

Φυλλάδιο Άλγεβρας

Για την Α Λυκείου

Βλαχάκης Γιάννης

Περιεχόμενα

I	ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	5
1	ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	7
1.1	ΣΥΝΟΛΑ	7
1.2	ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ	9
1.3	ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ	11
1.4	ΠΡΑΞΕΙΣ	14
1.5	ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΑΚΕΡΑΙΟ	20
1.6	ΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ	23
1.7	ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ	28
1.8	ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ	37
1.9	ΡΙΖΕΣ	44
II	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ	51
2	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	53
2.1	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ	53
2.2	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ	56
2.3	Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^n = a$	59
2.4	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ	61
3	ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ	77
3.1	Η ΑΝΙΣΩΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ	77
3.2	Η ΑΝΙΣΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ	81
3.3	Η ΑΝΙΣΩΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ	87
III	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	99
4	ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ	101
4.1	Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ	101
4.2	Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ	103
4.3	Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ	112
5	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	119
5.1	Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	119
5.2	ΤΟ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ	128
5.3	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	132
5.4	Η ΕΥΘΕΙΑ	153

Μέρος I

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Κεφάλαιο 1

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1.1 ΣΥΝΟΛΑ

Στην πρώτη σου επαφή με την Άλγεβρα, θα συναντήσεις την έννοια του συνόλου. Μπορείς να φανταστείς ότι το σύνολο είναι μία συλλογή από αντικείμενα. Για παράδειγμα, σύνολο θα μπορούσε να είναι εκείνο που αποτελείται από τους μαθητές του τμήματός σου ή τους μαθητές του σχολείου σου ή εκείνο που περιέχει τα αγαπημένα σου τραγούδια. Το σύνολο στα μαθηματικά είναι μία γενική και ευρύτατη έννοια. Σε αντίθεση όμως με τα προηγούμενα παραδείγματα, τα σύνολα που ενδιαφέρουν την Άλγεβρα, είναι εκείνα που περιέχουν αριθμούς και όπως θα διαπιστώσεις παρακάτω υπάρχουν αρκετά διαφορετικά είδη αριθμών. Θα μιλήσουμε για αυτούς τους αριθμούς στην συνέχεια. Προτού όμως το κάνουμε, ας δούμε κάποιες βασικές έννοιες που συνδέονται με τα σύνολα και θα διευκολύνουν την συζήτησή μας παρακάτω.

Αρχικά, όποτε μιλάμε για ένα σύνολο, ακόμα και στην περίπτωση που δεν το αναφέρουμε, θεωρούμε ότι τα στοιχεία του ανήκουν σε ένα ευρύτερο σύνολο, ένα σύνολο που περιέχει "τα πάντα", όπως λέμε το **βασικό σύνολο**. Όπως για παράδειγμα ο πλανήτης μας είναι μέρος του ηλιακού συστήματος και αυτό με την σειρά του είναι μέρος του σύμπαντος, έτσι και εδώ αυτό το σύνολο είναι το δικό μας *σύμπαν* και συνήθως το συμβολίζουμε με το γράμμα Ω . Εδώ τα πράγματα δεν είναι πολύ αυστηρά και ο καθένας μπορεί να εννοεί το Ω ανάλογα με την κατάσταση που θέλει να περιγράψει. Για παράδειγμα αν μιλάς για μαθητές, μπορεί το *σύμπαν* αυτό να είναι το σύνολο των μαθητών του σχολείου σου ή θα μπορούσε να είναι το σύνολο των μαθητών όλων των σχολείων της περιοχής σου. Στην περίπτωση των αριθμών, αυτό το σύνολο μπορεί επίσης να διαφέρει, ανάλογα με το πρόβλημα με το οποίο ασχολούμαστε. Δεν είναι κάτι που πρέπει να μας φοβίζει ή να μας απασχολεί ιδιαίτερα. Απλά βρίσκεται εκεί, στο υπόβαθρο και θα είναι απόλυτα κατανοητό ποιο είναι.

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Ας μιλήσουμε για το σύνολο που περιέχει τους αριθμούς:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Θα ονομάσουμε αυτό το σύνολο $\mathbb{A}$. Συνήθως χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για να συμβολίσουμε σύνολα. Πως μπορούμε να περιγράψουμε ένα σύνολο σαν και αυτό; Υπάρχουν αρκετοί τρόποι:

Ένας τρόπος είναι όπως λέμε με *αναγραφή των στοιχείων του*. Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Ένας δεύτερος τρόπος είναι όπως λέμε με *περιγραφή των στοιχείων του*. Δηλαδή μπορούμε να

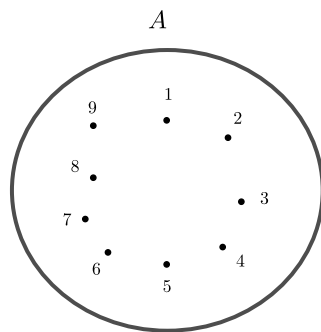
γράφουμε:

$$\mathbb{A} = \{\text{οι φυσικοί αριθμοί από το 1 έως και το 9}\}$$

ή

$$\mathbb{A} = \{\text{οι φυσικοί αριθμοί } x \text{ για τους οποίους ισχύει } 1 \leq x < 10\}$$

Ο τρίτος τρόπος είναι να δώσουμε μία εικόνα για το σύνολο αυτό, σαν την παρακάτω:



Πολλές φορές θα χρειαστεί να πούμε ότι ένας αριθμός x ανήκει σε ένα σύνολο $\mathbb{A}$. Για να το πούμε αυτό χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\in$ που σημαίνει *ανήκει* και γράφουμε:

$$x \in \mathbb{A}$$

Για να πούμε ότι ο x δεν ανήκει στο σύνολο A γράφουμε:

$$x \notin \mathbb{A}$$

Για παράδειγμα, αν το $\mathbb{A}$ είναι το σύνολο που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, τότε:

$$4 \in \mathbb{A} \quad \text{ενώ} \quad 10 \notin \mathbb{A}$$

Θα λέμε ότι δύο σύνολα $\mathbb{A}$ και $\mathbb{B}$ είναι **ίσα** και θα γράφουμε $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ όταν τα σύνολα $\mathbb{A}$ και $\mathbb{B}$ περιέχουν τα ίδια στοιχεία. Για παράδειγμα τα σύνολα:

$$\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{και} \quad \mathbb{B} = \{\text{οι φυσικοί αριθμοί από το 1 έως και το 9}\}$$

έχουν τα ίδια στοιχεία και είναι ίσα.

Θα λέμε ότι το σύνολο $\mathbb{B}$ είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου $\mathbb{A}$ και θα γράφουμε $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, όταν τα στοιχεία του $\mathbb{B}$ είναι και στοιχεία του $\mathbb{A}$. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τα σύνολα:

$$\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{και} \quad \mathbb{B} = \{3, 4, 6, 7\}$$

τότε το σύνολο $\mathbb{B}$ είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{A}$.

1.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ

Στην ενότητα αυτή θα δούμε τις βασικές πράξεις που θα κάνουμε με τα σύνολα.

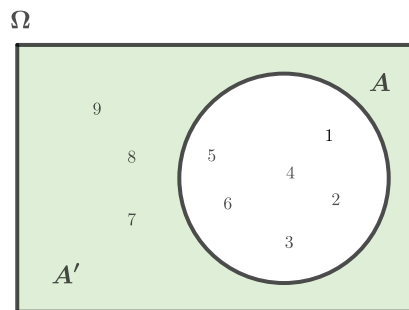
Θα χρησιμοποιήσουμε σαν παράδειγμα τα σύνολα:

$$\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{και} \quad \mathbb{B} = \{5, 6, 7, 8\}$$

και σαν βασικό σύνολο το σύνολο:

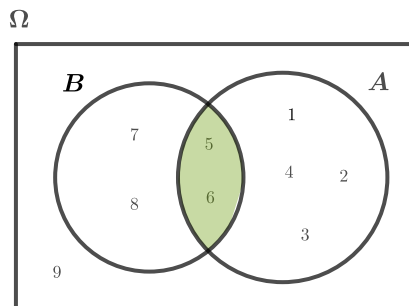
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

- Το **συμπληρωματικό** ή **συμπλήρωμα** ενός συνόλου $\mathbb{A}$ συμβολίζεται $\mathbb{A}'$ και είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο $\mathbb{A}$. Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται το συμπληρωματικό του συνόλου $\mathbb{A}$.



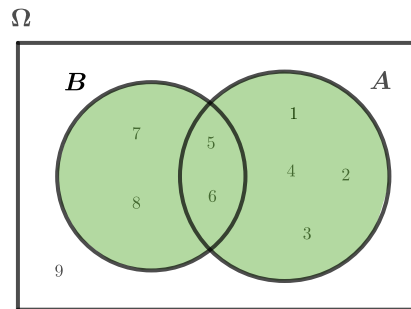
Σχήμα 1.1: Το συμπληρωματικό του συνόλου $\mathbb{A}$ είναι το σύνολο $\mathbb{A}' = \{7, 8, 9\}$

- Η **τομή** δύο συνόλων $\mathbb{A}$ και $\mathbb{B}$ συμβολίζεται $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ και είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα κοινά στοιχεία των συνόλων $\mathbb{A}$ και $\mathbb{B}$. Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η τομή των συνόλων $\mathbb{A}$ και $\mathbb{B}$.



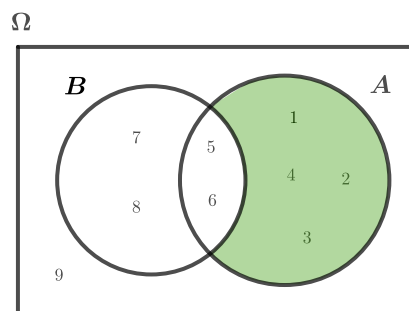
Σχήμα 1.2: Η τομή των συνόλων $\mathbb{A}$ και $\mathbb{B}$ είναι το σύνολο $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{5, 6\}$

- Η **ένωση** δύο συνόλων A και B συμβολίζεται $A \cup B$ και είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία των συνόλων A και B , κοινά και μη κοινά. Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η ένωση των συνόλων A και B .



Σχήμα 1.3: Η ένωση των συνόλων A και B είναι το σύνολο $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- Η **διαφορά** του συνόλου B από το σύνολο A συμβολίζεται $A - B$ και είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν είναι στοιχεία του B . Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η διαφορά του συνόλου B από το σύνολο A .



Σχήμα 1.4: Η διαφορά του συνόλου B από το σύνολο A είναι το σύνολο $A - B = \{1, 2, 3, 4\}$

1.3 ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ήρθε λοιπόν η ώρα να μιλήσουμε για τα σύνολα των αριθμών που θα χρησιμοποιήσουμε στην Άλγεβρα.

Το πρώτο και πιο βασικό σύνολο αριθμών είναι εκείνο που αποτελείται από εκείνους τους αριθμούς που έχουμε όλοι χρησιμοποιήσει από την παιδική μας ηλικία. Είναι το σύνολο των **φυσικών αριθμών**, το οποίο συμβολίζουμε:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι.

Τους φυσικούς αριθμούς τους χωρίζουμε σε δύο κατηγορίες εκ των οποίων η πρώτη είναι εξαιρετικά σημαντική. Είναι οι **πρώτοι** αριθμοί και οι **σύνθετοι** αριθμοί.

Πρώτους λέμε εκείνους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από 1 και οι οποίοι διαιρούνται μόνο από τον εαυτό τους και από το 1. Όλοι οι υπόλοιποι φυσικοί λέγονται σύνθετοι, εκτός από το 1, το οποίο δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος. Οι πρώτοι αριθμοί είναι και αυτοί άπειροι σε πλήθος και παρακάτω παραθέτουμε τους πρώτους από αυτούς:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots$$

Ένα εντυπωσιακό αποτέλεσμα που σχετίζεται με τους πρώτους αριθμούς είναι ότι μπορείτε να γράψετε οποιονδήποτε σύνθετο σαν γινόμενο πρώτων με έναν μοναδικό τρόπο. Για παράδειγμα:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να φανταστούμε τους πρώτους σαν τα δομικά στοιχεία του συνόλου των φυσικών αριθμών. Κάθε άλλον μπορούμε να τον δημιουργήσουμε χρησιμοποιώντας μόνο αυτούς!

Το επόμενο σύνολο είναι το σύνολο των **ακέραιων αριθμών**. Είναι το σύνολο:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Όπως παρατηρούμε κάθε φυσικός αριθμός είναι και ακέραιος αριθμός. Για αυτό τον λόγο λέμε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεράιων. Τους ακεραίους αριθμούς τους χωρίζουμε επίσης σε δύο σημαντικές κατηγορίες. Είναι οι **άρτιοι** αριθμοί και οι **περιττοί** αριθμοί. Άρτιους ονομάζουμε εκείνους τους ακεραίους που είναι πολλαπλάσια του αριθμού 2. Περιττούς ονομάζουμε εκείνους που δεν είναι πολλαπλάσια του 2. Για παράδειγμα άρτιοι αριθμοί είναι οι:

$$-8, 0, 14, 100$$

ενώ περιττοί είναι οι αριθμοί:

$$-15, -3, 7, 39$$

Ένας ακεραίος αριθμός a είναι άρτιος αν μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$a = 2k, \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}$$

ενώ ένας ακεραίος αριθμός a είναι περιττός αν μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$a = 2k + 1, \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}$$

Στην συνέχεια έχουμε το σύνολο των **ρητών αριθμών**. Το συμβολίζουμε $\mathbb{Q}$. Ρητός είναι κάθε αριθμός που έχει την μορφή:

$$\frac{m}{n}$$

όπου οι αριθμοί m και n είναι ακέραιοι, ο n δεν είναι ίσος με 0 και επιπλέον οι m και n είναι **πρώτοι μεταξύ τους**, με άλλα λόγια δεν έχουν κοινούς διαιρέτες εκτός από τον αριθμό 1. Για παράδειγμα ρητοί είναι οι αριθμοί:

$$\frac{-1}{5}, \frac{37}{12}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Επίσης όλοι οι ακέραιοι αριθμοί είναι ρητοί. Για παράδειγμα τον ακέραιο 3 μπορούμε να τον γράψουμε:

$$3 = \frac{3}{1}$$

επομένως ο αριθμός 3 μπορούμε να πούμε ότι είναι και ρητός.

Σε προηγούμενα χρόνια είχατε συναντήσει τους λεγόμενους **δεκαδικούς αριθμούς**. Οι δεκαδικοί αριθμοί είναι ρητοί υπό την προϋπόθεση ότι το δεκαδικό τους μέρος τερματίζεται ή στο δεκαδικό τους μέρος, από ένα σημείο και μετά, εμφανίζεται ένα κομμάτι που επαναλαμβάνεται διαρκώς το ίδιο. Για παράδειγμα, δοκιμάστε στην αριθμομηχανή σας κάνοντας την διαίρεση του αριθμητή προς τον παρονομαστή:

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{13}{3} = 4,33333 \dots = 4,\overline{3}$$

$$\frac{7}{6} = 1,16666 \dots = 1,\overline{16}$$

όπου η γραμμούλα πάνω από τον αριθμό δηλώνει ότι το κομμάτι που βρίσκεται από κάτω της θα επαναλαμβάνεται συνέχεια χωρίς τέλος. Όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι ρητοί.

Υπάρχουν όμως και αριθμοί που το δεκαδικό τους μέρος έχει άπειρα ψηφία στα οποία δεν υπάρχει περιοδικότητα (δηλαδή δεν υπάρχει από ένα σημείο και μετά ένα κομμάτι που επαναλαμβάνεται διαρκώς το ίδιο). Για παράδειγμα αριθμοί όπως:

$$0,587935426112 \dots \quad \text{ή} \quad 1,694126986354 \dots$$

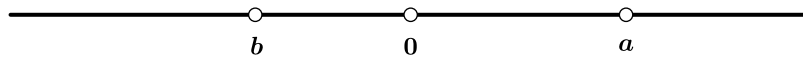
Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **άρρητοι**. Ο πιο γνωστός άρρητος αριθμός είναι ο αριθμός π . Είναι ο λόγος της περιφέρειας ενός κύκλου προς την διάμετρό του και είναι:

$$\pi = 3,1415926535 \dots$$

Το σύνολο που περιέχει τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς λέγεται σύνολο των **πραγματικών αριθμών** και το συμβολίζουμε $\mathbb{R}$. Πρακτικά όλοι οι αριθμοί που έχεις γνωρίσει ως τώρα είναι πραγματικοί αριθμοί. Το σύνολο αυτό θα είναι η βάση πάνω στην οποία θα αναπτυχθεί η Άλγεβρα. Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε σε πραγματικούς αριθμούς, εκτός αν δηλώνουμε αλλιώς. Ισχύει ότι:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε πολλές φορές σχήματα για να κατανοήσουμε καλύτερα τις έννοιες και τις καταστάσεις που συναντούμε. Έτσι και για το σύνολο των πραγματικών αριθμών χρησιμοποιούμε την **ευθεία των πραγματικών αριθμών** ή όπως αλλιώς λέμε τον **άξονα των πραγματικών αριθμών** για να παραστήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς. Όπως δηλώνει και η φράση, χρησιμοποιούμε μία ευθεία στην οποία σε κάθε σημείο της αντιστοιχίζουμε έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό. Με αυτό τον τρόπο η ευθεία γεμίζει από πραγματικούς αριθμούς. Στο τέλος η ευθεία είναι απόλυτα γεμάτη από πραγματικούς αριθμούς, ελεύθερος χώρος δεν υπάρχει. Όσο πιο δεξιά είναι ένας αριθμός πάνω στην ευθεία τόσο πιο μεγάλος θεωρούμε ότι είναι. Οι αριθμοί που βρίσκονται δεξιότερα του αριθμού 0 είναι οι **θετικοί πραγματικοί αριθμοί**, ενώ οι αριθμοί που βρίσκονται αριστερότερα του αριθμού 0 είναι οι **αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί**. Στο σχήμα που ακολουθεί δείχνουμε αυτή την γεωμετρική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών.



Σχήμα 1.5: Ο άξονας των πραγματικών αριθμών. Ο αριθμός a είναι δεξιότερα του 0 και είναι θετικός, ενώ ο αριθμός b είναι αριστερότερα του 0 και είναι αρνητικός.

1.4 ΠΡΑΞΕΙΣ

Δύο πραγματικοί αριθμοί a και b είναι ίσοι και τότε γράφουμε $a = b$ ή είναι διαφορετικοί και τότε γράφουμε $a \neq b$.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε δύο πράξεις, την πρόσθεση (+) και τον πολλαπλασιασμό ($\cdot$) ή όπως λέμε αλλιώς εφοδιάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Στους πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται οι ιδιότητες των δύο πράξεων.

Ιδιότητες της πρόσθεσης

- | | | |
|----|---|---------------------------------|
| 1. | $a + b = b + a$ | Αντιμεταθετική ιδιότητα |
| 2. | $(a + b) + c = a + (b + c)$ | Προσεταιριστική ιδιότητα |
| 3. | $a + 0 = 0 + a = a$ | Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης |
| 4. | Για κάθε αριθμό a υπάρχει ένας αριθμός που συμβολίζεται $-a$ και ονομάζεται αντίθετος του a ώστε: | Ύπαρξη αντίθετου |

$$a + (-a) = 0$$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

- | | | |
|----|---|---------------------------------------|
| 1. | $a \cdot b = b \cdot a$ | Αντιμεταθετική ιδιότητα |
| 2. | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | Προσεταιριστική ιδιότητα |
| 3. | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ | Επιμεριστική ιδιότητα |
| 4. | $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ | Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού |
| 5. | Για κάθε αριθμό $a \neq 0$ υπάρχει ένας αριθμός που συμβολίζεται $\frac{1}{a}$ και ονομάζεται αντίστροφος του a ώστε: | Ύπαρξη αντιστρόφου |

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Όταν λέμε *αφαίρεση* ή *διαίρεση* στο σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν εννοούμε δύο ξεχωριστές πράξεις! Η πράξεις αυτές στην πραγματικότητα είναι η πρόσθεση του αντίθετου για την περίπτωση της αφαίρεσης και ο πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο στην περίπτωση της διαίρεσης και ορίζονται ως ακολούθως:

$$a - b = a + (-b)$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \text{ αν } b \neq 0$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε και ορισμένες βασικές ιδιότητες που έχουν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Επιπλέον ιδιότητες των πράξεων	
1.	$(a = b \text{ και } c = d) \Rightarrow a + c = b + d$
2.	$(a = b \text{ και } c = d) \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$
3.	$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
4.	Αν $c \neq 0$, τότε: $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$
5.	$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0$
6.	$a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } b \neq 0$

Σε όλη την διάρκεια της ενασχόλησής σας με την Άλγεβρα, θα χειρίζεστε κλάσματα και κλασματικές παραστάσεις. Καταρχήν όταν γράφουμε ένα κλάσμα:

$$\frac{a}{b}$$

εννοούμε πάντοτε ότι $b \neq 0$. Δεν επιτρέπεται ποτέ ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι μηδέν! Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι βασικές αρχές για τον χειρισμό των κλασμάτων.

Λογισμός με κλάσματα	
1.	$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2.	$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$
3.	$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$
4.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
5.	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
6.	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Μία ισότητα της μορφής:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ονομάζεται *αναλογία*. Οι αριθμοί a, d λέγονται *άκροι όροι της αναλογίας*, ενώ οι αριθμοί b, c λέγονται *μέσοι όροι της αναλογίας*. Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των αναλογιών.

Ιδιότητες των αναλογιών	
1.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$
2.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
3.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
4.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
5.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $a = 5$ και $b + c = 8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = ab + ac$$

2. Αν οι αριθμοί:

$$a = x - 4y + 5z \quad \text{και} \quad b = 2y - x - 3z$$

είναι αντίθετοι, να αποδείξετε ότι $z = y$.

3. Αν οι αριθμοί a, b είναι αντίθετοι και οι αριθμοί c, d είναι αντίστροφοι, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 1 - 2(a - 1) - c(3d - b) + b(-c - 2)$$

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z, ω ισχύουν $x + z = -2$ και $\omega - y = 3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$B = 2(x + y) + 3(y + z) - (x - z + 2y) + 3(x - \omega)$$

5. Αν $3a + 2b + c = 106$ και $2a + 3b + 4c = 204$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = a + b + c$$

6. Αν $c + d = 4$ και $ac + ad + bc + bd = 68$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = a + b + c + d$$

7. (★) Αν οι αριθμοί $2a - 1$ και $b - 1$ είναι αντίστροφοι, με $a \neq 1$ και $b \neq 1$, να δείξετε ότι:

α'. $2a + b = 2ab$

β'. Οι αριθμοί $x = a - b$ και $y = a(1 - 2b) + 2b$ είναι αντίθετοι.

8. Για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c ισχύει: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$ab + bc + ca = 0$$

9. Αν $x + y + z = 12$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{z}{3}\right) + \left(\frac{y}{4} - \frac{z}{2} - \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4}\right)$$

10. Αν $x + y \neq 0$, $y + z \neq 0$, $z + x \neq 0$ και $x + y + z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{1 + \frac{x}{y+z}} + \frac{1}{1 + \frac{y}{z+x}} + \frac{1}{1 + \frac{z}{x+y}}$$

11. (★) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b, c, d με $b \neq 0$ και $d \neq c$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{a+b}{b} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{c}{d-c} = \frac{1}{4}$$

α'. Να αποδείξετε ότι: $a = 3b$ και $d = 5c$

β'. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{ac + bc}{bd - bc}$

12. Αν ισχύει $\frac{2a + 3b}{3a - 6b} = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

13. Αν $b \neq 0$, $c + d \neq 0$ και $\frac{a}{b} = 3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$C = \frac{ac + ad - bc - bd}{ac + ad + bc + bd}$$

14. Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς a, b, c ισχύουν: $a + \frac{1}{b} = 1$ και $b + \frac{1}{c} = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$c + \frac{1}{a} = 1$$

15. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c για τους οποίους ισχύει:

$$a + b + c = 24 \quad \text{και} \quad \frac{a}{5} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$$

16. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c για τους οποίους ισχύει:

$$3a + 2b + c = 32 \quad \text{και} \quad \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$$

17. Αν $b \neq 0$, $d \neq 0$, $f \neq 0$ και $2b + 3d - 5f \neq 0$ και ισχύει: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a}{b} = \frac{2a + 3c - 5e}{2b + 3d - 5f}$$

18. Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, x, y, z με $x + y \neq 0$, $y + z \neq 0$

και $z + x \neq 0$, ισχύει: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{xyz(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(x+y)(y+z)(z+x)}$$

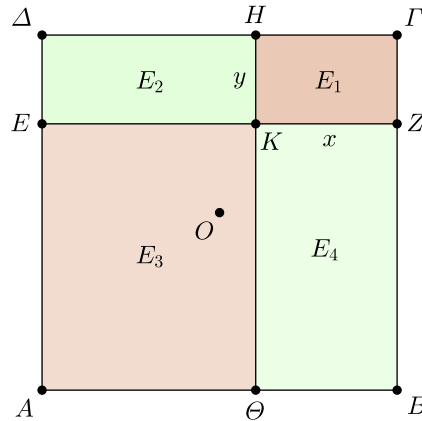
19. Ο Νίκος και ο Δημήτρης τρέχουν με διαφορετικές αλλά σταθερές ταχύτητες. Έτρεξαν δύο αγώνες σε μία διαδρομή που είχε μήκος $100m$ από την αρχή μέχρι την γραμμή του τερματισμού. Στον πρώτο αγώνα, μόλις ο Νίκος διέσχισε την γραμμή του τερματισμού, ο Δημήτρης βρισκόταν $5m$ πιο πίσω. Στον δεύτερο αγώνα, ο Νίκος ξεκίνησε $5m$ πιο πίσω από την αρχή και έτρεξαν και οι δύο με την ίδια ακριβώς ταχύτητα όπως και στον πρώτο αγώνα. Ποιο από τα παρακάτω ήταν το αποτέλεσμα του δεύτερου αγώνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

A) Και οι δύο τερμάτισαν την ίδια χρονική στιγμή.

B) Όταν ο Νίκος έφτασε στην γραμμή του τερματισμού, ο Δημήτρης ήταν $0.25m$ πιο πίσω.

- Γ) Όταν ο Νίκος έφτασε στην γραμμή του τερματισμού, ο Δημήτρης ήταν $0.26m$ πιο πίσω.
 Δ) Όταν ο Δημήτρης έφτασε στην γραμμή του τερματισμού, ο Νίκος ήταν $0.25m$ πιο πίσω.
 Ε) Όταν ο Δημήτρης έφτασε στην γραμμή του τερματισμού, ο Νίκος ήταν $0.26m$ πιο πίσω.

20. (★★) Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $ABΓΔ$ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες EZ και $HΘ$ είναι παράλληλες στις πλευρές του.



Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:

- α'. Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με την βοήθεια των x, y .
- β'. Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.
- γ'. Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:
 - i. $xy + 9 = 3(x + y)$
 - ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και $HΘ$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.

1.5 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΑΚΕΡΑΙΟ

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε δυνάμεις όπου ο εκθέτης είναι ακέραιος αριθμός.

Ορισμός 1: Έστω $a \in \mathbb{R}$ και n φυσικός αριθμός. Τότε ορίζουμε:

$$a^n = \begin{cases} a & , \text{ αν } n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ φορές}} & , \text{ αν } n > 1 \end{cases}$$

Ορισμός 2: Έστω $a \neq 0$ και n φυσικός αριθμός. Τότε ορίζουμε:

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων. Στην πορεία μας στην Άλγεβρα θα ορίσουμε και δυνάμεις όπου ο εκθέτης δεν είναι ακέραιος αριθμός, αλλά είναι ρητός ή άρρητος αριθμός. Οι ιδιότητες των δυνάμεων όμως ισχύουν σε όλες τις περιπτώσεις, ανεξάρτητα τι αριθμός είναι στον εκθέτη.

Ιδιότητες των δυνάμεων	
1.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων για να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$\text{i) } A = \frac{3^0 \cdot 2^6 \cdot 4^3 \cdot 8^{-1}}{16^2}$$

$$\text{ii) } B = \frac{3^5 \cdot 5^3 \cdot 9^4 \cdot 25}{625 \cdot 27^4}$$

$$\text{iii) } C = \frac{21^3 \cdot 49 \cdot 81}{63^3}$$

$$\text{iv) } D = \frac{6^9 \cdot 10^6 \cdot 8^7}{15^6 \cdot 30^2 \cdot 32^6}$$

2. Να αναλύσετε τους αριθμούς σε κάθε κλάσμα σε γινόμενα πρώτων και στην συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων για να υπολογίσετε τις τιμές τους.

$$\text{i) } A = \frac{1575 \cdot 735 \cdot 343}{147 \cdot 2205 \cdot 105}$$

$$\text{ii) } B = \frac{3861 \cdot 1056 \cdot 936}{572 \cdot 4356 \cdot 1404}$$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων για τις τιμές των παραμέτρων που σας δίνονται:

$$\text{i) } A = \left[(x^2 y^{-4})^3 (y^{-2})^{-5} \right]^2 \div (x y^{-3})^4 \quad \text{για } xy = -1$$

$$\text{ii) } B = \left[\left(\frac{x^2}{y^3} \right)^{-5} \div \left(\frac{x^3}{y^4} \right)^{-3} \right] \div (x^3 y^{-1}) \quad \text{για } \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{iii) } C = \left(\frac{x^2 y^{-1}}{z^2} \right)^{-2} \left(\frac{x^3 y^{-2}}{z^{-2}} \right)^{-1} (z x^3)^2 \quad \text{για } x = \frac{1}{2} \text{ και } yz = 2$$

$$\text{iv) } D = \left[\frac{(x^3 y^{-2})^2}{(x^{-4} y^2)^{-1}} \right]^{-2} \quad \text{για } x = 101 \text{ και } y = 1010$$

$$\text{v) } E = \left[(x^3 y^2)^{-2} \cdot (x^3 y)^4 \right] \left(\frac{y^3}{x} \right)^{-3} \quad \text{για } x = 2y$$

4. Να υπολογίσετε, για $x = 42$, την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{-1}{x^2 - x} + \frac{x}{x - 1}$$

5. (★) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$

α'. Να αποδείξετε ότι $y = 2x$

β'. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$

6. Αν ο n είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + (-1)^{n+3}$$

7. (★) Έστω a, b, c πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$a + b + c = 0 \quad \text{και} \quad abc \neq 0$$

α'. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad b + c = -a \qquad \text{ii)} \quad \frac{a^2}{b + c} = -a$$

β'. Με παρόμοιο τρόπο, να απλοποιήσετε τα κλάσματα: $\frac{b^2}{c + a}$ και $\frac{c^2}{a + b}$ και να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} = 0$$

8. Είναι ο αριθμός $a = 5^{23} - 5^{21}$ πολλαπλάσιο του 8;

9. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n , ο αριθμός $a = 3^{n+3} - 3^{n+2} - 3^n$ είναι πολλαπλάσιο του 17.

10. Δίνεται ο αριθμός: $a = (2002)^{2002}$. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του a ;

11. Τρεις φυσικοί αριθμοί m, n, k με $n < k$ ικανοποιούν την σχέση:

$$m^2 + mk + mn + nk = 15$$

Ποιες είναι οι δυνατές τιμές των αριθμών αυτών;

1.6 ΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Στην ενότητα αυτή διαπραγματευόμαστε ένα πάρα πολύ σημαντικό θέμα, τις ταυτότητες της Άλγεβρας. Η γνώση των ταυτοτήτων αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση ώστε κάποιος να μπορέσει να προχωρήσει στην Άλγεβρα. Με την βοήθεια των ταυτοτήτων θα μπορέσουμε να χειριστούμε περίπλοκες αλγεβρικές παραστάσεις, να παραγοντοποιήσουμε και να απλοποιήσουμε αλγεβρικές παραστάσεις, ικανότητες που είναι εντελώς απαραίτητες για να προχωρήσουμε στα Μαθηματικά. Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε καταρχήν τις βασικές ταυτότητες.

Οι ταυτότητες της Άλγεβρας	
1.	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2.	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3.	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4.	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
5.	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
6.	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
7.	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
8.	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνουμε την γενίκευση των ταυτοτήτων της διαφοράς και του αθροίσματος n-οστών δυνάμεων:

Γενίκευση ταυτοτήτων	
1.	$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$
2.	$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad , \quad n \text{ περιττός φυσικός}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(a - b)^2 - 2(a - b)(a + b) + (a + b)^2 = 4b^2$$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$$

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(1 + ab)^2 + (a - b)^2 = (1 + a^2)(1 + b^2)$$

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 + (cx)^2 + (cy)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2)$$

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$$

Ταυτότητα De Moivre

7. α'. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

Ταυτότητα Euler

- β'. Να αποδείξετε ότι αν για τρεις πραγματικούς αριθμούς a, b, c ισχύει $a + b + c = 0$, τότε:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

8. Αν $p = 3^{2000} + 3^{-2000}$ και $q = 3^{2000} - 3^{-2000}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $p^2 - q^2$.

9. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b)$$

10. Αν $a - b = 3$, να αποδείξετε ότι: $3a - b^2 - 3b + 2ab = a^2$

11. Αν $a + b = 1$, να αποδείξετε ότι: $a^3(b + 1) - b^3(a + 1) = a - b$

12. (★) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $a, b \neq 0$, ισχύει ότι: $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 4$, τότε να

αποδείξετε ότι:

α'. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$

β'. $a = b$

13. (★) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση:

$$(x-2y)^2 - 2(3-2xy) = 5y^2 - 1$$

α'. Να αποδείξετε ότι: $x^2 - y^2 = 5$

β'. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $P = (x+y)^3 \cdot (x-y)^3$

14. (★) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y) = 9xy$$

α'. Να αποδείξετε ότι:

i) $(2y-x)^2 = 0$

ii) $y = \frac{x}{2}$

β'. Να αποδείξετε ότι: $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$

15. (★) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε:

$$A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$$

α'. Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$

β'. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$$

είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού, τον οποίο να προσδιορίσετε.

16. α'. Να αποδείξετε ότι:

$$x^3 = \left(\frac{x(x+1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{x(x-1)}{2} \right)^2$$

β'. Να γράψετε τον αριθμό 19^3 σαν διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

17. α'. Να αποδείξετε ότι:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2$$

β'. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς x και y για τους οποίους να ισχύει:

$$x^2 - y^2 = 176$$

18. Αν $a+b+c=0$, να αποδείξετε ότι: $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

19. Για τρεις θετικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν:

$$x+y+z = xy+yz+zx \quad \text{και} \quad x^2+y^2+z^2 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

Με τι είναι ίσο το γινόμενο xyz ;

20. Αν $a + b + c = 0$ και $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = a^4 + b^4 + c^4$$

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

ii) $B = \frac{4x^3 - 4x^2y + xy^2}{xy^2 - 4x^3}$

iii) $C = \frac{7x^2 - 7xy}{5x^2y - 10xy^2 + 5y^3}$

iv) $D = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$

v) $E = \frac{ab + 2b + 3a + 6}{b^2 + 6b + 9} \cdot \frac{8 - 4a}{a^2 - 4}$

vi) $F = \frac{5y - 10y^2}{12y^2 + 6y^3} \cdot \frac{2y + y^2}{2y - 1}$

22. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων για τις τιμές των παραμέτρων που σας δίνονται:

i) $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{ax - ay} \cdot \frac{a^2x - a^2y}{a^2 + 2a}$ για $a = 2000$

ii) $B = \left[\left(1 + \frac{x}{y} \right) \left(1 + \frac{y}{x} \right) \right] \div \left(x - \frac{y^2}{x} \right)$ για $x = 502$ και $y = 500$

iii) $C = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} \div \left(\frac{x - 3}{x + 3} \right)^{-3}$ για $x = \frac{101}{33}$

23. (★) Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν:

$$a^2 = 2a + b \quad \text{και} \quad b^2 = 2b + a$$

α'. Να αποδείξετε ότι:

i) $a^2 - b^2 = a - b$

ii) $a + b = 1$

β'. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = a^2 + b^2$

24. Αν $a^2 + b^2 = 9$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $S = (a + b)^2 + (a - b)^2$

25. Αν $a + b = 1$ και $ab = -6$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $a^2 + b^2$

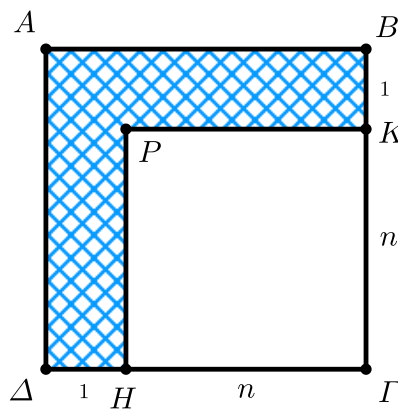
ii) $a^3 + b^3$

26. Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι ίση με 34 και το εμβαδόν του είναι ίσο με 60. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου του.

27. Αν $a + b - c = 2(a + c - b)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$$

28. Σε έναν αριθμό a προσθέτουμε το 2 και στην συνέχεια υψώνουμε το αποτέλεσμα στο τετράγωνο και βρίσκουμε τον αριθμό b . Στον ίδιο αριθμό a αφαιρούμε το 2 και στην συνέχεια υψώνουμε το αποτέλεσμα στο τετράγωνο και βρίσκουμε τον αριθμό c . Αν $b + c = 106$, ποιος είναι ο a ;
29. (★★) Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός a γράφεται στην μορφή $a = 2k + 1$, k ακέραιος.
- α'. Να γράψετε τους αριθμούς 3, 5, 7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.
- β'. i. Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.
- ii. Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.
- γ'. Στο σχήμα τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $\Gamma H P K$ είναι τετράγωνα με $\Gamma H = \Gamma K = n$ και $BK = \Delta H = 1$. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου n .



1.7 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών λέμε ότι είναι ένα *διατεταγμένο σύνολο*. Αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς a και b , ένα από τα τρία συμβαίνει: οι αριθμοί a και b είναι ίσοι ή ο αριθμός a είναι μεγαλύτερος από τον b ή ο αριθμός a είναι μικρότερος από τον b .

Ορισμός 1: Θα λέμε ότι ο αριθμός a είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό b και θα γράφουμε $a > b$ αν και μόνο αν η διαφορά $a - b$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

Ορισμός 2: Θα λέμε ότι ο αριθμός a είναι μικρότερος από τον αριθμό b και θα γράφουμε $a < b$ αν και μόνο αν η διαφορά $a - b$ είναι αρνητικός αριθμός. Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία:

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

Επίσης χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς: $a \geq b$ και $a \leq b$ για να δηλώσουμε ότι ο a είναι μεγαλύτερος ή ίσος του b ή ότι ο a είναι μικρότερος ή ίσος του b αντίστοιχα.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ιδιότητες της διάταξης.

Ιδιότητες της διάταξης

1. $(a > 0 \text{ και } b > 0) \Rightarrow a + b > 0$

$(a < 0 \text{ και } b < 0) \Rightarrow a + b < 0$

2. a, b ομόσημοι $\Leftrightarrow ab > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 0$

a, b ετερόσημοι $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 0$

3. Αν a, b ομόσημοι, τότε: $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

4. $a^2 \geq 0$ και γενικά $a^{2n} \geq 0$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $a = 0$

5. $(a > b \text{ και } b > c) \Rightarrow a > c$

6. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

7. Αν $c > 0$, τότε: $a > b \Leftrightarrow ac > bc$

Αν $c < 0$, τότε: $a > b \Leftrightarrow ac < bc$

8. $(a > b \text{ και } c > d) \Rightarrow a + c > b + d$

9. Αν $a, b, c, d > 0$ ισχύει: $(a > b \text{ και } c > d) \Rightarrow ac > bd$

10. Αν $a, b > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$

Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν έχει κενά ονομάζεται *διάστημα*. Παρακάτω παρουσιάζονται όλες οι δυνατές μορφές διαστημάτων.



Σχήμα 1.6: Το κλειστό διάστημα $[a, b]$. Ισχύει ότι: $x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$



Σχήμα 1.7: Το ανοικτό διάστημα (a, b) . Ισχύει ότι: $x \in (a, b) \Leftrightarrow a < x < b$



Σχήμα 1.8: Το διάστημα $(a, b]$. Ισχύει ότι: $x \in (a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$



Σχήμα 1.9: Το διάστημα $[a, b)$. Ισχύει ότι: $x \in [a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$



Σχήμα 1.10: Το διάστημα $[a, +\infty)$. Ισχύει ότι: $x \in [a, +\infty) \Leftrightarrow x \geq a$



Σχήμα 1.11: Το διάστημα $(a, +\infty)$. Ισχύει ότι: $x \in (a, +\infty) \Leftrightarrow x > a$



Σχήμα 1.12: Το διάστημα $(-\infty, a]$. Ισχύει ότι: $x \in (-\infty, a] \Leftrightarrow x \leq a$



Σχήμα 1.13: Το διάστημα $(-\infty, a)$. Ισχύει ότι: $x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow x < a$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a(a+3) \geq a-1$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(a^2+1)(b^2+1) \geq (ab+1)^2$$

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}$$

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0$$

8. Αν $a > 2$, να αποδείξετε ότι:

$$3(a-3) > a-5$$

9. Αν $a > -1$, να αποδείξετε ότι:

$$a^3 + 1 \geq a^2 + a$$

10. Αν $a \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$a^5 + a^3 \geq 2a^4$$

11. Αν $a+b \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

12. Αν $a, b > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$$

13. Αν $x > y$, να αποδείξετε ότι:

$$x + \frac{y}{2} > y + \frac{x}{2}$$

14. (★) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί a, b με $a > 0$ και $b > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α'. $a + \frac{4}{a} \geq 4$

β'. $\left(a + \frac{4}{a}\right)\left(b + \frac{4}{b}\right) \geq 16$

15. (★) Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < a < b$

α'. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3}{b} < \frac{3}{a}$$

β'. Να αποδείξετε ότι:

$$a^3 + \frac{3}{b} < b^3 + \frac{3}{a}$$

16. Αν $x > y > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$a = x^3 - y^3 \quad \text{και} \quad b = (x - y)^3$$

17. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a , να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$x = a^3 - 2 \quad \text{και} \quad y = a^2 - 2a$$

18. Αν $0 < a < 1$, τότε:

α'. Να αποδείξετε ότι: $a^3 < a$

β'. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, a^3, 1, a, \frac{1}{a}$$

19. (★) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2a^2 + b^2 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2ab, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

α'. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των a, b .

β'. Για ποιες τιμές των a, b ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

20. (★) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = a^2 + b^2 \quad \text{και} \quad B = 2ab, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

α'. Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$

β'. Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

γ'. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $A - B = 0$

21. (★) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2a^2 + b^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2a(3 - b), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

α'. Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 6a + 9)$

β'. Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των a, b .

γ'. Για ποιες τιμές των a, b ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22. (★) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = a^2 + 4a + 5 \quad \text{και} \quad B = (2b + 1)^2 - 1 \quad \text{με} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

α'. Να δείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει: $A = (a + 2)^2 + 1$

β'. i. Να δείξετε ότι: $A + B \geq 0$

ii. Για ποιες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

23. (★)

α'. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β'. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε να ισχύει:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

24. (★)

α'. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y , ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$$

β'. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$$

25. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

26. (★) Αν a και b πραγματικοί αριθμοί με: $2 \leq a \leq 4$ και $-4 \leq b \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $a + 2b$ ii) $a - b$

27. (★) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $x + y$ ii) $2x - 3y$ iii) $\frac{x}{y}$

28. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

i) $y - x$ ii) $x^2 + y^2$

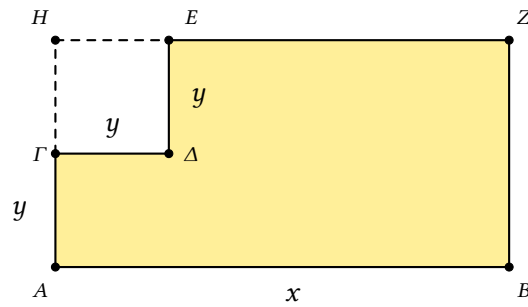
29. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $2 < x < 3$ και $1 < y < 4$, να αποδείξετε ότι:

i) $4 < x + 2y < 11$ ii) $-7 < 2x - 3y + 1 < 4$ iii) $1 < \frac{2x}{y} < 6$

30. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $2 \leq x \leq 3$ και $-3 \leq y \leq -2$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $x - 3y$ ii) $x^2 - 3xy$ iii) xy

31. (★) Από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma\Delta E\text{H}$ πλευράς y .



- α'. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZBA\Gamma\Delta$ που απέμεινε, δίνεται από την σχέση: $\Pi = 2x + 4y$
 β'. Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

32. Έστω ότι:

$$10 \leq x \leq 20, \quad 40 \leq y \leq 60 \quad \text{και} \quad w = \frac{x^2}{2y}$$

Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει ο αριθμός w .

33. Έστω ότι:

$$-2 \leq x \leq 5, \quad -3 \leq y \leq 7, \quad 4 \leq z \leq 8 \quad \text{και} \quad w = xy - z$$

Να βρείτε την μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο αριθμός w .

34. (★) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

- α'. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
 β'. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

35. (★★) Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40\text{cm}$. Αν $x\text{ cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

- α'. $0 < x < 20$
 β'. Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 20x - x^2$
 γ'. Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.
 δ'. Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm

36. (★★)

- α'. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i) $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$

ii) $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$

- β'. Να δείξετε ότι:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ'. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .
- ii. Με την βοήθεια του (β) ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

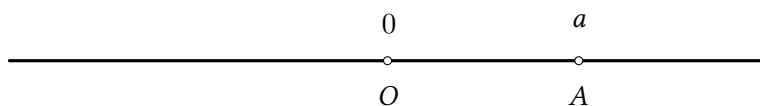
1.8 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι μία χρήσιμη έννοια που θα συναντούμε πολύ συχνά στην Άλγεβρα.

Ορισμός 1: Έστω $a \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε σαν απόλυτη τιμή του a :

$$|a| = \begin{cases} -a & , \text{ αν } a < 0 \\ a & , \text{ αν } a \geq 0 \end{cases}$$

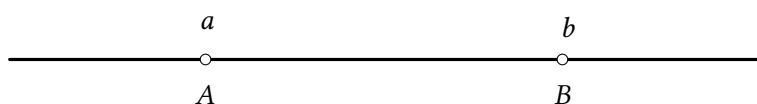
Η απόλυτη τιμή είναι μία γεωμετρική έννοια, αν ένας πραγματικός αριθμός a έχει εικόνα το σημείο A στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε το $|a|$ είναι ίσο με την απόσταση του σημείου A από το σημείο O που είναι η εικόνα του αριθμού 0.



Σχήμα 1.14: Η απόλυτη τιμή του αριθμού a είναι ίση με την απόσταση των σημείων O και A

Αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς a και b που οι εικόνες τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι τα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε η απόσταση των σημείων αυτών συμβολίζεται $d(a, b)$ και είναι ίση με $|a - b|$. Δηλαδή:

$$d(a, b) = |a - b|$$



Σχήμα 1.15: Η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με $|a - b|$

Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής.

Ιδιότητες της απόλυτης τιμής

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|a| = |-a|$
4. $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$
5. $|a|^2 = a^2$
6. $|ab| = |a||b|$
7. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
8. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν οι a και b είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = |3x - 6| + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

β'. Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

2. (★) Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α'. Να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β'. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$

3. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 1| - |x - 2|$$

α'. Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$

β'. Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

4. Αν $1 < x < 3$, να αποδείξετε ότι: $|x - 1| - |x - 3| = 2(x - 2)$

5. Αν $2 \leq x \leq 5$, να αποδείξετε ότι: $|2 - x| + |5 - x| - |x - 6| = x - 3$

6. Αν $1 < x < 2$, να αποδείξετε ότι: $|2x - 4| - |4x - 4| = 8 - 6x$

7. (★) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = |2x - 4| \quad \text{και} \quad B = |x - 3|, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Για κάθε $2 \leq x < 3$, να αποδείξετε ότι: $A + B = x - 1$

β'. Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

8. (★) Έστω a, b, c πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $a < 0 < b < c$

α'. Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = a(a - b)(c - b)b$ είναι θετικός.

β'. Να αποδείξετε ότι: $a + |a - b| + |c - b| - c = 0$

9. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 1| + |y - 3|$$

με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α'. $A = x - y + 2$

β'. $0 < A < 4$

10. (★) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b , για τους οποίους ισχύει:

$$2 \leq a \leq 3 \quad \text{και} \quad -2 \leq b \leq -1$$

α'. Να δείξετε ότι: $|a - 3| = 3 - a$ και $|b + 2| = b + 2$

β'. Να δείξετε ότι: $0 \leq a + b \leq 2$

γ'. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $|a + b| + |a - 3| - |b + 2|$ είναι ίση με 1.

11. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $-2 < x < 1$ και $-2 < y < 1$, να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = |x + 3y + 8| + |2x + y - 3| + x - 2y$$

είναι σταθερή.

12. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $2 < x < 3$ και $-1 < y < 0$, να γράψετε την παρακάτω παράσταση χωρίς απόλυτα:

$$S = |x + 2y| + |y - x + 2|$$

13. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η παράσταση:

$$A = |a^2 + 2a + 1| + |a^2 - 2a + 1| - 2|a^2 + 3|$$

είναι σταθερή.

14. Αν $0 < x < y$, να αποδείξετε ότι: $2|x^2 - y^2| - 3|x^2 - xy| - 3|y^2 - xy| = x^2 - y^2$

15. Αν $x \neq 0$, να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές της παράστασης: $A = \frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x}$

16. Αν $x \neq 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \left| \frac{x}{|x|} - 2 \right| + \left| \frac{x}{|x|} + 1 \right|$

17. Να δείξετε ότι:

$$|x| + |x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & , \text{ αν } x < 0 \\ 1 & , \text{ αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & , \text{ αν } x > 1 \end{cases}$$

18. Να δείξετε ότι:

$$|x + 3| - |2x - 4| = \begin{cases} x - 7 & , \text{ αν } x < -3 \\ 3x - 1 & , \text{ αν } -3 \leq x \leq 2 \\ -x + 7 & , \text{ αν } x > 2 \end{cases}$$

19. (★)

α'. Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1 , πάνω στον άξονα είναι:

$$A. K = |x + 1| + |x - 2| \quad B. K = |x - 1| + |x + 2| \quad \Gamma. K = (|x| + 1) + (|x| - 2)$$

Να γράψετε στο τετράδιό σας την σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β'. Αν είναι $K = |x + 1| + |x - 2|$, τότε:

i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$

ii. Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$.

20. (★★) Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α'. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

i) $|x + 2|$

ii) $|x - 7|$

β'. Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x + 2| + |x - 7|$$

γ'. Να βρείτε γεωμετρικά την τιμή της παράστασης: $A = |x + 2| + |x - 7|$

δ'. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

21. (★★) Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς $5, 9$ και x αντίστοιχα.

α'. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

i) $|x - 5|$

ii) $|x - 9|$

β'. Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$,

i. Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

22. (★★) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a και b για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(a - 1)(1 - b) > 0$$

α'. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των a και b .

β'. Αν επιπλέον $|b - a| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = |a - 1| + |1 - b|$$

23. (★★) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b για τους οποίους ισχύει:

$$1 \leq b \leq 2 \quad \text{και} \quad 2 \leq a \leq 4$$

α'. i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των a και b είναι μικρότερη ή ίση του 3.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο (i) ερώτημα.

β'. i. Να δείξετε ότι: $\frac{b}{a} \leq 1 \leq \frac{a}{b}$

ii. Να βρείτε τους αριθμούς a και b για τους οποίους ισχύει: $\left|1 - \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a}{b} - 1\right|$

24. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

$$|x + 3| + |-y - 1| = 0$$

25. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

$$|x - 1| \leq 2xy - x^2 - y^2$$

26. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει:

$$|x - 2| + |x^2 - 1| = 0$$

27. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{|x| + 2x^2}{2|x| + 1}$

28. Αν ισχύει: $\frac{1}{a^2 - 4} = -\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = |a - 2| \cdot |a + 2|$$

29. Να υπολογίσετε την τιμή της παρακάτω παράστασης, για $x = -102$.

$$A = \left| \frac{x^2 + 2x - xy - 2y}{x^2 + 4x + 4} \right| \cdot \left| \frac{1}{x - y} \right|$$

30. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(|a| - |b|)^2 + 2|ab| = a^2 + b^2$$

31. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|a| a^2 - |b| b^2 = (|a| - |b|) (a^2 + |ab| + b^2)$$

32. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, με $|a| \neq |b|$, ισχύει:

$$\frac{a^2 - b^2}{|a| - |b|} = |a| + |b|$$

33. Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a και b με $a \neq b$ ισχύει:

$$|ba^2 - a| = |ab^2 - b|$$

να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και b είναι αντίστροφοι ή αντίθετοι.

34. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b με $ab \neq 0$ ισχύει ότι:

$$a|b| + b|a| = 0$$

να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και b είναι ετερόσημοι.

35. (★) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b , ισχύει $a > b$, με $b > 1$ και $a > 1$, τότε:

α'. Να δείξετε ότι: $\frac{a - b}{|a - b|} - \frac{|1 - a|}{1 - a} = 2$

β'. Να δείξετε ότι: $a + b > \frac{a - b}{|a - b|} - \frac{|1 - a|}{1 - a}$

36. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\frac{4x^2 + 9}{12} \geq |x|$

37. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\left| \frac{x}{1 + x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$

38. (★)

α'. Αν $a < 0$, να αποδείξετε ότι: $a + \frac{1}{a} \leq -2$

β'. Αν $a < 0$, να αποδείξετε ότι: $|a| + \left| \frac{1}{a} \right| \geq 2$

39. (★)

α'. Αν $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \geq 2$ (1)

β'. Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

40. Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

41. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|a + b| \leq |a + c| + |c - b|$

42. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $|x| \leq 3$ και $|y| \leq \frac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι: $|3x + 4y| \leq 10$

43. Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει: $|a + 2| = ||a| - 2|$, να δείξετε ότι $a \leq 0$.

44. Αν $a + b \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\frac{|a| + |b|}{|a + b|} \geq 1$

45. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $abc \neq 0$. Να αποδείξετε ότι: $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} \leq 3$

1.9 ΡΙΖΕΣ

Ορισμός 1: Ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a και την συμβολίζουμε με $\sqrt{a}$, τον μη αρνητικό αριθμό που όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον a .

Ορισμός 2: Ονομάζουμε n -οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a και την συμβολίζουμε με $\sqrt[n]{a}$, τον μη αρνητικό αριθμό που όταν υψωθεί στην n -στή δύναμη δίνει τον a .

Η n -οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a αποτελεί γενίκευση της έννοιας της τετραγωνικής ρίζας. Θα γράφουμε:

$$\sqrt[n]{a} = a \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt{a}$$

Με την βοήθεια της n -οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού a μπορούμε να ορίσουμε δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό ως ακολούθως:

Ορισμός 3: Αν $a > 0$, m ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Αν m, n θετικοί ακέραιοι τότε ορίζουμε:

$$0^{\frac{m}{n}} = 0$$

Οι ιδιότητες των δυνάμεων που έχουμε αναφέρει ισχύουν και στην περίπτωση που οι εκθέτες είναι ρητοί αριθμοί.

Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τις ιδιότητες των ριζών.

Ιδιότητες των ριζών		
1.	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	αν $a \geq 0$
2.	$\sqrt[n]{a^n} = a$	αν $a \geq 0$
3.	$\sqrt[n]{a^n} = a $	αν $a \in \mathbb{R}$ και n άρτιος
4.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	αν $a, b \geq 0$
5.	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	αν $a \geq 0$ και $b > 0$
6.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	αν $a \geq 0$
7.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{n \cdot r}}} = \sqrt[n]{a^r}$	αν $a \geq 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\sqrt{50} - \sqrt{8})(\sqrt{98} - \sqrt{72} - \sqrt{18}) = -12$ ii) $\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3}$

iii) $(\sqrt{12} - \sqrt{48} + \sqrt{108})\sqrt{3} = 12$ iv) $\frac{\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = 5$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $(\sqrt{24} + \sqrt{54}) \div \sqrt{6}$ ii) $(4\sqrt{32} - 3\sqrt{8} + \sqrt{2}) \div 2\sqrt{2}$

iii) $(\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50})\sqrt{2}$ iv) $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5})$

3. (★) Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41$$

$$\sqrt{3} \cong 1,73$$

$$\sqrt{5} \cong 2,24$$

$$\sqrt{7} \cong 2,64$$

α'. Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς: $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

β'. Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}} ;$$

4. (★) Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$ και $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α'. Να αποδείξετε ότι: $A \cdot B = 1$

β'. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Pi = A^2 + B^2$

5. (★) Δίνονται οι αριθμοί:

$$a = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad \text{και} \quad b = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$

α'. Να υπολογίσετε το άθροισμα $a + b$ και το γινόμενο ab .

β'. Να αποδείξετε ότι: $a^2 + b^2 = 7$

6. (★) Δίνονται οι αριθμοί:

$$a = \sqrt{3} - 1 \quad \text{και} \quad b = \sqrt{3} + 1$$

α'. Να δείξετε ότι: $a^2 + ab + b^2 = 10$

β'. Να δείξετε ότι: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 = 5$

7. (★)

α'. Να αποδείξετε ότι: $2 < \sqrt{5}$

β'. Να αποδείξετε ότι: $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$

γ'. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$

8. (★)

α'. Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.

β'. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$.

9. (★)

α'. Να δείξετε ότι:

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5} \quad \text{και} \quad (1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$$

β'. Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι:

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$$

10. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = 2 \qquad \text{ii)} \quad \sqrt{3(\sqrt{3} - 2)^2} - \sqrt{4(1 - \sqrt{3})^2} = -1$$

$$\text{iii)} \quad \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{7})^4} + (\sqrt{14} - 1)^2 = 24 \qquad \text{iv)} \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{7} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + 2} = 3$$

11. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 4 \qquad \text{ii)} \quad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17} - \sqrt{13}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17} + \sqrt{13}} = 2$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 5 \qquad \text{iv)} \quad \frac{1}{(5 - \sqrt{23})^2} + \frac{1}{(5 + \sqrt{23})^2} = 5\sqrt{23}$$

12. Θεωρούμε τον αριθμό:

$$a = (\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

α'. Να υπολογίσετε τον a^2

β'. Να αποδείξετε ότι $a = -2$

13. (★) Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, \quad B = (\sqrt[3]{3})^6 \quad \text{και} \quad C = (\sqrt[6]{6})^6$$

α'. Να δείξετε ότι: $A + B + C = 23$

β'. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14. (★) Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$ και $C = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α'. Να αποδείξετε ότι: $A \cdot B \cdot C = \sqrt{15}$

β'. Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

15. (★) Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (\sqrt{2})^6 \quad \text{και} \quad B = (\sqrt[3]{2})^6$$

α'. Να δείξετε ότι: $A - B = 4$

β'. Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$

16. (★) Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (\sqrt{3})^6 \quad \text{και} \quad B = (\sqrt[3]{3})^6$$

α'. Να δείξετε ότι: $A - B = 18$

β'. Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$

17. Ο αριθμός:

$$b = \sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$$

είναι ακέραιος. Να τον υπολογίσετε.

18. Αν m, n θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $m \neq n$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{m - \sqrt{mn}} + \frac{1}{m + \sqrt{mn}} \right) \cdot \frac{m^3 - n^3}{m^2 + mn + n^2} = 2$$

19. Για $a = \frac{9}{25}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) \div \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right)$$

20. (★)

α'. Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

β'. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

21. Να συγκρίνετε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών:

$$\text{i)} \quad \sqrt{5} \quad \text{και} \quad \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \text{ii)} \quad \sqrt{6} + \sqrt{3} \quad \text{και} \quad \sqrt{7} + \sqrt{2} \quad \text{iii)} \quad \sqrt{2} - \sqrt{5} \quad \text{και} \quad 1 - \sqrt{6}$$

22. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα με ρητό παρονομαστή:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ii)} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} & \text{iii)} \quad \frac{4}{\sqrt[3]{3}} & \text{iv)} \quad \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ \text{v)} \quad \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} & \text{vi)} \quad \frac{8}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} & \text{vii)} \quad \frac{10}{\sqrt{5} + 1} & \text{viii)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \end{array}$$

23. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \text{και} \quad B = \sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

α'. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B .

β'. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{A^3 - B}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

24. Να γράψετε το κλάσμα $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ με ρητό παρονομαστή.

25. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{128}$

ii) $\sqrt{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[9]{9}$

iii) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{27} = 9$

iv) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{15} \cdot \sqrt[4]{75} = 5 \sqrt[12]{3^5}$

v) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3} = 3$

vi) $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[12]{2}} = \sqrt{2}$

26. Για $x = 11$ και $y = 12$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (x^{1/3} + y^{1/3}) \cdot (x^{2/3} - x^{1/3} \cdot y^{1/3} + y^{2/3})$$

27. Για $x = 16$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{x-1}{x^{3/4} + x^{1/2}} \cdot \frac{x^{1/2} + x^{1/4}}{x^{1/2} + 1} \cdot x^{1/4} + 1$$

28. Για $a = 196$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{a - a^{-2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} - \frac{2}{a^{3/2}} - \frac{1 - a^{-2}}{a^{1/2} + a^{-1/2}}$$

29. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

α'. Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β'. Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

30. (★) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} \text{ και } B = \sqrt[3]{(2-x)^3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β'. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ'. Να δείξετε ότι για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

31. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$$

α'. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β'. Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$

32. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$$

α'. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β'. Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$

33. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$$

α'. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β'. Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$

34. Αν $0 < x < 1$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x - 1$

35. Αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}(x - \sqrt{x}) = x - 1$

36. Έστω a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $a - b = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{a}}$$

37. (★★) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b με $a = 1 + \sqrt{2}$ και $b = 1 - \sqrt{2}$

α'. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = a^2 - b^2$

β'. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $B = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$

γ'. Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι: $\sqrt{a^2 - b^2} > \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$

38. α'. Έστω τρεις πραγματικοί αριθμοί $a, b, c \geq 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

(Η παραπάνω ανισότητα είναι πολύ σημαντική και ονομάζεται ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου).

β'. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c ισχύει $abc = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8$$

Μέρος II

ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2

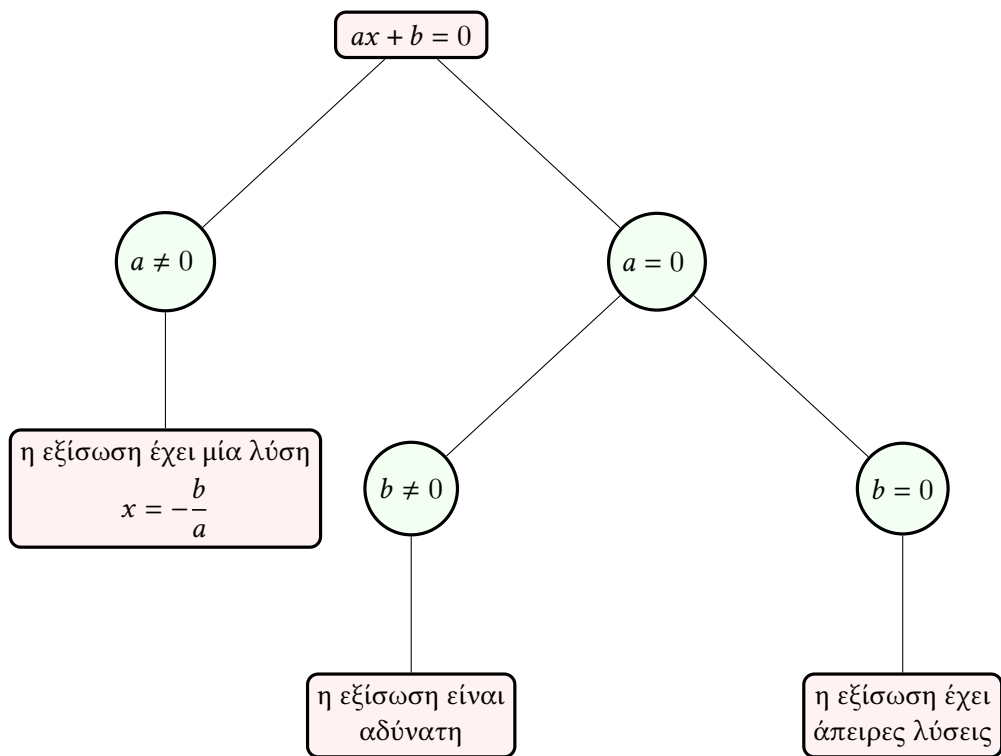
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση πρώτου βαθμού είναι η εξίσωση που έχει την μορφή:

$$ax + b = 0 \quad , \quad \text{όπου } a, b \in \mathbb{R}$$

Στο παρακάτω σχήμα περιγράφονται οι περιπτώσεις που προκύπτουν κατά την διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης αυτής.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & 2(x-3) - 3(1-3x) = 13 \\ \text{ii)} & \frac{x+1}{2} + \frac{2x+6}{3} = \frac{3x+21}{4} \\ \text{iii)} & \frac{x}{3} + \frac{2x-4}{4} = \frac{3x+4}{6} \\ \text{iv)} & \frac{4x+1}{3} = x + \frac{2}{3} + \frac{2-2x}{6} \end{array}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \frac{x}{6} - \frac{x-6}{3} = 1 - \frac{x-8}{4} \\ \text{ii)} & \frac{5+3x}{18} = \frac{1}{3} - \frac{6x-2}{9} \\ \text{iii)} & \frac{2x}{5} - \frac{x-3}{15} = -1 - \frac{x+1}{10} \\ \text{iv)} & \frac{x-2}{8} + \frac{7}{16} = 3 + \frac{2x-5}{4} \end{array}$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \frac{x}{3} - \frac{x-2}{2} = \frac{x}{4} - \frac{5x-12}{12} \\ \text{ii)} & \frac{x+3}{4} - \frac{2x-5}{6} = -\frac{x+4}{12} \\ \text{iii)} & \frac{5x-4}{5} - \frac{7x-10}{7} = \frac{22}{35} \\ \text{iv)} & \frac{4x-1}{6} = -\frac{4}{3} \left(-1 - \frac{9x+1}{18} \right) \end{array}$$

4. (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$kx + 3 = 2x \quad (1) \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

α'. Να λύσετε την εξίσωση για $k = 1$ και για $k = 3$.

β'. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $k = 2$.

5. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α'. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

β'. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6. (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α'. Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β'. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

γ'. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

7. (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$(a+3)x = a^2 - 9 \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

α'. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \text{όταν } a = 1 \\ \text{ii)} & \text{όταν } a = -3 \end{array}$$

β'. Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

8. (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0$$

- α'. i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.
ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.
β'. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

9. (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x = x + \lambda^2 - 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α'. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- β'. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.
γ'. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1$$

α'. Να δείξετε ότι: $A = \frac{x+1}{x}$

- β'. i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.
ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

11. (★★) Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\epsilon\%$ (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι $\epsilon\%$).

α'. Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στην συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο $x\epsilon$ με επιτόκιο $\epsilon\%$, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο:

$$x \cdot \left(1 + \frac{\epsilon}{100}\right)^2$$

β'. Ένα κεφάλαιο 15000€ το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το (α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15811€. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i. Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης:

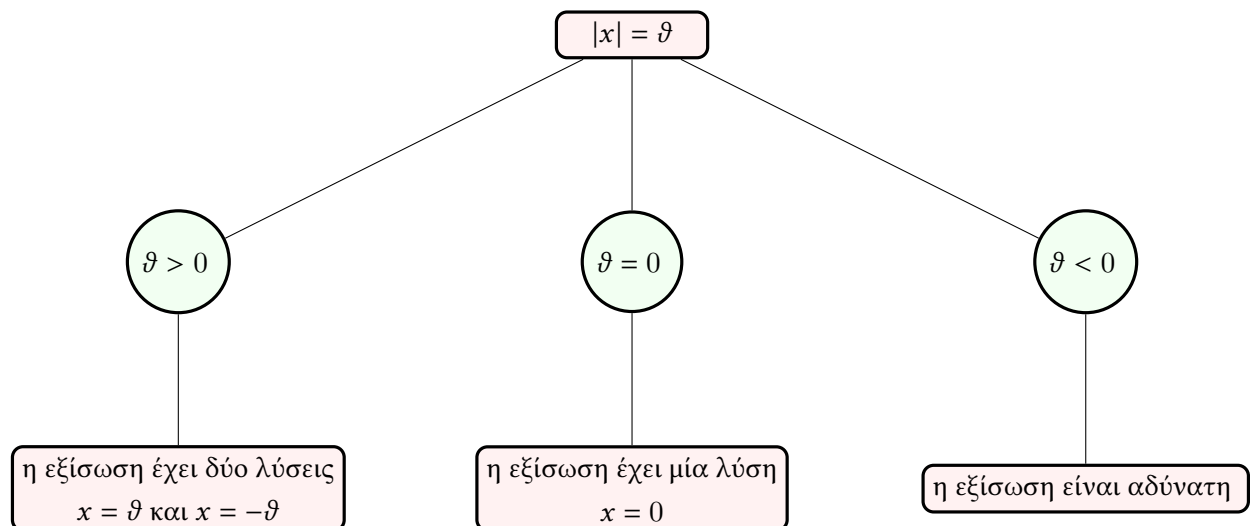
$$(1.03^2 - 1.02^2)y = 15811 - 15000 \cdot 1.02^2$$

ii. Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

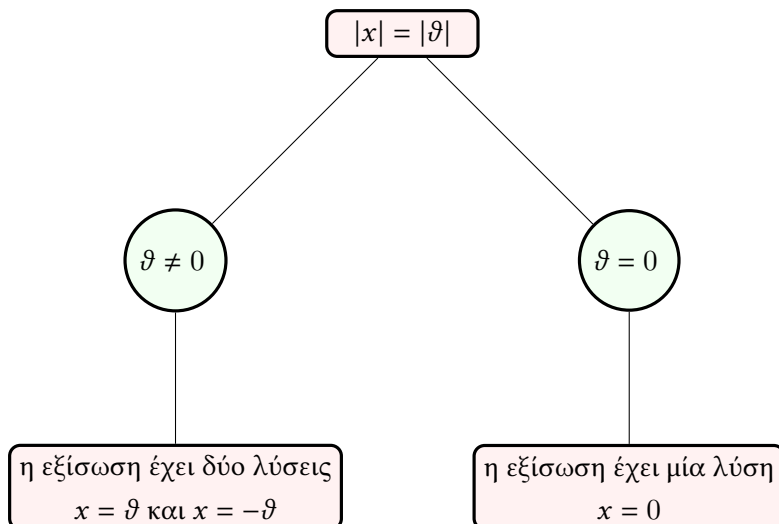
2.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Για τις εξισώσεις με απόλυτα έχουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση I:



Περίπτωση II:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & |x+4| = 6 & \text{ii)} & |2x-1| = 19 & \text{iii)} & |3-5x| = 7 \\ \text{iv)} & |4x-2| = 0 & \text{v)} & |3x-1| = -1 & \text{vi)} & 1-|2x+3| = -2 \end{array}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & 2|x|-1 = 0 & \text{ii)} & \frac{|x|+4}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3} & \text{iii)} & \frac{|x-2|+1}{3} + \frac{|4-2x|+3}{4} = 2 \\ \text{iv)} & 2d(x, 1) = 2 & \text{v)} & ||x|-1| = 2 & \text{vi)} & |2|x|-1| = 3 \end{array}$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & |x+2| = 9 & \text{ii)} & \frac{|x+3|}{2} = 5 - \frac{|x+3|}{3} & \text{iii)} & |3x-1| = 5 \\ \text{iv)} & |2x-4|-7 = 8-|x-2| & \text{v)} & 3-|3x-9| = 31+|3-x| & \text{vi)} & d(3x, -1) = 5 \end{array}$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & |3x-1| = |x-2| & \text{ii)} & |4x-3|-2|x+1| = 0 & \text{iii)} & |5x-1| = |3x-2| \\ \text{iv)} & |2x+1| = |x-4| & \text{v)} & |x-1|-|5-2x| = 0 & \text{vi)} & \sqrt{x^2-2x+1} = |3x-5| \end{array}$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & (|x|-1)(|x-2|-4) = 0 & \text{ii)} & |x-3| \cdot |x+2| = |x-3| & \text{iii)} & |x+4| = x^2+8x+16 \\ \text{iv)} & |x-5| - (x-5)^2 = 0 & \text{v)} & x^2+6x+9 - |x+3| = 0 \\ \text{vi)} & |x-4| \cdot |x+5| = |2x+7| \cdot |4-x| \end{array}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & |2x-1| = 2x-1 & \text{ii)} & |x-1| = 1-x & \text{iii)} & |x+2| = -x^2-1 \\ \text{iv)} & |2x-3|+3 = 2x & \text{v)} & |x-2|+x-2 = 0 & \text{vi)} & 2|x+1|-|5-x| = x \end{array}$$

7. (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$(|a-1|-3)x = a+2, \quad \text{με παράμετρο } a \in \mathbb{R}$$

α'. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $a=0$ και $a=5$.

β'. i. Να βρείτε για ποιες τιμές του a ισχύει $|a-1|=3$

ii. Να λύσετε την εξίσωση για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα (βi).

8. (★) Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α'. Να αποδείξετε ότι: $x-5 \leq 0 < x-2$

β'. Να λύσετε την εξίσωση: $|x-2|-|x-5| = 2$

9. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$K = |x+1|+2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να δείξετε ότι: $K = \begin{cases} x + 3 & , \text{ αν } x \geq -1 \\ 1 - x & , \text{ αν } x < -1 \end{cases}$

β'. i. Να λυθεί η εξίσωση: $|x - 2| = 4$

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

10. Να βρείτε την ελάχιστη ακέραια τιμή του x που είναι λύση της εξίσωσης:

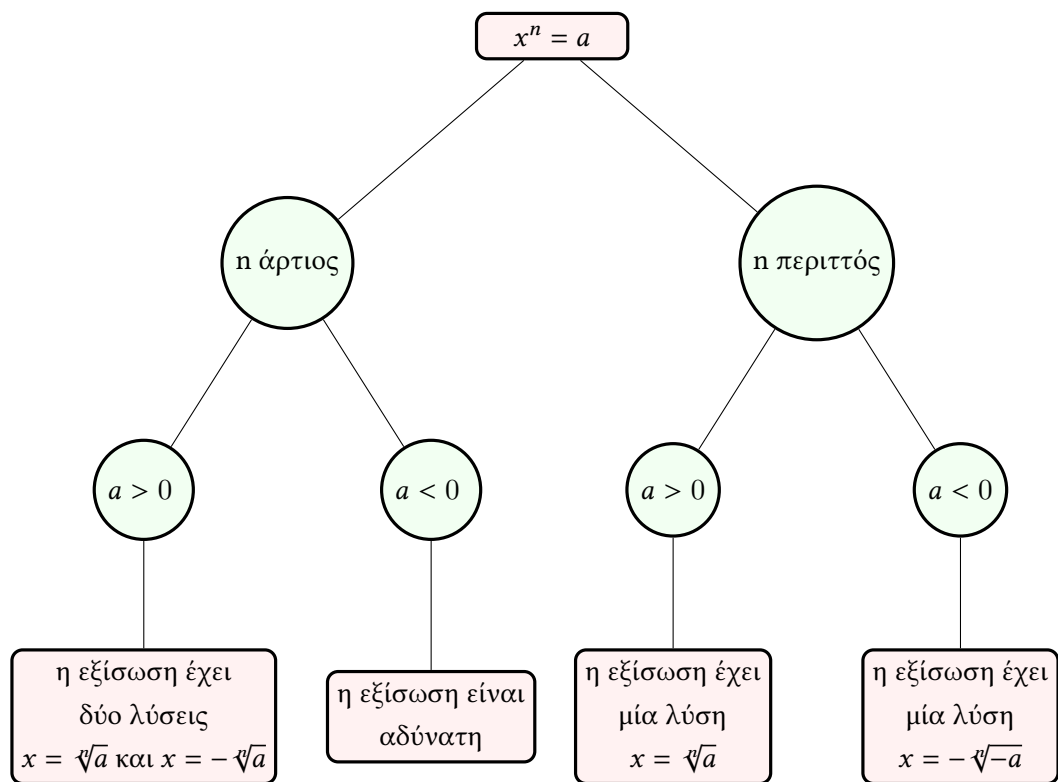
$$|x - 3| + 2|x + 1| = 4$$

2.3 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^n = a$

Για την εξίσωση:

$$x^n = a, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad a \neq 0$$

έχουμε τις περιπτώσεις:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - 9 = 0$

ii) $x^3 - 8 = 0$

iii) $x^5 + 1 = 0$

iv) $2x^4 = 32$

v) $x^4 = -1$

vi) $x^5 - 243 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^5 + 16x = 0$

ii) $x^6 - 16x^2 = 0$

iii) $x^5 + 2x^3 - 8x^2 - 16 = 0$

iv) $(x^2 - 2x)^3 = -1$

v) $(2|x| - 3)^5 = -32$

vi) $(x^3 - 1)^2 = 49$

2.4 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Η παράσταση:

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

ονομάζεται *τριώνυμο* και η εξίσωση:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

ονομάζεται εξίσωση δεύτερου βαθμού ή δευτεροβάθμια εξίσωση. Χρησιμοποιώντας την τεχνική της συμπλήρωσης τετραγώνου οδηγούμαστε στην ισότητα:

$$ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Θα συμβολίζουμε τον αριθμό

$$b^2 - 4ac$$

με Δ και θα τον ονομάζουμε *διακρίνουσα* του τριωνύμου ή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Επομένως η παραπάνω ισότητα μπορεί να πάρει την μορφή:

$$ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$$

Το πρόσημο της διακρίνουσας καθορίζει και τον αριθμό των λύσεων της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται όλες οι περιπτώσεις:

Οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$		
1.	$\Delta > 0$	Η εξίσωση έχει δύο λύσεις: $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
2.	$\Delta = 0$	Η εξίσωση έχει μία (διπλή) λύση: $x = \frac{-b}{2a}$
3.	$\Delta < 0$	Η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν μία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο λύσεις τις x_1 και x_2 , τότε για το άθροισμά τους S και το γινόμενό τους P δίνεται από τους παρακάτω τύπους που ονομάζονται *τύποι του Vieta*.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Επιπλέον, αν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο δύο αριθμών, μπορούμε να τους εντοπίσουμε, γιατί οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Το πρόσημο της διακρίνουσας καθορίζει επίσης και το αν το τριώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ή όχι. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι περιπτώσεις:

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου		
1. $\Delta > 0$	Η εξίσωση έχει δύο λύσεις ρ_1 και ρ_2	$ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
2. $\Delta = 0$	Η εξίσωση έχει μία (διπλή) λύση $x = \rho$	$ax^2 + bx + c = a(x - \rho)^2$
3. $\Delta < 0$	Η εξίσωση δεν έχει λύσεις	Το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3x^2 - 2x = 0$

ii) $x^2 - 4 = 0$

iii) $2x^2 + 3 = 0$

iv) $5x^2 + 4x = 0$

v) $4x^2 - 1 = 0$

vi) $36x^2 - 25 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ii) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

iii) $-x^2 + 3x - 5 = 0$

iv) $2x^2 + 6x + 1 = 0$

v) $3x^2 - 13x + 12 = 0$

vi) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(x - 2)^2 + (x + 1)^2 = x^2 + 13$

ii) $x(x + 2) + x^2(x + 1) = x^3 + 4$

iii) $x(x + 1) = 2x^2 - 3(x + 4)$

iv) $(2x - 1)^2 - (3 - x)^2 = (x + 1)(2x - 1) - 1$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$

ii) $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$

iii) $(x^2 - 9x + 8)(-x^2 + 5x - 7) = 0$

iv) $\frac{x(3x - 2)}{3} - \frac{(2x - 1)^2 + 2}{6} = 1 - \frac{x - 6}{2}$

5. (★)

α'. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$

β'. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$

6. (★)

α'. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 1| = 3$

β'. Αν a, b με $a < b$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση:

$$ax^2 + bx + 3 = 0$$

7. (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α'. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

β'. Για $\lambda = 2$, να λύσετε την εξίσωση (1).

8. (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$ax^2 - 2ax - 2a - 2 = 0 \quad (1) \quad , \quad \text{με } a \in \mathbb{R}^*$$

α'. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

β'. Για $a = 2$, να λύσετε την εξίσωση (1).

9. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i) $(\lambda - 3)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 3 = 0$

ii) $(\lambda + 1)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3 = 0$

10. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

i) $\lambda^2 x^2 + 4x - 4 = 0$

ii) $(\lambda - 2)x^2 + (3\lambda - 5)x + 3 = 0$

11. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού m για τις οποίες η εξίσωση:

$$4x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3m - 1 = 0$$

έχει μία πραγματική ρίζα. Σε κάθε περίπτωση να προσδιορίσετε την ρίζα αυτή.

12. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση:

$$9x^2 - 2x + a = 6 - ax$$

έχει μία πραγματική ρίζα.

13. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda = 0$$

έχει πραγματικές ρίζες.

14. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$$

με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α'. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (2\lambda - 4)^2$

β'. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

γ'. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης.

15. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις εξισώσεις:

$$x^2 + 2x + \lambda - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + \frac{9}{4} = 0 \quad (2)$$

Αν η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) είναι αδύνατη.

16. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α'. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση δεύτερου βαθμού.

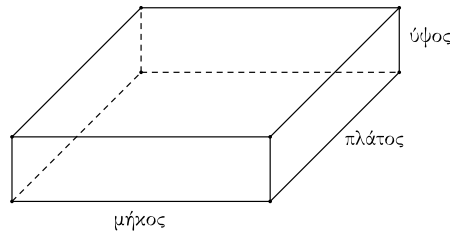
β'. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει την μορφή:

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

γ'. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ'. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι δεύτερου βαθμού.

17. (★) Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.
 α'. Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.
 β'. Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.
18. (★★) Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d + 1)$ cm.
 α'. Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.
 β'. Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:
 i. Την διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.
 ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.
19. (★★) Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.



- α'. Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.
 β'. Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της, υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης, προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.
 γ'. Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο, να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.
20. Θεωρούμε τις εξισώσεις:
- $$ax^2 + bx + c = 0 \quad (I) \quad \text{και} \quad cx^2 + bx + a = 0 \quad (II)$$
- όπου a, b, c μη μηδενικοί ακέραιοι, με $a \neq c$
- α'. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών.
 β'. Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της (I), να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II).
 γ'. Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (I), (II) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$.
21. (★★)
- α'. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

- β'. Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευ-

γάρι εξισώσεων της μορφής:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad cx^2 + bx + a = 0 \quad (4) \quad \text{με} \quad a \cdot c \neq 0$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι αν ο αριθμός είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $a \cdot c \neq 0$, τότε:

- i. $\rho \neq 0$
- ii. ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

22. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α'. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$.

- β'. i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.
ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ'. Αν ισχύει:

$$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

23. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0$$

με παράμετρο $a \neq 0$.

α'. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (a^2 + 1)^2$

β'. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = a$ και $\rho_2 = -\frac{1}{a}$

γ'. Να βρεθούν οι τιμές του a ώστε: $|\rho_1 - \rho_2| = 2$

24. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α'. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

β'. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

γ'. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

25. Να παραγοντοποιήσετε, εφόσον είναι δυνατόν, τα παρακάτω τριώνυμα:

i) $x^2 + x - 20$

ii) $2x^2 - 17x - 9$

iii) $2x^2 - x + 1$

iv) $3x^2 - 30x + 75$

v) $-x^2 + 3x + 28$

vi) $5x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

26. (★) Δίνεται το τριώνυμο: $2x^2 + 3x - 5$

α'. Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

β'. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

27. (★) Δίνεται το τριώνυμο: $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$

α'. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$

β'. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

28. (★) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1)

α'. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

β'. Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

γ'. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}, \quad x \neq 0, \quad x \neq -1$$

29. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$$

α'. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $2x^2 - 3x - 2$

β'. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ'. Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

30. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$S = \frac{4a^2 - 1}{2a^2 + 5a - 3} \quad \text{και} \quad T = \frac{2a^2 - 5a - 3}{a^2 - 9}$$

α'. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a ορίζονται οι παραπάνω παραστάσεις.

β'. Να αποδείξετε ότι για όλα τα a που βρήκατε ισχύει: $S = T$.

31. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - 8|x| + 15 = 0$

ii) $x^2 - 4|x| - 5 = 0$

iii) $6(x+2)^2 - |x+2| - 1 = 0$

iv) $x^2 - 4x + 4 - 7|x-2| = -10$

v) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

vi) $x^4 + 15x^2 + 16 = 0$

32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{x}{x+3} + \frac{4}{x+1} = 4$

ii) $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{x+4}{x+3}$

iii) $\frac{2x}{x-9} - \frac{x^2+25}{x^2-81} = \frac{5}{x+9} - \frac{5}{x-9}$

iv) $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{2x-2} = -\frac{5}{2}$

33. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|x^2 - 5x + 5| = 1$

ii) $|x^2 + 3x - 5| = |2x^2 - 4x + 5|$

iii) $x^2 + |x-1| = 1$

iv) $|x^2 + 4x + 2| = \frac{5x+16}{3}$

34. Δίνεται η εξίσωση:

$$a|x-1| + 6|b| = 9 + b^2, \quad a \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}$$

Αν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1, να βρείτε τον b .

35. α'. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

- β'. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$$

με παραμέτρους $b, c \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $b < 0$, $c > 0$ και $b^2 - 4c > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

36. (★★)

- α'. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

- β'. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$$

με παραμέτρους $b, c \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $c < 0$, τότε:

i. $b^2 - 4c > 0$

ii. η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

37. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $2x^2 + 3x - 4 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $x_1 + x_2$ ii) $x_1 \cdot x_2$ iii) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ iv) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

38. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 2x - 4 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $x_1 + x_2$ ii) $x_1 \cdot x_2$ iii) $x_1^2 + x_2^2$ iv) $x_1^3 + x_2^3$

39. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $-x^2 + 4x + 7 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ ii) $|x_1 - x_2|$ iii) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ iv) $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$

40. (★)

- α'. Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 2| = 3$

- β'. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του (α) ερωτήματος.

41. (★) Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

- α'. Να δείξετε ότι:

i) $A + B = \frac{1}{2}$

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$

42. (★) Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

i) $A + B = 3$ ii) $A \cdot B = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{10 - \sqrt{72}} \quad \kappa_{\alpha l} \quad \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$$

β'. Να κατασκευάσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς a, b και να τους βρείτε.

48. (★) Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί a, b τέτοιοι ώστε:

$$a + b = 12 \quad \text{και} \quad a^2 + b^2 = 272$$

α'. Με την βοήθεια της ταυτότητας: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, να δείξετε ότι: $ab = -64$

β'. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση δεύτερου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς a, b .

γ'. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς a, b .

49. (★★) Δίνονται οι ανισώσεις:

$$|x - 1| \leq \sqrt{3} \quad (1) \quad \text{και} \quad 3 - \frac{x + 4}{2} < 0 \quad (2)$$

α'. Να λύσετε την ανίσωση (1).

β'. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

γ'. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

δ'. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί a, b είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2),

τότε και ο αριθμός $\frac{3a + 4b}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

50. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a , το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$$

είναι ίσο με 0;

51. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α'. Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β'. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i. Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$

ii. Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ'. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$.

ii. να βρείτε τον αριθμό λ .

52. Δίνεται η εξίσωση:

$$(x - 2)^2 = \lambda (4x - 3)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α'. Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

β'. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ'. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i. να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$

ii. να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

53. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- α'. Να βρείτε την διακρίνουσα της εξίσωσης.
 β'. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 γ'. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιές τιμές του λ ισχύει:

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$$

54. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- α'. Να βρείτε την διακρίνουσα της εξίσωσης.
 β'. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 γ'. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιά τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$

55. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- α'. Να βρείτε την διακρίνουσα της εξίσωσης.
 β'. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 γ'. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

56. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

- α'. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 12\lambda + 25$
 β'. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
 γ'. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$
 δ'. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση:

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$$

57. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2x + \lambda = 0$$

με παράμετρο $\lambda < 1$.

- α'. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.
 β'. Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$
 γ'. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον: $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:
 i. Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$
 ii. Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ .

58. (★★) Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί a, b , με $a \neq b$, για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{a^2 + 1}{b^2 + 1} = \frac{a}{b}$$

- α'. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και b είναι αντίστροφοι.

β'. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{a^{22} \cdot (b^3)^8}{a^{-2} \cdot (ab)^{25}}$$

γ'. Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί a και b εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

δ'. Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο a ή στο b , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

59. (★★) Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α'. Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω .

β'. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

i. Το σύνολο Λ που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

γ'. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (βii) να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

60. (★★)

α'. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad (1)$$

β'. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί a, b για τους οποίους ισχύει: $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{a}{b}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο a είναι τετραπλάσιος του b .

61. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + ax + 12 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης και ισχύει $x_2 - x_1 = 1$, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a .

62. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες που η μία να είναι διπλάσια της άλλης.

63. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \quad \text{με } \lambda > 0$$

α'. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.

β'. Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

				
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο n -οστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο:

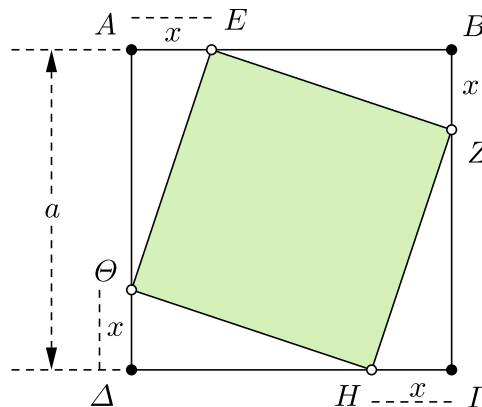
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

α'. Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό.

β'. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

γ'. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

68. (★★) Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $EZH\Theta$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



α'. Αν η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι a και η απόσταση των κορυφών του $EZH\Theta$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $AB\Gamma\Delta$ είναι x , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δίνεται από την σχέση:

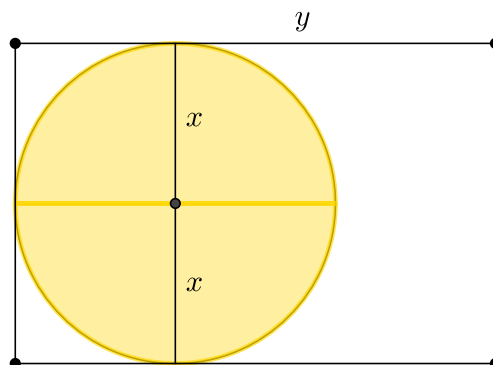
$$(EZH\Theta) = x^2 + (a - x)^2, \quad 0 \leq x \leq a$$

β'. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$.

γ'. Να βρείτε την πλευρά a του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του $EZH\Theta$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$, δηλαδή: $(EZH\Theta) = \frac{2}{3} (AB\Gamma\Delta)$.

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1.73$)

69. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



- α'. i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x \quad , \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

- ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από την σχέση:

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2 \quad , \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

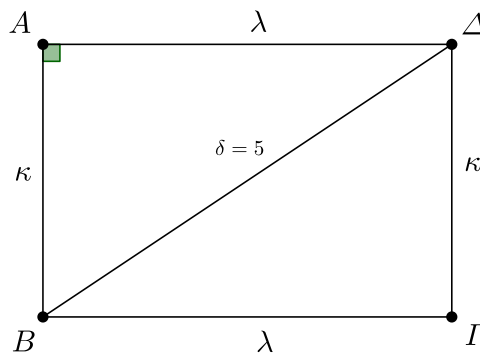
- β'. Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από την σχέση:

$$E = 10x - (\pi + 4)x^2 \quad , \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

- γ'. Αν το εμβαδόν E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi) cm^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

- την ακτίνα x του κύκλου.
- τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

70. (★★) Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14cm$ και μία διαγώνιος $\delta = 5cm$.



- α'. i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E = 12cm^2$.
- ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$.
- iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.
- β'. Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14cm$ πρέπει να έχει εμβαδόν $E \leq \frac{49}{4}$

Κεφάλαιο 3

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 Η ΑΝΙΣΩΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσουμε την ανίσωση πρώτου βαθμού ακολουθούμε παρόμοια βήματα με την εξίσωση πρώτου βαθμού. Για παράδειγμα, έστω η ανίσωση:

$$ax + b > 0$$

Πρώτα χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:

$$ax > -b$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Όλα εξαρτώνται από το πρόσημο του a :

Αν $a > 0$, τότε δεν θα αλλάξουμε την φορά της ανίσωσης:

$$x > -\frac{b}{a}$$

Αν $a < 0$, τότε θα αλλάξουμε την φορά της ανίσωσης:

$$x < -\frac{b}{a}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-1}{3} + \frac{2x-5}{2} \leq \frac{3x-2}{6}$

ii) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$

iii) $\frac{x-3}{5} + \frac{3x-4}{2} \leq \frac{5x-2}{10}$

iv) $\frac{3x-2}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{2-x}{3} + \frac{16x+25}{12}$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(x-3)(x+3) + 2(x+1) \geq (x-1)^2 + 4$

ii) $(x+2)^2 - 2(x-2)^2 \leq 25 - (x+1)^2$

3. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού m για τις οποίες η εξίσωση:

$$x^2 - x + m = 0$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες.

4. Να βρείτε την μικρότερη ακέραια τιμή που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός k για την οποία η εξίσωση:

$$x^2 - 2(k+2)x + 12 + k^2 = 0$$

έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

5. (★) Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α'. Να αποδείξετε ότι: $x \leq \frac{3}{2}$

β'. Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

6. (★) Δίνονται οι ανισώσεις:

$$3x - 1 < x + 9 \quad \text{και} \quad 2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$$

α'. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β'. Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

7. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$3 - 2(1-x) \geq -1 \quad \text{και} \quad x - 4 < 2(1-x)$$

8. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{4x-3}{5} - x > \frac{6}{15} \quad \text{και} \quad \frac{x}{4} - \frac{x}{2} \leq \frac{5}{4}$$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $-x + 4 < x \leq 1 + \frac{x-1}{3}$

ii) $-5 - 4(x-2) < 2(x+3) < 5(2+x) - 4x$

10. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να λύσετε την ανίσωση:

$$\lambda(x+4) < 2(\lambda^2 + x)$$

11. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$$

α'. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β'. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

12. (★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$$

α'. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β'. Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$

13. Να βρείτε την μικρότερη τιμή της παραμέτρου m ώστε η ανίσωση:

$$2(x-1) + 5m \geq \frac{4x+1}{2}$$

να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

14. Μία εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων A προσφέρει ένα αυτοκίνητο για 4 ημέρες με 80€ συν 0.1€ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει το αυτοκίνητο. Η εταιρεία B , το ίδιο αυτοκίνητο και για τον ίδιο αριθμό ημερών, το προσφέρει με 60€ συν 0.2€ για κάθε χιλιόμετρο. Πόσα χιλιόμετρα τουλάχιστον πρέπει να κάνει κάποιος για να τον συμφέρει η προσφορά της εταιρείας A ;

15. Ο Νίκος εργάζεται σε μία εταιρεία με βασικό μισθό 700€ τον μήνα και bonus 4% επί των πωλήσεων που κάνει. Πόσες πωλήσεις σε ευρώ πρέπει να έχει το λιγότερο κάθε μήνα, ώστε οι μηνιαίες απολαβές του να μην είναι λιγότερες από 1500€;

16. (★★) Για την μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}C$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}F$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1.8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}C$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}K$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}C$) το 273.

α'. Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β'. Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}K$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}F$) είναι η:

$$K = \frac{F - 32}{1.8} + 273$$

γ'. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από $278^{\circ}K$ μέχρι $283^{\circ}K$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}F$.

17. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 6x + \lambda = 0 \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α'. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β'. Δύο πραγματικοί αριθμοί a και b έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $a \cdot b = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $a \cdot b \leq 9$

ii. Να δείξετε ότι $a \cdot b = 9$ αν και μόνο αν $a = b$

γ'. Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις a, b και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

3.2 Η ΑΝΙΣΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Για να λύσουμε ανισώσεις με απόλυτα θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

Έστω $\vartheta > 0$, τότε ισχύουν:

$$|x| > \vartheta \Leftrightarrow x < -\vartheta \text{ ή } x > \vartheta$$

$$|x| < \vartheta \Leftrightarrow -\vartheta < x < \vartheta$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- | | | |
|-------------------|-----------------|--------------------|
| i) $ x+1 \leq 5$ | ii) $ x-2 > 2$ | iii) $ 3x+7 < 3$ |
| iv) $ x-1 > -1$ | v) $2 x -1 < 0$ | vi) $ x-4 \leq 2$ |

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- | | | |
|----------------------------|----------------------|-----------------------------------|
| i) $ 2x-5 \leq 0$ | ii) $ x+4 < 0$ | iii) $ x - \frac{1- x }{3} > -1$ |
| iv) $3 x-1 -2 \leq 2 1-x $ | v) $(1- x)^2 > x^2$ | vi) $\frac{7-3 2x+1 }{4} > 1$ |

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

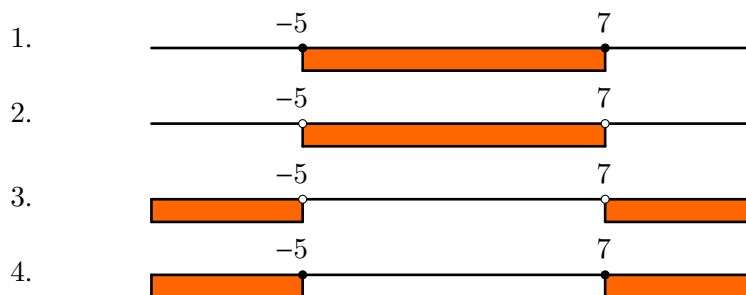
- | | | |
|-------------------------------|------------------------|--|
| i) $ x-2 +8 < 5x-10 - 4-2x $ | ii) $ x-2 \leq x+4 $ | iii) $ 2x-1 > 3 - \left x - \frac{1}{2}\right $ |
| iv) $ 2x-4 < x-1$ | v) $ x-1 > x+3 $ | vi) $ x-2 -3 \leq 1$ |

4. Να λύσετε την ανίσωση: $1 \leq ||x-1|-4| \leq 3$

5. Να λύσετε την ανίσωση: $|x+2|-|x-1| < x - \frac{3}{2}$

6. (★)

α'. Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στην συνέχεια να βρείτε την θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:



β'. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο (α) ερώτημα.

7. (★) Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x+2| < 1$. Να δείξετε ότι:

α'. $-3 < x < -1$

β'. $|2x+4| < 2$

8. (★) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $|2x| < 2$, τότε:

α'. Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 1$

β'. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει: $x^2 < 1$

9. (★) Δίνεται η ανίσωση:

$$|2x - 5| < 3$$

α'. Να λύσετε την ανίσωση.

β'. Αν ο αριθμός a είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$(a - 1)(a - 5)$$

10. Δίνεται η παράσταση:

$$S = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$$

α'. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση S και στην συνέχεια να την απλοποιήσετε.

β'. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|S - 1| > 1$

11. (★) Δίνεται η ανίσωση:

$$|x - 7| < 1$$

α'. Να αποδείξετε ότι: $x \in (6, 8)$

β'. Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι: $\frac{24}{k} \in (3, 4)$

12. α'. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 4$

β'. Αν κάποιος αριθμός a επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{a} < 1$$

13. (★) Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίον ισχύει: $|x - 2| < 3$

α'. Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$

β'. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x + 1| + |x - 5|}{3}$

14. (★) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$

α'. Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$

β'. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y - 1| + |y - 3|}{2}$

15. (★) Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί την σχέση: $|x + 1| < 2$, τότε:

α'. Να δείξετε ότι: $x \in (-3, 1)$

β'. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x + 3| + |x - 1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

16. α'. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 4| \geq 3$

β'. Αν $a \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||a + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

17. (★) Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 3| < 5$

α'. Να δείξετε ότι: $x \in (-2, 8)$

β'. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x - 3| < 5$

γ'. Αν $\mathbb{A}$ το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο (β) ερώτημα και $\mathbb{B}$ το σύνολο με $\mathbb{B} = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ και $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

18. (★)

α'. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$

β'. Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$3 < x + y < 7$$

19. α'. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$

β'. Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, για τα οποία ισχύει $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$6 < P < 14$$

όπου P είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

20. (★)

α'. Να λυθεί η ανίσωση: $|y - 3| < 1$

β'. Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου για τα οποία ισχύει: $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

21. (★) Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \quad \text{και} \quad |y - 6| \leq 4$$

α'. Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$

β'. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

22. (★)

α'. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1)

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2)

γ'. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

23. (★)

α'. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$

γ'. Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

24. α'. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$

γ'. Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

25. (★)

α'. Να λύσετε την ανίσωση: $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $|-x - 1| \leq 23$

γ'. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

26. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < 4 \quad \text{και} \quad |x + 5| \geq 3$$

27. (★)

α'. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 1| \leq 7$

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 2$

γ'. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

28. (★)

α'. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$

ii) $|2x - 3| \geq 1$

β'. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

29. (★)

α'. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1 - 2x| < 5$

ii) $|1 - 2x| \geq 1$

β'. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

30. (★)

α'. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 2$

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $|2 - 3x| > 5$

γ'. Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

31. (★★) Για τους πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει ότι:

• $|a - 2| < 1$

• $|b - 3| \leq 2$

α'. Να αποδειχθεί ότι: $1 < a < 3$

β'. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο b .

γ'. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2a - 3b$

δ'. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{a}{b}$

32. (★★)

α'. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει: $|x - 4| < 2$

β'. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

33. (★★) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$
- α'. Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.
 - β'. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .
 - γ'. Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).
 - δ'. Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x + 4| + |x - 14| = 18$$

34. (★★)

- α'. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$
- β'. Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση την γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$.
- γ'. Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση:

$$|x - 1| \leq 3$$

- δ'. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση:

$$||x| - 1| \leq 3$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α'. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β'. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
- γ'. Αν x_1, x_2 , είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$0 < d(x_1, x_2) < 2$$

36. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α'. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β'. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.
- γ'. Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:
 - i. Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.
 - ii. $x_1 + 4x_2 \geq 4$

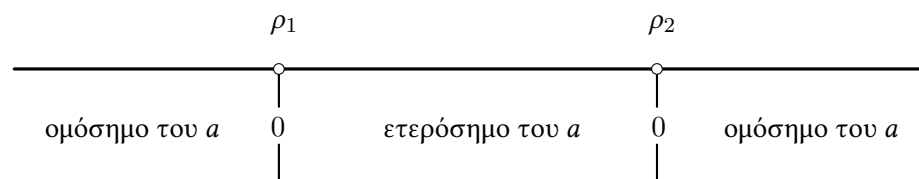
3.3 Η ΑΝΙΣΩΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσουμε μία ανίσωση δεύτερου βαθμού, δηλαδή μία ανίσωση της μορφής:

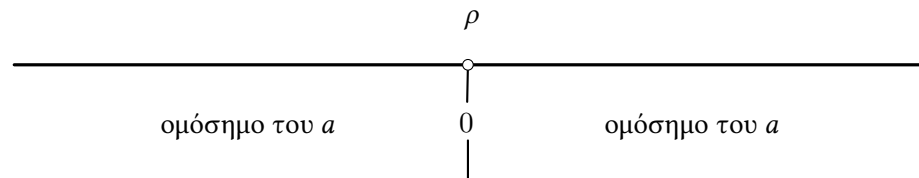
$$ax^2 + bx + c > 0$$

θα πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημο του τριωνύμου. Και στην περίπτωση αυτή όλα εξαρτώνται από το πρόσημο της διακρίνουσας του τριωνύμου. Παρακάτω παραθέτουμε όλες τις περιπτώσεις:

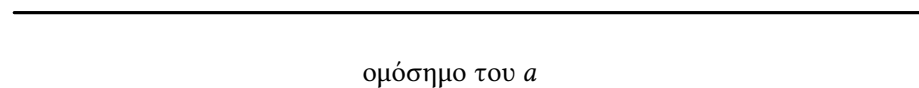
Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$. Το πρόσημο του τριωνύμου είναι:



Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο έχει μία ρίζα ρ . Το πρόσημο του τριωνύμου είναι:



Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο δεν έχει ρίζες. Το πρόσημο του τριωνύμου είναι:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 + 3x > 0$

ii) $x^2 - 4 \leq 0$

iii) $x^2 + 3x - 10 < 0$

iv) $2x^2 - 3x \geq 5$

v) $x^2 + 3x + 5 \leq 0$

vi) $4x^2 + 20x + 25 \geq 0$

vii) $6x^2 + 20 > 23x$

viii) $-x^2 + 4x < 7$

ix) $x(x - 7) \geq 3x^2 - 10x - 54$

2. (★)

α'. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $2x^2 - x - 1$

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $x(1 - 2x) \leq -1$

3. (★) Θεωρούμε το τριώνυμο: $f(x) = x^2 - x - 3$

α'. Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$.

β'. Να επιλύσετε την ανίσωση: $-2f(x) < 0$

4. (★)

α'. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$

β'. Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ'. Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. (★)

α'. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

γ'. Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

6. (★) Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$

α'. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β'. Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7. (★) Δίνεται το τριώνυμο: $2x^2 - 3x + 1$

α'. Να βρείτε τις ρίζες του.

β'. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

γ'. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$

8. (★)

α'. Να λύσετε την εξίσωση: $x^4 - 16 = 0$ (1)

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 3x \leq 0$ (2)

γ'. Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

9. α'. Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$

β'. Αν a, b είναι δύο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε

ότι ο αριθμός $\frac{3a+6b}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

10. (★)

α'. Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι: $-1 < x < 4$

β'. Δίνεται η παράσταση:

$$A = |2x + 2| + |x - 5|$$

με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος (α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$

11. (★)

α'. Να αποδείξετε ότι: $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β'. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

12. α'. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$

β'. Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 3| + |x^2 - 10x + 21|$$

i. Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: $A = -x^2 + 11x - 24$

ii. Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$ για τις οποίες ισχύει $A = 6$

13. (★)

α'. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$

β'. Αν η ανίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3 < x < 7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση $A = |x - 3| + |x - 7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

14. Αν $-x^2 + 5x - 6 > 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$T = \frac{|x - 2| + |x - 3|}{|x - 1| + |x - 5|}$$

15. (★★) Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από την σχέση:

$$y = 60t - 5t^2$$

α'. Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β'. Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175m$;

γ'. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από $100m$.

16. (★★) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1} \quad \text{και} \quad B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$$

α'. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B ;

β'. Να δείξετε ότι: $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$

γ'. Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$

17. (★★)

α'. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β'. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός a με $0 < a < 1$.

i. Να βάλετε στην σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0, 1, a, a^2, \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με την βοήθεια και του ερωτήματος (α).

ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+a} < 1 + \sqrt{a}$

18. (★★)

α'. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β'. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός a με $a > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, 1, a, a^2, \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος (α).

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς:

$$a, a^2, \frac{a+a^2}{2}$$

19. (★★)

α'. Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \quad (1)$$

β'. Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση:

$$(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$$

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ .

ii. Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$

20. (★★)

α'. i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$

β'. i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$$

21. Να λύσετε την εξίσωση: $|x^2 - 5x + 4| + x^2 - 5x + 4 = 0$

22. (★★)

α'. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$

β'. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$$

και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

γ'. Αν $a \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

23. (★★) Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β'. Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2.999) \cdot f(-1.002)$$

γ'. Αν $-3 < a < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-a^2 + 2|a| + 3$.

24. (★) Δίνονται οι ανισώσεις:

$$-x^2 + 5x - 6 < 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 - 16 \leq 0 \quad (2)$$

α'. Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

β'. Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

25. (★)

α'. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$|2x - 5| \leq 3 \quad \text{και} \quad 2x^2 - x - 1 \geq 0$$

β'. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

26. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \quad \text{και} \quad 3x^2 - 2x - 1 > 0$$

27. (★★) Δίνονται οι ανισώσεις:

$$2 \leq |x| \leq 3 \quad \text{και} \quad x^2 - 4x < 0$$

α'. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β'. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.

γ'. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώ-

σεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

28. (★★) Δίνονται οι ανισώσεις:

$$|x + 1| \leq 2 \quad \text{και} \quad x^2 - x - 2 > 0$$

α'. Να λύσετε τις ανισώσεις.

β'. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1]$.

γ'. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι:

$$\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$$

29. (★★) Δίνονται οι ανισώσεις:

$$|x - 1| < 2 \quad \text{και} \quad x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

α'. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β'. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$

γ'. i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$$\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1], \text{ είναι και ο αριθμός } \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} \text{ κοινή τους λύση;}$$

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$$\rho_1 \in (-1, 1] \text{ και } \rho_2 \in [2, 3), \text{ είναι και ο αριθμός } \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} \text{ κοινή τους λύση;}$$

30. Να λύσετε τις ανισώσεις:

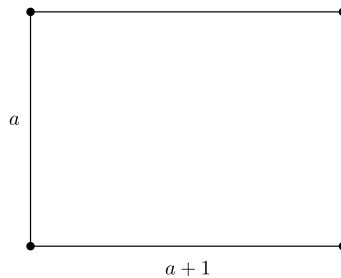
$$\text{i) } 6x - 11 < x^2 - 3 < 6x - 8 \quad \text{ii) } 2 \leq x^2 - 2 \leq 4x - 5 \quad \text{iii) } |x^2 - 3x + 3| < 1$$

31. (★★)

α'. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - \frac{1}{2}| > 1$

γ'. Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές a και $a + 1$.



όπου ο αριθμός a ικανοποιεί τη σχέση $|a - \frac{1}{2}| > 1$. Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < a < 2$

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

32. (★★) Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μίας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α'. Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x .

β'. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περιφραξη του πάρκου στην μακέτα, να μην ξεπερνά τα 8 μέτρα.

γ'. Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

33. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

$$\text{i)} \quad x^2 + (\lambda - 3)x + 6 = 0$$

$$\text{ii)} \quad x^2 + (\lambda - 3)x + 6 - \lambda = 0$$

34. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να είναι αδύνατες.

$$\text{i)} \quad -x^2 + (\lambda + 5)x - 3\lambda - 7 = 0$$

$$\text{ii)} \quad (\lambda - 7)x^2 + (\lambda - 4)x - 1 = 0$$

$$\text{iii)} \quad x^2 - x + \lambda^2 = 0$$

$$\text{iv)} \quad \lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 2\lambda - 1 = 0$$

35. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad x^2 - 5|x| + 4 < 0$$

$$\text{ii)} \quad x^4 - 10x^2 + 9 > 0$$

$$\text{iii)} \quad (2x - 3)^2 - |12x - 18| + 5 \leq 0$$

36. Να βρείτε, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες οι ανισώσεις που δίνονται, ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{i)} \quad x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$$

$$\text{ii)} \quad 4x^2 + 4(2\lambda - 1)x + 4 - 3\lambda \geq 0$$

$$\text{iii)} \quad (\lambda + 4)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 6 < 0$$

$$\text{iv)} \quad (\lambda - 3)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 6 > 0$$

37. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α'. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

β'. Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

38. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α'. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$

β'. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ'. Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$$

39. Δίνεται το τριώνυμο:

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α'. Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $c = 2a$ και $b = -3a$

β'. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $a < 0$

ii. να λύσετε την ανίσωση: $cx^2 + bx + a < 0$

40. (★★) Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 + bx + b^2, \quad b \in \mathbb{R}$$

- α'. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.
 β'. i. Αν $b \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;
 ii. Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $b = 0$;
 γ'. Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$a^2 + ab + b^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα μηδέν.

41. (★★) Δίνεται η εξίσωση: $|x - 4| - |x - 2| = 2$
 α'. Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.
 β'. Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί.
 γ'. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x - 4| - |x - 2| = 2$, τότε να δείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$

42. (★★) Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 - ax - (a + 1) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

- α'. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.
 β'. Αν είναι $a > -2$, τότε:
 i. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $a + 1$.
 ii. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2 - ax - (a + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024.
 iii. Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{a}{2}\right)$.

43. (★★) Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 2x - 8$$

- α'. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .
 β'. Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 γ'. Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

44. α'. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.
 β'. Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
 ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

45. (★★)

α'. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β'. Να δείξετε ότι:

$$\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0 \quad , \quad \text{όπου } \pi = 3.1415\dots$$

γ'. Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει ότι $(|a|+3)^2 - (|a|+3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $a \in (-1, 1)$.

46. (★★)

α'. Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 3x + 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β'. Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς a, b διαφορετικούς από το μηδέν με $a < b$ για τους οποίους ισχύει:

$$(a^2 - 3a + 2)(b^2 - 3b + 2) < 0$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει: $|(a-1)(b-2)| = (a-1)(b-2)$

47. (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α'. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες.

β'. Να λύσετε την εξίσωση.

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ'. Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

δ'. Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$.

48. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α'. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β'. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ'. Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ'. Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$$

όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$

49. (★★) Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- α'. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.
 β'. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
 γ'. Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:
 i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.
 ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου:

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

50. (★★) Θεωρούμε το τριώνυμο:

$$f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$$

με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α'. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
 β'. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 γ'. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και a, b δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $a < x_1 < x_2 < b$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου:

$$a \cdot f(a) \cdot b \cdot f(b)$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

51. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0 \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α'. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 β'. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
 γ'. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S} - P}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντιστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

52. (★★) Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- α'. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 β'. Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
 γ'. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 , είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:
 i. να αποδείξετε ότι:

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$$

ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$$

53. Δίνεται η ανίσωση:

$$|x - 1| \leq 3 \quad (1)$$

α'. Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β'. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ'. Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής: $x^2 + bx + c$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$

54. (★★) Δίνεται η ανίσωση:

$$|x - 1| \leq 3 \quad (1)$$

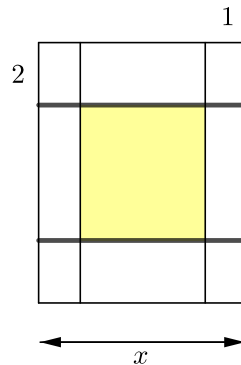
α'. Να λύσετε την ανίσωση (1).

β'. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ'. Να βρείτε μία ανίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

δ'. Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόστασή του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

55. (★★) Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm, όπου ($5 \leq x \leq 10$), στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α'. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x - 2)(x - 4)$$

β'. Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .

γ'. Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

56. (★★) Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \quad \lambda \in (0, 4)$$

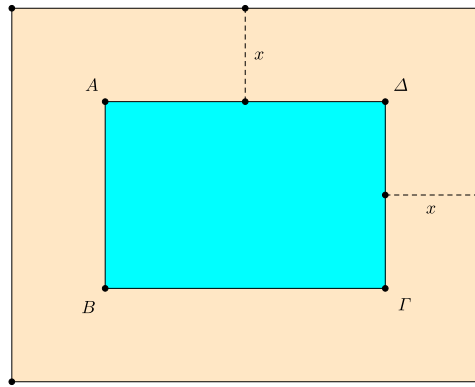
α'. Να βρείτε:

- i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .
- ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β'. Να αποδείξετε ότι: $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$

γ'. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

57. (★★) Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις $15m$ και $25m$. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μία πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος $x\ m$, ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α'. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από την σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x, \quad x > 0$$

β'. Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν $E = 500m^2$.

γ'. Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μέρος ΙΙΙ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 4

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Περνάμε τώρα στο πιο βασικό θέμα της Άλγεβρας που είναι η μελέτη της έννοιας της συνάρτησης. Θα ξεκινήσουμε από την πιο βασική περίπτωση συνάρτησης που είναι η ακολουθία. Ας θεωρήσουμε την παρακάτω λίστα αριθμών:

$$2, 5, 8, 11, \dots$$

Εδώ μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει ο πρώτος αριθμός της λίστας και είναι ο 2, ο δεύτερος αριθμός της λίστας είναι ο 5, ο τρίτος αριθμός της λίστας είναι ο 8 και ούτε καθεξής. Έτσι λοιπόν έχουμε μία αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών στους αριθμούς της παραπάνω λίστας ως εξής:

$$1 \mapsto 2, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 8, 4 \mapsto 11, \dots$$

Κάθε τέτοια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών στους πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται *ακολουθία*. Οι αριθμοί σε μία τέτοια λίστα που προκύπτουν από μία ακολουθία λέγονται *όροι* της ακολουθίας. Στο παράδειγμά μας, ο αριθμός 2 είναι ο πρώτος όρος της ακολουθίας, ο αριθμός 5 είναι ο δεύτερος όρος της ακολουθίας, ο αριθμός 8 είναι ο τρίτος όρος της ακολουθίας και ούτω καθεξής.

Συνήθως για τις ακολουθίες χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό: (a_n) . Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την ακολουθία:

$$(a_n) \quad \text{όπου} \quad a_n = (-1)^n (n-1)^2$$

Ο a_n λέγεται *n-οστός όρος* ή *γενικός όρος* της ακολουθίας. Αν ξεκινήσουμε από $n = 1$ και αντικαθιστούμε διαδοχικά στην θέση του n φυσικούς αριθμούς θα προκύψει η παρακάτω λίστα αριθμών:

$$0, 1, -4, 9, \dots$$

Ένας άλλος τρόπος να πάρουμε τους όρους μίας ακολουθίας είναι να έχουμε κάποιους από τους πρώτους όρους της και μία σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερους γενικούς όρους της. Τότε λέμε ότι η ακολουθία ορίζεται *αναδρομικά*. Για παράδειγμα μία πολύ γνωστή ακολουθία, η ακολουθία Fibonacci (F_n) ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{και} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Αν δώσουμε τιμές στο n , ξεκινώντας από την τιμή $n = 1$, θα πάρουμε την παρακάτω λίστα αριθμών:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Κάθε όρος της ακολουθίας, εκτός των δύο πρώτων που δίνονται, προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων. Αυτό δηλώνει ο αναδρομικός τύπος $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με γενικό όρο:

$$a_n = 2n^2 + 3$$

Να βρείτε:

α'. Τους όρους a_1 , a_2 και a_{10}

β'. Την διαφορά $a_{n+1} - a_n$

2. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με γενικό όρο:

$$a_n = \frac{5n - 12}{3}$$

α'. Να βρείτε ποιος όρος της ακολουθίας είναι ίσος με 11.

β'. Να βρείτε ποιος είναι ο πρώτος όρος της ακολουθίας που είναι μεγαλύτερος από 16.

3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = -1 \quad \text{και} \quad a_{n+1} = a_n^2 + 2$$

α'. Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους της ακολουθίας.

β'. Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: $a_{n+1} > a_n$

4. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες με γενικό όρο:

i) $a_n = 3n - 2$

ii) $a_n = 3 \cdot 2^n$

iii) $a_n = 2^n - 1$

5. Να βρείτε τον γενικό όρο των ακολουθιών που ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

i) $a_1 = 4$ και $a_{n+1} = a_n + 3$

ii) $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = 3a_n$

6. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1 \quad \text{και} \quad a_n = \left(\frac{n-3}{n-1} \right) a_{n-2}, \quad \text{για κάθε } n \geq 3$$

Να βρείτε τον όρο a_{1998}

4.2 Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ορισμός : Μία ακολουθία λέγεται *αριθμητική πρόοδος*, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Για παράδειγμα η ακολουθία:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \dots$$

είναι μία αριθμητική πρόοδος διότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του 3.

Τον αριθμό που προσθέτουμε σε κάθε όρο της αριθμητικής προόδου για να προκύψει ο επόμενός του τον συμβολίζουμε ω και τον ονομάζουμε *διαφορά της προόδου*. Επομένως τους όρους μίας αριθμητικής προόδου μπορούμε να τους παραστήσουμε και ως εξής:

$$a_1, a_1 + \omega, a_1 + 2\omega, a_1 + 3\omega, a_1 + 4\omega, \dots$$

Μία ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω αν και μόνο αν:

$$a_{n+1} - a_n = \omega$$

Ο n -οστός όρος μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι ίσος με:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \omega$$

Το άθροισμα των n πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι ίσο με:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1) \omega]$$

Τρεις αριθμοί a, b, c είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Ο αριθμός b λέγεται *αριθμητικός μέσος* των a και c .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ο n -οστός όρος μίας ακολουθίας (a_n) είναι $a_n = 5n+2$, $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο της a_1 καθώς και την διαφορά της ω .
2. Να βρείτε τον 15^ο όρο της αριθμητικής προόδου: 7, 15, 23, 31, ...
3. Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_8 = 22$ και $a_{14} = 40$. Να βρείτε τον a_{20} .
4. (★) Ο πρώτος όρος μίας αριθμητικής προόδου (a_n) ισούται με 2 και ο τρίτος όρος ισούται με 8.
 α'. Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.
 β'. Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.
5. (★) Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) ισχύουν: $a_1 = 2$ και $a_{25} = a_{12} + 39$
 α'. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.
 β'. Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.
6. (★) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με όρους $a_2 = 0$, $a_4 = 4$.
 α'. Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $a_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και a_1 ο πρώτος όρος της.
 β'. Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $a_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.
7. (★) Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) δίνονται $a_1 = 41$ και $a_6 = 26$.
 α'. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .
 β'. Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $a_n = n$
8. (★) Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά ω .
 α'. Να δείξετε ότι:

$$\frac{a_{15} - a_9}{a_{10} - a_7} = 2$$

 β'. Αν $a_{15} - a_9 = 18$, να βρείτε την διαφορά ω της προόδου.
9. (★★) Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_{20} = 61$.
 α'. Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 3$.
 β'. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.
 γ'. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (a_n) , τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$
10. (★★) Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_2 = k^2$ και $a_3 = (k+1)^2$, όπου k ακέραιος με $k > 1$.
 α'. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.
 β'. Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$, τότε:
 i. Να βρείτε την τιμή του k και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.
 ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου.
11. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί 4, $2x+1$ και $3x+4$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
12. (★) Δίνονται οι αριθμοί: $1 - x$, $\frac{x}{2}$, $2x - 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α'. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου.
- β'. Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.
13. (★)
- α'. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί $x+2, x+1, 3x+2$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
- β'. Για $x = -1$, να βρείτε την διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.
14. (★)
- α'. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- β'. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με την σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
15. (★)
- α'. Να λύσετε τις εξισώσεις: $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$
- β'. Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του (α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στην συνέχεια:
- να δείξετε ότι με αυτή την σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (a_n) της οποίας να βρείτε την διαφορά ω .
 - να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (a_n) .
16. (★) Οι αριθμοί $A = 1, B = x + 4, C = x + 8$ είναι, με την σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (a_n) .
- α'. Να βρείτε την τιμή του x .
- β'. Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) , τότε:
- να υπολογίσετε την διαφορά ω .
 - να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.
17. (★★) Οι αριθμοί: $x^2 + 5, x^2 + x, 2x + 4$ με την σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
- α'. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .
- β'. Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε:
- Την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.
 - Τον πρώτο όρο της προόδου.
 - Το άθροισμα: $S = a_{15} + a_{16} + a_{17} + \dots + a_{24}$
18. (★★) Δίνεται η εξίσωση:
- $$x^2 - 2bx + (b^2 - 4) = 0 \quad (1) \quad , \quad b \in \mathbb{R}$$
- α'. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = b - 2$ και $x_2 = b + 2$
- β'. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, b, x_2 , με την σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.
19. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων είκοσι όρων της αριθμητικής προόδου: 8, 11, 14, 17, ...
20. (★) Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει: $a_4 - a_2 = 10$.
- α'. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.
- β'. Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον

πρώτο όρο a_1 της προόδου.

21. (★) Οι αριθμοί $x + 6$, $5x + 2$, $11x - 6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω .

α'. Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β'. Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των οκτώ πρώτων όρων της.

22. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$S = \frac{1 + 3 + 5 + \dots + 99}{2 + 4 + 6 + \dots + 100}$$

23. (★) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει ότι: $a_1 = 19$ και $a_{10} - a_6 = 24$

α'. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

β'. Να βρείτε τον a_{20}

γ'. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

24. (★) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) των θετικών περιττών αριθμών: $1, 3, 5, 7, \dots$

α'. i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

β'. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .

25. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της είναι -3 , ενώ το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της είναι 10 .

26. (★) Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) , με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $a_6 + a_{11} = 40$

α'. Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

β'. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

27. (★) Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι: $a_1 = 2$ και $a_5 = 14$.

α'. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

β'. Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77 .

(Δίνεται $\sqrt{1849} = 43$)

28. Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει $a_7 - a_2 = 20$ και $a_3 = 11$. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να αθροίσουμε για να πάρουμε άθροισμα 105 ;

29. (★)

α'. Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραιών: $1, 2, 3, \dots, n$

β'. Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45 .

30. Σε μία αριθμητική πρόοδο έχουμε $a_3 = 11$ και $a_6 = 23$. Να βρείτε πόσοι πρώτοι όροι της προόδου πρέπει να αθροιστούν ώστε το άθροισμα να είναι όσο μεγαλύτερο γίνεται αλλά να μην ξεπερνά το 210 .

31. (★★) Δίνεται η ακολουθία (a_n) με γενικό τύπο: $a_n = 10 + 3n$

α'. i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της a_1 και την διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

- β'. Να βρείτε ποιοι όροι της (a_n) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;
- γ'. Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.
32. (★★) Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) , ο 3^{ος} όρος είναι $a_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $a_8 = 23$.
- α'. Να βρείτε τον 1^ο όρο a_1 και την διαφορά ω της προόδου.
- Αν $a_1 = 2$ και $\omega = 3$,
- β'. Να υπολογίσετε τον 31^ο όρο της προόδου.
- γ'. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + (a_3 + 3) + \dots + (a_{31} + 31)$
33. (★★) Δίνεται μία αριθμητική πρόοδος (a_n) , $n \in \mathbb{N}^*$, της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι:
- $$a_1 = x, \quad a_2 = 2x^2 - 3x - 4, \quad a_3 = x^2 - 2, \quad x \text{ ακέραιος}$$
- α'. Να αποδείξετε ότι $x = 3$
- β'. Να βρείτε τον n -οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να είναι ίσος με 2014.
- γ'. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15}$
34. Να βρείτε την αύξουσα αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της είναι 27, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 275.
35. Μία αριθμητική πρόοδος αποτελείται από δώδεκα όρους, το άθροισμα των οποίων είναι ίσο με 354. Ο λόγος του αθροίσματος των όρων άρτιας τάξης προς το άθροισμα των όρων περιττής τάξης είναι ίσος με $32 : 27$. Να βρείτε την διαφορά της προόδου.
36. (★★) Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι:
- $$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n = 2n^2 + 3n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq 1$$
- α'. Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1
- β'. Να αποδείξετε ότι:
- $$S_{n-1} = 2n^2 - n - 1, \quad n \geq 2$$
- γ'. Να αποδείξετε ότι: $a_n = 4n + 1, \quad n \geq 1$
- δ'. Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε την διαφορά ω .
37. (★★) Έστω μία αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά $\omega = 3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta = [2, 8]$ υπάρχουν ακριβώς τρεις διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (a_n) ,
- α'. Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (a_n) .
- β'. Να βρείτε τους τρεις διαδοχικούς όρους της (a_n) που υπάρχουν στο $\Delta = [2, 8]$.
- γ'. Αν $a_6 = 14$,
- να βρείτε τον a_1
 - να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (a_n) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186.
- (Δίνεται $\sqrt{4489} = 67$)
38. (★★) Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (a_n) , $n \in \mathbb{N}^*$, με $a_3 = 8$ και $a_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (b_n) , $n \in \mathbb{N}^*$, που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

- α'. Να αποδείξετε ότι $a_1 = 2$ και $\omega = 3$.
 β'. Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.
 γ'. Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της (a_n) είναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) , να βρείτε τον αριθμό n .
39. (★) Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.
 α'. Να εκφράσετε με μία αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.
 β'. Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;
 γ'. Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;
40. Ένας συλλέκτης γραμματοσήμων έχει ένα άλμπουμ 25 σελίδων και έχει τοποθετήσει σε αυτό γραμματόσημα με τον ακόλουθο τρόπο: Στην πρώτη σελίδα έχει τοποθετήσει 4 γραμματόσημα και σε κάθε άλλη σελίδα έχει τοποθετήσει ω γραμματόσημα περισσότερα από την προηγούμενη. Αν η μεσαία σελίδα του άλμπουμ περιέχει 40 γραμματόσημα, να βρείτε:
 α'. Τον αριθμό ω .
 β'. Πόσα γραμματόσημα υπάρχουν στην τελευταία σελίδα;
 γ'. Πόσα γραμματόσημα υπάρχουν από την 10^η μέχρι και την 21^η σελίδα;
 δ'. Πόσα γραμματόσημα υπάρχουν στις μονές σελίδες του άλμπουμ;
41. (★) Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.
 α'. Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.
 β'. Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.
 γ'. Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά;
42. (★★) Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.
 α'. Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;
 β'. Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.
 γ'. Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.
 δ'. Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;
43. (★★) Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15, ... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.
 α'. Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 β'. Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

- γ'. Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ'. Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.
44. (★★) Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^η σειρά έχει 28 καθίσματα.
- α'. Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.
- β'. Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.
- γ'. Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;
- δ'. Αν στην 1^η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στην 2^η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από την 2^η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:
- Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.
 - Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.
45. (★★) Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στην 10^η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει δύο καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.
- α'. Αν a_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι η a_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και την διαφορά ω .
- β'. Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.
- γ'. Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθημένους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.
46. (★★) Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δύο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1^η ημέρα 1 σελίδα, την 2^η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε δύο σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Την δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1^η ημέρα 13 σελίδες, την 2^η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε δύο σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δύο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.
- α'.
 - Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (a_n) της οποίας να βρείτε τον γενικό τύπο a_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.
 - Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_n) της οποίας να βρείτε τον γενικό τύπο β_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.
- β'. Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.
- γ'. Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.
- δ'. Να δείξετε ότι $a_n = \beta_{8-n}$, για κάθε $n = 1, 2, \dots, 7$

47. (★★) Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων:

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

- α'. Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (a_n) με $a_1 = 5$ και να βρείτε την διαφορά της.
 β'. Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β.
 γ'. Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση στην παραπάνω διαδοχή.
48. (★★) Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στην συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.
- α'. Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;
 β'. Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
 γ'. Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;
 δ'. Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο;
49. (★★) Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560€, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910€. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (a_n).
- α'. Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι:

$$a_n = 107n + 1210 \quad (1)$$

- β'. Να ερμηνεύσετε την σημασία:
 i. του αριθμού 1210 στην σχέση (1).
 ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.
 γ'. Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.
50. (★★) Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.
- α'. Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.
 β'. Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.
 γ'. Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μία εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^η μέχρι και την 14^η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.
51. (★★) Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μία δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευτεί τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος απαντά με ένα πρόβλημα:
- «Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x + 3$ σειρές με $x - 3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».
- α'. Να βρείτε την τιμή του x .
 β'. Να αποδείξετε ότι η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.

- γ'. Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε n ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του n , δηλαδή πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν.
52. (★★) Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης να πληρώνει 0.5€ περισσότερα από τον προηγούμενο.
- α'. Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.
- β'. Αν, για κάθε $n \leq 51$, ο αριθμός a_n εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο n -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε την διαφορά ω της προόδου.
- γ'. Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51^{ος} επιβάτης.
- δ'. Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.
- (Δίνεται: $\sqrt{10201} = 101$)
53. (★★) Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μία ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.
- α'. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον n -οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;
- β'. Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^η κυψέλη;
- γ'. Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.
- Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^η κυψέλη;
 - Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

4.3 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ορισμός : Μία ακολουθία λέγεται *γεωμετρική πρόοδος*, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιον μη μηδενικό αριθμό.

Για παράδειγμα η ακολουθία:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, \dots$$

είναι μία γεωμετρική πρόοδος διότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί 2.

Τον αριθμό με τον οποίον πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της γεωμετρικής προόδου για να προκύψει ο επόμενός του τον συμβολίζουμε λ και τον ονομάζουμε *λόγο της προόδου*. Επομένως τους όρους μίας γεωμετρικής προόδου μπορούμε να τους παραστήσουμε και ως εξής:

$$a_1, \lambda a_1, \lambda^2 a_1, \lambda^3 a_1, \lambda^4 a_1, \dots$$

Μία ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ αν και μόνο αν:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

Ο n -οστός όρος μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ είναι ίσος με:

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

Το άθροισμα των n πρώτων όρων μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και λόγο $\lambda \neq 1$ είναι ίσο με:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, b, c είναι διαδοχικοί όροι μίας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$b^2 = ac$$

Ο θετικός αριθμός $b = \sqrt{ac}$ λέγεται *γεωμετρικός μέσος* των a και c .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ο n -οστός όρος μίας ακολουθίας (a_n) είναι $a_n = 3 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο της a_1 καθώς και τον λόγο της λ .
2. Να βρείτε τον 10^ο όρο της γεωμετρικής προόδου: 3, 9, 27, 81, ...
3. Να βρείτε την γεωμετρική πρόοδο της οποίας ο τέταρτος όρος είναι -4 και ο ενδέκατος είναι $\frac{1}{64}$.
4. (★) Σε γεωμετρική πρόοδο (a_n) με θετικό λόγο λ , ισχύει: $a_3 = 1$ και $a_5 = 4$
 α'. Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.
 β'. Να αποδείξετε ότι n -οστός όρος της προόδου είναι: $a_n = 2^{n-3}$
5. (★) Δίνεται μία πρόοδος (a_n) με πρώτους όρους: 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$, ...
 α'. Να εξετάσετε αν η (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος.
 β'. Να αποδείξετε ότι η (a_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.
6. Να βρείτε τον πρώτο όρο μίας γεωμετρικής προόδου (a_n) στην οποία ισχύουν:

$$a_2 + a_5 = 216 \quad \text{και} \quad \frac{a_4}{a_6} = \frac{1}{4}$$

7. Ο τέταρτος όρος μίας γεωμετρικής προόδου είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο όρο της κατά 24 και το άθροισμα του δεύτερου και του τρίτου όρου της είναι ίσο με 6. Να βρείτε την πρόοδο.
8. (★★) Έστω οι πραγματικοί αριθμοί κ , λ με $\kappa \neq 0$, $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$. Θεωρούμε τους αριθμούς:

$$\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$$

- α'. Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
 - β'. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών αριθμών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.
 - γ'. Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda$ με $\kappa > 0$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$
9. (★)
 α'. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x, 2x+1, 5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
 β'. Να βρείτε τον λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

$$\text{i) } x = 1$$

$$\text{ii) } x = -1$$

10. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $5x-9, 2x+3$ και $3x-1$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
11. (★)
 α'. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - x - 6 = 0$
 β'. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k-2, k, 2k+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

12. (★)

- α'. Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .
- β'. Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .
- γ'. Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

13. (★)

- α'. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 5x + 2 = 0$
- β'. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1 , 1 , x_2 με την σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

14. (★)

- α'. Να βρείτε για ποιες τιμές του x οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- β'. Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε:
- τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.
 - τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

15. (★) Οι αριθμοί $k - 2$, $2k$ και $7k + 4$, $k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μίας γεωμετρικής προόδου (a_n) .

- α'. Να αποδείξετε ότι $k = 4$ και να βρείτε τον λόγο λ της προόδου.
- β'. i. Να εκφράσετε τον δεύτερο όρο, τον πέμπτο και τον τέταρτο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1 .
- ii. Να αποδείξετε ότι: $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$

16. (★) Δίνεται η εξίσωση:

$$2x^2 - 5bx + 2b^2 = 0 \quad (1) \quad , \quad b > 0$$

- α'. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2b$ και $x_2 = \frac{b}{2}$
- β'. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1 , b , x_2 , με την σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

17. Σε μία γεωμετρική πρόοδο (a_n) είναι $a_8 = 384$ και $\lambda = 2$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων της.

18. (★) Μία γεωμετρική πρόοδος (a_n) έχει πρώτο όρο $a_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{a_3}{a_1} = 4$

- α'. Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.
- β'. Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.
- γ'. Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

19. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1024}$$

20. (★) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) , για την οποία ισχύει: $\frac{a_5}{a_2} = 27$

- α'. Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

β'. Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 .

21. Να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων μίας γεωμετρικής προόδου στην οποία ισχύει:

$$a_2 + a_6 = 34 \quad \text{και} \quad a_3 + a_7 = 68$$

22. Το άθροισμα τριών διαδοχικών όρων μίας γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με 21 και το γινόμενο τους είναι ίσο με 216. Να βρείτε τους όρους αυτούς.

23. (★★) Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (a_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$

α'. Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \right)^7$

β'. Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ'. Αν $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (a_n) είναι ίσο με:

$$\frac{\left(\sqrt{3} \right)^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$$

24. (★★) Δίνονται οι αριθμοί: 2, x , 8 με $x \in \mathbb{R}$.

α'. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με την σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β'. Να βρείτε τον αριθμό x , ώστε οι 2, x , 8, με την σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ'. Αν (a_n) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_n) η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ..., τότε να βρείτε:

i. Το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (a_n) .

ii. Την τιμή του n , ώστε για το άθροισμα S_n του (γί) ερωτήματος να ισχύει:

$$2(S_n + 24) = \beta_7$$

25. (★★) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν: $a_3 = 4$, $a_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α'. Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τον λόγο λ της προόδου.

β'. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{a_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (a_n) .

γ'. Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_n) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_n) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} \cdot S_{10}$$

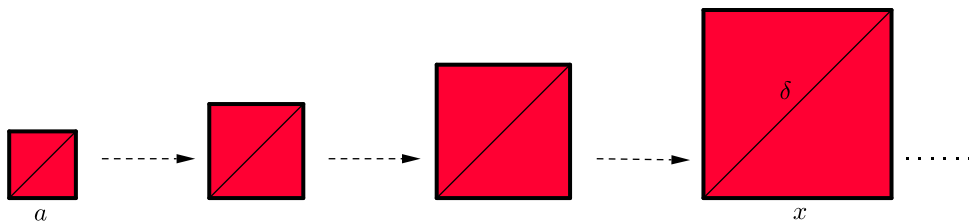
26. (★★) Δίνεται ορθογώνιο μήκους a , πλάτους b και εμβαδού E . Οι αριθμοί a , E , b , με την σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

- α'. Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E .
- β'. Αν $E = 1$ και $a + b = 10$,
- να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες a και b .
 - να βρείτε τις διαστάσεις a και b του ορθογώνιου.
27. Ο Γιώργος αγόρασε έναν υπολογιστή αξίας 1120€ και έδωσε προκαταβολή 500€. Για το υπόλοιπο ποσό συμφώνησε να το εξοφλήσει άτοκα σε 5 δόσεις, έτσι ώστε κάθε δόση να είναι διπλάσια της προηγούμενης. Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.
28. (★★) Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{\text{ης}}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της $2^{\text{ης}}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της $3^{\text{ης}}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.
- α'. Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{\text{ης}}$ ημέρας μετά από το ατύχημα.
- β'. Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;
- γ'. Στο τέλος της $9^{\text{ης}}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.
29. (★★) Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:
Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1° μήνα 1 ευρώ, τον 2° μήνα ευρώ, τον 3° μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1° μήνα 100 ευρώ, τον 2° μήνα 110 ευρώ, τον 3° μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
- α'. Να βρείτε:
- το ποσό a_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον n° (νιοστό) μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
 - το ποσό b_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον n° μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
 - το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
 - το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
- β'.
 - Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με το κάθε πρόγραμμα;
 - Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;
30. (★★) Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μία ώρα.
- α'. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;
- β'. Την χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε

ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μία ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).

- i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της.
- ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n .
- iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

31. (★★) Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς a , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



- α'.
 - i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$
 - ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (a_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $a_n = a^2 \cdot 2^{n-1}$
- β'. Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ, να βρείτε:
 - i. την πλευρά a του αρχικού τετραγώνου.
 - ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ

Κεφάλαιο 5

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

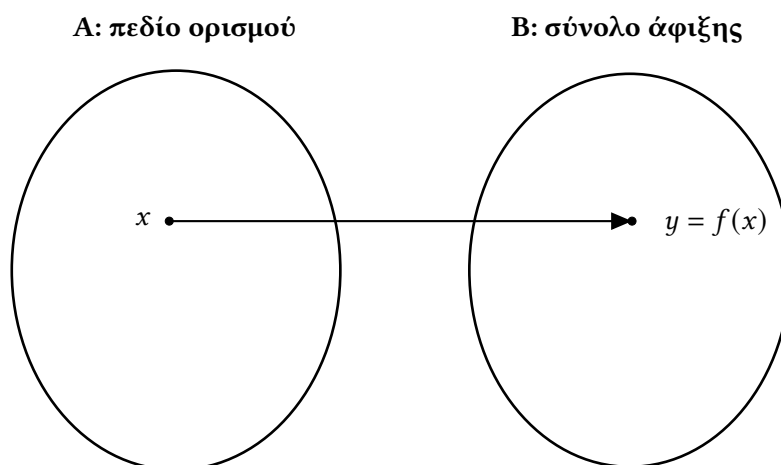
5.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η συνάρτηση είναι η πιο βασική έννοια στην Άλγεβρα. Στην καθημερινή σου ζωή, ακόμα και αν πολλές φορές δεν το συνειδητοποιείς, σχετίζεις δύο μεγέθη μεταξύ τους, με αναρίθμητους τρόπους. Οι συσχετίσεις αυτές είναι συναρτήσεις. Στην πραγματικότητα ο ανθρώπινος εγκέφαλος σκέφτεται χρησιμοποιώντας συναρτήσεις! Ας ξεκινήσουμε λοιπόν δίνοντας τον ορισμό της συνάρτησης.

Ορισμός : Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται ένας κανόνας με τον οποίον κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B .

Το σύνολο A λέγεται *πεδίο ορισμού* ή *σύνολο ορισμού* της συνάρτησης. Για να γνωρίζω μία συνάρτηση είναι *απαραίτητο* να γνωρίζω το πεδίο ορισμού της.

Το σύνολο B λέγεται *σύνολο άφιξης* της συνάρτησης.



Το στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο στοιχείο $y \in B$ και γράφουμε:

$$y = f(x)$$

Το $f(x)$ λέγεται η τιμή της f στο x . Το x είναι η *ανεξάρτητη μεταβλητή* και το y είναι η *εξαρτημένη μεταβλητή* της συνάρτησης.

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f , λέγεται *σύνολο τιμών* της f και συμβολίζεται $f(A)$.

Για να γνωρίζω μία συνάρτηση πρέπει να γνωρίζω δύο πράγματα: τον τύπο της συνάρτησης και το πεδίο ορισμού της. Οι πιο συνηθισμένοι τρόποι να μας δώσουν μία συνάρτηση είναι οι εξής:

ΠΡΩΤΟΣ ΤΡΟΠΟΣ: Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$

Εδώ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(0, +\infty)$ και ο τύπος της συνάρτησης, δηλαδή ο κανόνας με τον οποίον αντιστοιχίζουμε το y με το x είναι ο $y = x^2$.

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x > 0$

Εδώ και πάλι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(0, +\infty)$ και ο τύπος της συνάρτησης, δηλαδή ο κανόνας με τον οποίον αντιστοιχίζουμε το y με το x είναι ο $y = x^2$.

ΤΡΙΤΟΣ ΤΡΟΠΟΣ: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$

Εδώ δεν δίνεται το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τότε είμαστε εμείς υποχρεωμένοι να το δώσουμε. Στην περίπτωση αυτή, δίνουμε σαν πεδίο ορισμού το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ο τύπος της έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Για το παράδειγμά μας αυτό θα ήταν το $\mathbb{R}$. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται οι κανόνες που πρέπει να ακολουθούμε για να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού.

Κανόνες για την εύρεση του πεδίου ορισμού		
	Ο τύπος είναι	Το πεδίο ορισμού είναι
1.	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$A = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$
2.	$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$A = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β'. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς -1 , $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 6 είναι αυτό δυνατό.

2. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$$

α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β'. Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$

3. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

α'. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$

β'. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \frac{5}{2}$

4. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$$

α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει:

$$f(x) = x^2 + 4x$$

β'. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$

5. (★)

α'. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $x^2 - 5x + 6$

β'. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

6. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$$

α'. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x = 2$, $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$

β'. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .

γ'. Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3 .

7. (★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 1 - 3x \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x+5}$$

- α'. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .
 β'. Να δείξετε ότι: $f(-1) = g(11)$
 γ'. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$

8. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & , \quad x < 0 \\ x - 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- α'. Να δείξετε ότι: $f(-1) = f(3)$
 β'. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$

9. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x < 0 \\ 2x + 2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- α'. Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$
 β'. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$

10. (★) Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} 8 - x & , \quad x < 0 \\ 2x + 5 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- α'. Να δείξετε ότι: $f(-5) = f(4)$
 β'. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 9$

11. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- α'. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$
 β'. Για $x \geq 0$, να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$

12. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x & , \quad \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$$

- α'. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(\frac{1}{2})$
 β'. Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση: $[f(x)]^2 = 4x - 1$

13. (★) Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από την σχέση:

$$y = 35 + 0,8x$$

- α'. Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;
 β'. Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

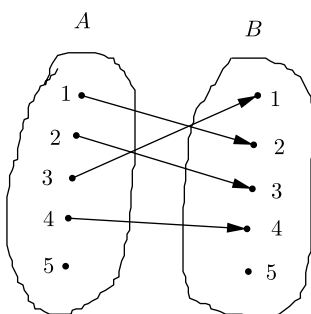
14. (★) Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από την σχέση:

$$T = 15 + 25x \quad , \quad \text{όταν } 0 \leq x \leq 200$$

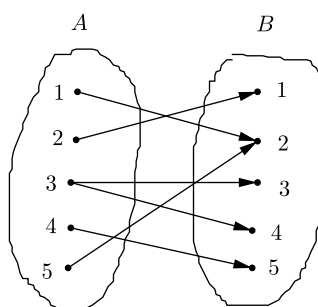
- α'. Να βρείτε την θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β'. Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ'. Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
15. (★) Έχουμε μπροστά μας την λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου. Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f : A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g : B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.
- α'. Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f : A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .
- β'. Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g : B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.
16. (★) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

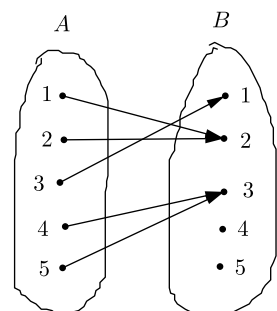
- α'. i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.
ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β'. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$
17. (★) Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τρεις αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2



ΣΧΗΜΑ 3

- α'. Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B .
- β'. Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,
- Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του, το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
 - Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .
 - Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

18. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + a \quad \text{και} \quad g(x) = ax - 5, \quad a \in \mathbb{R}$$

- α'. Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του a .
- β'. Για $a = 1$,
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$
 - Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με την βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$$

19. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ της f .
- β'. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{A}$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$
- γ'. Για $x \in \mathbb{A}$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$

20. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{|x - 1| - |3 - 3x| + |2x - 4|}{2}$$

- α'. Να δείξετε ότι: $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$
- β'. Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε την λύση της.
- γ'. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$

21. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - \mu x - 2, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

- α'. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.
- β'. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- γ'. Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, τότε:
- Να βρείτε τις τιμές του μ .
 - Για $\mu = \frac{13}{7}$, να βρείτε τον λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

22. (★★)

α'. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^2 + 2x + 3 = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
- ii. Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εξίσωση να έχει μία διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β'. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$

23. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 3x^2 + 6ax + 6b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- α'. Να δείξετε ότι: $f(a) + f(b) \geq b^2 - 36$
- β'. Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(a) + f(b) = b^2 - 36$
- γ'. Αν $a = 2$ και $b = -6$:
 - i. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 6x$
 - ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$$

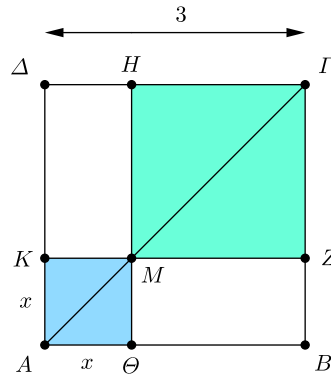
24. (★★) Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μία μονάδα).

α'. Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{4}{3}(x - 25)$$

- β'. Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;
- γ'. Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από την βάση που είναι 50;
- δ'. Το άθροισμα των επιδόσεων δύο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δύο μαζί;

25. (★★) Στο επόμενο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3\text{cm}$ και τυχαίο σημείο M που κινείται στην διαγώνιο $A\Gamma$ εσωτερικά (δηλαδή το M δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγώνιου).



- α'. Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HGZM$ και $KMΘA$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
- β'. Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι:

$$E(x) = 2x^2 - 6x + 9$$

να αποδείξετε ότι $E(x) \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$.

- γ'. Για ποια θέση του M πάνω στην AG το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

26. (★★) Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x + 12 & , \quad 0 \leq x \leq 30 \\ 0.7x + 6 & , \quad x > 30 \end{cases}$$

- α'. Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:
- έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό.
 - έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερό.
 - έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερό.
- β'. Σε μια άλλη πόλη B , το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0.6x \quad , \quad x \geq 0$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B , να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

27. (★★) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB = x$ και $A\Gamma = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$.

- α'. Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
- β'. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$E(x) = \frac{1}{2} (10x - x^2)$$

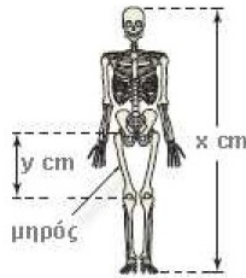
να δείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0, 10)$.

γ'. Να βρείτε την τιμή του $x \in (0, 10)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

28. (★★) Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

$$\text{Γυναίκα: } y = 0.43x - 26$$

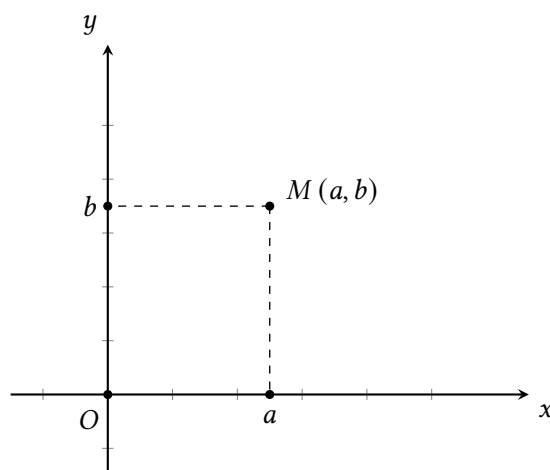
$$\text{Άνδρας: } y = 0.45x - 31$$



- α'. Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38.5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.
- β'. Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm . Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42.8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ'. Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

5.2 ΤΟ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ

Στο επίπεδο θεωρούμε δύο άξονες κάθετους μεταξύ τους. Το σημείο τομής τους θεωρούμε ότι βρίσκεται το 0 του κάθε άξονα. Το σημείο αυτό λέγεται *η αρχή των αξόνων*. Ο οριζόντιος άξονας (συμβολίζεται $x'x$) ονομάζεται *άξονας τετμημένων* και ο κατακόρυφος άξονας (συμβολίζεται $y'y$) ονομάζεται *άξονας τεταγμένων*. Αν έχουμε ένα σημείο M στο επίπεδο, μπορούμε από το σημείο αυτό να φέρουμε κάθετες προς τους δύο άξονες. Η κάθετη στον άξονα $x'x$ θα προσδιορίσει έναν πραγματικό αριθμό a πάνω στον άξονα, όμοια και η κάθετη στον άξονα $y'y$ θα προσδιορίσει έναν άλλον πραγματικό αριθμό b στον άξονα αυτόν. Τότε στο σημείο M αντιστοιχίζουμε το ζευγάρι των πραγματικών αριθμών a και b με πρώτον τον αριθμό a και δεύτερο τον αριθμό b και γράφουμε $M(a, b)$. Το ζευγάρι (a, b) λέμε ότι είναι οι *συντεταγμένες* του σημείου M και πιο ειδικά ο αριθμός a λέγεται *τετμημένη* του M , ενώ ο αριθμός b λέγεται *τεταγμένη* του M . Η παραπάνω κατασκευή λέγεται *καρτεσιανό σύστημα αξόνων* ή *ορθοκανονικό σύστημα αξόνων*.



Αν σας δίνονται οι συντεταγμένες (a, b) ενός σημείου M σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων, σκεφτείτε ότι σας έχουν δοθεί οδηγίες για τον τρόπο με τον οποίον θα φτάσετε στο σημείο M . Η αφετηρία σας είναι πάντοτε το σημείο O , η αρχή των αξόνων. Ο πρώτος αριθμός, ο a , σας λέει πόσο αριστερά ή πόσο δεξιά θα πάτε ξεκινώντας από το σημείο O . Αν είναι θετικός θα κινηθείτε δεξιά, ενώ αν είναι αρνητικός θα κινηθείτε αριστερά. Στην συνέχεια, από το σημείο που φτάσατε, ο δεύτερος αριθμός, ο b , σας λέει πόσο πάνω ή κάτω θα πάτε. Αν είναι θετικός θα κινηθείτε προς τα πάνω, ενώ αν είναι αρνητικός θα κινηθείτε προς τα κάτω. Αν ακολουθήσετε τις οδηγίες αυτές φτάσατε στον προορισμό σας!

Ας κάνουμε μερικές βασικές παρατηρήσεις:

Ένα σημείο $M(a, b)$ ανήκει στον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν $b = 0$.

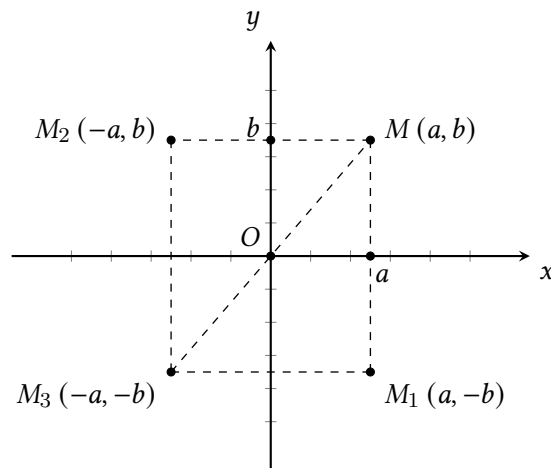
Ένα σημείο $M(a, b)$ ανήκει στον άξονα $y'y$ αν και μόνο αν $a = 0$.

Το συμμετρικό του σημείου $M(a, b)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $M_1(a, -b)$.

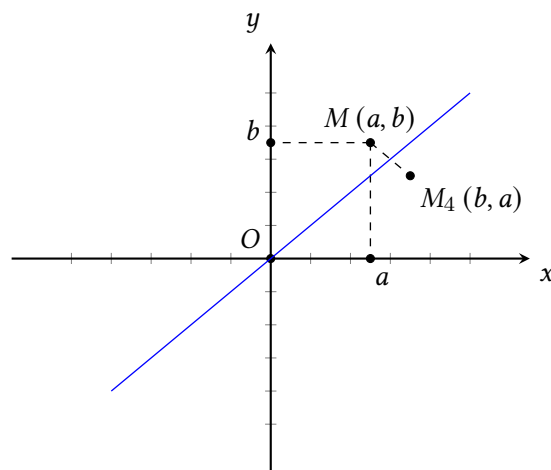
Το συμμετρικό του σημείου $M(a, b)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $M_2(-a, b)$.

Το συμμετρικό του σημείου $M(a, b)$ ως προς την αρχή των αξόνων O είναι το σημείο $M_3(-a, -b)$.

Το συμμετρικό του σημείου $M(a, b)$ ως προς την ευθεία $y = x$ είναι το σημείο $M_4(b, a)$.



Σχήμα 5.1: Τα συμμετρικά σημεία του σημείου $M(a, b)$ ως προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 5.2: Το συμμετρικό σημείο του σημείου $M(a, b)$ ως προς την ευθεία $y = x$.

Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Η απόσταση των σημείων, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB δίνεται από τον τύπο:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Το μέσον M του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε το σημείο $A(3\lambda - 2, 2\lambda^2 - \lambda - 1)$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ αν το σημείο:
 - i) βρίσκεται στον άξονα $x'x$
 - ii) βρίσκεται στον άξονα $y'y$
2. Δίνονται τα σημεία $A(4, 0)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(5, 3)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$.
3. Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(2, 4)$ και $\Gamma(6, 0)$.
 - α'. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές ορθογώνιου τριγώνου.
 - β'. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου Γ .
 - γ'. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους Δ του τριγώνου Γ .
4. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων $A(x - 1, -2)$ και $B(5, -2)$ είναι ίση με 3;
5. (★★) Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2 - \lambda^2, \mu)$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 - α'. Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ .
 - β'. Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ .
 - γ'. Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$:
 - i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B .
 - ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων.

5.3 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός: Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ και Oxy ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων:

$$\{M(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{A}\}$$

λέγεται *γραφική παράσταση* της f και συμβολίζεται C_f .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στην γραφική παράσταση μίας συνάρτησης αν και μόνο αν:

$$f(x_0) = y_0$$

2) Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, υπολογίζουμε το $f(0)$, υπό την προϋπόθεση ότι το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Το σημείο θα είναι τότε το $(0, f(0))$.

3) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{A}$. Τα σημεία τότε θα είναι τα $(x_i, 0)$, όπου x_i είναι κάθε μία από τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

4) Αν $f(x) > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

5) Αν $f(x) < 0$, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

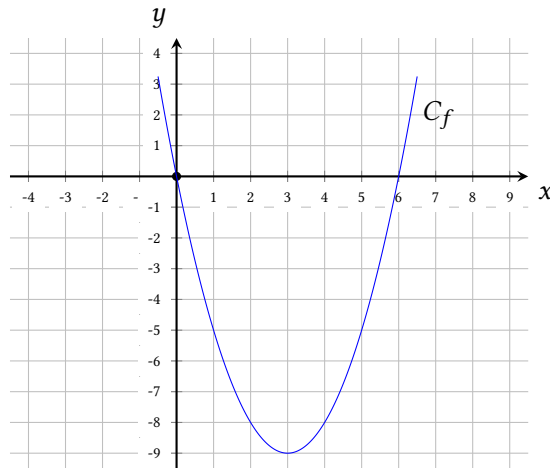
6) Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g με πεδία ορισμού $\mathbb{A}$ και $\mathbb{B}$ αντίστοιχα, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. Τα σημεία τότε θα είναι τα $(x_i, f(x_i))$, όπου x_i είναι κάθε μία από τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

7) Αν $f(x) > g(x)$, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g .

8) Αν $f(x) < g(x)$, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g .

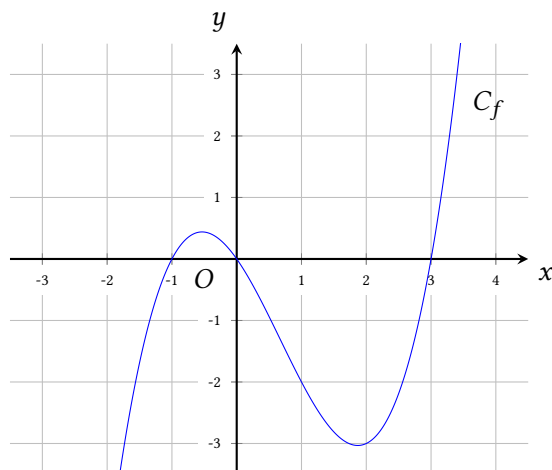
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (★) Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μίας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



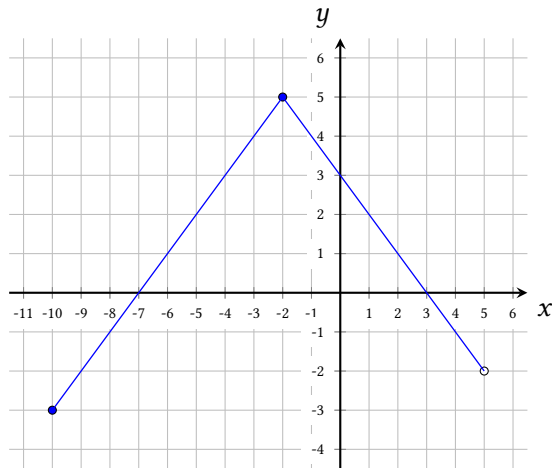
Με την βοήθεια του σχήματος:

- α'. Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.
 - β'. Να λύσετε γραφικά την εξίσωση: $f(x) = 0$
 - γ'. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση: $f(x) < 0$
2. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



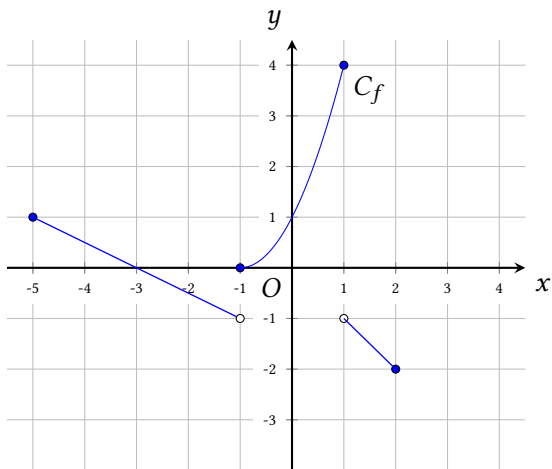
Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση:

- α'. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$
 - β'. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 0$
 - γ'. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 0$
3. (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .



- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\mathbb{A}$ και το σύνολο τιμών της $f(\mathbb{A})$.
 β'. Να βρείτε τις τιμές: $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.
 γ'. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$.
 δ'. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$.

4. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .



Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση:

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
 β'. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$
 γ'. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$T = f(-5) \cdot f(-4) \cdot f(-3) \cdot f(-2)$$

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$$

Να εξετάσετε ποιά από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην γραφική παράσταση της f .

i) $A\left(3, \frac{9}{2}\right)$

ii) $B(1, 2)$

iii) $\Gamma(-1, 3)$

6. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$$

α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β'. Να υπολογίσετε το $f(-24)$.

γ'. Να εξετάσετε αν το σημείο $(1, 3)$ ανήκει στην γραφική της παράσταση.

7. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}, \quad x \neq -1$$

α'. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$, για κάθε $x \neq -1$.

β'. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

8. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β'. Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ'. Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1, -2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - x + 3$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε το σημείο $M(a, a+2)$ να ανήκει στην C_f .

10. (★) Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β'. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε το σημείο $M(a, \frac{1}{8})$ να ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & , \quad x < 2 \\ bx^2 + 5 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b ώστε η C_f να διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(3, 14)$.

12. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + 2x - 15, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $f(-1) + f(0) + f(1)$

β'. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

13. (★) Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β'. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .
 γ'. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

14. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

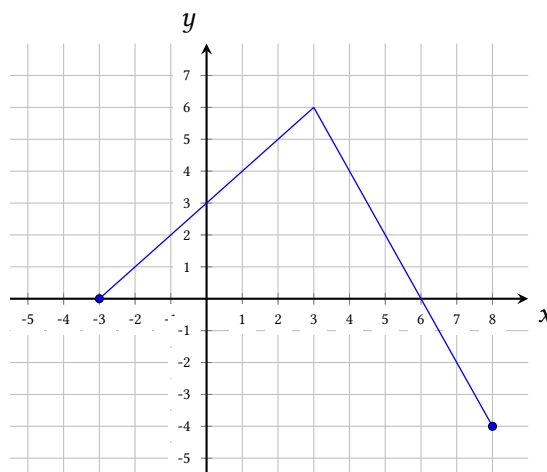
- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β'. Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 γ'. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

15. (★) Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ της συνάρτησης f .
 β'. Ανήκει το σημείο $M(1, 3)$ στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;
 γ'. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

16. (★) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α'. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β'. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3	
y					-2 4

- γ'. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.
 δ'. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

17. (★) Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 β'. i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$
 ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.
 γ'. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

18. (★) Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & , \quad x \leq 3 \\ x^2 & , \quad 3 < x < 10 \end{cases}$$

- α'. Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.
 β'. Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 γ'. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

19. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x - 1}$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
 β'. Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$.
 γ'. Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

20. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

- α'. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.
 β'. Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f .
 γ'. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

21. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = ax + b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- α'. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των a, b .
 β'. Αν $a = 1$ και $b = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις:

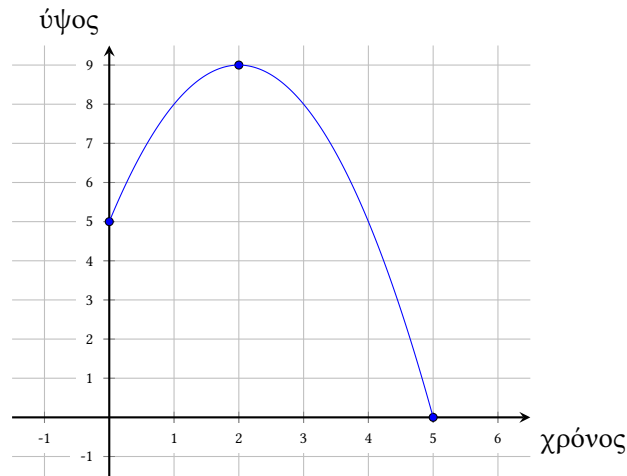
$$f(x) = x^3 \quad \text{και} \quad g(x) = x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

- α'. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.
 β'. Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0, 0)$, να αποδείξετε ότι τα A, B είναι συμμετρικά ως προς το O .

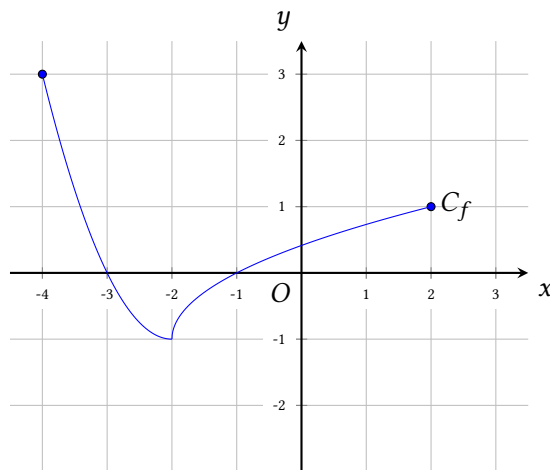
23. (★) Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (σε μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (σε sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- α'. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;
 β'. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

- γ'. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.
 δ'. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.



24. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .



Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση:

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β'. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
 γ'. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$
 δ'. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού k , να βρείτε πόσες λύσεις θα έχει η εξίσωση: $f(x) = k$

25. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$$

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

- α'. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.
 β'. Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$
 i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
 ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

26. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{3 - |x|}$$

- α'. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .
- β'. Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι: $f(x) = 3 + |x|$
- γ'. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.
- δ'. Αν $g(x) = 3 - x^2$, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

27. (★★) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

- α'.
 - i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ της συνάρτησης f .
 - ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$, για κάθε $x \in \mathbb{A}$.
- β'. Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

28. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ της f .
- β'. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- γ'. Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{A}$.
- δ'. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο $\mathbb{A}$.

29. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
- β'. Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.
- γ'. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

30. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x-1)^2 - 4 \quad \text{και} \quad g(x) = |x-1| + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α'. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- β'. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- γ'. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

31. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \quad \text{και} \quad g(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α'. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στην συνέχεια να προσδιορίσετε.
β'. Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x) = x + a$$

Να δείξετε ότι:

- i. Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν δύο κοινά σημεία.
- ii. Αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h δεν έχουν κοινά σημεία.

32. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = x + a, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- α'. Για $a = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
- β'. Να βρείτε για ποιες τιμές του a , οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.
- γ'. Για $a > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

33. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5} \quad \text{και} \quad g(x) = |x + 3|$$

Να βρείτε:

- α'. τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β'. τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g
- γ'. τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g

34. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = ax - a + 2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - a + 3, \quad a \in \mathbb{R}$$

- α'. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a .
- β'. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:
 - i. Να αποδείξετε ότι $a = 2$.
 - ii. Για $a = 2$, υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- γ'. Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - ax + 1 = 0$ και στην συνέχεια ότι για $a = 3$, $a = -2$, $a = 1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

35. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α'. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- β'. Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $a \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες a και $-a - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ'. Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $b > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι $\left[\sqrt{2}(b+1) \right]^2$.

36. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

και η ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$.

- α'. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.
- β'. Να αποδείξετε ότι αν $0 < a < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δύο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.
- γ'. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$

37. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(a+3)x + 3a}{2x - 3}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β'. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - a$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .
- γ'. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.
- δ'. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

38. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2 - 5x + 4)}{x-1}$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\mathbb{A}$.
- β'. Να δείξετε ότι: $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{A}$.
- γ'. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$.
- δ'. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f .

39. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-1)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α'. Να αποδείξετε ότι: $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$
- β'. Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.
- γ'. Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί με $a \neq b$ ώστε να ισχύει $f(a) = f(b)$. Να αποδείξετε ότι $a + b = 2$.

40. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- α'. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β'. Για $\lambda \neq 0$, να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- γ'. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4, 4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
- δ'. Για $\lambda = -1$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

41. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 7x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

- α'. Να αποδείξετε ότι $k = 10$.
- β'. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
- γ'. Έστω $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$, $a < b$, δύο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
 - i. Να αποδείξετε ότι: $a < \frac{2a+3b}{5} < b$
 - ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τεταγμένη $x_0 = \frac{2a+3b}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

42. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 + b \quad \text{και} \quad g(x) = x + b$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ και b σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3b}{2}, -3 - \frac{b}{2}\right)$.

- α'. Να αποδείξετε ότι $b = -1$
- β'. Για $b = -1$,
 - i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 - ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .
 - iii. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$

43. (★★) Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0.20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

- α'. Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα, ταξίδεψε $400 km$;
- β'. Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μία ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;
- γ'. Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0.10x$$

όπου, όπως και προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ'. Αν:

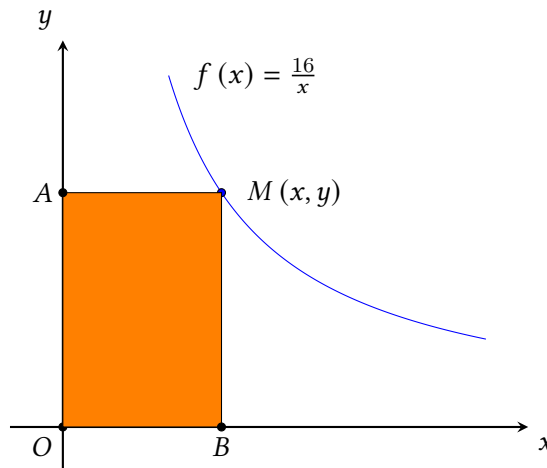
$$f(x) = 60 + 0.20x \quad \text{και} \quad g(x) = 80 + 0.10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μίας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

44. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{16}{x}, \quad x > 0$$

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α'. Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περιμέτρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από την συνάρτηση:

$$\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}, \quad x > 0$$

όπου x η τετμημένη του M .

β'. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

γ'. Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο $OAM'B$ να είναι τετράγωνο τότε:

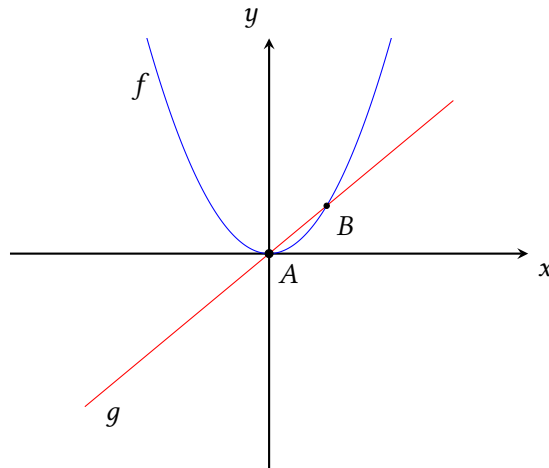
i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4.

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο $OAM'B$ έχει την μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι: $\Pi(x) \geq \Pi(4)$, για κάθε $x > 0$.

45. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = x$$

που τέμνονται στα σημεία A, B .



α'. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B .

β'. Αν $A(0, 0)$ και $B(1, 1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την γραφική παράσταση της g .

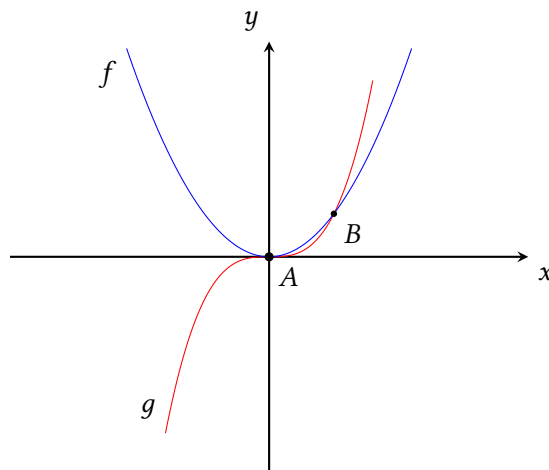
ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο (i) ερώτημα.

γ'. Αν $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a}{b}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a, b με $b \neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|a| < |b|$.

46. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^3$$

που τέμνονται στα σημεία A, B .



α'. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B .

Έστω $A(0, 0)$ και $B(1, 1)$.

β'. Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$.

γ'. Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ'. Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3.1415 \dots$ να δείξετε ότι:

i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$

ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$

47. (★★) Δίνεται το τριώνυμο:

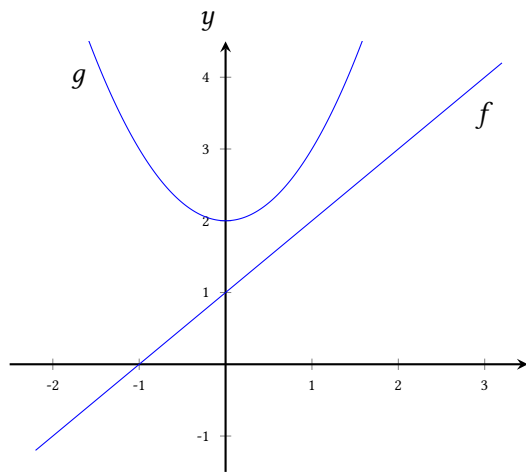
$$x^2 - \lambda x + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α'. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \lambda^2 - 4$

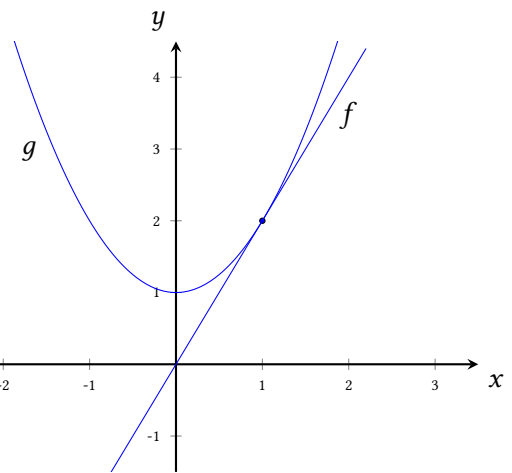
β'. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \lambda x - \lambda + 2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - \lambda + 3, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

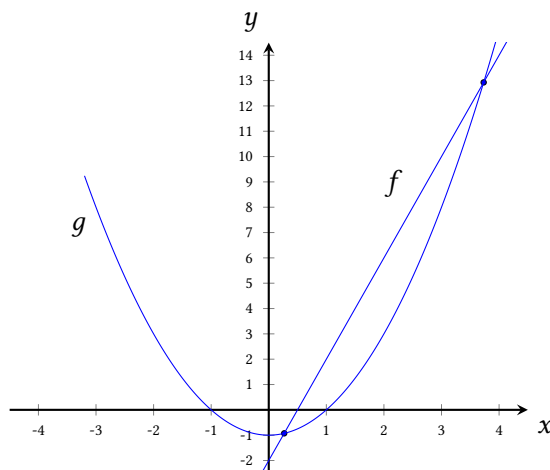
- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $x^2 - \lambda x + 1 = 0$
- ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ . Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1, 2, 4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



ΣΧΗΜΑ (I)



ΣΧΗΜΑ (II)

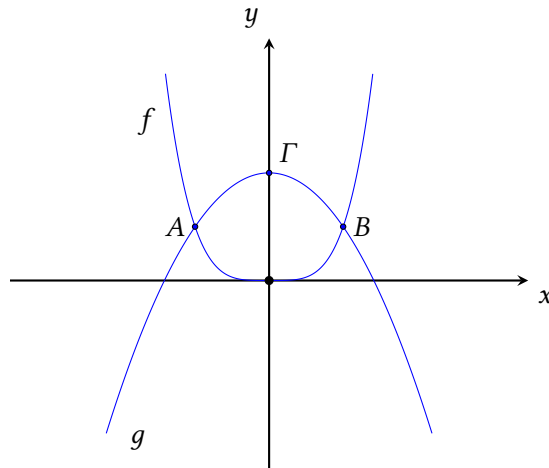


ΣΧΗΜΑ (III)

48. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^4 \quad \text{και} \quad g(x) = 2 - x^2$$

Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α'. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ .

Αν $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(0, 2)$

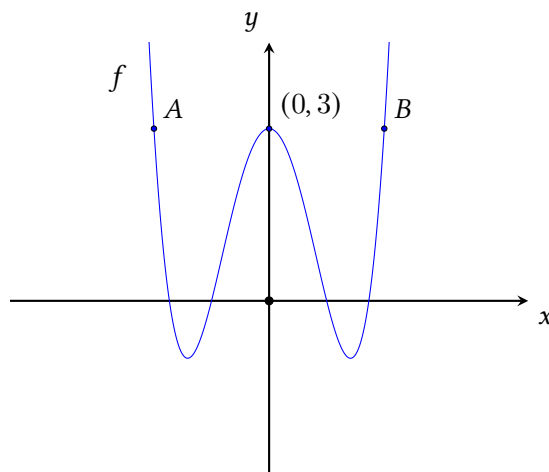
β'. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

γ'. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα (β).

49. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = ax^4 - 4x^2 + c$$

η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α'. Να δείξετε ότι $c = 3$.

β'. Αν $A(a^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

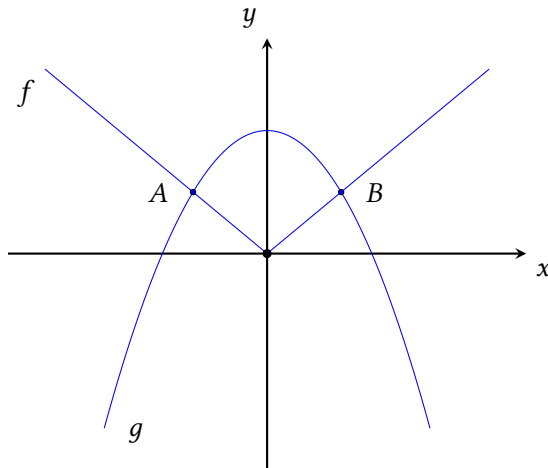
γ'. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

δ'. Με την βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος (γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

50. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = |x| \quad \text{και} \quad g(x) = 2 - x^2$$

Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .



α'. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β'. Αν $A(-1, 1)$ και $B(1, 1)$:

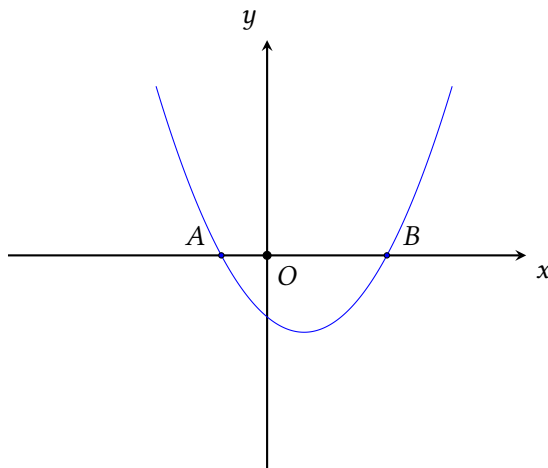
i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι:

$$f(x) < g(x)$$

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα (βi).

51. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 - x - 1$$



Αν $A(\omega, 0)$ και $B(\phi, 0)$

α'. Να δείξετε ότι:

i) $\omega + \phi = 1$

ii) $\omega \cdot \phi = -1$

β'. Να δείξετε ότι $OB > OA$

γ'. Αν ένας θετικός αριθμός b είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει την μία μονάδα, να δείξετε ότι $b > \phi$.

δ'. Να δείξετε ότι $\phi < \frac{5}{3}$

52. (★★) Δίνεται το τριώνυμο:

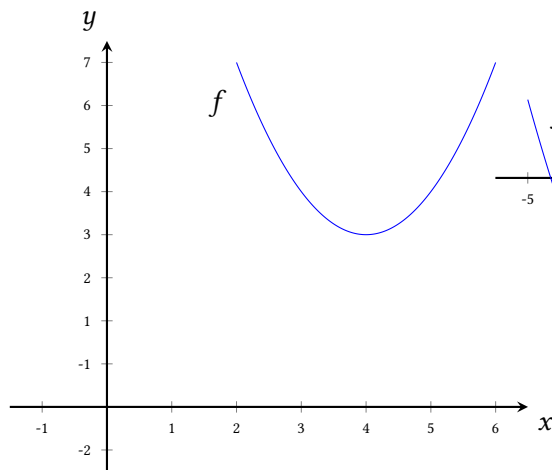
$$x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α'. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$

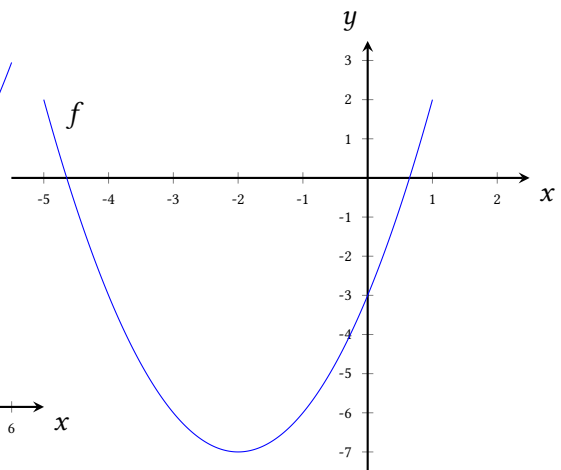
β'. Θεωρούμε την συνάρτηση f , που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$$

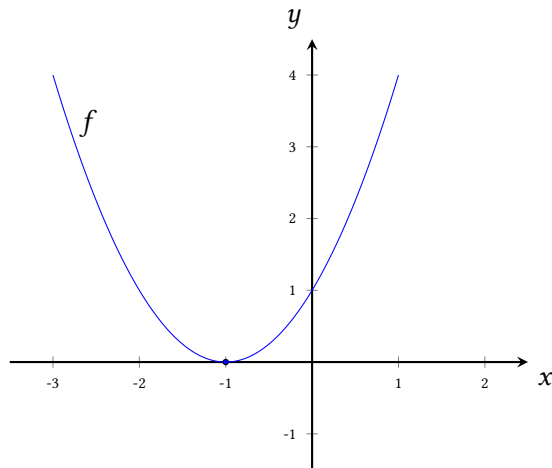
Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .



ΣΧΗΜΑ (I)



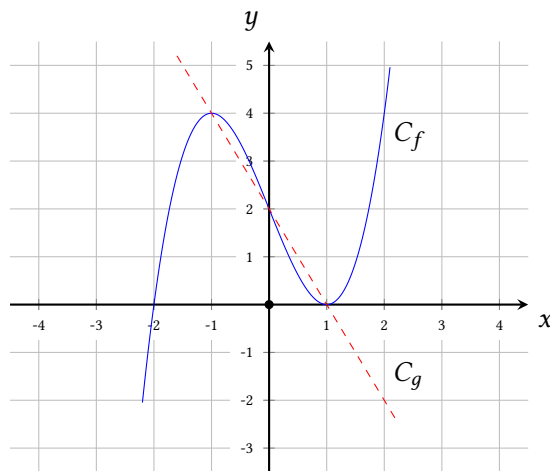
ΣΧΗΜΑ (II)



ΣΧΗΜΑ (III)

- i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2, 4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντησή σας.
- ii. Για το σχήμα (III) να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

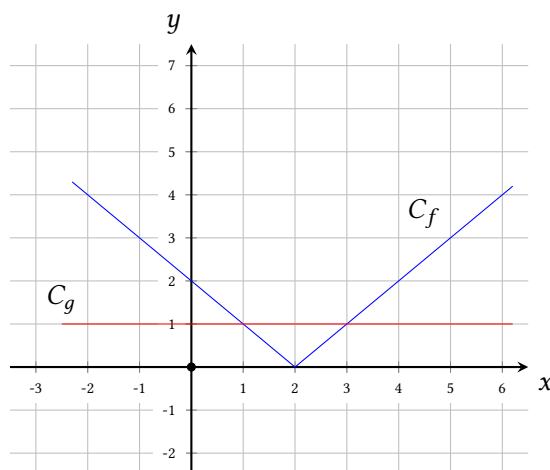
53. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$



Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

- α'. Τις τιμές του x για τις οποίες: $f(x) = -2x + 2$
 - β'. Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$.
 - γ'. Τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g .
 - δ'. Τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.
54. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

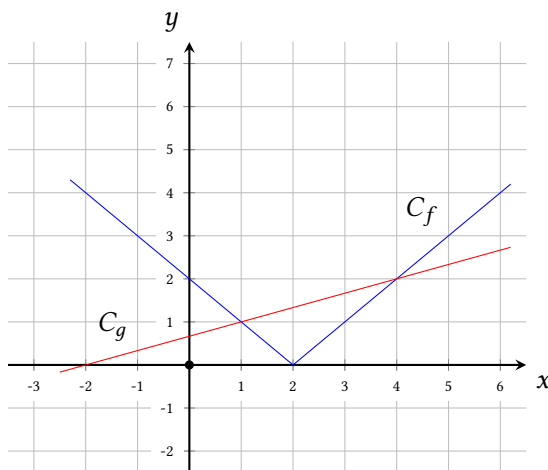
$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$



- α'. Με την βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε:
 - i. τα σημεία τομής των C_f και C_g .
 - ii. τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .
- β'. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα (ai) και (aii).
- γ'. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η παράσταση $A = \frac{\sqrt{1 - f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

55. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

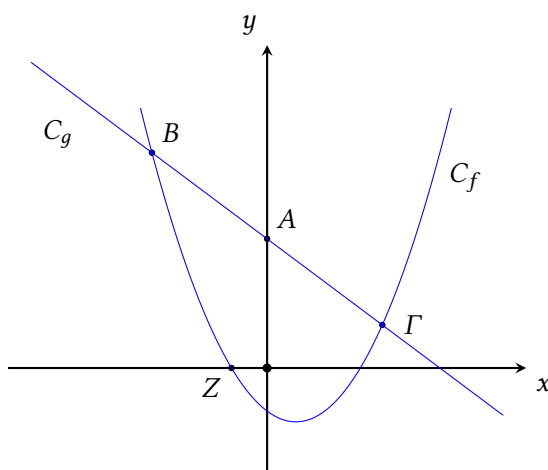


- α'. Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .
 β'. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα (α).
 γ'. Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .
 δ'. Με την βοήθεια του ερωτήματος (γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση: $K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}$

56. (★★) Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

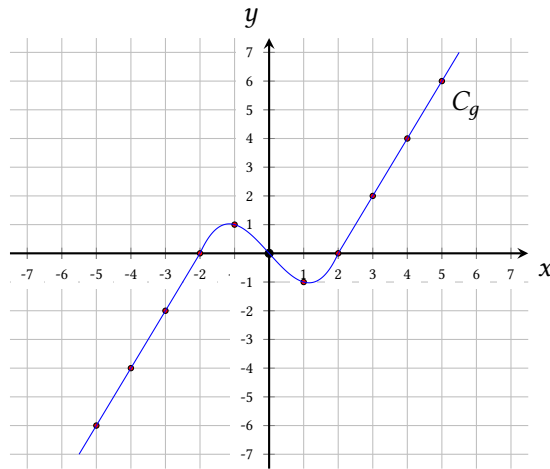
$$f(x) = x^2 - x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 3 - x$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



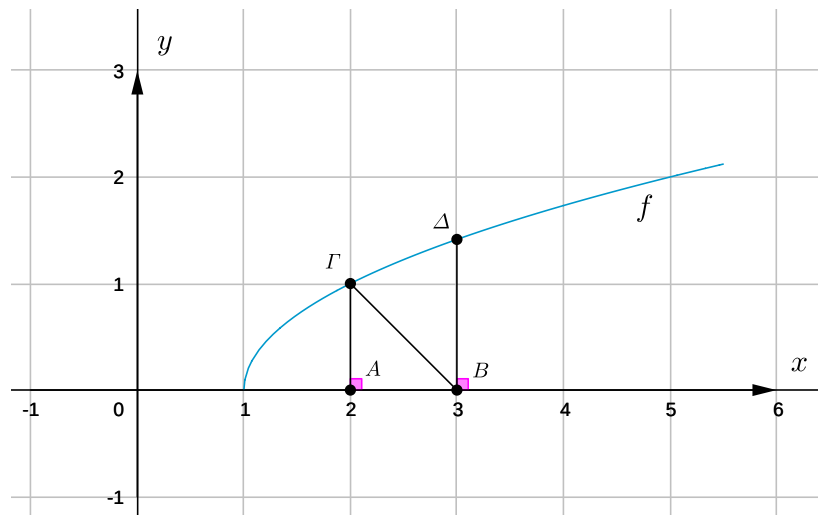
- α'. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z .
 β'. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$.
 γ'. Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό a , η απόσταση των αριθμών $f(a)$ και $-g(a)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

57. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g . Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.



- α'. Να λύσετε την ανίσωση: $-2 \leq g(x) \leq 0$
 β'. Να λύσετε την ανίσωση: $|g(x)| \leq 2$
 γ'. i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων: $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$
 ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k .
58. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x-a}, \quad a \in \mathbb{R}$$



- α'. Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$.
 β'. Αν $a = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 γ'. i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2, 1)$ και $(3, \sqrt{2})$ αντίστοιχα.
 ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$.
 iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

59. (★★) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$$

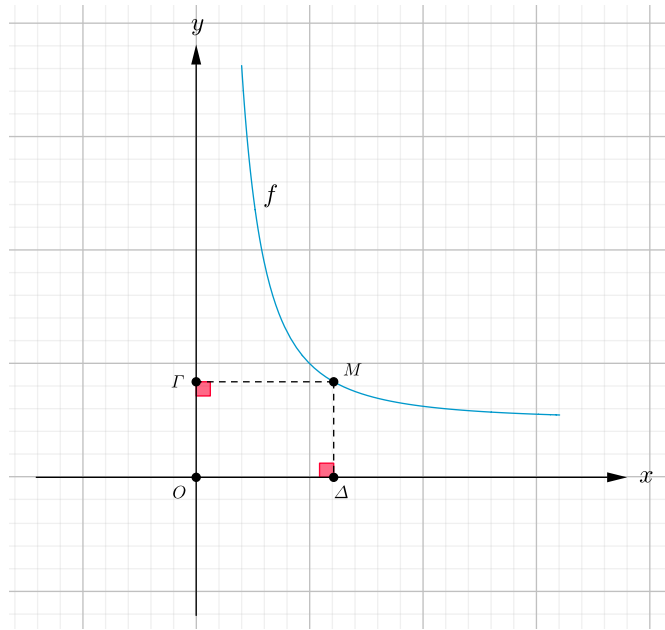
α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β'. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες x και y .

γ'. Έστω $a > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου M της γραφικής παράστασης της f . Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ του σχήματος, να αποδείξετε ότι:

i. $E = a + \frac{4}{a}$

ii. $E \geq 4$



60. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = \lambda x + (1 - \lambda) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad \lambda \neq 0$$

α'. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f, C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β'. Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ'. Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g , να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$$

5.4 Η ΕΥΘΕΙΑ

Ορισμός: Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy και μία ευθεία (ε) , η οποία δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, και έστω P το σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$. Ορίζουμε ως *γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα*, την γωνία ω που πρέπει να διαγράψει η ημιευθεία Ox αν κινηθεί κατά την θετική φορά διαγραφής (αντίθετη της κίνησης του δεικτού των ρολογιών) μέχρι να συμπίσει με την ευθεία (ε) . Σε περίπτωση που η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε ορίζουμε να είναι $\omega = 0^\circ$.

Ορισμός: Κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

έχει ως γραφική παράσταση μία ευθεία. Πολλές φορές θα λέμε και θα γράφουμε:

$$\text{η ευθεία με εξίσωση } y = ax + b$$

Ορισμός: Έστω μία ευθεία (ε) με εξίσωση $y = ax + b$. Τότε:

$$a = \varepsilon\varphi\omega$$

Ο αριθμός a λέγεται *συντελεστής διεύθυνσης* ή *κλίση* της ευθείας (ε) .

- Αν $a > 0$, τότε η γωνία ω είναι οξεία.
- Αν $a < 0$, τότε η γωνία ω είναι αμβλεία.
- Αν $a = 0$, τότε $\omega = 0^\circ$.

Αν μία ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε η κλίση της ευθείας είναι ίση με:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (★) Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $(\varepsilon) : y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α'. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

β'. Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

2. (★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$

α'. Να δείξετε ότι $a = -2$ και $b = 5$.

β'. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ'. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .

3. (★)

α'. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $x^2 + 2x - 3$

β'. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ της παραπάνω συνάρτησης f .

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{A}$.

iii. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

4. (★) Δίνεται η συνάρτηση f , με:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$$

α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ της συνάρτησης f .

β'. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{A}$.

γ'. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

5. (★) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -x + \sqrt{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $[f(-\sqrt{2})]^2$

β'. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

6. (★) Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y = -x + 2$

α'. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

β'. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες.

γ'. Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε) .

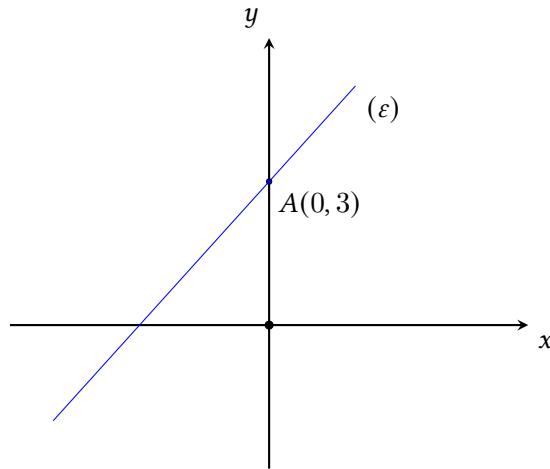
7. (★) Δίνεται η ευθεία $y = ax + b$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

α'. Να βρείτε τις τιμές των a και b .

β'. Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

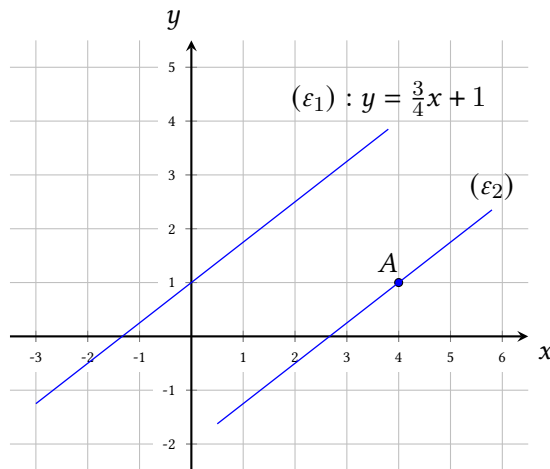
γ'. Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

8. (★) Η παρακάτω ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .



- α'. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε) .
β'. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε) .
γ'. Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $x'x$.
(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$)

9. (★) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .



- α'. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2) .
β'. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) .
γ'. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες.
10. (★) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μία ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .
α'. Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$.
β'. Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.
γ'. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

11. (★) Δίνεται ευθεία $(\varepsilon) : y = ax + 5$. Αν η ευθεία $(\delta) : y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ε) , τότε:

- α'. i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) .
ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.
β'. Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

12. (★) Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon_1) : y = (3a + 4)x - 4 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : y = (3 - 4a)x + 4, \quad a \in \mathbb{R}$$

- α'. Αν $a = 1$, να βρείτε:
i. τις εξισώσεις των ευθειών.
ii. το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.
β'. Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.

13. (★) Δίνεται η ευθεία $y = ax + b$

- α'. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b αν η γραφική παράσταση της ευθείας σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$.
β'. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

14. (★) Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y = -\frac{1}{2}x + 4$

- α'. i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) .
ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;
β'. Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε) .
γ'. Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε) .

15. (★) Έστω η ευθεία $(\varepsilon_1) : y = ax + b$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

- α'. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b .
β'. Να βρείτε την ευθεία (ε_2) που είναι παράλληλη με την (ε_1) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
γ'. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

16. (★) Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

- α'. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0, 0)$.
β'. Δίνεται το σημείο $N(-3, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .
i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
ii. Αν $N(-3, -4)$, να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O .

17. (★★) Δίνεται η συνάρτηση f , με:

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$$

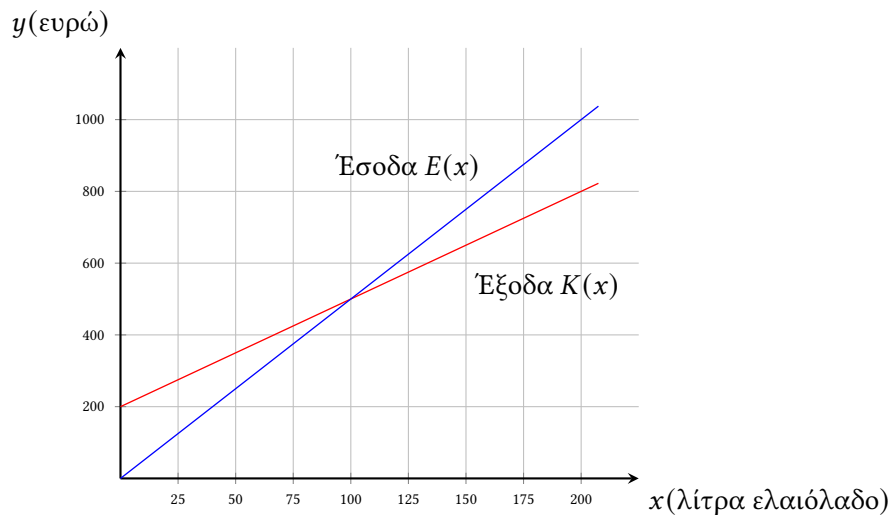
- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
β'. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
γ'. Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

18. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 4x + 2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 9$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- α'. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.
 - β'. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.
 - γ'. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.
 - δ'. Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox .
19. (★★) Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



- α'. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε την σημασία του.
 - β'. Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;
 - γ'. Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;
 - δ'. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).
20. (★★) Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με:

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α'. Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.
- β'. Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- γ'. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.
- δ'. Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

21. (★★) Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α'. Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β'. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

- i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι:

$$f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ'. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

22. (★★) Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α'. Να γράψετε μία σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(n)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει n τόνερ τον μήνα.

β'. Να γράψετε μία σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα $E(n)$ της επιχείρησης από την πώληση n τόνερ τον μήνα.

γ'. Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

- i. να μην έχει ζημιά.
ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

23. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β'. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$

γ'. Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει ότι: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$

24. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{και} \quad g(x) = 3x - 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

α'. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β'. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

γ'. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = a$, $a < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

25. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = |x - 3| + 4 - (|6 - 2x| + 2) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

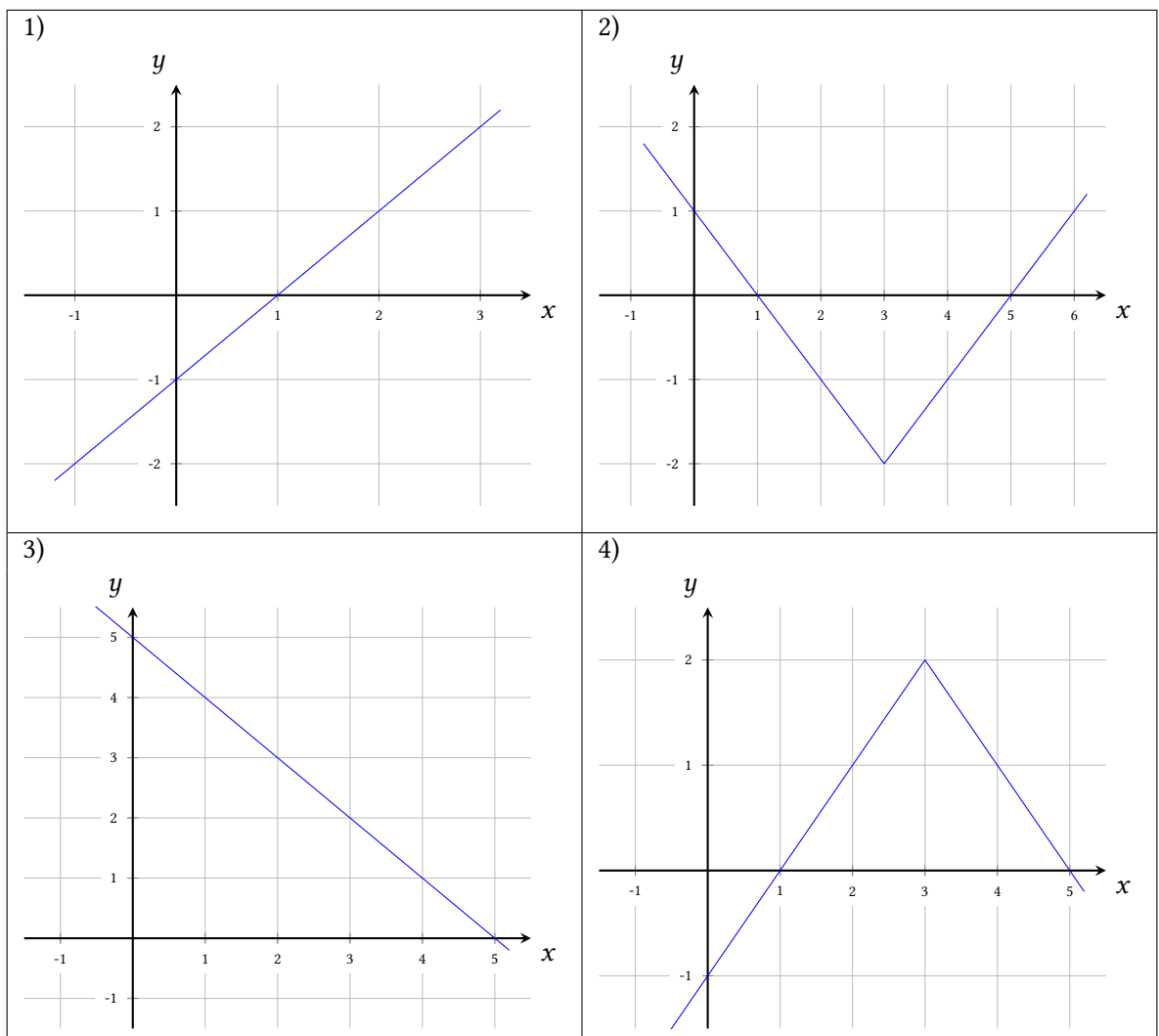
α'. Να δείξετε ότι:

$$f(x) = 2 - |x - 3|$$

β'. Αφού δείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \quad x < 3 \\ 5 - x & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Η γραφική παράσταση της f είναι:



γ'. i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση:

$$2 - |x - 3| > -1$$

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

26. (★★) Σε μία πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α'. i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x (km)			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3.2	4.8

- β'. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x), g(x)$.
 γ'. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 δ'. Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον B, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B.

27. (★★) Δίνεται η συνάρτηση f , με:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & , \quad x < 0 \\ x+2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- α'. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.
 β'. i. Να χαράξετε την C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.
 ii. Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 γ'. i. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a , η ευθεία $y = a$ τέμνει την C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 ii. Για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = a$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

28. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$$

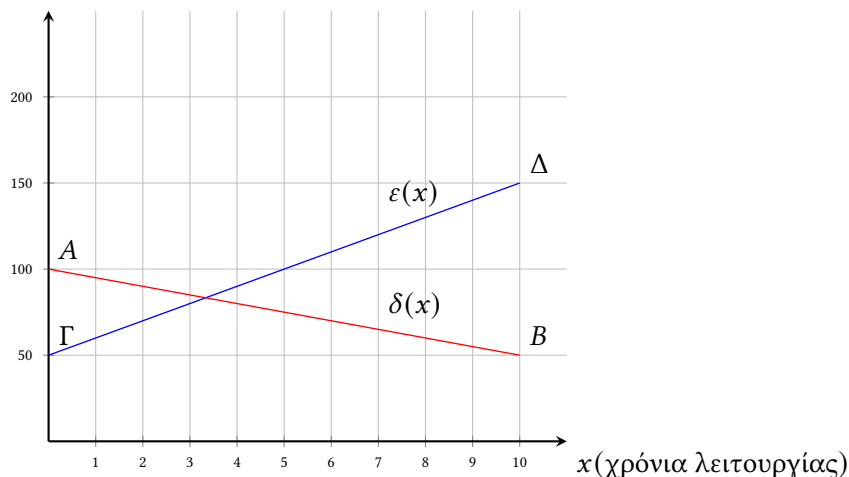
- α'. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
 β'. Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & , \quad x < 2 \\ x+3 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

- γ'. Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 δ'. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq 0$

29. (★★) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(0, 100)$ και $B(10, 50)$ παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0, 50)$ και $\Delta(10, 150)$ παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.

y (χιλιάδες ευρώ)



- α'. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.
- β'. i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο (α) ερώτημα ήταν σωστές.
ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.
30. (★★) Δύο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από την συνάρτηση $K(x) = 12.5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), από την συνάρτηση $E(x) = 15.5x$
- α'. Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β'. Τι εκφράζει ο αριθμός 12.5 και τι ο αριθμός 15.5 στο πλαίσιο του προβλήματος;
- γ'. Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).
- δ'. Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

31. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 1 - (x - 1)^2 \quad \text{και} \quad g(x) = |x - 1| + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

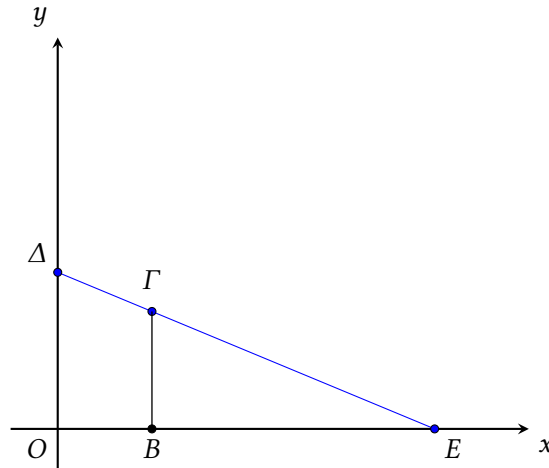
- α'. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
- β'. Να αποδείξετε ότι:

$$g(x) = \begin{cases} -x + 3 & , \quad x < 1 \\ x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση C_g .

γ'. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την γραφική παράσταση της g .

32. (★★) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, E ένα σημείο του $x'x$ άξονα και O είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔE είναι:

$$y + \frac{1}{2}x = 4$$

α'. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και Δ .

β'. Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔE και B είναι ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε η $B\Gamma$ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα. Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι:

$$y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$$

γ'. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$$

εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζιού $OB\Gamma\Delta$ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

δ'. Αν το εμβαδόν του τραπεζιού ισούται με 9.75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

33. (★★) Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε την θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει την θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & , \quad x \in [0, 6] \\ 16 & , \quad x \in (6, 9] \\ 25 - x & , \quad x \in (9, 12] \end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α'. Να βρείτε την θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.

β'. Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

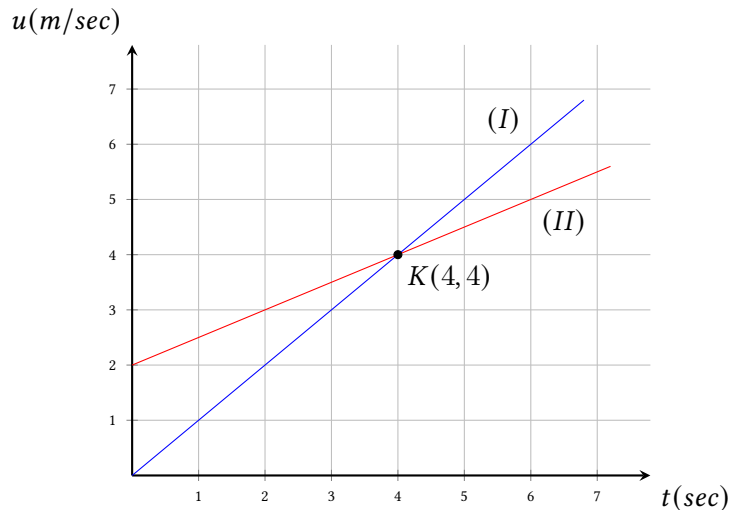
i. Διατηρείται σταθερή.

- ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.
 γ'. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

34. (★★) Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α'. Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς τον χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

β'. Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και την χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα $4 \frac{m}{sec}$, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα $2 \frac{m}{sec}$. Οι παρακάτω ευθείες (I),(II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.



- i. Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;
 ii. Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t \in [3, 5]$.
 γ'. Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $2 \frac{m}{sec}$ και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

35. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 8x + \lambda}}{x - 4} + 2, \quad x \neq 4, \quad \lambda \geq 16$$

- α'. Να βρείτε το λ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $M(0, -1)$.
 β'. Αν $\lambda = 16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 4 \\ 5 & , \quad x > 4 \end{cases}$

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων την γραφική παράσταση της f .

iii. Για $x < 4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1, -1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

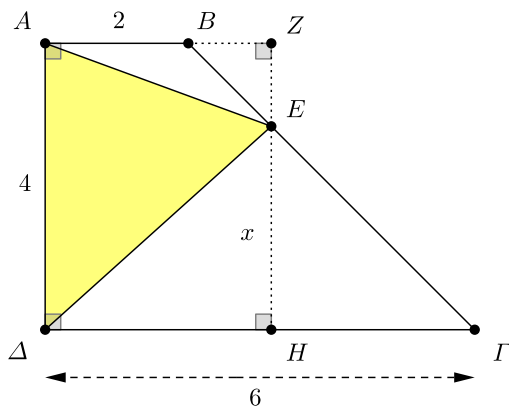
36. (★★) Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5]$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_2(t) = 650 - 25t$$

- α'. Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;
 β'. Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το πέμπτο μέχρι το δέκατο λεπτό της κίνησής του;
 γ'. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.
 δ'.
 i. Στα πρώτα πέντε λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;
 ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;
37. (★★) Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε $AB = 2$, $AD = 4$, $\Gamma\Delta = 6$, ενώ η AD είναι κάθετη στην AB και επίσης κάθετη στην $\Gamma\Delta$. Το σημείο E μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ και ονομάζουμε x την απόσταση του E από την $\Gamma\Delta$.



- α'. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου AED δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = -2x + 12$$

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

- β'. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.
 γ'. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$$

38. (★★) Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = x - \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

α'. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$$

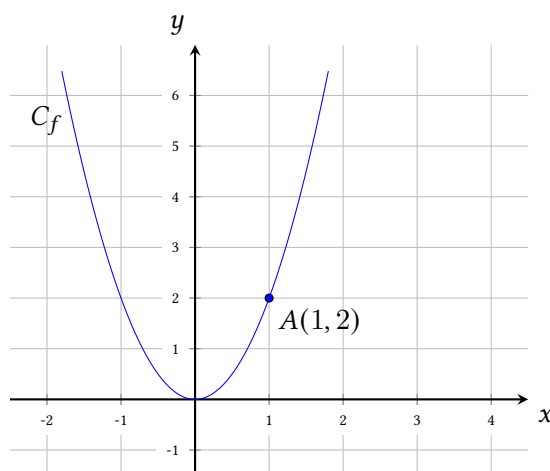
β'. Να αποδείξετε ότι: $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$, για οποιονδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$.

γ'. Θεωρούμε την ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|a| \geq 2$.

39. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης:

$$f(x) = ax^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.



α'. Αν το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $a = 2$.

β'. i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $(1,6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.

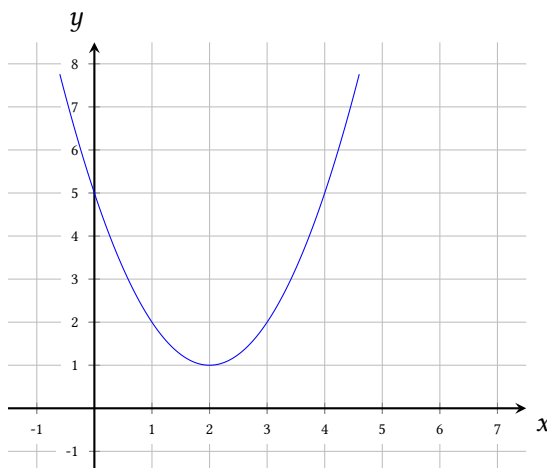
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

γ'. i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης: $f(x) < 2x + 4$

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

40. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$



- α'. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στην συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.
- β'. i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο βι).
- γ'. Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 4$

41. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

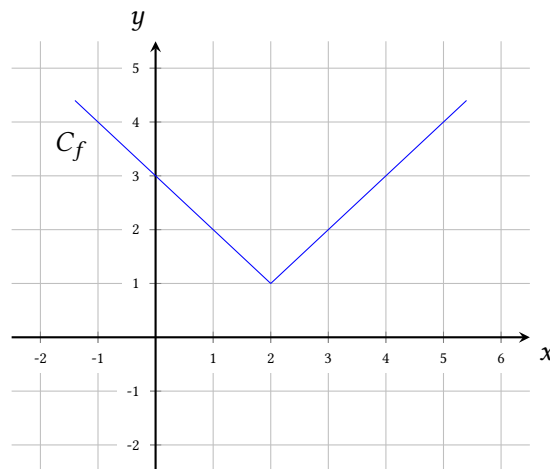
$$f(x) = x^2 - 2|\kappa|x - 2 \quad \text{και η ευθεία } (\varepsilon) : y = 2x - \kappa^2, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

- α'. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
- β'. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ .
- γ'. Για $\kappa = -3$, να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .
- δ'. Αν A και B τα σημεία τομής του ερωτήματος (γ), να βρείτε την απόσταση AB .

42. (★★) Έστω η ευθεία $(\varepsilon) : y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$f(x) = |x - 2| + 1$$

η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α'. i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία (ε) και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;
- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (αί).
- β'. Έστω ότι η ευθεία (ε) έχει με την γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.
- γ'. i. Αν A, B είναι τα σημεία του ερωτήματος (β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $AB \leq 2$;
- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γι).

43. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και η ευθεία } (\varepsilon) : y = 2x + b, \quad b \in \mathbb{R}$$

- α'. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $f(2+x) = f(2-x)$
 β'. Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

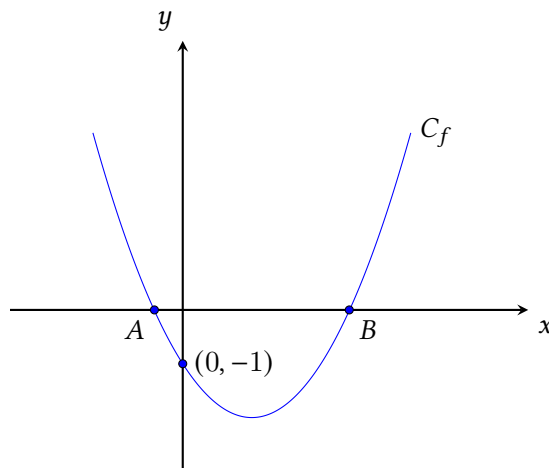
$$A = f(3.52) - f(0.52) + f(3.48) - f(0.48)$$

- γ'. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $b = -5$.
 δ'. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του b , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

44. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 + 2\lambda x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.



- α'. Να αποδείξετε ότι:
 i. $c = -1$.
 ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 β'. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες:

$$A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0) \quad \text{και} \quad B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$$

- γ'. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

45. (★★) Δίνεται η ευθεία:

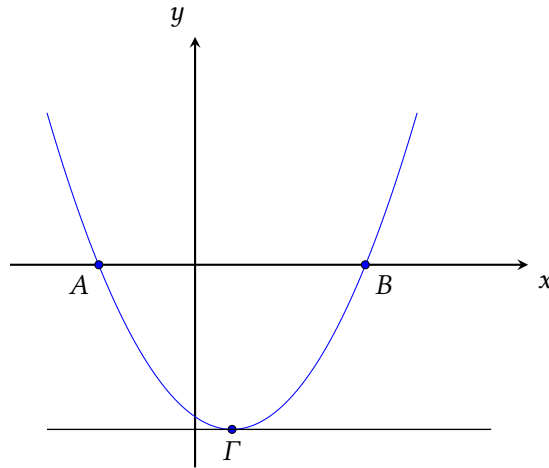
$$(\varepsilon) : y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

- α'. Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$, να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.
 β'. Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:
 i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες.
- iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε).

46. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 - x - 3$$



Αν $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $\Gamma(c, d)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:

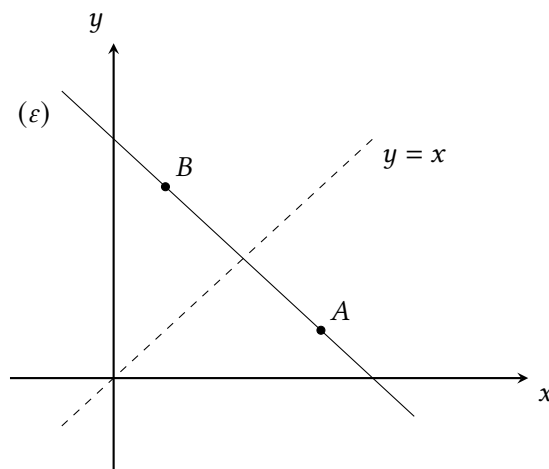
α'. Να δείξετε ότι: $a = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $b = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

β'. Να δείξετε ότι: $f(\sqrt{2}) < 0$

γ'. Να δείξετε ότι: $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

δ'. Να βρείτε τις τιμές των c και d .

47. (★★) Τα σημεία A και B είναι σημεία του πρώτου τεταρτημρίου και είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο $y = x$ της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α'. Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B .

β'. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $a = -1$.

γ'. Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:

- i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B .
- ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

48. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$$

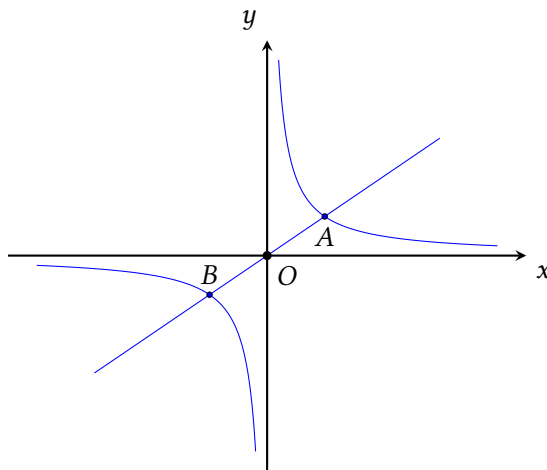
α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β'. Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

γ'. Αν είναι $f(x) = x + 2$, $x \neq -1$, τότε:

- i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f την γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g .

49. (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y = x$.



α'. Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0, 0)$ είναι το μέσον του AB .

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f .

β'. Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0, 0)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f .

γ'. Αν $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$, $M'(-x, -y)$, να δείξετε ότι $AB \leq MM'$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε πότε $AB = MM'$.

50. (★★) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$$

α'. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$

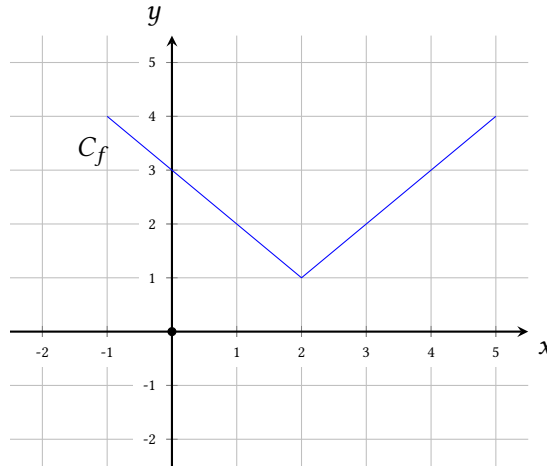
- β'. i. Να δείξετε ότι $A = 2$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 3| - |x - 1| = 2$

- γ'. i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3 - x$ και $g(x) = x - 1$, για $1 \leq x \leq 3$.
 ii. Για ποιες τιμές του x είναι: $|f(x) - g(x)| = 2$;

51. (★★) Έστω η ευθεία $(\varepsilon) : y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$f(x) = |x - 2| + 1$$

η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α'. i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία (ε) και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;
 ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (αί).
 β'. Έστω ότι η ευθεία (ε) έχει με την γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.
 γ'. i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος (β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $AB \leq 2$;
 ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γί).

52. (★★) Δίνεται η συνάρτηση:

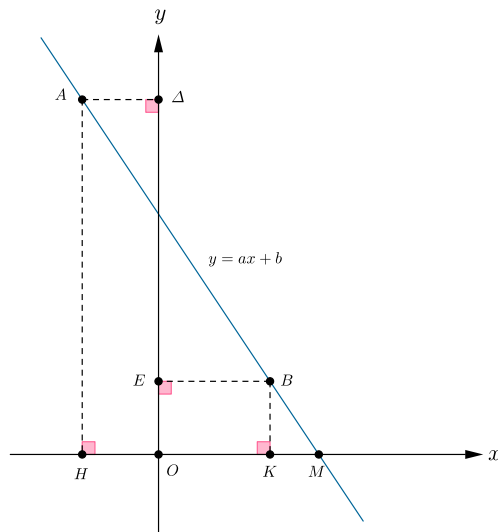
$$f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$$

- α'. Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ της f .
 β'. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{A}$$

- γ'. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$
 δ'. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$.

53. (★★) Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = ax + b$, όπου a, b σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , των οποίων οι προβολές στους άξονες $x'x$, $y'y$ είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.



α'. Να αποδείξετε ότι $a = -\frac{3}{2}$

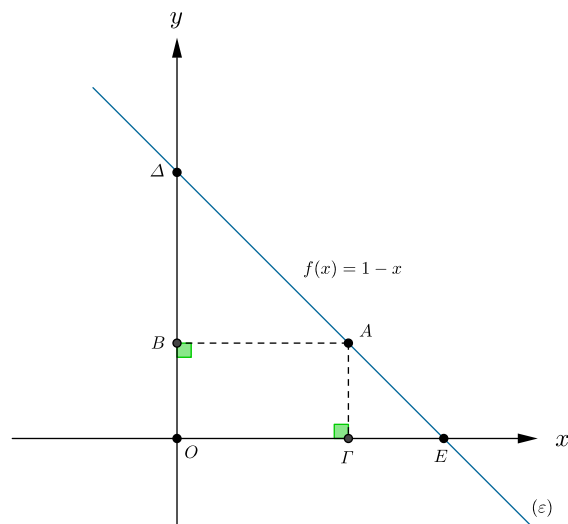
β'. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $b = 9$.

γ'. Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

54. (★★)

α'. Να αποδείξετε ότι: $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . Πότε ισχύει το ίσον;

β'. Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο A , με τετμημένη a , κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και E . Φέρνουμε από το A κάθετες στους άξονες και έστω B και Γ τα σημεία τομής με τους $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.



- Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου $ABOG$.
- Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου $ABOG$ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου A επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;