

Φυλλάδιο Άλγεβρας

Για την Β Λυκείου

ΤΕΥΧΟΣ Β

Βλαχάκης Γιάννης

Περιεχόμενα

1	ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ	5
1.1	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	6
1.2	ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	10
1.3	ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ	13
1.4	ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ	18
2	Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	39
2.1	ΔΥΝΑΜΕΙΣ	40
2.2	Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	42
3	ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	57
3.1	ΕΝΝΟΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ	58
3.2	Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	64

Κεφάλαιο 1

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ορισμός: 1.1 Ονομάζουμε **πολυώνυμο** του x κάθε παράσταση της μορφής:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και οι $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

- Π** Τα **μονώνυμα** $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου. Ειδικότερα ο a_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.
- Π** Οι αριθμοί $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου.
- Π** Τα πολώνυμα της μορφής $P(x) = c, c \in \mathbb{R}$, λέγονται **σταθερά** πολώνυμα. Ειδικά το πολώνυμο $P(x) = 0$ λέγεται **μηδενικό** πολώνυμο.
- Π** Ο φυσικός αριθμός n , δηλαδή η μεγαλύτερη δύναμη του x που εμφανίζεται στο πολώνυμο, ονομάζεται **βαθμός** του πολυωνύμου. Μόνο για το μηδενικό πολώνυμο δεν ορίζεται βαθμός. Τα υπόλοιπα σταθερά πολώνυμα έχουν βαθμό 0. Αν το άθροισμα δύο πολυωνύμων δεν είναι το μηδενικό πολώνυμο, τότε ο βαθμός του θα είναι μικρότερος ή ίσος από τον μεγαλύτερο βαθμό των δύο πολυωνύμων. Το γινόμενο δύο μη μηδενικών πολυωνύμων έχει βαθμό ίσο με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων.
- Π** Έστω ένα πολώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Αν στην θέση του x αντικαταστήσουμε τον πραγματικό αριθμό ρ , θα προκύψει ο πραγματικός αριθμός:

$$P(\rho) = a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + a_1 \rho + a_0$$
 Ο αριθμός αυτός λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** του πολυωνύμου για $x = \rho$.
- Π** Αν η τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$ είναι ίση με 0, δηλαδή αν ισχύει $P(\rho) = 0$, ο αριθμός ρ ονομάζεται **ρίζα** του πολυωνύμου.

Ορισμός: 1.2 Δύο πολώνυμα είναι ίσα όταν είναι του ίδιου βαθμού και οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι όλοι ίσοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.1 (★) Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = ax^2 + 7, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

■

Άσκηση: 1.2 Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$P(x) = 2x^3 + (\gamma - 2)x^2 - (\gamma - 1)x - 6\gamma \text{ και } Q(x) = 2x^3 + ax^2 + \beta$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a, β, γ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

■

Άσκηση: 1.3 Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^3 - 3\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda)x^2 + (\lambda^2 - 4\lambda + 3)x + 3\lambda - 5$$

Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

■

Άσκηση: 1.4 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 + (\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + \lambda^2 - 4\lambda + 3, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

■

Άσκηση: 1.5 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = -x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x - 16$$

1. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = 0, x = 1, x = 2$ και $x = -2$.
2. Ποιοί από τους παραπάνω αριθμούς είναι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$;

■

Άσκηση: 1.6 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3ax + 2a^2 - 1$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = 2$ είναι ίση με 27.

■

Άσκηση: 1.7 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - k^2x^2 - 3kx + 6k$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k για τις οποίες το πολυώνυμο έχει ρίζα το -2 .

■

Άσκηση: 1.8 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = -x^3 + (\lambda - 2)x^2 + 4x + \lambda + 3$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το 3 .

■

Άσκηση: 1.9 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda - 1)x^3 + (\mu - \lambda)x^2 + 3\lambda x + \mu$$

Αν γνωρίζετε ότι το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1 και $P(3) = 6$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών λ και μ .

■

Άσκηση: 1.10 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 - 2ax^2 + \beta x + a - \beta$$

Αν γνωρίζετε ότι το πολυώνυμο έχει ρίζα το -1 και το 2 , να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β .

■

Άσκηση: 1.11 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$$

1. Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1 .
2. Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1 .
 - α'. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x) = P(x) + Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1 .
 - β'. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 .

■

Άσκηση: 1.12 (★★) Δίδεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + 1$$

1. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.
2. Να βρείτε δύο αριθμούς a, β τέτοιους ώστε:

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + \beta x + 1)$$

3. Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση:

«Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες».

Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη.

Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

■

1.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Θεώρημα: 1.1 (Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης):

Έστω τα πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$, όπου το $\delta(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Τότε υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$ τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \pi(x) \cdot \delta(x) + \nu(x)$$

όπου το $\nu(x)$ είναι είτε το μηδενικό πολυώνυμο είτε έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

- Π** Το $\Delta(x)$ λέγεται **διααιρετέος**, το $\delta(x)$ λέγεται **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ λέγεται **πηλίκο** και το $\nu(x)$ λέγεται **υπόλοιπο** της διαίρεσης.
- Π** Στην περίπτωση που το υπόλοιπο $\nu(x)$ της διαίρεσης είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε λέμε ότι η διαίρεση λέγεται **τέλεια**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.13 Να κάνετε την διαίρεση:

$$(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x - 5) : (x^2 + 2)$$

και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. ■

Άσκηση: 1.14 Να κάνετε την διαίρεση:

$$(x^5 - 3x^4 + 4x^3 + x^2 - 3x + 4) : (x^2 - 3x + 4)$$

και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. ■

Άσκηση: 1.15 Να κάνετε την διαίρεση:

$$(2x^3 - 6x^2 + 8x - 6) : (2x^2 - 4x + 5)$$

και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. ■

Άσκηση: 1.16 Να κάνετε την διαίρεση:

$$(-3x^5 + 2x^2 + 4x - 2) : (x + 1)^2$$

και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. ■

Άσκηση: 1.17 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

1. Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.
2. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. ■

Άσκηση: 1.18 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

1. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$; ■

Άσκηση: 1.19 (★) Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$ έχει πηλίκο $x^2 + 2$ και

υπόλοιπο 4.

1. Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.
2. Να δείξετε ότι: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$
3. Είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση: 1.20 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - x^2 + (2a - 2)x + \beta - 4$$

1. Να κάνετε την διαίρεση:

$$P(x) : (x^2 + x + 1)$$

και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

Άσκηση: 1.21 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + kx + \lambda$$

1. Να κάνετε την διαίρεση:

$$P(x) : (x^2 - 2x + 3)$$

και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς k και λ ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

Άσκηση: 1.22 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5$$

Αν το πολυώνυμο διαιρούμενο με το πολυώνυμο $x^2 + ax + 1$ αφήνει υπόλοιπο $2x + \beta$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β .

1.3 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Θεώρημα: 1.2 Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Δηλαδή ισχύει:

$$v = P(\rho)$$

Θεώρημα: 1.3 Υπάρχει στο σχολικό βιβλίο ως άσκηση

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $ax + \beta$, $a \neq 0$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = -\frac{\beta}{a}$. Δηλαδή ισχύει:

$$v = P\left(-\frac{\beta}{a}\right)$$

Θεώρημα: 1.4 Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$P(\rho) = 0$$

Π Το σχήμα Horner είναι ένας εύκολος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να κάνουμε την διαίρεση $P(x) : (x - \rho)$.

Π Οι παρακάτω εκφράσεις είναι όλες ισοδύναμες:

ο αριθμός ρ είναι ρίζα του $P(x)$

Η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = \rho$ είναι 0

Το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$

$$P(\rho) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Το $x - \rho$ διαιρεί το $P(x)$

Το $P(x)$ διαιρείται από το $x - \rho$

Η διαίρεση $P(x) : (x - \rho)$ είναι τέλεια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.23 Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner να κάνετε την διαίρεση:

$$(x^3 - 3x^2 - 5x + 1) : (x - 2)$$

και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. ■

Άσκηση: 1.24 Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner να κάνετε την διαίρεση:

$$(x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 4) : (x + 1)$$

και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. ■

Άσκηση: 1.25 Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner να κάνετε την διαίρεση:

$$(-x^4 + 5x^2 - 4) : (x - 1)$$

και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. ■

Άσκηση: 1.26 Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$(x^{35} - x^{25} + x^{15} - 4x^5 + 1) : (x - 1)$$

■

Άσκηση: 1.27 Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$(2000 \cdot x^{2000} + 1999 \cdot x^{1999} + 1998 \cdot x^{1998} + 1997 \cdot x^{1997}) : (x + 1)$$

■

Άσκηση: 1.28 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$$

1. Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.
2. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.
3. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.

■

Άσκηση: 1.29 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - x + 6$$

1. Να υπολογίσετε το $P(-2)$.
2. Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
3. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

Άσκηση: 1.30 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$$

1. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$.
2. α'. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.
β'. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση: 1.31 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

1. α'. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 3$.
β'. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x) : (x - 3)$.
2. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - 3)(2x - 1)$.

Άσκηση: 1.32 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = \lambda^2 x^5 - x^3 + \lambda x + \lambda$$

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$ να είναι ίσο με 2.

Άσκηση: 1.33 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + (\beta - 2)x + 6$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β ώστε $P(x)$ να έχει ρίζες το -1 και το 2.

Άσκηση: 1.34 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = ax^3 + (\beta - 3)x^2 + (a + 3)x + 3\beta$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ να είναι ίσο με 7.

Άσκηση: 1.35 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3abx + a^3 + \beta^3$ διαιρείται από το πολυώνυμο $x + a + \beta$.

Άσκηση: 1.36 Έστω n φυσικός μεγαλύτερος του 1. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$(x^n - nx + n - 1) : (x - 1)$$

■

Άσκηση: 1.37 Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 2$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(5x - 7)$ έχει παράγοντα το $x - 1$.

■

Άσκηση: 1.38 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 9x - 18$$

1. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρείται από το πολυώνυμο $x^2 + x - 6$.
2. Να βρείτε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

■

Άσκηση: 1.39 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + kx + \lambda$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς k και λ ώστε το πολυώνυμο $x^2 - 2x - 8$ να διαιρεί το $P(x)$.

■

Άσκηση: 1.40 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - (k + 1)x^2 + \lambda x - 1$$

Αν γνωρίζετε ότι το πολυώνυμο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 - 3x + 2$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών k και λ .

■

Άσκηση: 1.41 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + ax^2 - 13x + \beta$$

1. Αν γνωρίζετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 - x - 6$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β .
2. Για τις τιμές των a και β που βρήκατε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x^2 - x - 6)$$

■

Άσκηση: 1.42 Έστω n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 και το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^{n+1} - (n + 1)x + n$$

Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$. ■

Άσκηση: 1.43 Έστω n φυσικός, $n \geq 2$. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^{n+1} + ax + \beta$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-1)^2$. ■

Άσκηση: 1.44 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + (\lambda - k)x^3 + 2\lambda x^2 - 5x + 4$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς k, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να διαιρείται με την μεγαλύτερη δυνατή δύναμη του $x-1$. ■

Άσκηση: 1.45 Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 - 4x + 3$ και δίνει υπόλοιπο $v(x) = 3x - 5$. Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x) : (x-1)$ και $P(x) : (x-3)$. ■

Άσκηση: 1.46 Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με τα πολυώνυμα $x-1$ και $x-2$ και δίνει υπόλοιπα 3 και -2 αντίστοιχα. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x^2 - 3x + 2)$$
 ■

1.4 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μία πολυωνυμική εξίσωση της μορφής $P(x) = 0$ πρέπει να καταφέρουμε να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $P(x)$ στα πολυώνυμα $P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x)$ έτσι ώστε να έχουμε:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } P_k(x) = 0$$

Τα πολυώνυμα $P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x)$ θέλουμε να είναι πολυώνυμα είτε πρώτου βαθμού, είτε δεύτερου βαθμού, είτε πολυώνυμα της μορφής $x^n - a$ γιατί τις αντίστοιχες εξισώσεις μπορούμε να τις λύσουμε.

Τα επόμενα θεωρήματά μας βοηθούν να εντοπίσουμε ρητές ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων, εφόσον βέβαια υπάρχουν.

Θεώρημα: 1.5 Έστω η πολυωνυμική εξίσωση:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

όπου όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι ακέραιοι αριθμοί. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

Θεώρημα: 1.6 (Δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο)

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

όπου όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι ακέραιοι αριθμοί. Αν ο ρητός $\frac{m}{n} \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο m είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 και ο n είναι διαιρέτης του συντελεστή a_n .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.47 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (x - 2)(x^6 + 1)$$

1. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

■

Άσκηση: 1.48 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$$

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε την μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.
2. Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

■

Άσκηση: 1.49 (★)

1. Να γράψετε το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - x$$

ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$

■

Άσκηση: 1.50 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^3 + x^2 - 25x - 25 = 0$

ii) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

■

Άσκηση: 1.51 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$

ii) $x^7 + x^4 - x^3 - 1 = 0$

■

Άσκηση: 1.52 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

1. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.
2. Να αποδείξετε ότι: $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$
3. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$

■

Άσκηση: 1.53 (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

1. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.
2. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης:

$$(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$$

και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

3. Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 - 7x + 6 = 0$

■

Άσκηση: 1.54 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - 7x + 6$$

1. Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$

■

Άσκηση: 1.55 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$$

1. Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x - 2)$.
2. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.
3. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$

■

Άσκηση: 1.56 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$$

1. α'. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.
β'. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.
2. Αν $P(x) = (2x - 1)(x^2 - 4)$, να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$

■

Άσκηση: 1.57 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^3 - 8x + 7 = 0$

ii) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

■

Άσκηση: 1.58 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$

ii) $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0$

■

Άσκηση: 1.59 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 14x - 4 = 0$ ii) $24x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = 0$ ■

Άσκηση: 1.60 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$$

1. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.
2. Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα. ■

Άσκηση: 1.61 (★) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x - 1$ δίνει πηλίκο $x^2 - 2$ και υπόλοιπο 1.

1. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.
2. Αν $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$:
 - α'. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.
 - β'. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$ ■

Άσκηση: 1.62 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + 2x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) + 6 = 0$ ■

Άσκηση: 1.63 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + ax + \beta, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τις τιμές των a, β , αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.
2. Για $a = 4, \beta = -2$:
 - α'. Να κάνετε την διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
 - β'. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$, να λύσετε την εξίσωση:

$$P(x) = 14(x + 2)$$

■

Άσκηση: 1.64 (★★) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν $E = 60\text{cm}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από την μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος

αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

1. Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^3 + x^2 - 3600 = 0$$

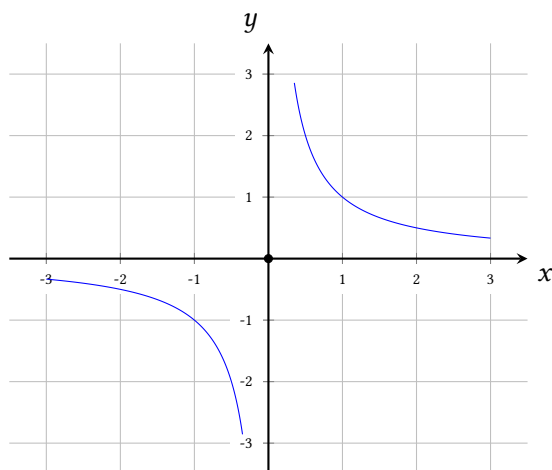
2. Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.
3. Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

■

Άσκηση: 1.65 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.
3. α'. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .
β'. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι η παρακάτω,



να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

4. Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$

■

Άσκηση: 1.66 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

1. Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.
2. Αν $P(x) = (x - 1)(x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$

■

Άσκηση: 1.67 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

1. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.
2. Αν $P(x) = (x+1)^2(x-1)$, να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \geq 0$

■

Άσκηση: 1.68 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$$

1. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.
2. Αν $P(x) = (2x-1)(x^2+1)$, να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \geq 0$

■

Άσκηση: 1.69 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$$

1. α'. Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.
β'. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x+1)$.
2. Αν $P(x) = (x+1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 0$

■

Άσκηση: 1.70 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$$

1. Να κάνετε την διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
2. Αν $P(x) = (x-1)(3x^2+2x+1)+3$, να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 3$

■

Άσκηση: 1.71 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + x + 2$$

1. α'. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.
β'. Να κάνετε την διαίρεση $P(x) : (x+1)$
2. Αν $P(x) = (x+1)(x^2-x+2)$, να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 0$

■

Άσκηση: 1.72 Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3 - 4x^2 - x + 4 \geq 0$

ii) $x^3 + x^2 - x - 1 \leq 0$

■

Άσκηση: 1.73 Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 > 0$ ii) $-x^5 + x^4 + 16x - 16 < 0$ ■

Άσκηση: 1.74 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$$

1. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$
 2. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$
-

Άσκηση: 1.75 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + 15x^2 + 27x + 10$$

1. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$
 2. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \geq 0$
-

Άσκηση: 1.76 (★★) Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι:

$$T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$$

1. Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν °C.
2. Να βρείτε τους αριθμούς a, β, γ με $a < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει:

$$T(x) = (x - a)(x - \beta)(x - \gamma)$$

3. Θεωρούμε ότι μία χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν °C. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;
-

Άσκηση: 1.77 (★★) Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

1. Να αποδείξετε ότι:
 - α'. ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.
 - β'. αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.
 2. Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.
 3. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$
 4. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 0$
-

Άσκηση: 1.78 (★★) Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = x^4 + x^3 + ax - 4 \text{ και } \delta(x) = x^2 - 3x + 2$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $v(x) = 24x - 24$.

1. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a .

Για $a = 2$,

2. Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.
3. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.
4. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

■

Άσκηση: 1.79 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + ax + b$$

το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

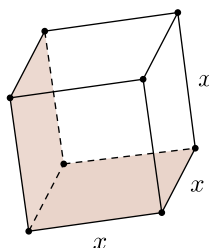
1. Να κάνετε την διαίρεση: $P(x) : (x^2 - 4)$
2. Να βρείτε τις τιμές των a και b .
3. Έστω $a = 4$ και $b = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:
 - α'. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$
 - β'. να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 4x + 1$

■

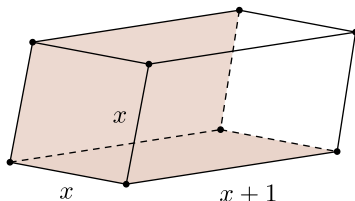
Άσκηση: 1.80 (★★) Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

1. Να βρείτε την διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x .
2. Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:
 - α'. τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.
 - β'. την διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.
3. Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε την μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

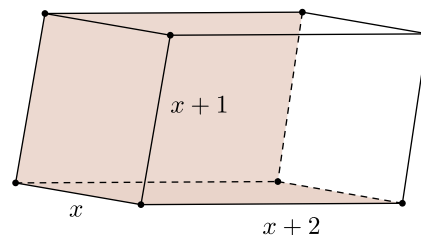
Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ.



Δεξαμενή Α



Δεξαμενή Β



Δεξαμενή Γ

■

Άσκηση: 1.81 (★★)

1. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$ είναι -1 , να δείξετε ότι:

$$2a + b = -6 \quad \text{και} \quad a + b = 3$$

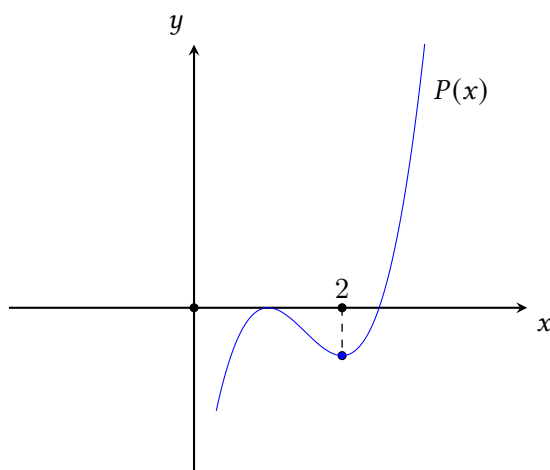
β'. Να δείξετε ότι: $a = -9$ και $b = 12$.

2. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

3. Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

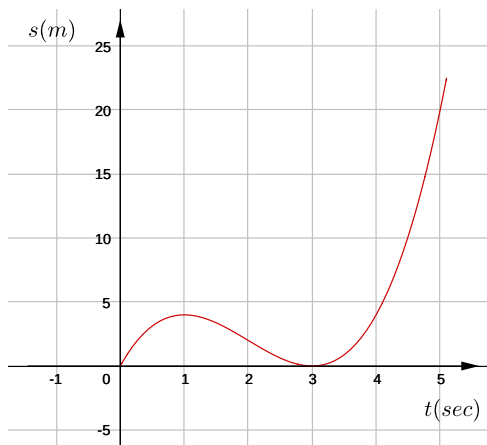


■

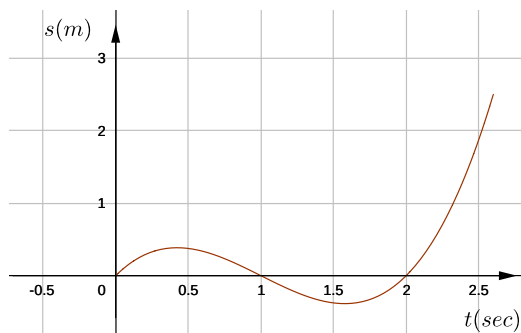
Άσκηση: 1.82 (★★) Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό την χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση:

$$S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$$

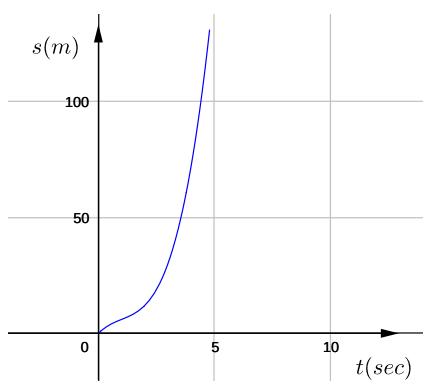
1. Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.
2. Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.
3. Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.
4. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



(I)



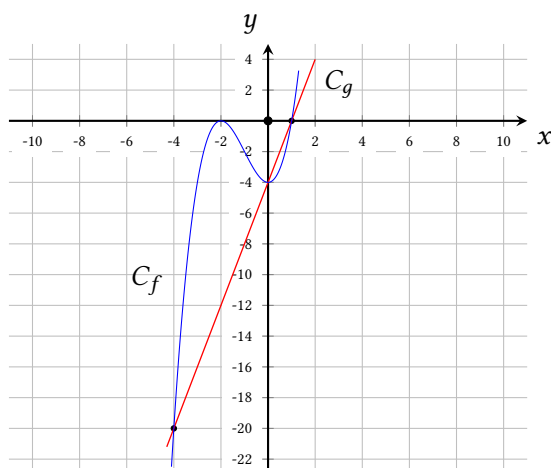
(II)



(III)

Άσκηση: 1.83 (★★) Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \quad \text{και} \quad g(x) = 4x - 4, \quad x \in \mathbb{R}$$



1. Από την γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.
2. Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση: $f(x) = g(x)$
3. Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Άσκηση: 1.84 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } 2\sigma\sigma\nu^3x - \sigma\sigma\nu^2x - 8\sigma\sigma\nu x + 4 = 0 \quad \text{ii) } \left(\frac{x}{x+1}\right)^6 - 7\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 - 8 = 0$$

Άσκηση: 1.85 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } x^6 - 2x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \quad \text{ii) } x^2 - x - 18 - \frac{72}{x^2 - x} = 0$$

Άσκηση: 1.86 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \frac{x-2}{x^2-x} - \frac{x+1}{x} = \frac{1+2x}{3(1-x)} \quad \text{ii) } \frac{x-3}{x-2} + \frac{x^2+1}{x+2} = 3 - \frac{x}{3}$$

Άσκηση: 1.87 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } -\frac{2}{x} + \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3x}{x-1} + \frac{2-x}{x^2+x} \quad \text{ii) } \sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} + 2 = 0$$

Άσκηση: 1.88 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \sqrt{7-x} = x-1 \quad \text{ii) } \sqrt{4+2x-x^2} = x-2$$

Άσκηση: 1.89 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4 \quad \text{ii) } \sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} = 2$$

Άσκηση: 1.90 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } \frac{x}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} < \frac{3}{x^2-1} \quad \text{ii) } \frac{x^2+6x-7}{x^2+1} \leq 2$$

Άσκηση: 1.91 Να λύσετε τις ανισώσεις:

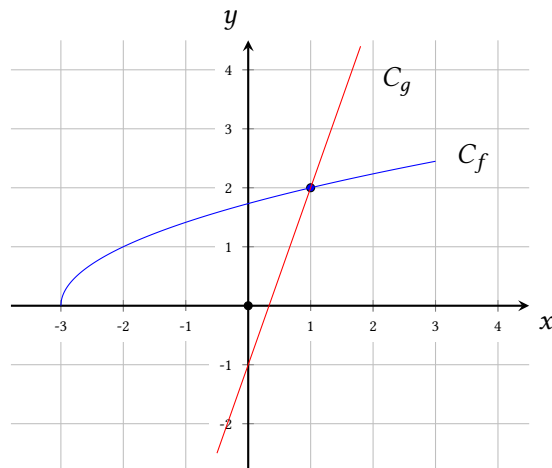
$$\text{i) } \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} < \frac{3}{x^2-x-2} \quad \text{ii) } \frac{2x^2}{x+2} \leq \frac{3x}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x-2}$$

Άσκηση: 1.92 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } \sqrt{2x-1} < \sqrt{9-3x} \quad \text{ii) } \sqrt{x-6} \leq 3-x$$

Άσκηση: 1.93 (★★) Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{και} \quad g(x) = 3x-1$$

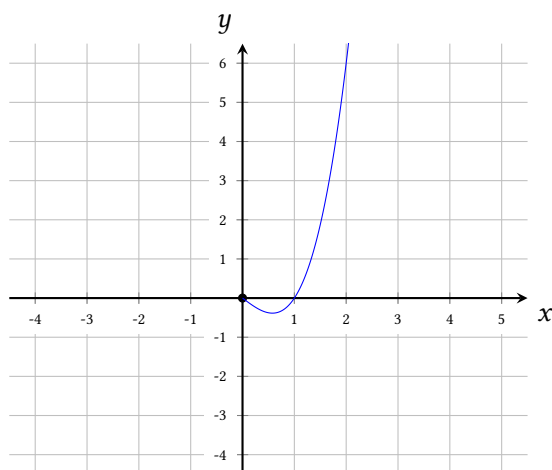


1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την μονοτονία των συναρτήσεων f, g .
2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$
3. α'. να λύσετε γραφικά την ανίσωση: $f(x) < g(x)$
β'. να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

Άσκηση: 1.94 (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , x < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(x) = x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. α'. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.
β'. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης h .



- γ'. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.
2. Αν $x \geq 0$, να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $(\epsilon) : y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση: 1.95 (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση.
2. Να λύσετε την εξίσωση για $a = 0$.
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια.
4. Να αποδείξετε ότι:
 - α'. Για $a = 2\sqrt{2}$, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.
 - β'. Για $a \neq 2\sqrt{2}$, αν η εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

■

Άσκηση: 1.96 (★★) Στο παρακάτω σχήμα σας δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

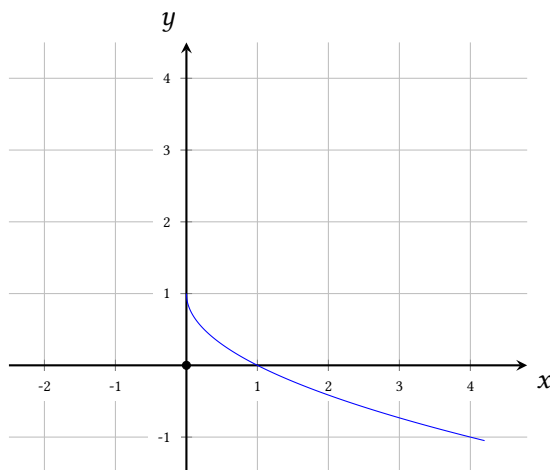
1. Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.
2. Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ και $0 < a < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$P = (2f(a) - 1)(2f(\beta) - 1)$$

3. Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η:

$$f(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.



■

Άσκηση: 1.97 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$$

1. Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.
2. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) > 0$

3. Να λύσετε την ανίσωση:

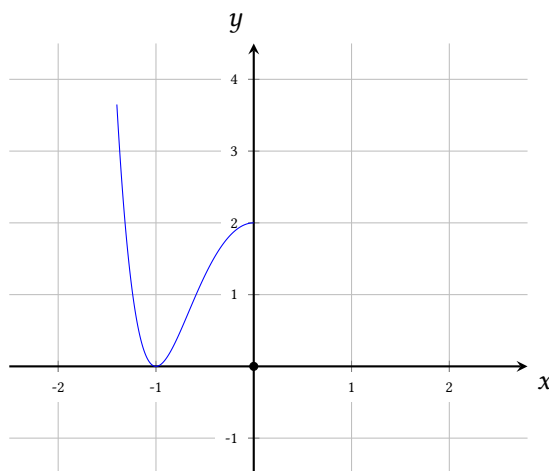
$$3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$$

■

Άσκηση: 1.98 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x' .
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.



4. Με βάση την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

■

Άσκηση: 1.99 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 - ax^2 + 2x + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15, τότε:

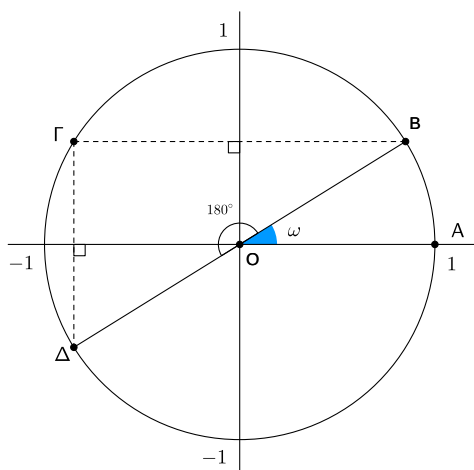
1. Να δείξετε ότι: $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$
2. α'. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
β'. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$
3. Να λύσετε την εξίσωση: $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 x, \quad x \in (0, 2\pi)$

■

Άσκηση: 1.100 (★) Για την γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει:

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0$$

1. Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$
2. Να βρείτε:
 - α'. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$.
 - β'. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ .
 - γ'. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{A}\hat{O}\Gamma$ και $\hat{A}\hat{O}\Delta$.



Άσκηση: 1.101 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$$

1. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.
2. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.
3.
 - α'. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$
 - β'. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$, να λύσετε την εξίσωση:

$$(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 + 7 = 0$$

Άσκηση: 1.102 (★★) Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x) \quad \text{και} \quad B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

1. Να αποδείξετε ότι: $A = \eta\mu^2 x + 1$
2. Να απλοποιήσετε την παράσταση B .
3. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B είναι ίσες.

Άσκηση: 1.103 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

Να αποδείξετε ότι:

1. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης:

$$P(x) : (x - 1)$$

2. $P(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1)$.
3. $\frac{1}{2} < \sin\theta < 1$, για κάθε γωνία $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$.
4. $P(\sin\theta) < 0$, για κάθε γωνία $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$.

■

Άσκηση: 1.104 (★★) Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμετρέ χαρτί και στην συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου M αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $M(0.8, 0.6)$, ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1, 1)$.

1. Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0.8, 0.6)$, τότε:
 - α'. να αιτιολογήσετε ότι $\eta\mu\omega = 0.6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0.8$
 - β'. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu(\pi - \omega) - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + \varepsilon\varphi(-\omega) + \sigma\varphi(\pi + \omega)$$

3. Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση:

$$f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\omega \cdot x^3 - 10\eta\mu\omega \cdot x^2 + 5x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

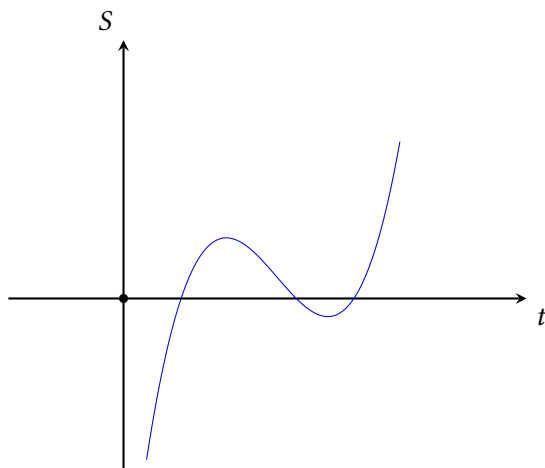
όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

■

Άσκηση: 1.105 Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει τον μέσο όρο της αποταμίευσης S , σε χιλιάδες ευρώ, μίας ομάδας αποφοίτων ενός Πανεπιστημίου, σαν συνάρτηση του χρόνου t (σε χρόνια) μετά την αποφοίτησή τους από την σχολή τους. Η συνάρτηση που περιγράφει το μοντέλο αυτό έχει την μορφή:

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

όπου a, b, c, d είναι πραγματικές σταθερές.



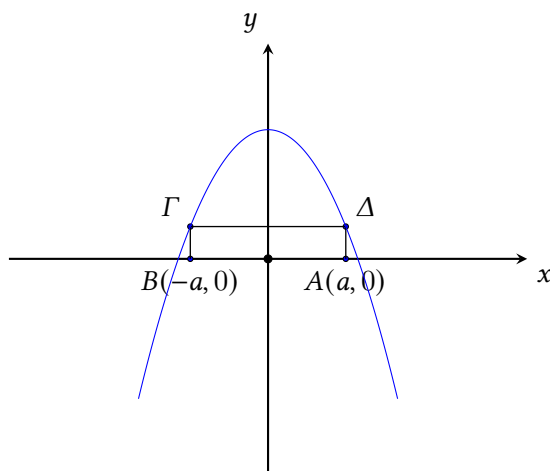
Για την παραπάνω συνάρτηση S δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της:

t	0	1	2	3
S	-6	1	0	15

1. Να βρείτε την τιμή του d .
2. Να γράψετε τις τρεις εξισώσεις που πρέπει να ισχύουν για τις σταθερές a, b, c .
3. Να βρείτε τις σταθερές a, b, c .
4. Αρνητική τιμή στο S υποδεικνύει ότι ο απόφοιτος χρωστάει χρήματα. Χρησιμοποιείστε το παραπάνω μοντέλο, για να βρείτε τον συνολικό χρόνο σε χρόνια, κατά τον οποίον ένας απόφοιτος αναμένεται να βρίσκεται σε χρέος.

■

Άσκηση: 1.106 (★★) Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ . Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $a \in (0, \sqrt{3})$.



1. Αν E είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

α'. να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in (0, \sqrt{3})$ είναι:

$$E = f(a) = -2a^3 + 6a \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

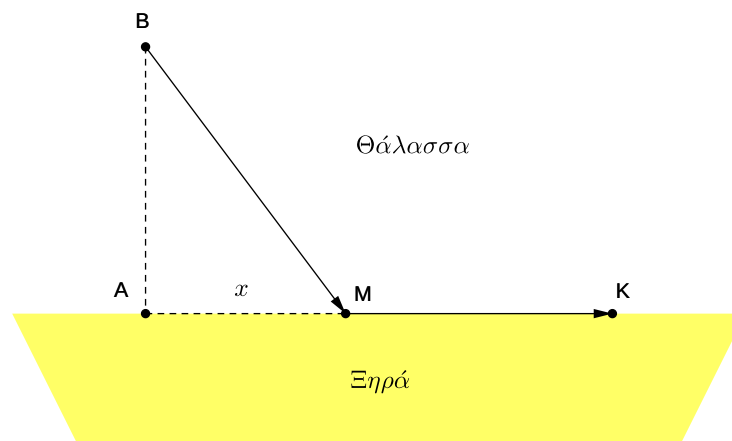
β'. να βρεθεί το εμβαδόν E στην θέση $a = 1$.

2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.
3. Να βρεθεί η θέση του a , ώστε το εμβαδόν E να πάρει την μέγιστη τιμή του.

■

Άσκηση: 1.107 (★★) Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση 2km από το κοντινότερο σημείο A μίας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει 4km από το A . Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στην θάλασσα με σταθερή ταχύτητα $3\frac{\text{km}}{\text{h}}$ και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t , είναι:

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$$



Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση $x \text{ km}$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι: $BM = \sqrt{4 + x^2}$
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4]$$

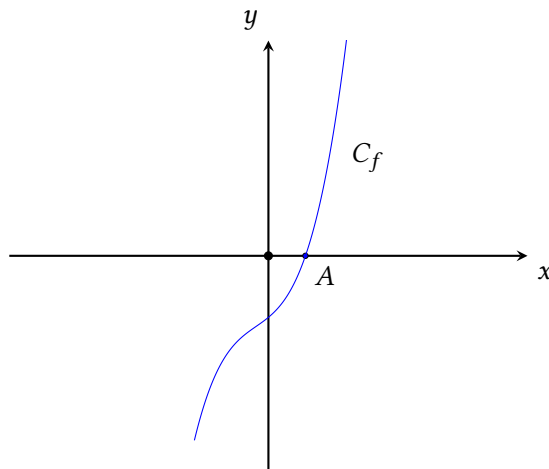
3. Να βρείτε την θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

■

Άσκηση: 1.108 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



- α'. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.
 β'. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση: 1.109 (★★) Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο Β επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

1. Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a = 2$, μετά ο Β επιλέγει $b = 1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c = 2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2 .
2. Ο μαθητής Α επιλέγει $a = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.
3. Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.
4. Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

Άσκηση: 1.110 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 - bx + 3, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

2. Να αποδείξετε ότι $a = -3$ και $b = \frac{21}{2}$
3. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$
4. Να λύσετε την εξίσωση: $P(\sin x) = 0$

■

Κεφάλαιο 2

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

2.1 ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ορισμός: 2.1 Αν $a \in \mathbb{R}$ και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^1 = a \quad \text{και} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_n \text{ παράγοντες}$$

Ορισμός: 2.2 Αν $a \neq 0$ και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^0 = 1 \quad \text{και} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ορισμός: 2.3 Αν $a > 0$, m ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Επίσης αν ο p είναι θετικός ρητός αριθμός ορίζουμε και $0^p = 0$

Π Αν $a > 0$, τότε μπορούμε να ορίσουμε δυνάμεις και όταν ο εκθέτης είναι άρρητος αριθμός.

Π Ο αριθμός του Euler είναι ένας άρρητος αριθμός, συμβολίζεται με e και ο οποίος μπορεί να οριστεί ως:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Ο αριθμός αυτός είναι ένας από τους πιο σημαντικούς αριθμούς, τον συναντάμε σε αναρίθμητες εφαρμογές και προσεγγιστικά η τιμή του είναι:

$$e = 2.718 \dots$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων. Οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν σε όλες τις περιπτώσεις, ανεξάρτητα τι αριθμός είναι στον εκθέτη.

Ιδιότητες των δυνάμεων	
1.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

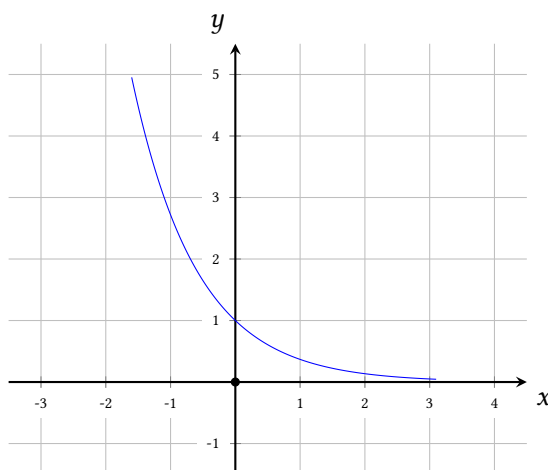
2.2 Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: 2.4 Έστω $0 < a \neq 1$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = a^x$$

ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση** με βάση τον a .

A) Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$



Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^x > 0$$

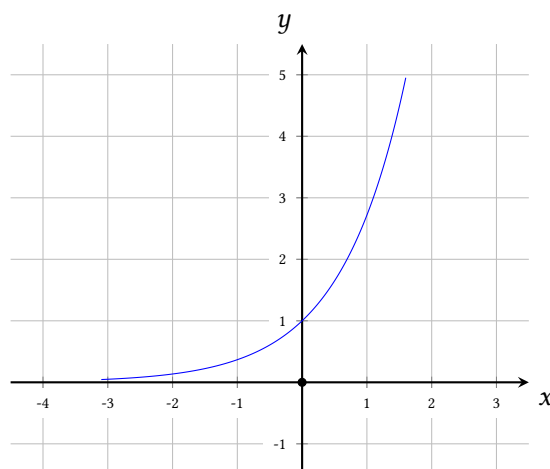
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$.
- Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα Ox .
- Η συνάρτηση f είναι **ένα προς ένα**, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα**, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Β) Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 1$



Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 1$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^x > 0$$

- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$.
- Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Ox' .
- Η συνάρτηση f είναι **ένα προς ένα**, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

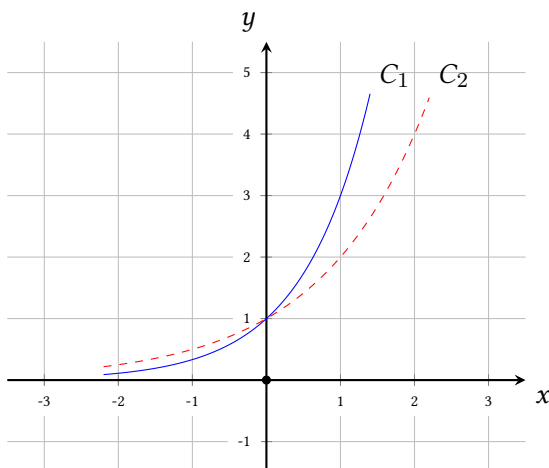
- Η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα**, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

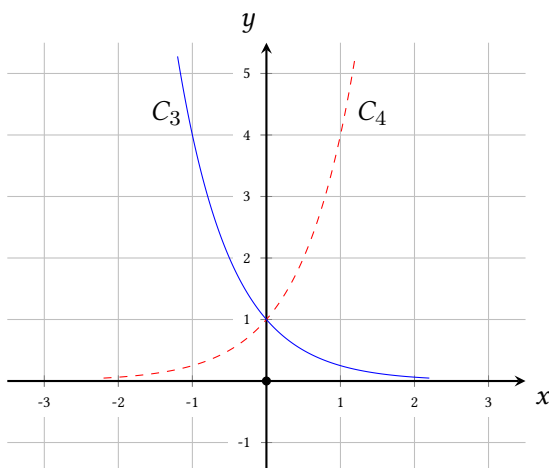
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.1 (★)

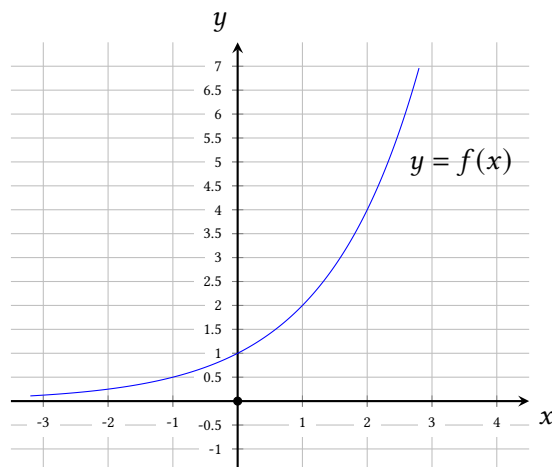
1. Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια είναι της συνάρτησης $g(x) = 3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



2. Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια είναι της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Άσκηση: 2.2 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας εκθετικής συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



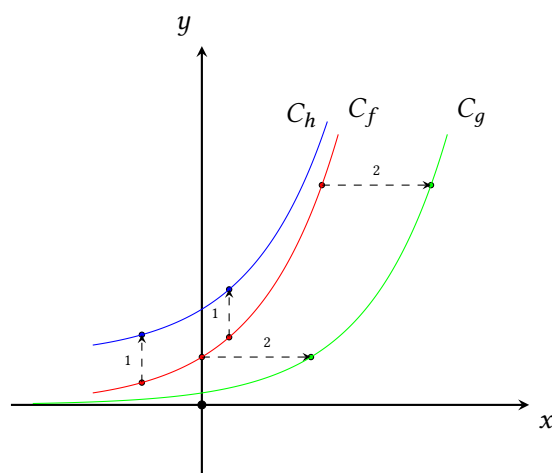
1. α'. Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

- β'. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .
 2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 32$

■

Άσκηση: 2.3 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

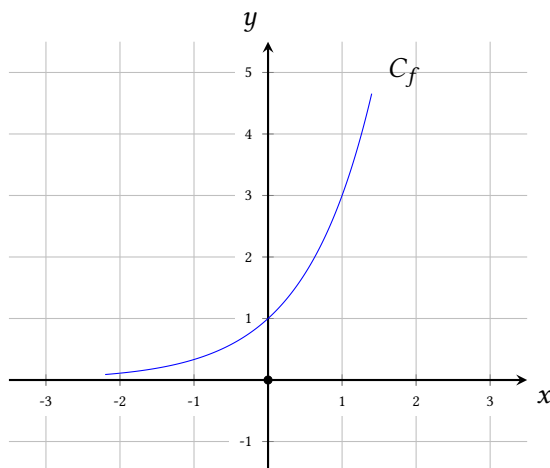


- Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.
- Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.
- Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

■

Άσκηση: 2.4 (★) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 3^x, \quad x \in \mathbb{R}$$



1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$g(x) = 3^x + 1 \quad \text{και} \quad h(x) = 3^x - 1$$

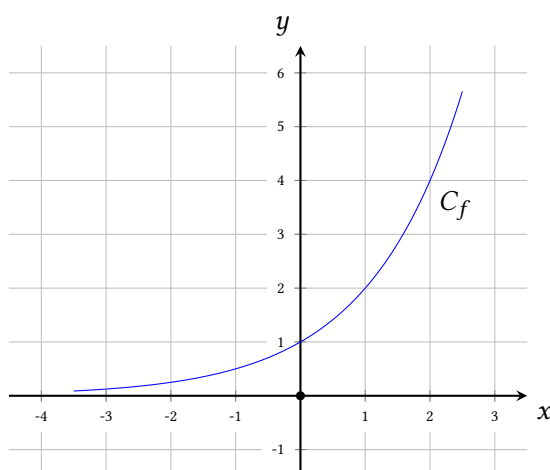
μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

2. Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;

■

Άσκηση: 2.5 (★) Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

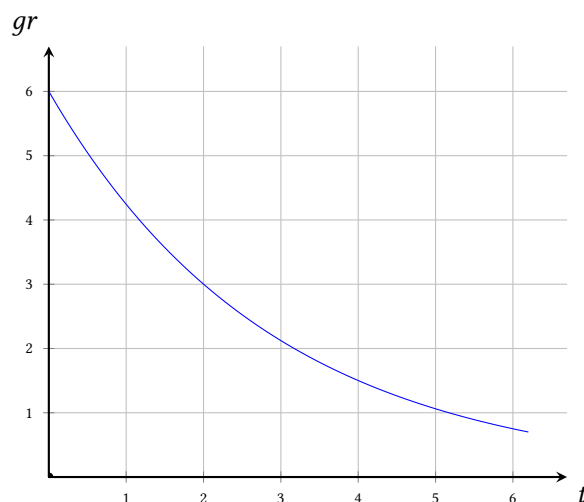
$$f(x) = 2^x, \quad x \in \mathbb{R}$$



1. Να λύσετε την εξίσωση: $2^x - 1 = 0$
2. α'. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

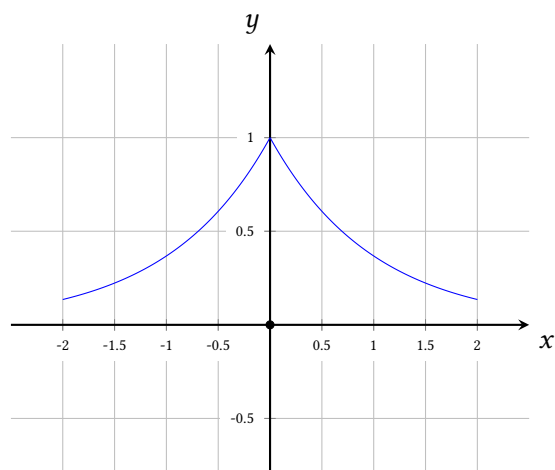
β'. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.

Άσκηση: 2.6 (★) Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η πρώτη ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 1$, η δεύτερη ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ μέχρι $t = 2$ κλπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).



1. Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t = 0$) ποσότητα του ραδιενεργού υλικού;
2. Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού;
3. Κατά την διάρκεια ποιάς ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από $1gr$;

Άσκηση: 2.7 (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



1. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

$$A. f(x) = \begin{cases} e^x & , x < 0 \\ e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases} \quad B. f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x < 0 \\ e^x & , x \geq 0 \end{cases}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Να βρείτε την μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.
 3. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του a , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$.
 4. Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, είναι το σημείο $(0, 1)$.

■

Άσκηση: 2.8 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αν οι αριθμοί $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

■

Άσκηση: 2.9 (★) Δίνεται το σημείο $A(1, \frac{1}{2})$ το οποίο ανήκει στην γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

1. Αν η συνάρτηση f είναι η εκθετική συνάρτηση a^x , $0 < a < 1$, να βρείτε το a .
 2. Για $a = \frac{1}{2}$,
 α'. να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = a^x$.
 β'. να συγκρίνετε τους αριθμούς: $a^{\sqrt{2}}$ και $a^{\sqrt{3}}$

■

Άσκηση: 2.10 Έστω $a \neq -1$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{2a-1}{a+1} \right)^x$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η συνάρτηση f :

- i) έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ii) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ iii) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

■

Άσκηση: 2.11 Δίνεται η εκθετική συνάρτηση:

$$f(x) = (1 - k^2)^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο k .
 2. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του k για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

■

Άσκηση: 2.12 (★★)

1. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x-2}{x+1} > 0$
2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{a-2}{a+1}\right)^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α'. Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.
- β'. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;
- γ'. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

■

Άσκηση: 2.13 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3^{2x} = \frac{1}{81}$

ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$

iii) $2^{-x} = 32$

■

Άσκηση: 2.14 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{x/2}$

ii) $2^{x^2-5x+6} = 1$

iii) $9^{x+2} \cdot 27^{x+1} = 3^{4x+2}$

■

Άσκηση: 2.15 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$

ii) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$

iii) $(2e)^x + 4e = 4e^x + e \cdot 2^x$

■

Άσκηση: 2.16 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $7 \cdot 3^{x-1} + 5^{x+1} = 3^{x+2} + 5^x$

ii) $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{-x+2} = 135$

■

Άσκηση: 2.17 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{x+3} - 2^{x+2} + 6 \cdot 2^{x-1} = 56$

ii) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 48 \cdot 2^{x-4} + 2 \cdot 2^{x-1} = 1$

■

Άσκηση: 2.18 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$

ii) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = \frac{1}{5}$

■

Άσκηση: 2.19 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3^x + 10 = 6 \cdot 3^{x-1} + \frac{81}{3^{x+2}}$

ii) $27^x - 11 \cdot 9^x + 5 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

■

Άσκηση: 2.20 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$

ii) $2\eta\mu^2 x + 4 \cdot 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 6$

Άσκηση: 2.21 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$$

1. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.
2. Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;
3. Για $\lambda = 0$:
 α'. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 β'. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x+1) = 6$

Άσκηση: 2.22 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{a}{a+5}\right)^x$$

1. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.
2. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
3. Για την μεγαλύτερη τιμή του $a \in \mathbb{Z}$, για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x+1) = 14$$

Άσκηση: 2.23 (★★) Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου την χρονική στιγμή $t = 0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με την συνάρτηση:

$$f(t) = q_0 \cdot a^t, \quad t \geq 0$$

όπου οι αριθμοί a, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

1. Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < a < 1$.
2. Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.
 α'. Να αποδείξετε ότι $a = \frac{1}{2}$
 β'. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 .

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

3. Υποθέτουμε τώρα ότι $a = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι $25mg$.
 α'. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.
 β'. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6]$.

Άσκηση: 2.24 (★★) Μία ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$$

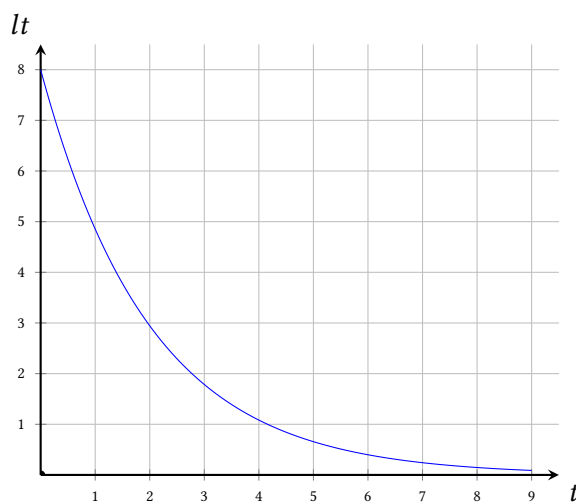
Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

1. Να δείξετε ότι:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$$

2. Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).
 3. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

Άσκηση: 2.25 (★★) Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα Q , σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από t ημέρες.



Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από t ημέρες δίνεται από την σχέση:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-t/c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υγρού.

1. Με βάση το διάγραμμα:

α'. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα				

β'. να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0 του υγρού.

γ'. να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε την χρονική στιγμή $t = 0$ στο δοχείο.

2. Αν $Q_0 = 8$ και $Q(2) = 4$, να δείξετε ότι $c = 2$.

3. Αν $Q(t) = 8 \cdot 2^{-t/2}$, να δείξετε ότι χρειάζεται να περάσουν δύο ημέρες για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα $Q(t)$ του υγρού που υπάρχει στο δοχείο οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

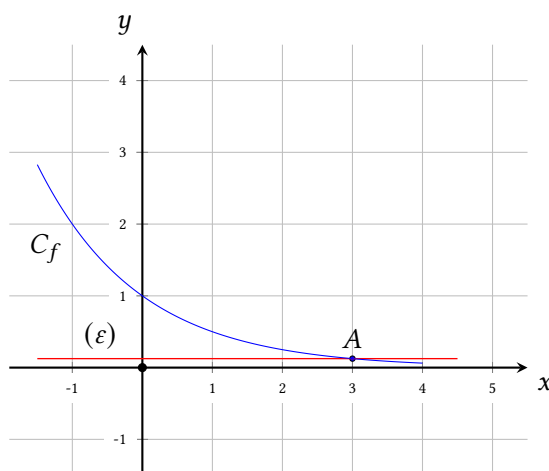
■

Άσκηση: 2.26 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$

2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f και της ευθείας $(\varepsilon) : y = \frac{1}{8}$



Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία (ε) .

3. Να βρείτε για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία (ε) .

■

Άσκηση: 2.27 Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2^{x+2} > \frac{1}{4}$

ii) $3^{x^2-1} < 1$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} > \frac{1}{32}$

■

Άσκηση: 2.28 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10} \quad \text{ii) } \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-9} < -1 \quad \text{iii) } 2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{1/x} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.29 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } 4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 \leq 0 \quad \text{ii) } \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1} \leq 2 \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.30 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} 2^{x+1} - 15 \cdot 3^{y-1} = 3 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 13 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} 9^{x-1} = 27 \cdot 3^{2y+3} \\ 2^{y-x} = 4^{2-3x} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: 2.31 (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = 4^x \text{ και } g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$$

1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .
3. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων. \blacksquare

Άσκηση: 2.32 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = a \cdot 2^x + b, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } a, b \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(2, 13)$.

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b .
Αν $a = 5$ και $b = -7$,
2. Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > 4^x - 3$ \blacksquare

Άσκηση: 2.33 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

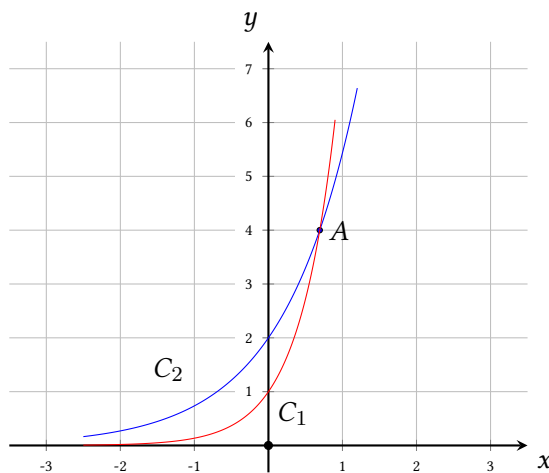
2. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.
3. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .
4. Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

■

Άσκηση: 2.34 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{kx}, \quad k \geq 0$$

1. Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;
2. Να αποδείξετε ότι αν $k > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
3. α'. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^x$
β'. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^x$ και $h(x) = e^{2x}$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου A ;



■

Άσκηση: 2.35 (**) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και

$$g(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

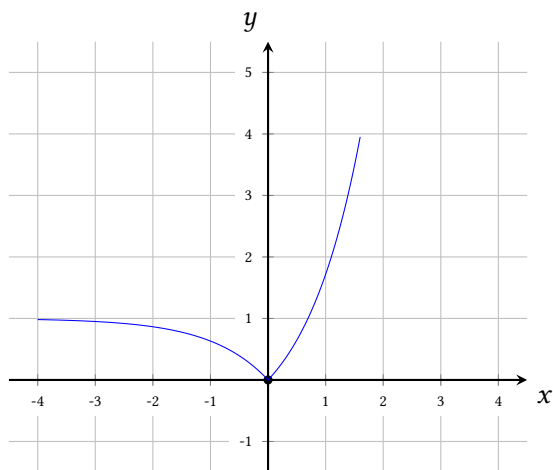
Αν η γραφική παράσταση C_f της διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

1. Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.
3. Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .
4. Έστω $f(x) = -2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε δύο μονάδες αριστερά και μία μονάδα πάνω.

■

Άσκηση: 2.36 (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης:

$$f(x) = |e^x - 1|, \quad x \in \mathbb{R}$$



1. Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε την μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f .
3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \frac{1}{2}$
4. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του a , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y = a$.

■

Κεφάλαιο 3

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.1 ΕΝΝΟΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

Η εξίσωση $a^x = \theta$ με $0 < a \neq 1$ και $\theta > 0$ έχει μοναδική λύση γιατί, όπως είπαμε, η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι συνάρτηση ένα προς ένα. Την μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής την ονομάζουμε λογάριθμο του θ με βάση το a και την συμβολίζουμε $\log_a \theta$. Δηλαδή έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός: 3.1 Λογάριθμος του θετικού αριθμού θ με βάση τον αριθμό a , όπου $0 < a \neq 1$, ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $a^x = \theta$ και συμβολίζεται $\log_a \theta$.

Π Ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης εκείνος στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε τον θ .

Π Ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

Π Ο λογάριθμος του θ με βάση το 10 συμβολίζεται με $\log \theta$. Επομένως ισχύει:

$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

Π Ο λογάριθμος του θ με βάση το e συμβολίζεται με $\ln \theta$. Επομένως ισχύει:

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

Αν $0 < a \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες των λογαρίθμων

1. $\log_a a^x = x$

2. $a^{\log_a x} = x$

3. $\log_a 1 = 0$

4. $\log_a a = 1$

Θεώρημα: 3.1 Αν $0 < a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$i) \quad \log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$ii) \quad \log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$iii) \quad \log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.1 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $\log_2 128$

ii) $\log_3 \frac{1}{81}$

iii) $\log_{0.1} 1000$ ■

Άσκηση: 3.2 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $\log 0.0001$

ii) $\log_{\sqrt{2}} 8$

iii) $\log_{\sqrt{3}} 81$ ■

Άσκηση: 3.3 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $3^{\log_3 81}$

ii) $10^{\log 1000}$

iii) $2^{\log_2 6}$ ■

Άσκηση: 3.4 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x αν ισχύει:

i) $\log_3 x = 4$

ii) $\log x = -1$

iii) $\ln x = 2$ ■

Άσκηση: 3.5 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $\log_3 81 \cdot \log_3 \frac{1}{27} \cdot \log_2 16 \cdot \log_2 8$

ii) $\log_2 16 \cdot \log_2 8 \cdot \log_2 4 \cdot \log_2 2$ ■

Άσκηση: 3.6 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $3\log_5 25 + 2\log_3 27 - 4\log_2 8$

ii) $\frac{5}{4} \cdot \log_3 81 + 3\log_{\frac{1}{2}} 16 - 2\log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ ■

Άσκηση: 3.7 Να αποδείξετε ότι:

i) $2\log 2 + 3\log 3 - \log 12 = 2\log 3$

ii) $\frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(1 + \sqrt{2}) = \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$ ■

Άσκηση: 3.8 (★) Δίνονται οι αριθμοί:

$$a = \ln 2, \beta = \ln 4, \gamma = \ln 8$$

1. Να αποδείξετε ότι: $2\beta = a + \gamma$

2. Να αποδείξετε ότι: $\beta + \gamma = 5a$ ■

Άσκηση: 3.9 (★) Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1.386$ και $\ln 5 = 1.609$, τότε:

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \ln \frac{e}{5} - \ln \frac{4}{e}$

2. Με την βοήθεια της ισότητας $80 = 5 \cdot 4^2$, να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4.381$ ■

Άσκηση: 3.10 (★) Αν $a = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$, τότε:

1. Να δείξετε ότι $a = 3$.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $9 \cdot 2^x = 4 \cdot a^x$

Άσκηση: 3.11 (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \log_4 3 + \log_4 a - \log_4 \beta$$

όπου a, β θετικοί αριθμοί.

1. Να αποδείξετε ότι: $A = \log_4 \left(\frac{3a}{\beta} \right)$
2. Αν για τους αριθμούς a, β ισχύει $3a = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης A .

Άσκηση: 3.12 Αν $\log_{20} 2 = a$, τότε να υπολογίσετε συναρτήσει του a τον $\log_{20} 5$ και τον $\log_{20} 40$.

Άσκηση: 3.13 Αν $0 < a, b \neq 1$ με $a^2 + b^2 = 7ab$, να αποδείξετε ότι:

$$\log \left(\frac{a+b}{3} \right) = \frac{\log a + \log b}{2}$$

Άσκηση: 3.14 Αν οι αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί $\ln a, \ln \beta, \ln \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Άσκηση: 3.15 (★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\log_2 8) x^3 + (4 \log_2 \sqrt{2}) x^2 - (4 \log_2 1) x + 1990$$

1. Να αποδείξετε ότι: $\log_2 8 + 2 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$
2. Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$

Άσκηση: 3.16 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$.
3. Να υπολογίσετε την παράσταση: $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$
4. Να αποδείξετε ότι: $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, με $\eta\mu\theta \neq 0$.

Άσκηση: 3.17 Η Ελένη πραγματοποιεί ένα πείραμα για την ανάπτυξη της μούχλας. Πιστεύει ότι η ανάπτυξη μπορεί να μοντελοποιηθεί από την εκθετική συνάρτηση:

$$P(t) = ae^{kt}$$

όπου P είναι η περιοχή που έχει καλυφθεί από μούχλα σε mm^2 , t είναι ο χρόνος σε μέρες μετά την έναρξη του πειράματος και a και k είναι σταθερές. Η περιοχή που έχει καλυφθεί από μούχλα κατά την έναρξη του πειράματος είναι $120 mm^2$ και μετά από πέντε ημέρες είναι $360 mm^2$. Να βρείτε τις σταθερές a και k . ■

Άσκηση: 3.18 Ένας καθηγητής παρατήρησε ότι οι μαθητές του έχουν δυσκολία να θυμούνται τις πληροφορίες που παρουσιάζονται στο μάθημά του. Αποφάσισε λοιπόν να μοντελοποιήσει το ποσοστό των πληροφοριών, έστω R , που συγκρατούν οι μαθητές. Κατέληξε στην εξής συνάρτηση:

$$R(t) = 100 \cdot e^{-pt}, \quad t \geq 0$$

όπου t είναι ο αριθμός των ημερών μετά από το μάθημα. Επίσης διαπίστωσε ότι μία ημέρα μετά το μάθημα, οι μαθητές είχαν ξεχάσει το 50% των πληροφοριών που παρουσίασε.

1. Να δείξετε ότι $p = \ln 2$.
2. Να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω μοντέλο για να βρείτε το ποσοστό των πληροφοριών που συγκράτησαν οι μαθητές 36 ώρες μετά το τέλος του μαθήματος. (Δίνεται ότι $2^{-1.5} \approx 0.35$)
3. Βασιζόμενος στο παραπάνω μοντέλο, ο καθηγητής πιστεύει ότι οι μαθητές του πάντα θα θυμούνται κάποιες από τις πληροφορίες του μαθήματος. Δώστε έναν μαθηματικό λόγο που να αποδεικνύει τον ισχυρισμό του καθηγητή. ■

Άσκηση: 3.19 Η ισχύς των σεισμών μετρίεται στην κλίμακα Richter, με τιμές τυπικά μεταξύ 0 και 8 όπου το 8 δηλώνει τον πιο ισχυρό σεισμό. Η εξίσωση Gutenberg–Richter δίνει τον μέσο αριθμό σεισμών ανά έτος, N , που έχουν μέγεθος τουλάχιστον M . Για μια συγκεκριμένη περιοχή η εξίσωση είναι η ακόλουθη:

$$\log N = a - M, \quad a \in \mathbb{R}$$

Αυτή η περιοχή έχει κατά μέσο όρο 100 σεισμούς ετησίως με μέγεθος τουλάχιστον 3 βαθμούς στην κλίμακα Richter.

1. Βρείτε την τιμή του a .

Η εξίσωση Gutenberg–Richter αυτής της περιοχής μπορεί επίσης να γραφτεί ως:

$$N = \frac{b}{10^M}$$

2. Βρείτε την τιμή του b .
3. Αν γνωρίζετε ότι $0 < M < 8$, να βρείτε το εύρος των τιμών που μπορεί να πάρει το N .

Το αναμενόμενο χρονικό διάστημα, σε χρόνια, μεταξύ σεισμών με μέγεθος τουλάχιστον M είναι ίσο με $\frac{1}{N}$. Εντός αυτής της περιοχής ο ισχυρότερος σεισμός που

καταγράφηκε είχε μέγεθος 7 βαθμούς στην κλίμακα Richter.

4. Βρείτε το αναμενόμενο χρονικό διάστημα μεταξύ αυτού του σεισμού και του επόμενου σεισμού με τουλάχιστον αυτό το μέγεθος.

Άσκηση: 3.20 (★★) Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο ($1W/m^2$). Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12}W/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση:

$$D = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

1. Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100W/m^2$.
2. Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.
3. Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

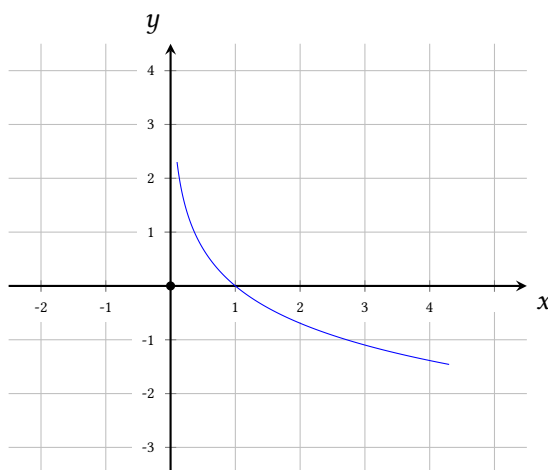
3.2 Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: 3.2 Έστω $0 < a \neq 1$. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \log_a x$$

ονομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση** με βάση τον a .

A) Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $0 < a < 1$



Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $0 < a < 1$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

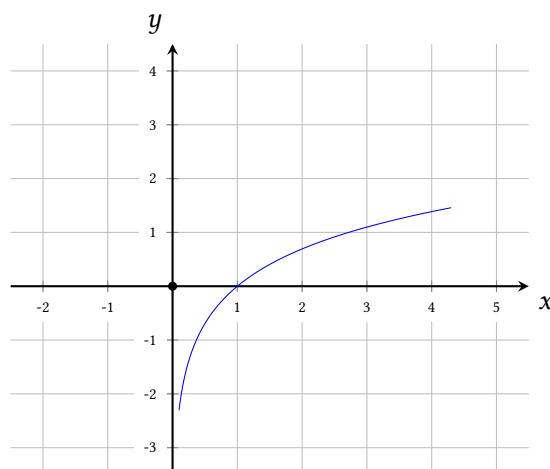
- Έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$.
- Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα Oy .
- Η συνάρτηση f είναι **ένα προς ένα**, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα**, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Β) Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a > 1$



Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a > 1$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$.
- Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Oy' .
- Η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα**, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ισχύει:

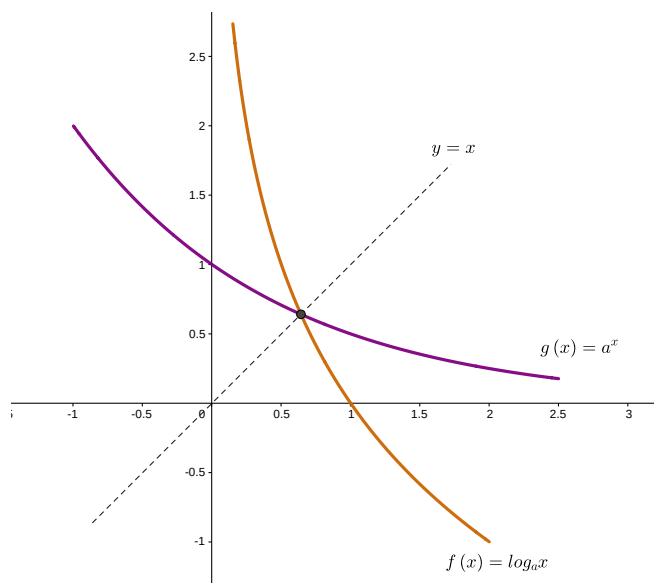
$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

Π Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 είναι η $f(x) = \log x$ και η λογαριθμική συνάρτηση με βάση τον αριθμό του Euler e είναι η $f(x) = \ln x$.

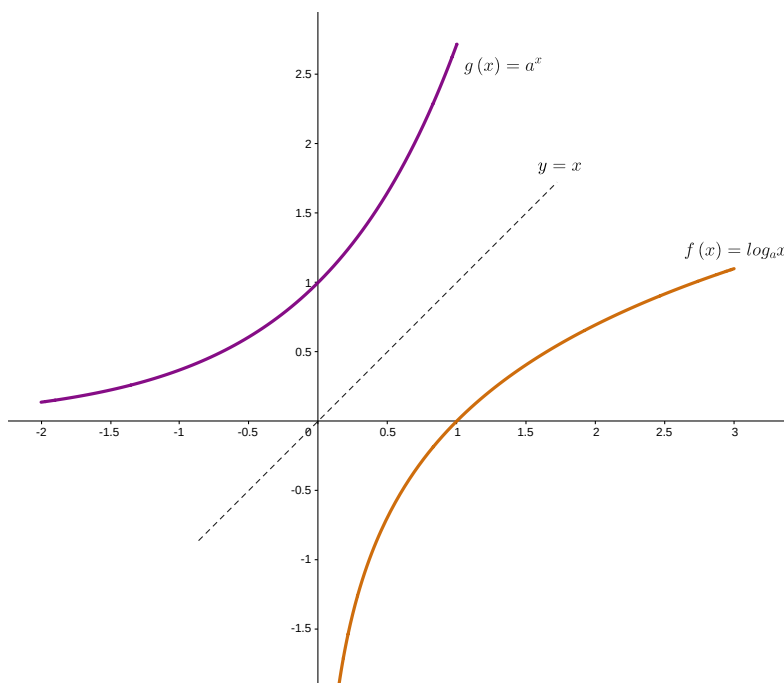
Π Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = \log_a x \quad \text{και} \quad y = a^x$$

είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες των αξόνων $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.



Σχήμα 3.1: Η συμμετρία όταν $0 < a < 1$



Σχήμα 3.2: Η συμμετρία όταν $a > 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 3.21 (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται: $\log(x^2 + 1) = \log 5$
2. Να λύσετε την εξίσωση.

Άσκηση: 3.22 (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$$

1. Να αποδείξετε ότι: $1 - \log 2 = \log 5$
2. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Άσκηση: 3.23 (★)

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$$\log(x + 1) = -\log 2 - \log(1 - x)$$

2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(x + 1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1 - x)$$

Άσκηση: 3.24 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log x, \quad x > 0$$

1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$ και $f(\sqrt{10})$
2. Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση: $f(x + 1) + f(x - 1) = \log 10 - \log 5$

Άσκηση: 3.25 (★) Δίνεται η παράσταση:

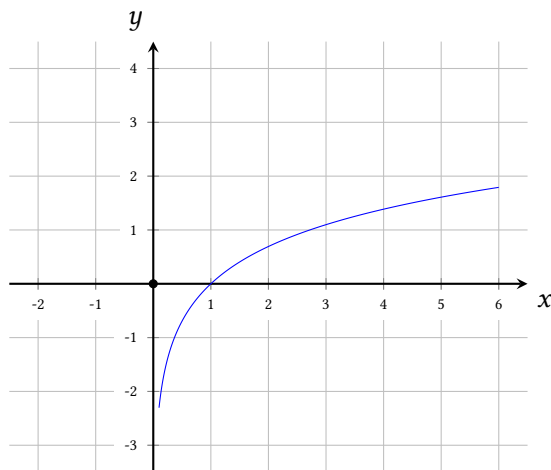
$$A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$$

1. Να αποδείξετε ότι $A = 1$.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(e^x - 1) = A$

Άσκηση: 3.26 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x + 2)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
2. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x + 2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g .

Άσκηση: 3.27 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x - 1)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.
3. Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Άσκηση: 3.28 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x + 1)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.
3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2$

Άσκηση: 3.29 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x + 1)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
2. Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
3. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

Άσκηση: 3.30 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(e^x - 1)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$

Άσκηση: 3.31 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(1 - x)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
2. Να λυθεί η εξίσωση: $\ln(1 - x) = \ln(x^2 + 1)$

Άσκηση: 3.32 (★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \log x \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(x - 1)$$

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i) } \log x = 3$$

$$\text{ii) } \ln(x - 1) = 1$$

Άσκηση: 3.33 (★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \log x \quad \text{και} \quad g(x) = \log(x + 2)$$

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i) } f(x) = 2$$

$$\text{ii) } g(x) = 2f(x)$$

Άσκηση: 3.34 (★)

1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση:

$$A = \ln x + \ln(x + 6)$$

2. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln x + \ln(x+6) = \ln 7$

Άσκηση: 3.35 (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$$

1. Να αποδείξετε ότι:
 - i) $\log 10^{10} = 10$
 - ii) $A = 1$
2. Να λυθεί η εξίσωση: $\log(x^2 + 1) + A$

Άσκηση: 3.36 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το $f(3)$.
2. Να δείξετε ότι: $\ln 3 + 3\ln 2 - f(3) = \ln 4$
3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \ln 4$

Άσκηση: 3.37 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$

Άσκηση: 3.38 (★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(x^2 + 4) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x + \ln 4$$

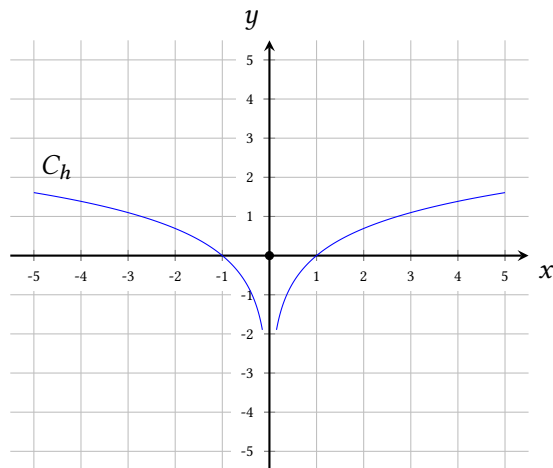
1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$

Άσκηση: 3.39 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = -\ln|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
2. α'. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h(x) = \ln|x|, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$



- Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 β'. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = \ln x$, $x > 0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x = 1$.

Άσκηση: 3.40 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(e^x - 1)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = x - 1$
3. Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + a$.

Άσκηση: 3.41 (★★) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 1$
2. Να αποδείξετε ότι: $P(\log 5) \neq 1$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Άσκηση: 3.42 (★★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3}\right)$$

1. Να λύσετε την ανίσωση:

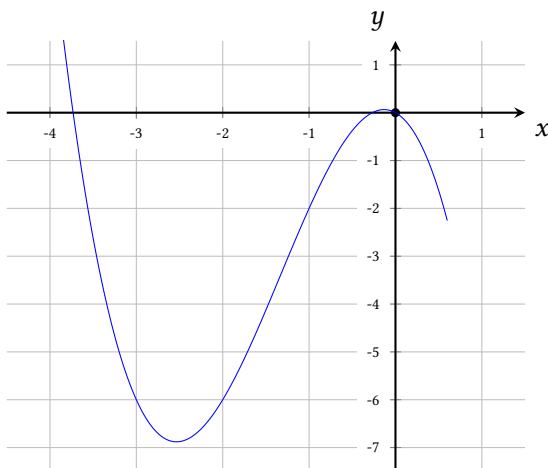
$$\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$$

2. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
3. Να λύσετε την εξίσωση: $A = -\ln 3$

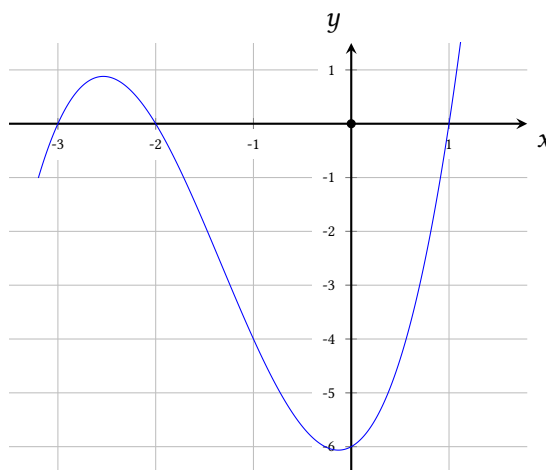
Άσκηση: 3.43 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$$

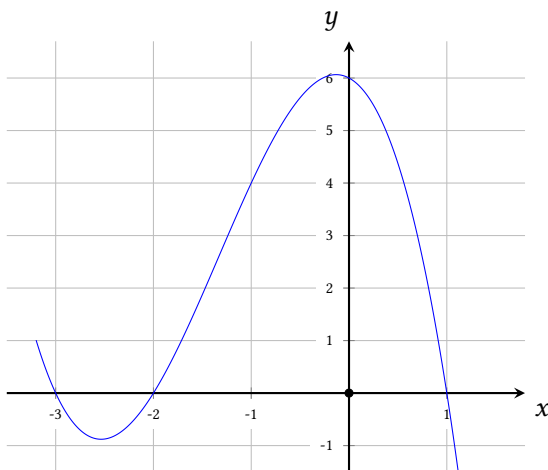
1. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 0$
2. Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.



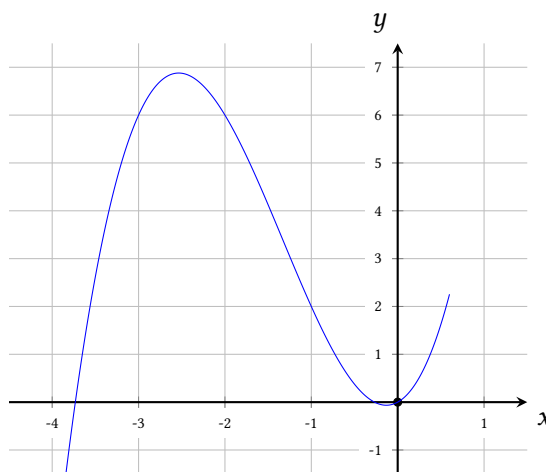
Σχήμα (I)



Σχήμα (II)



Σχήμα (III)



Σχήμα (IV)

■

Άσκηση: 3.44 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} \right)$$

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης:

$$\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$$

είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

2. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'x$.

■

Άσκηση: 3.45 (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = 2\log 5 + 2\log 2$$

1. Να αποδείξετε ότι $A = 2$
2. Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι: $e^\lambda = A$
3. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι: $\ln \lambda < 0$.

■

Άσκηση: 3.46 (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = e^{\ln 2} + 10^{2\log \sqrt{5}}$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $A = 7$
2. $0 < \log A < 1$

■

Άσκηση: 3.47 (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $A = \frac{7}{6}$
2. $0 < \ln A < 1$

Δίνεται $e \simeq 2.71$

■

Άσκηση: 3.48 (★) Δίνονται οι αριθμοί:

$$a = \ln 2 \text{ και } b = \ln 3$$

1. Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < a < b$
2. Να αποδείξετε ότι $b - a < 1$

Δίνεται $e \simeq 2.71$

■

Άσκηση: 3.49 (★) Δίνονται οι αριθμοί:

$$a = \log 3 \text{ και } b = \log 4$$

1. Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < a < b$
2. Να αποδείξετε ότι:
 - α'. $b + a > 1$
 - β'. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) < 0$

■

Άσκηση: 3.50 (★) Δίνονται οι αριθμοί:

$$a = \log 20 \text{ και } b = \log 50$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $b + a = 3$
2. $\ln(b + a) > 1$
3. $10^b - 10^a = 10(b + a)$

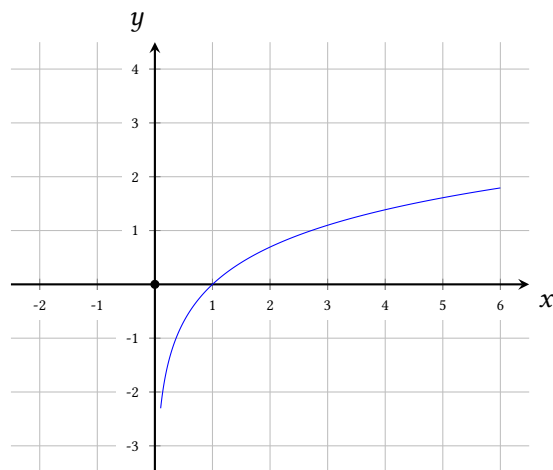
Δίνεται $e \simeq 2.71$

■

Άσκηση: 3.51 (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x - 1)$$

και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$, $x > 0$.



1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
2. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
3. Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

■

Άσκηση: 3.52 (★)

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$
2. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$

Άσκηση: 3.53 (★) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2\log 6 - \log 12 \quad \text{και} \quad B = \log 5 + \log 2$$

1. Να αποδείξετε ότι: $A = \log 3$ και $B = 1$
2. Να αποδείξετε ότι $A < B$
3. Να λύσετε την ανίσωση: $\log x < 1$

Άσκηση: 3.54 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

1. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$
2. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$

Άσκηση: 3.55 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log(10^x - 1)$$

1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.
2. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
3. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x), \quad x > 0$$

4. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

Άσκηση: 3.56 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (a-2)x - 6$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

1. Να βρείτε τον αριθμό a .
2. Για $a = 15$:
 - α'. να κάνετε την διαίρεση: $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
 - β'. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$, να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 0$

γ'. να αποδείξετε ότι: $P(\ln 2) < 0$.

Άσκηση: 3.57 (★★) Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση:

$$P(x) = e^{\ln e} \cdot x^3 + 4x^2 \cdot \ln \sqrt{e} + 2$$

1. Να δείξετε ότι:

$$P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$$

2. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $(\varepsilon) : y = ex + 4$.
 3. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $(\varepsilon) : y = ex + 4$.
 4. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

Άσκηση: 3.58 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, \quad x \neq 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
 2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(x) = \ln x$.
 3. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x)$.
 4. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

Άσκηση: 3.59 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + x, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0$$

το οποίο έχει τρεις ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

1. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.
 2. Να αποδείξετε ότι $a = -1$ και $b = 0$.
 3. Με $a = -1$ και $b = 0$,
 α'. να λύσετε την ανίσωση: $P(x) > 0$
 β'. να αποδείξετε ότι: $P(\log \sqrt{10}) > 0$

Άσκηση: 3.60 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

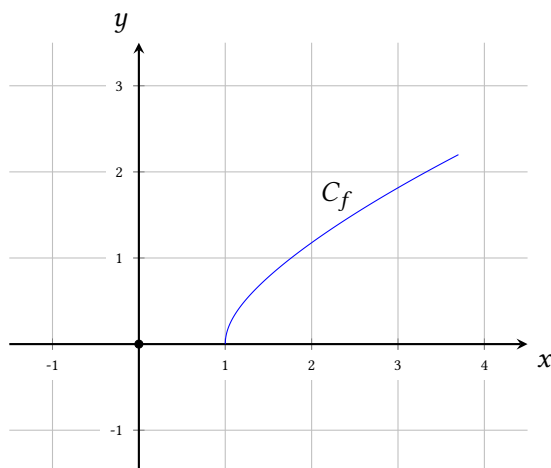
$$f(x) = \ln(e^x - 2)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + x = 3 \ln 2$
 3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) + x \geq 3 \ln 2$

Άσκηση: 3.61 (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x \ln x} \text{ και } g(x) = \sqrt{\ln x}$$

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.
2. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από την γραφική παράσταση της g και πάνω.
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .



- α'. να βρείτε την μονοτονία της.
- β'. να συγκρίνετε τους αριθμούς: $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.
4. Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά την λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = 1 - x$$

■

Άσκηση: 3.62 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log\left(\frac{4^x - 1}{2^x + 5}\right)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \log 3 - \log 7$
3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > \log 3 - \log 7$

■

Άσκηση: 3.63 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - 1) \ln x, \quad x > 0$$

και η ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x - 2$.

1. Να αποδείξετε ότι: $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$
2. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

3. Να βρείτε:

α'. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

β'. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

Άσκηση: 3.64 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln|x|$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
2. Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .
3. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x \quad \text{με } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1, 0)$, $B(x, 0)$ και $\Gamma(x, \ln x)$.

Άσκηση: 3.65 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Να αποδείξετε ότι:

1. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης:

$$P(x) : (x - 1)$$

2. $P(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.
3. $1 < \log 20 < 2$
4. $P(\log 20) < 0$

Άσκηση: 3.66 (★★) Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

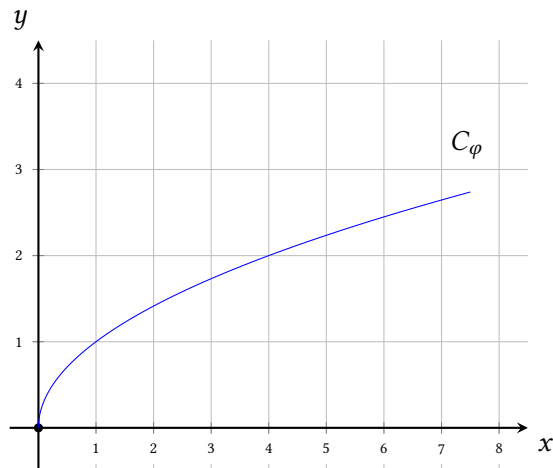
Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $v = -16$, τότε:

1. Να υπολογισθούν οι τιμές των a και b .
Αν είναι $a = 5$ και $b = 3$, τότε:
2. Να λυθεί η εξίσωση: $P(x) = 0$
3. Να λυθεί η ανίσωση: $P(x) < 0$
4. Αν $P(\ln k) < 0$, να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού k .

Άσκηση: 3.67 (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = \sqrt{x} \text{ με } x \geq 0, \quad f(x) = \sqrt{x-1} \text{ με } x \geq 1 \text{ και } g(x) = \frac{x+1}{3} \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ .



- α'. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 - β'. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .
3. Με την βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g .
 4. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$

■

Άσκηση: 3.68 (★★)

1. α'. Να λύσετε την εξίσωση: $x(e^x - 1) = 0$
β'. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$.
2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$$

- α'. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β'. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.
- γ'. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός:

« η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της ».

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

■

Άσκηση: 3.69 (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log(\sqrt{10^x - 2})$$

1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.
2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \log \left(\sqrt{\frac{10^x}{3}} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$, με $x \in (\log 2, +\infty)$.

β'. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g .

■

Άσκηση: 3.70 (★★)

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

β'. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να αποδείξετε ότι: $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β'. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

■

Άσκηση: 3.71 (★★) Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct}$$

όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1.64) \simeq 0.5$ και $\ln 10 \simeq 2.3$).

1. Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.
2. Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$
3. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

■

Άσκηση: 3.72 (★★) Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση:

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right), \quad (I)$$

όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους

(το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3.26 \text{ έτη φωτός} = 30.9 \cdot 10^{12} \text{ km}$.

1. Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;
2. Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1.157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;
3. Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d .
4. Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0.46 και απόλυτο μέγεθος -5.14 . Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \approx 131$.

■

Άσκηση: 3.73 (★★) Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	0 ντεσιμπέλ
Θρόισμα φύλλων	10 ντεσιμπέλ
Συνήθης ψίθυρος	20 ντεσιμπέλ
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 ντεσιμπέλ
Συνήθης ομιλία	65 ντεσιμπέλ
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 ντεσιμπέλ
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 ντεσιμπέλ
Όριο πόνου	120 ντεσιμπέλ
Αεριωθούμενο	120 ντεσιμπέλ

1. Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.
2. Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι $1 W/m^2$ να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.
3. Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0.3$).

■

Άσκηση: 3.74 (★★) Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

1. Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας.
2. Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από την συνάρτηση:

$$V = V_0 \cdot a^t$$

όπου V_0 και a σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και a .

3. Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από την σχέση:

$$V(t) = 10 \cdot (0.85)^t$$

να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0.5) \simeq -0.3$ και $\log(0.85) \simeq -0.07$).

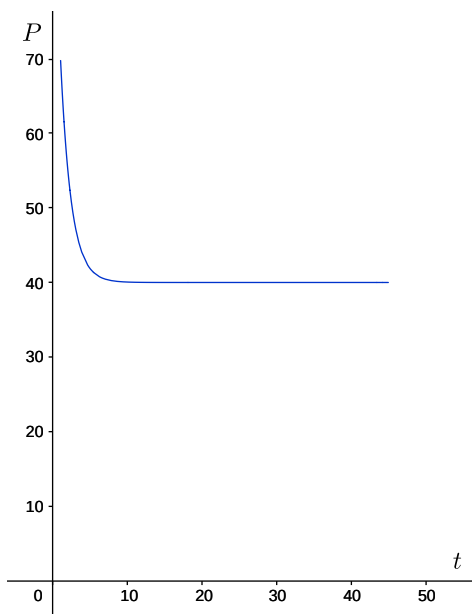
Άσκηση: 3.75 (★★) Είναι γνωστό ότι όταν κάποιος μελετάει για να συμμετάσχει σε κάποιες εξετάσεις, με την πάροδο του χρόνου δεν συγκρατεί στη μνήμη του το σύνολο όσων μελέτησε. Ένα μοντέλο που δείχνει το ποσοστό $P(t)$ της γνώσης που παραμένει στην μνήμη του t εβδομάδες μετά το τέλος της μελέτης, είναι το μοντέλο Ebbinghaus και περιγράφεται από τον τύπο:

$$P(t) = Q + (100 - Q)e^{-ct}, \quad t \in [0, 40]$$

όπου Q είναι το ποσοστό της γνώσης που θυμάται πάντα και c είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το μάθημα. Αν $Q = 40$ και $c = 0.7$, τότε:

1. Τι δείχνει το $P(0)$ στα πλαίσια του προβλήματος;
2. Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει παραμείνει στην μνήμη του το 50% της γνώσης που απέκτησε;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Με βάση το σχήμα:



3. Να εκτιμήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση, αν μετά από τρεις εβδομάδες θα θυμάται πάνω ή κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε. Η εκτίμησή σας συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος;
4. Πως αιτιολογείται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης, για μεγάλες τιμές του t , φαίνεται να προσεγγίζει πάρα πολύ την ευθεία $y = 40$; Γιατί δεν μπορεί να «κατέβει» κάτω από την ευθεία αυτή;

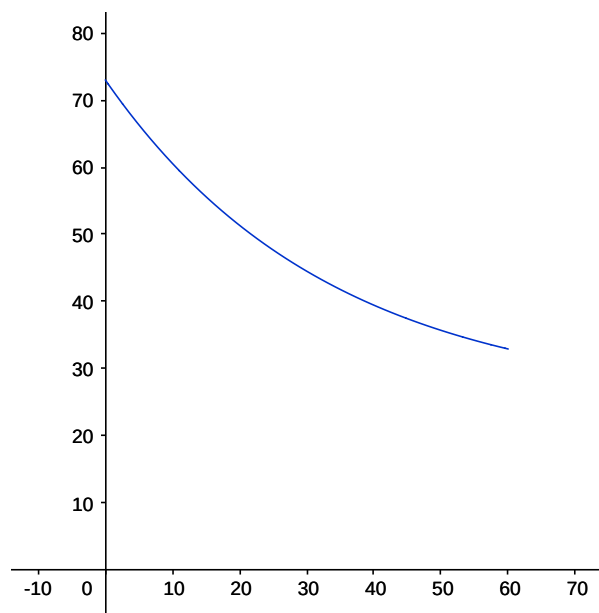
(Θεωρήστε: $\ln 6 = 1.79$)

Άσκηση: 3.76 (★★) Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_a = 25^\circ\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^\circ\text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση:

$$T(t) = T_a + ce^{-kt}$$

όπου όπου c, k κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $c = 48$
2. Να βρείτε την σταθερά k . (Θεωρήστε $\ln 0.75 = -0.3$).
3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1.2} = 0.3$).

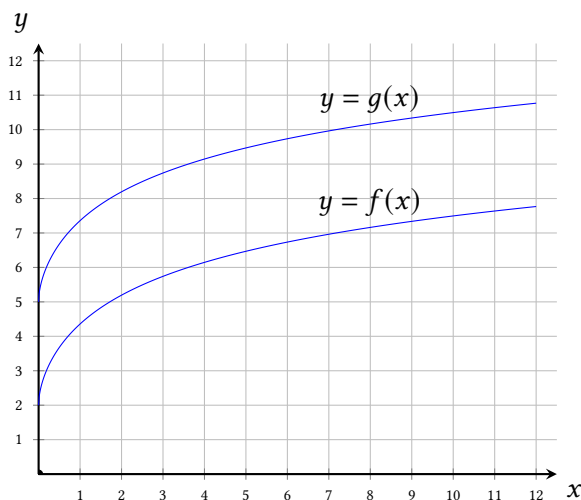
4. Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση την γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

Άσκηση: 3.77 Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μία στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Στον οριζόντιο άξονα καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο:

$$f(x) = a\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + b, \quad x \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4)$

ενώ για την γραφική παράσταση της g , γνωρίζουμε ότι προκύπτει από την γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά τρεις μονάδες προς τα πάνω.



1. Να αποδείξετε ότι $a = 2$ και $b = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .
2. Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στην συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.
3. Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^{ου} μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε: υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.

■

Άσκηση: 3.78 (★★) Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μίας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες X, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λπ.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$$

όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

1. Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.
2. Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1.4m^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $\ln 2 = 0.7$).
3. Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος $10m$ η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξετε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει:

$$I = I_0 \cdot 2^{-h/10}$$

■

Άσκηση: 3.79 (★★) Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτήν. Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$$

όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο:

$$t' = -\frac{\ln 2}{c}$$

2. Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας-14, έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια. Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα-14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5730} \cdot t}$$

3. Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακα-14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

■

Άσκηση: 3.80 (★★) Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ , σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t , σε λεπτά, σύμφωνα με την συνάρτηση:

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T) e^{kt}$$

όπου k μία σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους 100°C και στην συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία 30°C . Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι 80°C .

1. Να αποδείξετε ότι $k = -0.0672$
2. Να αποδείξετε ότι:

$$\theta(t) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$$

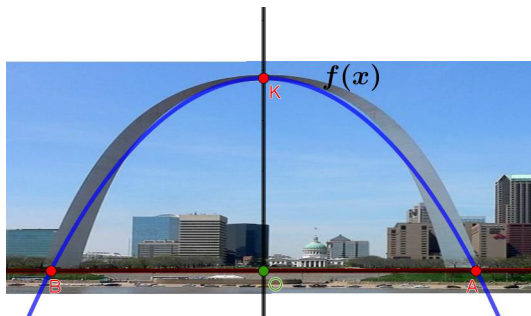
3. Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, την θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

(Δίνεται ότι: $\ln\left(\frac{5}{7}\right) = -0.336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} \approx 0.034$)

■

Άσκηση: 3.81 (★★) Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -192 \left(e^{x/100} + e^{-x/100} \right) + 576$$



με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μίας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

1. Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος OK της αψίδας είναι $192m$.
2. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox . Δίνεται ότι: $\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.96$
3. Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία A και B έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος AB της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της OK .

■