omega$.
2. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{A\Delta}{OA}$

■

Άσκηση: 3.27 (★★) Έστω $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



1. Να βρείτε την μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.
2. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $f(-\frac{3}{5})$ και $f(-\frac{5}{9})$
3. Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & , -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & , x > 0 \end{cases}$$

να βρείτε τους αριθμούς: $f(\sin 120^\circ)$ και $f(\eta\mu 120^\circ)$

4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$, $x \geq 1$.

Άσκηση: 3.28 Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\eta\mu 1$, $\eta\mu 2$ και $\eta\mu 3$.

Άσκηση: 3.29 Να αποδείξετε ότι:

i) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

ii) $\frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \epsilon\varphi^2 x$

Άσκηση: 3.30 Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\epsilon\varphi\theta - \sigma\varphi\theta}{\epsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta} = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$

ii) $\eta\mu^3\omega - \sigma\upsilon\nu^3\omega = (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)(1 + \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega)$

Άσκηση: 3.31 Να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu^4 x + \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1$

ii) $\frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{1}{\epsilon\varphi\omega} = \epsilon\varphi\omega$

Άσκηση: 3.32 Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1}{\eta\mu^2\theta} - \frac{1}{\epsilon\varphi^2\theta} = 1$

ii) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - \epsilon\varphi^2 x}{\epsilon\varphi x}$

Άσκηση: 3.33 Να αποδείξετε ότι:

i) $\left(1 + \frac{\sigma\nu\nu x - 1}{\eta\mu x}\right) \left(1 + \frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\nu\nu x}\right) = 2$

ii) $\sigma\nu\nu^2 x + \sigma\nu\nu^2 y + 2\eta\mu x \eta\mu y \leq 2$

■

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Για να μπορέσουμε να ανάγουμε τον υπολογισμό ενός τριγωνομετρικού αριθμού στο πρώτο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου θα ακολουθούμε τους παρακάτω δύο κανόνες:

Κανόνας 1: Για παραστάσεις της μορφής:

$$\text{τριγωνομετρικός αριθμός } (k\pi \pm x) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

το αποτέλεσμα είναι ο ίδιος τριγωνομετρικός αριθμός του x με πρόσημο ίδιο με το πρόσημο που έχει ο τριγωνομετρικός αριθμός στο τεταρτημόριο που ανήκει το $k\pi \pm x$, θεωρώντας ότι το x χωράει σε ένα τεταρτημόριο.

Κανόνας 2: Για παραστάσεις της μορφής:

$$\text{τριγωνομετρικός αριθμός } \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \pm x\right) \quad , \quad k \text{ περιττός ακέραιος}$$

το αποτέλεσμα είναι τριγωνομετρικός αριθμός του x ως εξής: το ημίτονο γίνεται συνημίτονο και ανάποδα, η εφαπτομένη γίνεται συνεφαπτομένη και ανάποδα και το πρόσημο ίδιο με το πρόσημο που έχει ο αρχικός τριγωνομετρικός αριθμός στο τεταρτημόριο που ανήκει το $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm x$, θεωρώντας ότι το x χωράει σε ένα τεταρτημόριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.34 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{4\pi}{3}$.

Άσκηση: 3.35 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 225° .

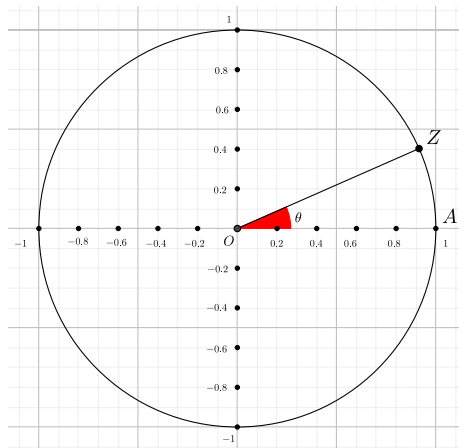
Άσκηση: 3.36 (★) Δίνεται γωνία ω η οποία είναι ίση με -1125° .

1. Να αποδείξετε ότι η γωνία ω ισούται με $\frac{-25\pi}{4}$ ακτίνια (rad).
2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Άσκηση: 3.37

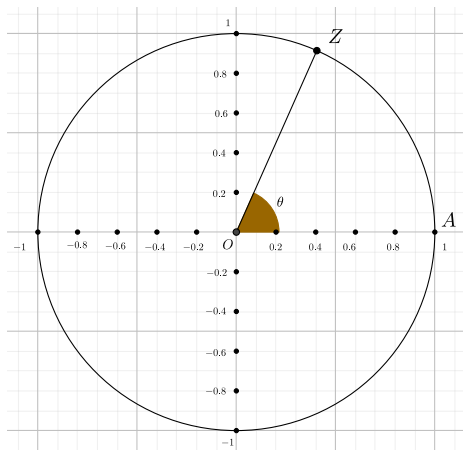
1. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu 116^\circ$
2. Αν γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu 116^\circ$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 116^\circ$.

Άσκηση: 3.38 (★) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.



1. Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.
2. α'. Να αιτιολογήσετε γιατί $\eta\mu\theta = 0.4$
β'. Με χρήση του προηγούμενου ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(4\pi - \theta)$.

Άσκηση: 3.39 (★) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.



1. Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$.
2. α'. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = 0.4$
β'. Με χρήση του προηγούμενου ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sin(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

Άσκηση: 3.40 (★) Δίνεται ότι:

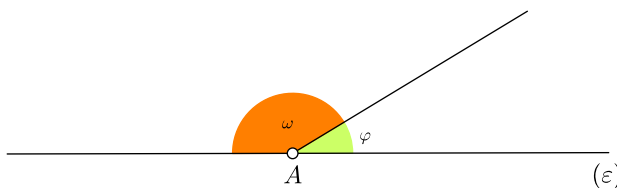
$$\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{4}}$$

1. Να δείξετε ότι:
 - i) $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - ii) $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$
2. Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, να βρείτε το $\sin\theta$.

Άσκηση: 3.41 (★) Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

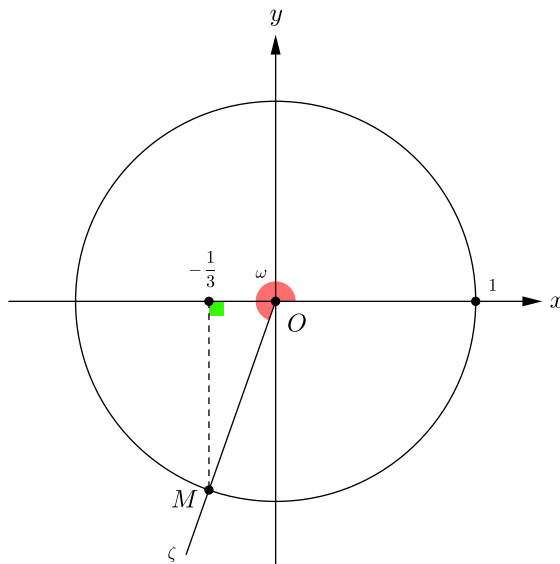
- i) $\sin 72^\circ$
- ii) $\sin 108^\circ$
- iii) $\eta\mu 162^\circ$

Άσκηση: 3.42 (★) Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



1. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .
2. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της της αμβλείας γωνίας ω .

Άσκηση: 3.43 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γωνία $\angle xO\zeta = \omega$ με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$



1. Να αιτιολογήσετε ότι $\sin \omega = -\frac{1}{3}$
2. Να υπολογίσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας ω .
3. Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\pi - \omega$.

Άσκηση: 3.44 (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$$

1. Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.
2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης A , όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sin\theta = \frac{12}{13}$.

Άσκηση: 3.45 (★)

1. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 500^\circ = \varepsilon\varphi 140^\circ$
2. α'. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 500^\circ$
β'. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A = \varepsilon\varphi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sin 300^\circ$$

Άσκηση: 3.46 (★) Έστω θ μια γωνία για την οποία ισχύει: $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ και $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

1. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.
2. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sin(\pi - \theta) \cdot \sin(-\theta) - \eta\mu(\pi - \theta) \cdot \eta\mu(-\theta)$$

Άσκηση: 3.47 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$S = \frac{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \varepsilon\varphi\frac{11\pi}{6}}{\eta\mu\frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\frac{4\pi}{3}}$$

Άσκηση: 3.48 Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$T = \frac{\varepsilon\varphi\vartheta \cdot \sin(90^\circ + \vartheta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \vartheta)}{\eta\mu\vartheta \cdot \sin(90^\circ - \vartheta) \cdot \varepsilon\varphi(180^\circ - \vartheta)}$$

Άσκηση: 3.49 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$F = \eta\mu 20^\circ + \sin 80^\circ + \sin 100^\circ + \eta\mu 200^\circ$$

Άσκηση: 3.50 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$G = \eta\mu 0^\circ + \eta\mu 10^\circ + \eta\mu 20^\circ + \dots + \eta\mu 340^\circ + \eta\mu 350^\circ + \eta\mu 360^\circ$$

Άσκηση: 3.51 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$H = (\varepsilon\varphi 1^\circ - \sigma\varphi 1^\circ) + (\varepsilon\varphi 2^\circ - \sigma\varphi 2^\circ) + \dots + (\varepsilon\varphi 89^\circ - \sigma\varphi 89^\circ)$$

Άσκηση: 3.52 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\eta\mu^2(B + \Gamma) + \sin^2 A = 1$$

Άσκηση: 3.53 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi (B + \Gamma) \cdot \sigma\varphi A = -1$$

■

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μία τριγωνομετρική εξίσωση πρέπει να καταλήξουμε σε μία ή περισσότερες από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$i) \quad \eta\mu x = \eta\mu\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + (\pi - \theta)$$

$$ii) \quad \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi - \theta$$

$$iii) \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi + \theta$$

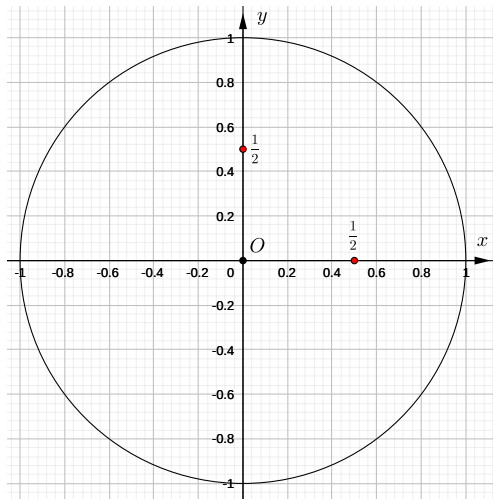
$$iv) \quad \sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi + \theta$$

όπου σε όλες τις περιπτώσεις $k \in \mathbb{Z}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.54 (★)

1. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.



2. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, για $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση: 3.55 Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1$$

1. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu x = \frac{1}{2}$
2. Να βρείτε την γωνία x .

Άσκηση: 3.56 (★) Δίνεται γωνία ω , με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu\omega > 0$$

1. Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.
2. Να βρείτε όλες τις γωνίες ϕ με $\phi \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν την σχέση: $\sigma\upsilon\nu\phi = -\frac{1}{2}$

Άσκηση: 3.57 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

ii) $2\sigma\upsilon\nu 2x = -1$

Άσκηση: 3.58 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu x (\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

ii) $\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

■

Άσκηση: 3.59 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

ii) $\eta\mu^2 \left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - \eta\mu^2 \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

■

Άσκηση: 3.60 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu^2 x + \eta\mu x = 0$

ii) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$

■

Άσκηση: 3.61 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x - 1 = 0$

ii) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 4 + 2\varepsilon\varphi x$

■

Άσκηση: 3.62 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x = \varepsilon\varphi x$

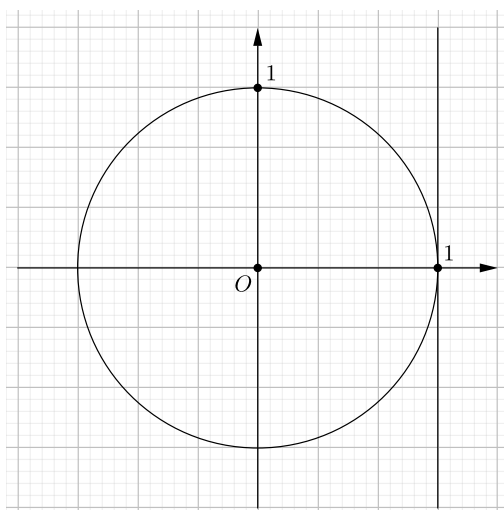
ii) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + (\sqrt{2} - 4)\sigma\upsilon\nu x - 2\sqrt{2} = 0$

■

Άσκηση: 3.63 (★) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \varepsilon\varphi x, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.
2. Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



■

Άσκηση: 3.64 Να λύσετε στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ την εξίσωση:

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}$$

Άσκηση: 3.65 (★) Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = a$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

i) $a = 1$

ii) $a = -2$

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

Άσκηση: 3.66 Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$ την εξίσωση:

$$2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\eta\mu x = 4$$

Άσκηση: 3.67 Να λύσετε στο διάστημα $[0, \pi]$ την εξίσωση:

$$2\eta\mu 2x - 3 - \frac{6}{\eta\mu 2x - 1} = 0$$

Άσκηση: 3.68 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

1. Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$
2. Να δείξετε ότι: $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$
3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = -2$

Άσκηση: 3.69 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x), \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

3. Να βρείτε:

α'. το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β'. δύο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

Άσκηση: 3.70 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

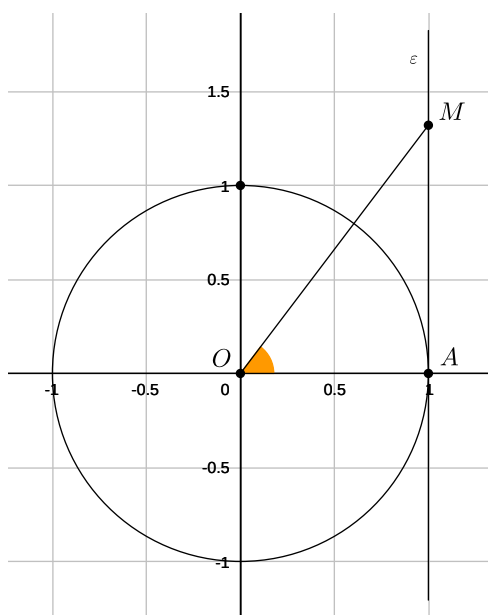
$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + a, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι:

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + a$$

2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.
 3. Να βρείτε το a αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.
 4. Για $a = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Άσκηση: 3.71 (★★) Το εμβαδόν του τριγώνου OAM που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα είναι $(OAM) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία (ε) είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο A .



1. Να αποδείξετε ότι για την γωνία $\omega = \widehat{AOM}$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$
 2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\varphi\omega$ της γωνίας $\omega = \widehat{AOM}$ αν ισχύει $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$
 3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu\omega \cdot \eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu\omega$$

και του άξονα $x'x$, όπου $\omega = \widehat{AOM}$ η γωνία του προηγούμενου ερωτήματος και $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση: 3.72 Να λύσετε την εξίσωση: $\sin(\sin x) = 1$

■

3.5 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

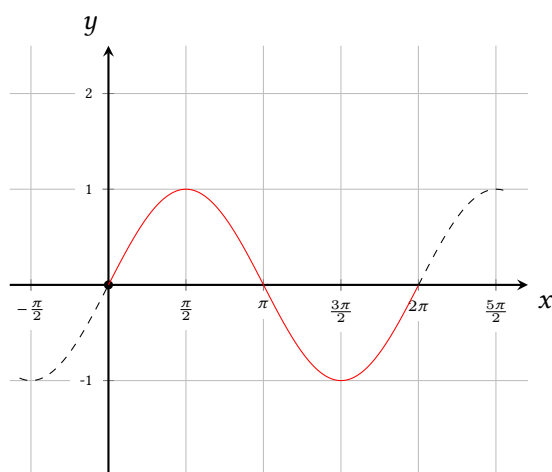
Ορισμός: 3.3 Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύουν:

$$i) \quad x + T \in A \text{ και } x - T \in A$$

$$ii) \quad f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Ο πραγματικός αριθμός T ονομάζεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

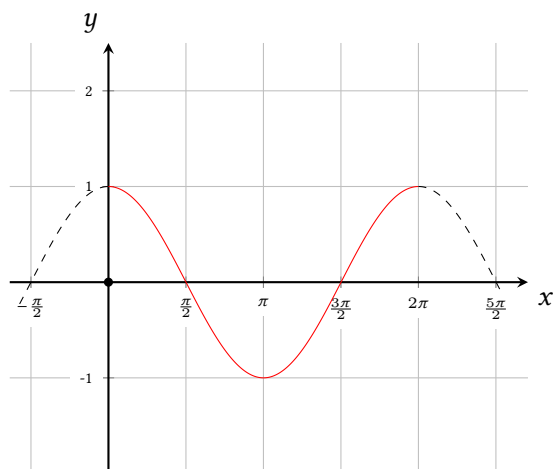
A) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$



Για την συνάρτηση έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- είναι περιοδική με βασική περίοδο $T = 2\pi$.
- είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- έχει μέγιστη τιμή το 1 στην θέση $x_0 = \frac{\pi}{2}$ και ελάχιστη τιμή το -1 στην θέση $x_1 = \frac{3\pi}{2}$.
- είναι περιττή συνάρτηση και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

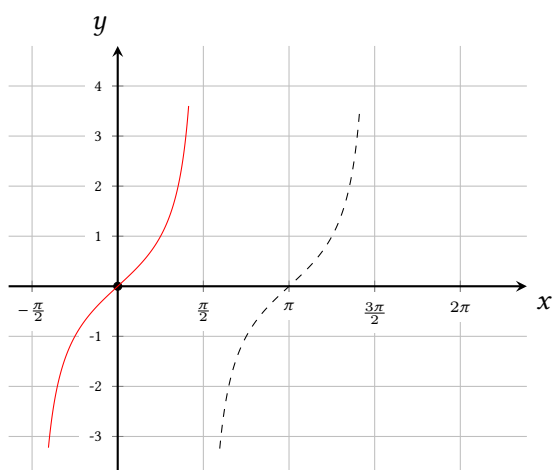
Β) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$



Για την συνάρτηση έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- είναι περιοδική με βασική περίοδο $T = 2\pi$.
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$.
- έχει μέγιστη τιμή το 1 στις θέσεις $x_0 = 0$ και $x_1 = 2\pi$ και ελάχιστη τιμή το -1 στην θέση $x_2 = \pi$.
- είναι άρτια συνάρτηση και η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Γ) Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$

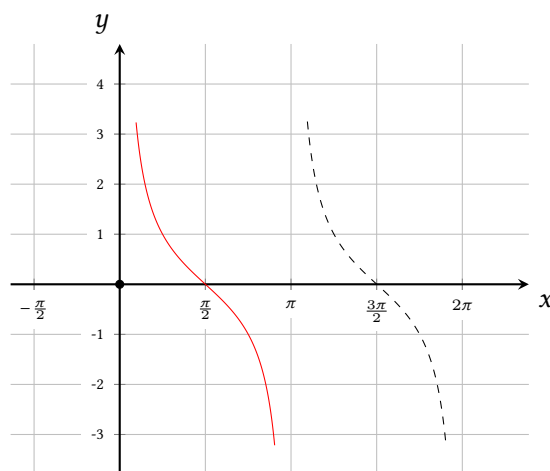


Για την συνάρτηση έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- είναι περιοδική με βασική περίοδο $T = \pi$.

- είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+2)\pi}{2}\right)$, όπου k περιττός ακέραιος.
- δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.
- είναι περιττή συνάρτηση και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- έχει ασύμπτωτες τις κατακόρυφες ευθείες $x = \frac{k\pi}{2}$, όπου k περιττός ακέραιος.

Δ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$



Για την συνάρτηση έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- είναι περιοδική με βασική περίοδο $T = \pi$.
- είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(k\pi, (k+1)\pi)$, όπου k ακέραιος.
- δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.
- είναι περιττή συνάρτηση και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- έχει ασύμπτωτες τις κατακόρυφες ευθείες $x = k\pi$, όπου k ακέραιος.

Θεώρημα: 3.1 Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \rho \eta \mu(\omega x) \quad \text{και} \quad g(x) = \rho \sigma \upsilon \nu(\omega x)$$

όπου $\rho \neq 0$ και $\omega > 0$. Τότε οι συναρτήσεις έχουν μέγιστη τιμή ίση με $|\rho|$, ελάχιστη τιμή ίση με $-|\rho|$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα με τους κανόνες μετατοπίσεων των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων που είδαμε στην παράγραφο 2.4 με τους ακόλουθους κανόνες:

ΚΑΝΟΝΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ (ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ)

Κανόνας 9: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = kf(x)$, όπου $k > 1$, προκύπτει από κατακόρυφο τέντωμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά τον παράγοντα k .

Κανόνας 10: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = kf(x)$, όπου $0 < k < 1$, προκύπτει από κατακόρυφη συρρίκνωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά τον παράγοντα k .

Κανόνας 11: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(kx)$, όπου $k > 1$, προκύπτει από την οριζόντια συρρίκνωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά τον παράγοντα $\frac{1}{k}$.

Κανόνας 12: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(kx)$, όπου $0 < k < 1$, προκύπτει από το οριζόντιο τέντωμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά τον παράγοντα $\frac{1}{k}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.73 (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu(180^\circ - 20^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(-3x)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 20^\circ)}$$

1. Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu 3x$.
2. Να βρείτε την μέγιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$.

■

Άσκηση: 3.74 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
2. Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

■

Άσκηση: 3.75 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. α'. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
β'. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
2. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $f(x) = -3$

■

Άσκηση: 3.76 (★) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

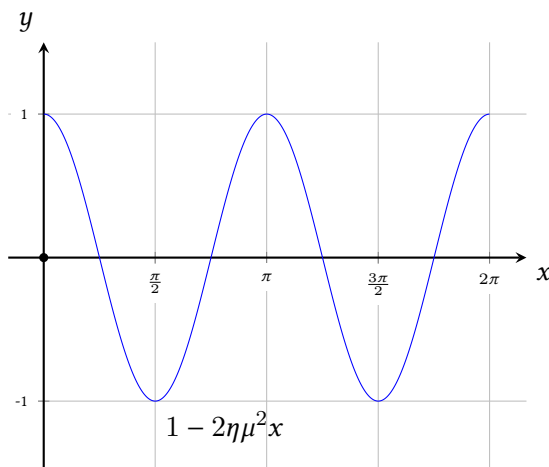
1. α'. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.
β'. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της.
2. Να υπολογίσετε τον αριθμό: $f(2025\pi)$.

■

Άσκηση: 3.77 (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$$

1. Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.
2. Να δείξετε ότι: $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$
3. Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του προηγούμενου ερωτήματος, να λύσετε την εξίσωση: $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.



Άσκηση: 3.78 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g .
2. α'. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$					

- β'. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου.

Άσκηση: 3.79 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .
2. α'. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = \eta\mu 2x$					

- β'. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

Άσκηση: 3.80 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -3\sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την περίοδο, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .
2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sin 2x$					
$f(x) = -3\sin 2x$					

■

Άσκηση: 3.81 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.
2. α'. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$					

β'. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

■

Άσκηση: 3.82 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -2\eta\mu 2x$$

1. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και την περίοδό της.
2. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών της συνάρτησης:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$					

Με βάση τα αποτελέσματα του πίνακα τιμών, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, \pi]$.

3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x) = -2$.

■

Άσκηση: 3.83 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης f ;
2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μίας περιόδου.

Άσκηση: 3.84 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

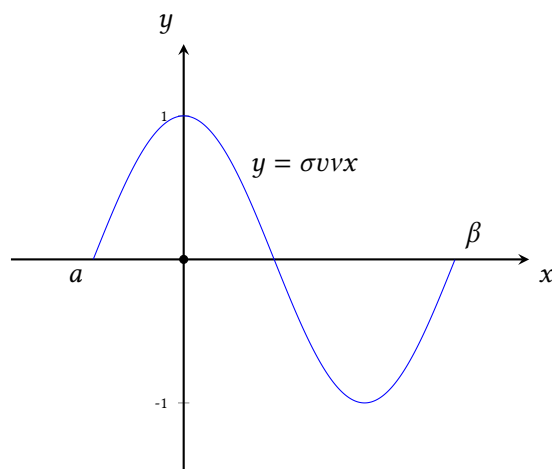
1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. α'. Να βρείτε την περίοδο καθώς και την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .
β'. Να κάνετε την γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

Άσκηση: 3.85 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι:
α'. $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.
β'. $f(x) = 4\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\eta\mu x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$.

Άσκηση: 3.86 (★) Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu x$.



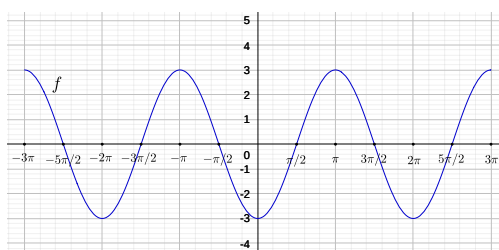
1. Να βρείτε τα a και β .

2. Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπίσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\eta\mu x$;

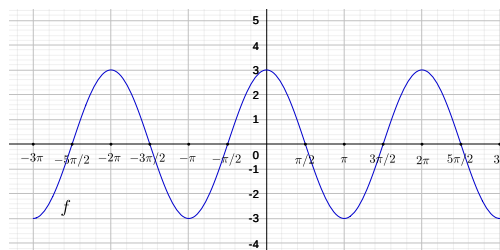
Άσκηση: 3.87 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

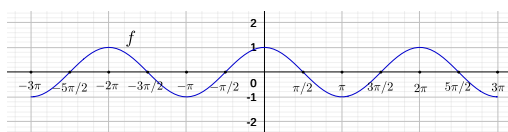
1. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
2. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
3. Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις, μία μόνο αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση f και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



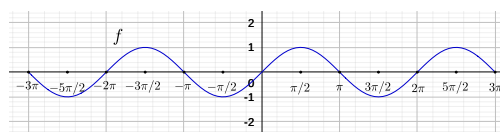
Σχήμα (I)



Σχήμα (II)



Σχήμα (III)

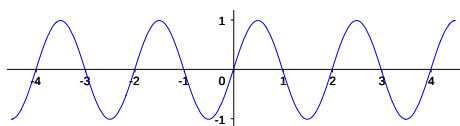


Σχήμα (IV)

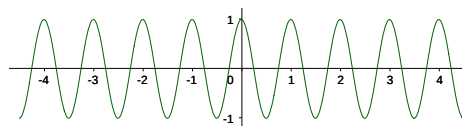
Άσκηση: 3.88 (★) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \eta\mu(2\pi x)$$

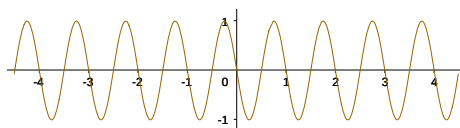
1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.
2. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f(\frac{1}{4})$.
3. Μία από τις παρακάτω τέσσερις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



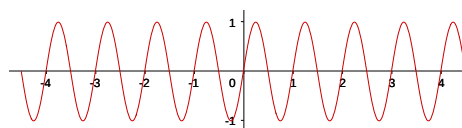
Σχήμα (I)



Σχήμα (II)



Σχήμα (III)



Σχήμα (IV)

Άσκηση: 3.89 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sin x \quad \text{και} \quad g(x) = \sin 2x$$

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$									
$g(x)$									

Στην συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ ίδιο σύστημα αξόνων.

2. Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

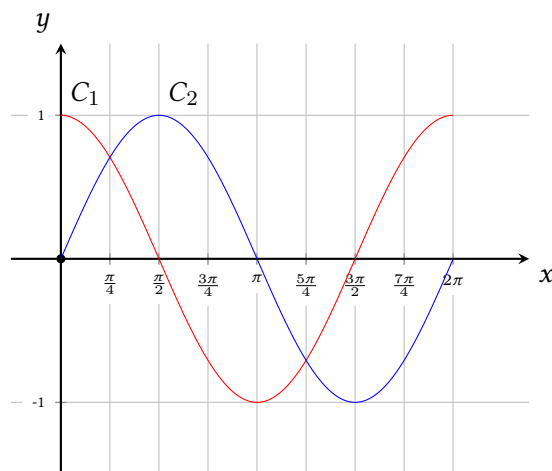
$$\sin x = \sin 2x$$

στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

3. Να λύσετε αλγεβρικά την παραπάνω εξίσωση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του πρώτου ερωτήματος τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

■

Άσκηση: 3.90 (★) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



1. Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων:

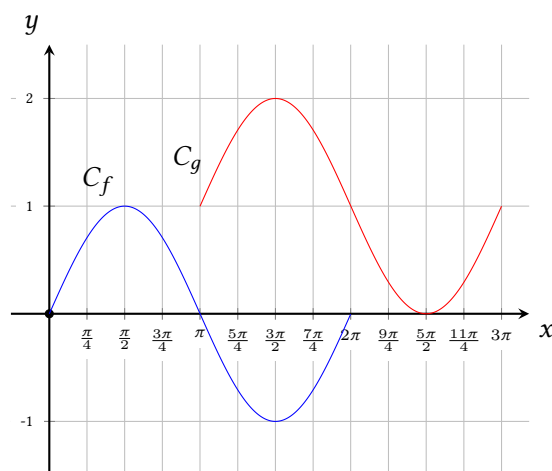
$$f(x) = \sin x \quad \text{και} \quad g(x) = \eta \mu x$$

ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x)$ και ποια της $g(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Άσκηση: 3.91 (★) Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.
2. α'. Τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g .
β'. Τον τύπο της g .



Άσκηση: 3.92 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
2. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
3. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.
4. Να αποδείξετε ότι: $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση: 3.93 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
2. Να βρείτε δύο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$.
3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
4. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Άσκηση: 3.94 Οι πωλήσεις ενός προϊόντος, σε χιλιάδες κομμάτια, δίνονται από την συνάρτηση:

$$f(t) = 23 + 5\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{4}$$

όπου t ο χρόνος σε έτη και $0 \leq t \leq 8$.

1. Να βρείτε την μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της f καθώς και την περίοδό της.
2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.
3. Σε ποιο έτος θα έχουμε τον μικρότερο αριθμό πωλήσεων;
4. Σε ποιο έτος οι πωλήσεις θα φθάσουν τα 25500 κομμάτια;

■

Άσκηση: 3.95 Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση:

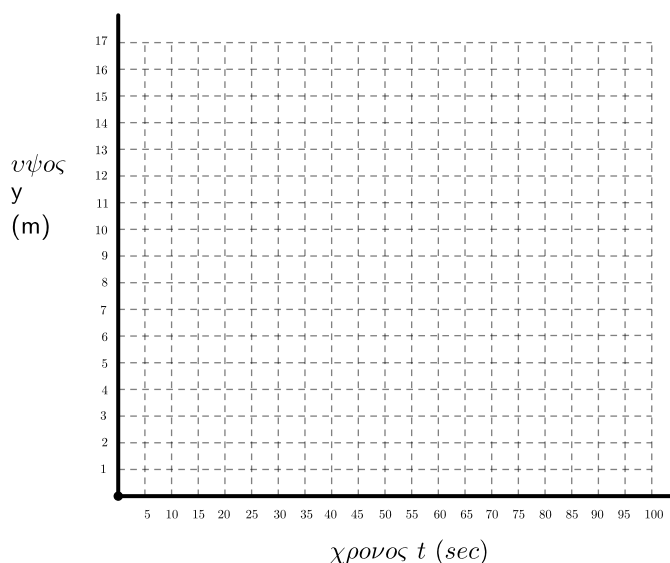
$$h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right), \quad 0 \leq t \leq 180$$

1. Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.
2. Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.
3. Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή τον χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;
4. Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

α'. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

β'. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$.

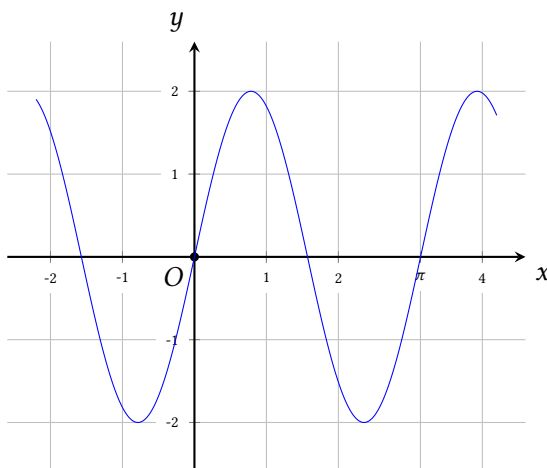


■

Άσκηση: 3.96 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu(ax) \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu(ax) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - ax) - 1, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. α'. Να δείξετε ότι: $f(x) = 2 \cdot \eta\mu(ax)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β'. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $a = 2$.



2. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $(\varepsilon) : y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.

Άσκηση: 3.97 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = a \cdot \eta\mu(\beta x)$$

με a, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

1. Να βρείτε την τιμή του a , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.
2. Αν $a = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι:

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$$

είναι $\beta = 8$.

3. Αν $a = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ την εξίσωση: $f(x) = 1$

Άσκηση: 3.98 (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f που είναι της μορφής:

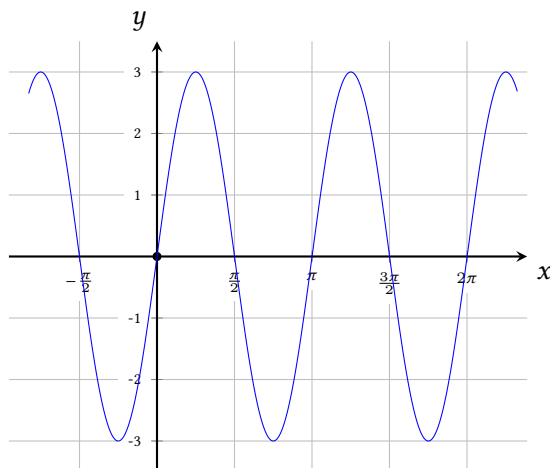
$$f(x) = \rho \cdot \eta\mu(ax), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } a, \rho > 0$$

1. Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδο της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
2. Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς a και ρ .

Έστω $\rho = 3$ και $a = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση:

$$g(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

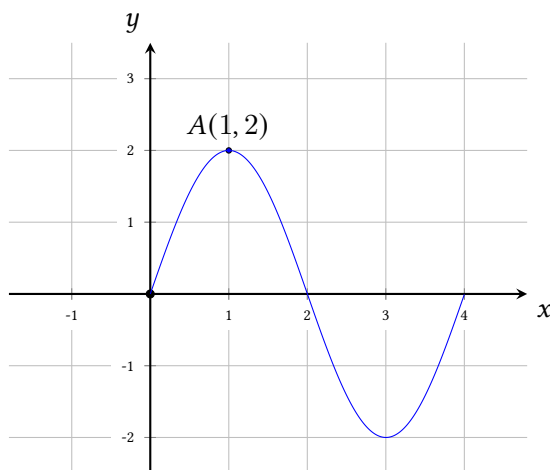
3. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.
4. Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.



■

Άσκηση: 3.99 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση στο διάστημα $[0, 4]$, μίας συνάρτησης f , η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και ο τύπος της έχει την μορφή:

$$f(x) = \rho \cdot \eta\mu\left(\frac{ax}{2}\right)$$



1. Στηριζόμενοι στην γραφική παράσταση, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς ρ και a .
2. Να λύσετε στο σύνολο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$f(x) = 2$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$S = f(8) + f(9) + f(12) + f(13) + f(16) + f(17)$$

Άσκηση: 3.100 (★★) Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά την διάρκεια μίας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5.8 μέτρα και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2.6 μέτρα και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από την σχέση:

$$y = a \eta \mu(\omega t) + \beta$$

με $a, \beta, \omega > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a , ω και β .

2. Αν $a = 1.6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4.2$

α'. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της:

$$y = 1.6 \cdot \eta \mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 4.2 \quad \text{με } 0 \leq t \leq 24$$

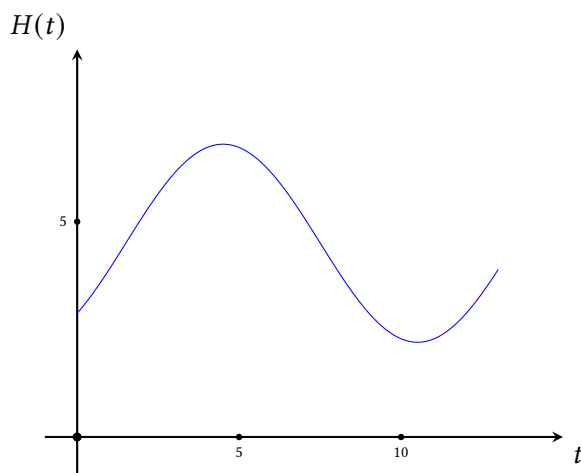
β'. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

γ'. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4.2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στην διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

Άσκηση: 3.101 Το ύψος του νερού, σε μέτρα, σε ένα λιμάνι δίνεται από την συνάρτηση:

$$H(t) = a \eta \mu(b(t - c)) + d$$

όπου t είναι ο αριθμός των ωρών μετά τα μεσάνυχτα και τα a, b, c, d είναι θετικές σταθερές. Το παρακάτω γράφημα δείχνει το ύψος του νερού για 13 ώρες, ξεκινώντας από τα μεσάνυχτα.



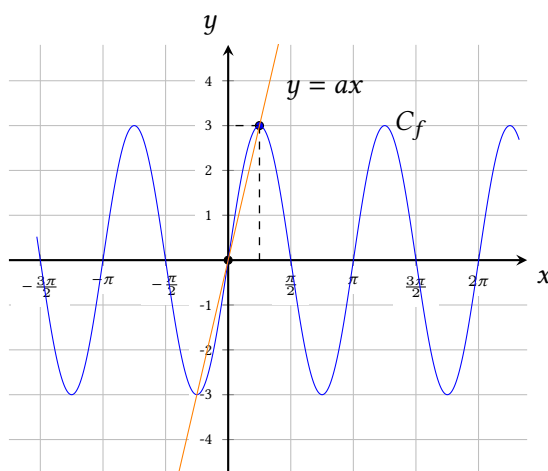
Η πρώτη παλίρροια εμφανίζεται στις 04:30 και η επόμενη εμφανίζεται δώδεκα ώρες αργότερα. Καθόλη την διάρκεια της ημέρας, το ύψος του νερού κυμαίνεται μεταξύ $2.2m$ και $6.8m$.

1. Να δείξετε ότι $b = \frac{\pi}{6}$.
2. Να βρείτε τις τιμές των a και d .
3. Να βρείτε την μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το c .
4. Να βρείτε το ύψος του νερού στις 12:00

■

Άσκηση: 3.102 (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \rho \eta \mu(\omega x), \quad \omega > 0, \quad \rho > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$



Με βάση το σχήμα,

1. Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.
2. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .
3. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης: $3\eta \mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$.

■

Άσκηση: 3.103 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta \mu x - 1, \quad x \in [0, 2\pi]$$

1. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;
2. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
3. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
4. Αν για κάποιον αριθμό a με $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $f(a) = f(\frac{\pi}{2} - a)$, να αποδείξετε ότι $a = \frac{\pi}{4}$.

■

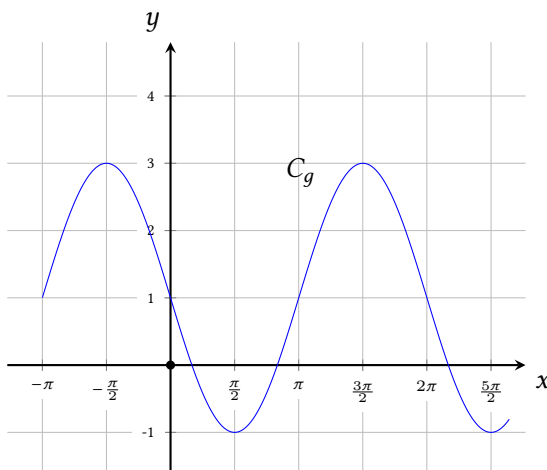
Άσκηση: 3.104 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την περίοδο T , την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .
2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = a\eta\mu(\beta x) + \gamma \quad \text{με } a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0$$

και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



- α'. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a , β και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β'. Για $a = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$.

■

Άσκηση: 3.105 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{a+1}{2} \sigma\upsilon\nu(\beta x), \quad a, \beta > 0$$

η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

1. Να δείξετε ότι $a = 3$ και $\beta = 4$.
2. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

Να δείξετε ότι: $A = -1$

3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

■

Άσκηση: 3.106 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = a\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x), \quad a > 0$$

1. Να δείξετε ότι:

$$f(x) = (a+2)\eta\mu 2x$$

2. α'. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $a = 2$.
 β'. Να βρείτε την περίοδο της f .
 3. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f σε διάστημα μίας περιόδου.
 4. Αν,

$$g(x) = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x$$

να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

■

Άσκηση: 3.107 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

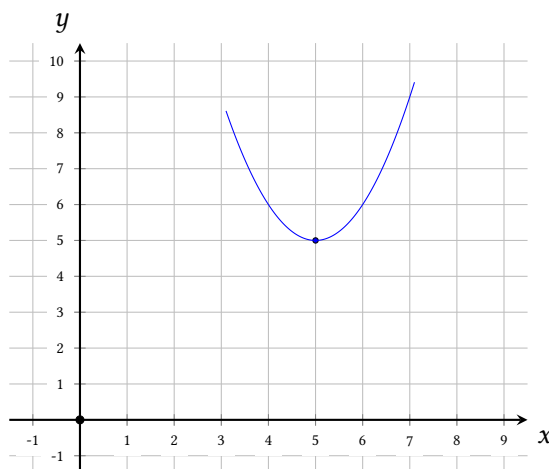
$$f(x) = 3 + \sqrt{3}\epsilon\varphi\omega \cdot \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αν για την γωνία ω ισχύει η σχέση: $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1$, $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε:

1. α'. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
 β'. Για $\epsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
 2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = x^2 - 10x + 30, \quad x \in \mathbb{R}$$

και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



- α'. Να βρείτε, με την βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .
 β'. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

■

Άσκηση: 3.108 (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \rho\eta\mu x, \quad g(x) = \eta\mu(\omega x) \quad \text{όπου } \rho, \omega > 0$$

1. Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και

- η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
2. α'. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

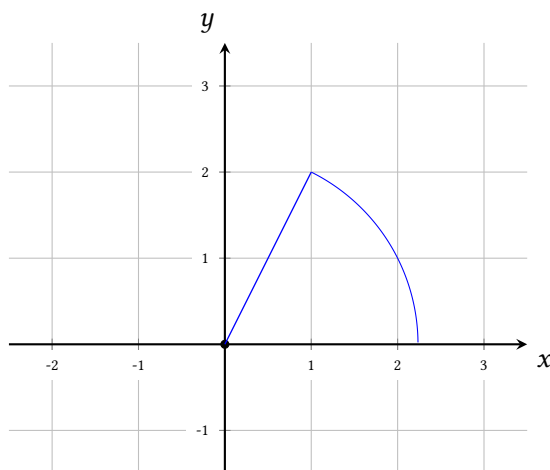
$$f(x) = 2\eta\mu x, \quad x \in [0, \pi] \quad \text{και} \quad g(x) = \eta\mu(2x), \quad x \in [0, \pi]$$

- β'. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$2\eta\mu \frac{5\pi}{9} > \eta\mu \frac{10\pi}{9}$$

■

Άσκηση: 3.109 (★★) Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x , η γραφική της παράσταση.



Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:

1. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x .
2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;
3. Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
 - α'. $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta$.
 - β'. $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\nu\theta)$.

■

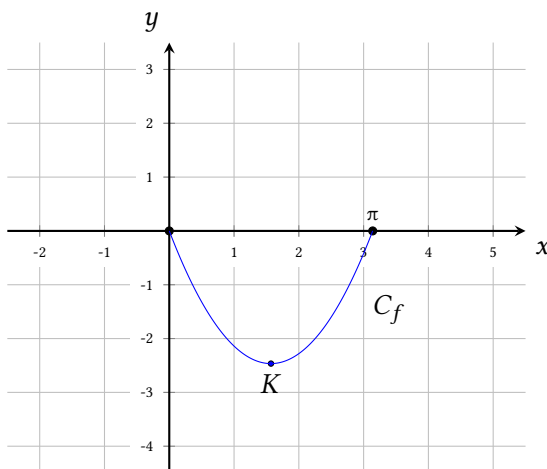
Άσκηση: 3.110 (★★) Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μίας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι:

$$x = 0, \quad y = x^2 - \pi x, \quad y = \frac{1}{2} + \eta\mu x \quad \text{και} \quad x = 3$$

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

1. α'. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \pi x, x \in [0, \pi]$, είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία πα-

ρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$.



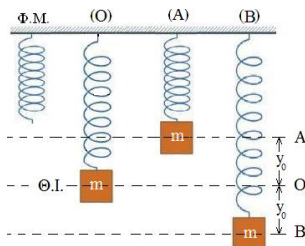
Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

- β'. Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους.
2. Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.
 3. Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

■

Άσκηση: 3.111 (**) Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με ένα μέτρο. Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$. Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0.2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$



1. Να βρείτε το y_0 και στην συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης.
2. Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.
3. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.
4. Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1.1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

■

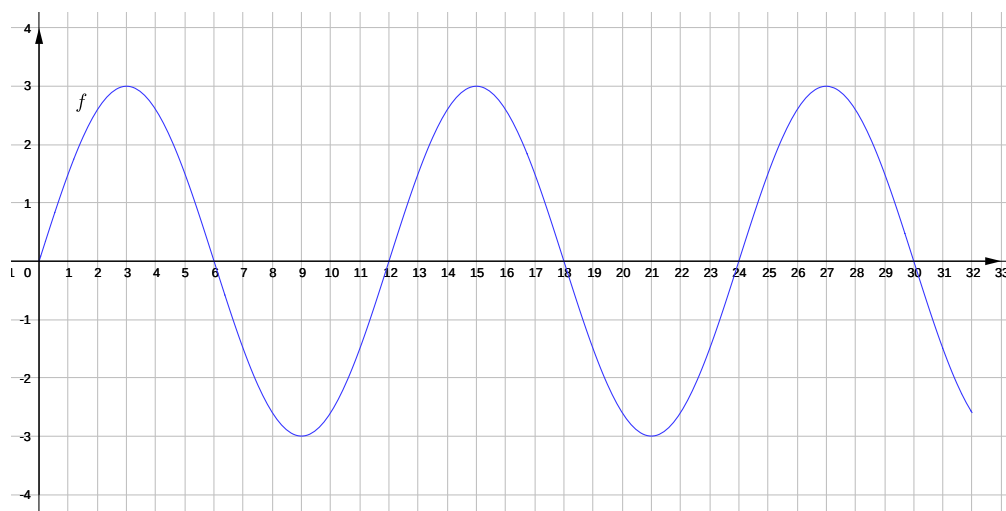
Άσκηση: 3.112 (**) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{και} \quad g(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από την γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f .
2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
3. Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(\pi)$.
4. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$

■

Άσκηση: 3.113 (**) Σε μία θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες.



Να βρείτε:

1. την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και την χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).
2. την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.
3. τον τύπο της συνάρτησης f .
4. ποιες ώρες, στην διάρκεια μίας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

■