Περιεχόμενα

1 Πραγματικοί αριθμοί **3**

1.1 Φυσικοί Αριθμοί . . . 3
1.2 Ακέραιοι αριθμοί . . . 4
1.3 Ρητοί Αριθμοί . . . 4
1.4 Πραγματικοί Αριθμοί . . . 5
1.5 Σύνολα . . . 6
1.6 Πράξεις με Σύνολα . . . 8
1.7 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς . . . 11
1.8 Δυνάμεις . . . 15
1.9 Οι ταυτότητες . . . 19
1.10 Διάταξη πραγματικών αριθμών . . . 23
1.11 Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών . . . 29
1.12 Ρίζες πραγματικών αριθμών . . . 36

2 Εξισώσεις **43**

2.1 Η έννοια της εξίσωσης . . . 43
2.2 Ισοδύναμες εξισώσεις . . . 44
2.3 Η εξίσωση πρώτου βαθμού . . . 47
2.4 Εξίσωση με απόλυτη τιμή . . . 50
2.5 Η εξίσωση $x^n = a$ . . . 52
2.6 Η εξίσωση δεύτερου βαθμού . . . 54
2.6.1 Ελλιπείς εξισώσεις δευτέρου βαθμού . . . 54
2.6.2 Η γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού . . . 56
2.6.3 Οι τύποι του Vieta . . . 60
2.6.4 Παραγοντοποίηση τριωνύμου . . . 62
2.6.5 Επίλυση εξισώσεων με παραγοντοποίηση . . . 64

3 Ανισώσεις **76**

3.1 Έννοια ανίσωσης . . . 76
3.2 Ισοδύναμες ανισώσεις . . . 77
3.3 Η ανίσωση πρώτου βαθμού . . . 78
3.4 Ανισώσεις με απόλυτο . . . 82
3.5 Ανισώσεις δεύτερου βαθμού . . . 88

4 Συναρτήσεις **100**

4.1 Έννοια συνάρτησης 100
4.2 Πεδίο ορισμού συνάρτησης 101
4.3 Σύνολο τιμών συνάρτησης 103
4.4 Το καρτεσιανό σύστημα αξόνων 113
4.5 Γραφική παράσταση συναρτήσεων 120
4.5.1 Σημείο τομής με τον άξονα $y'y$. 120
4.5.2 Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$. 121
4.5.3 Σχετική θέση γραφικής παράστασης με τον άξονα $x'x$. 121
4.5.4 Σχετική θέση δύο γραφικών παραστάσεων 122

5 Η ΕΥΘΕΙΑ **141**
5.1 Η εξίσωση της ευθείας 141

1

Πραγματικοί αριθμοί

«Ο Θεός δημιούργησε τους φυσικούς αριθμούς. Όλα τα άλλα είναι έργο του ανθρώπου.»

— **Leopold Kronecker**

1.1 Φυσικοί Αριθμοί

Από τα πρώτα κιόλας βήματα του ανθρώπου εμφανίστηκε η ανάγκη να μετρά και να οργανώνει τον κόσμο γύρω του. Πόσοι άνθρωποι βρίσκονται σε μια ομάδα; Πόσα ζώα έχει ένα κοπάδι; Πόσες ημέρες απομένουν μέχρι μια γιορτή; Για να απαντηθούν τέτοια ερωτήματα δημιουργήθηκαν οι φυσικοί αριθμοί, οι πρώτοι αριθμοί που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος και το θεμέλιο πάνω στο οποίο αναπτύχθηκαν όλα τα υπόλοιπα σύνολα αριθμών.

Ονομάζουμε **φυσικούς αριθμούς** τους αριθμούς που χρησιμοποιούμε για την καταμέτρηση. Το σύνολο των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}$ και γράφεται

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Στο βιβλίο αυτό θεωρούμε ότι $0 \in \mathbb{N}$, όπως γίνεται και στο σχολικό βιβλίο.

▶ **ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ**

Οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι σε πλήθος.
Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο.

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Στη γραφή ενός συνόλου χρησιμοποιούμε αποσιωπητικά $(\ldots)$ όταν τα στοιχεία του συνεχίζονται χωρίς τέλος με τον ίδιο κανόνα.

Άρτιοι και περιττοί φυσικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί διακρίνονται σε **άρτιους** και **περιττούς**.

Άρτιοι ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 2.

Οι άρτιοι φυσικοί αριθμοί είναι το σύνολο

$$\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

ή ισοδύναμα

$$\{2\kappa : \kappa \in \mathbb{N}\}.$$

Περιττοί ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί που δεν είναι πολλαπλάσια του 2.

Οι περιττοί φυσικοί αριθμοί είναι το σύνολο

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

ή ισοδύναμα

$$\{2\kappa + 1 : \kappa \in \mathbb{N}\}.$$

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Στη δεύτερη μορφή δεν γράφουμε ένα-ένα τα στοιχεία του συνόλου. Περιγράφουμε την ιδιότητα που ικανοποιούν όλα τα στοιχεία του.

1.2 Ακέραιοι αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί δεν επαρκούν για την επίλυση όλων των εξισώσεων. Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$x + 1 = 0$$

δεν έχει λύση στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

Για να είναι δυνατή η επίλυση τέτοιων εξισώσεων, εισάγεται ένα νέο σύνολο αριθμών, το σύνολο των **ακεραίων αριθμών**.

Οι ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί, το μηδέν και οι αρνητικοί φυσικοί αριθμοί.
Το σύνολο των ακεραίων αριθμών συμβολίζεται με το γράμμα $\mathbb{Z}$ και είναι

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

1.3 Ρητοί Αριθμοί

Οι ακέραιοι αριθμοί δεν επαρκούν για την επίλυση όλων των προβλημάτων.

Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$2x = 1$$

δεν έχει λύση στο σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Για τον λόγο αυτό εισάγουμε ένα νέο σύνολο αριθμών, το σύνολο των **ρητών αριθμών**.

Ρητός αριθμός ονομάζεται κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{a}{b}$$

όπου $a, b \in \mathbb{Z}$ και $b \neq 0$.
Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$ και γράφεται

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

▶ **ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ**

Κάθε ακέραιος αριθμός είναι και ρητός, αφού μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$a = \frac{a}{1}$$

Ισοδύναμα κλάσματα

Δύο κλάσματα που παριστάνουν τον ίδιο ρητό αριθμό ονομάζονται **ισοδύναμα**.

Ισοδύναμα κλάσματα προκύπτουν όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος με τον ίδιο μη μηδενικό ακέραιο αριθμό.

Δεκαδική μορφή

Κάθε ρητός αριθμός γράφεται σε δεκαδική μορφή.

Η δεκαδική του ανάπτυξη είναι είτε

- πεπερασμένη, όπως ο αριθμός
$$1,358$$
- είτε απεριόριστη περιοδική, όπως ο αριθμός
$$2,031313131\ldots = 2,0\overline{31}$$

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Ένας αριθμός είναι ρητός αν και μόνο αν η δεκαδική του ανάπτυξη είναι πεπερασμένη ή απεριόριστη περιοδική.

1.4 Πραγματικοί Αριθμοί

Οι αριθμοί των οποίων η δεκαδική παράσταση δεν είναι ούτε πεπερασμένη ούτε απεριόριστη περιοδική ονομάζονται **άρρητοι αριθμοί**.

▶ **ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ**

Η δεκαδική παράσταση κάθε άρρητου αριθμού είναι απεριόριστη και μη περιοδική, όπως ο αριθμός

$$2,365897124586\ldots$$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελείται από όλους τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.
Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.

▶ **ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ**

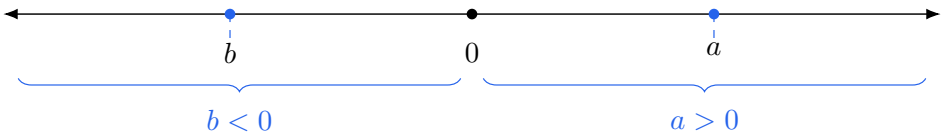
Όλοι οι αριθμοί που έχεις γνωρίσει μέχρι τώρα είναι πραγματικοί αριθμοί.

Στην Άλγεβρα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η γεωμετρική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την **ευθεία των πραγματικών αριθμών**, η οποία ονομάζεται και **άξονας των πραγματικών αριθμών**.

Πάνω στην ευθεία αυτή, σε κάθε σημείο αντιστοιχεί ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός και, αντίστροφα, σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο της ευθείας. Έτσι, όλοι οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Ο αριθμός 0 χωρίζει την ευθεία σε δύο ημιευθείες. Οι αριθμοί που βρίσκονται δεξιά του 0 ονομάζονται **θετικοί πραγματικοί αριθμοί**, ενώ οι αριθμοί που βρίσκονται αριστερά του 0 ονομάζονται **αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί**.

Επιπλέον, όσο πιο δεξιά βρίσκεται ένας αριθμός πάνω στην ευθεία, τόσο μεγαλύτερος είναι.



1.5 Σύνολα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Σύνολο ονομάζεται κάθε καλά ορισμένη συλλογή αντικειμένων, πραγματικών ή νοητών, τα οποία διακρίνονται με σαφήνεια μεταξύ τους. Τα αντικείμενα αυτά ονομάζονται **στοιχεία** του συνόλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Τα παρακάτω αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα συνόλων.

1. Το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 3:

$$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}.$$

2. Το σύνολο των πρώτων αριθμών:

$$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι πρώτος αριθμός ονομάζεται κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1*, ο οποίος έχει ακριβώς δύο θετικούς διαιρέτες: τη μονάδα και τον εαυτό του.*

Ανήκει και δεν ανήκει

Αν ένα αντικείμενο είναι στοιχείο ενός συνόλου, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\in$, το οποίο διαβάζεται *«ανήκει»*.

Αν ένα αντικείμενο δεν είναι στοιχείο ενός συνόλου, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\notin$, το οποίο διαβάζεται *«δεν ανήκει»*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για το σύνολο

$$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$$

ισχύει ότι

$$18 \in A,$$

γιατί το 18 είναι πολλαπλάσιο του 3.
Επίσης,

$$20 \notin A,$$

γιατί το 20 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

Υποσύνολο

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B.
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$A \subseteq B.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω τα σύνολα

$$A = \{2, 4\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Επειδή κάθε στοιχείο του A ανήκει και στο B, ισχύει

$$A \subseteq B.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Δηλαδή:

- κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος,
- κάθε ακέραιος είναι ρητός,
- κάθε ρητός είναι πραγματικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω

$$\Gamma = \{2, 5\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Επειδή

$$5 \notin B,$$

δεν ισχύει ότι όλα τα στοιχεία του Γ ανήκουν στο B.
Επομένως,

$$\Gamma \nsubseteq B.$$

1.6 Πράξεις με Σύνολα

Κενό σύνολο

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο.
Το κενό σύνολο συμβολίζεται με

$$\varnothing.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι από το 0 είναι το κενό σύνολο. Πράγματι,

$$\{x \in \mathbb{N} : x < 0\} = \varnothing.$$

▶ **ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ**

Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Συμπληρωματικό συνόλου

Όταν εργαζόμαστε με σύνολα, θεωρούμε ότι όλα τα σύνολα που εξετάζουμε περιέχονται σε ένα μεγαλύτερο σύνολο, το οποίο ονομάζεται **σύνολο αναφοράς** (ή καθολικό σύνολο) και συμβολίζεται με Ω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν μελετούμε σύνολα πραγματικών αριθμών, τότε συνήθως

$$\Omega = \mathbb{R}.$$

Αν μελετούμε σύνολα φυσικών αριθμών, τότε

$$\Omega = \mathbb{N}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \subseteq \Omega$.
Συμπληρωματικό σύνολο του A ως προς το Ω ονομάζεται το σύνολο όλων των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A.
Το συμπληρωματικό του A συμβολίζεται με A'.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν

$$\Omega = \mathbb{N}$$

και

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\},$$

τότε

$$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

Τομή συνόλων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Τομή δύο συνόλων A και B ονομάζεται το σύνολο των κοινών στοιχείων τους.
Η τομή των συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cap B.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Τότε

$$A \cap B = \{4, 5\}.$$

ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ

Η τομή δύο συνόλων περιέχει μόνο τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο σύνολα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{4, 5, 6\},$$

τότε

$$A \cap B = \varnothing.$$

Τα σύνολα αυτά λέγονται **ξένα σύνολα**.

Ένωση συνόλων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένωση δύο συνόλων A και B ονομάζεται το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B ή και στα δύο.
Η ένωση των συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cup B.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Τότε

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Παρατηρούμε ότι τα κοινά στοιχεία γράφονται μία μόνο φορά.

ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ

Στην ένωση δύο συνόλων κανένα στοιχείο δεν επαναλαμβάνεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\},$$

τότε

$$A \cup A' = \mathbb{N}.$$

Διαφορά συνόλων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Διαφορά δύο συνόλων A και B ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B.
Η διαφορά των συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A - B.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Τότε

$$A - B = \{1, 2, 3\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Με τα ίδια σύνολα,

$$B - A = \{6, 7\}.$$

Άρα

$$A - B \neq B - A.$$

▶ **ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ**

Γενικά,

$$A - B \neq B - A.$$

Δηλαδή η διαφορά δύο συνόλων δεν είναι αντιμεταθετική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $A \subseteq \Omega$, τότε

$$A' = \Omega - A.$$

Δηλαδή το συμπληρωματικό σύνολο είναι ειδική περίπτωση της διαφοράς συνόλων.

1.7 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζονται δύο βασικές πράξεις, η *πρόσθεση* $(+)$ και ο *πολλαπλασιασμός* $(\cdot)$.

Οι πράξεις αυτές ικανοποιούν ορισμένες θεμελιώδεις ιδιότητες, οι οποίες χρησιμοποιούνται συνεχώς στην Άλγεβρα και αποτελούν τη βάση όλων των αλγεβρικών υπολογισμών.

Δύο πραγματικοί αριθμοί a και b είναι είτε ίσοι, οπότε γράφουμε

$$a = b,$$

είτε διαφορετικοί, οπότε γράφουμε

$$a \neq b.$$

Στους πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Ιδιότητες της πρόσθεσης

1.	$a + b = b + a$	*Αντιμεταθετική ιδιότητα*
2.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	*Προσεταιριστική ιδιότητα*
3.	$a + 0 = 0 + a = a$	*Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης*
4.	Για κάθε αριθμό a υπάρχει ένας αριθμός που συμβολίζεται $-a$ και ονομάζεται αντίθετος του a ώστε: $$a + (-a) = 0$$	*Ύπαρξη αντίθετου*

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

1.	$a \cdot b = b \cdot a$	*Αντιμεταθετική ιδιότητα*
2.	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	*Προσεταιριστική ιδιότητα*
3.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	*Επιμεριστική ιδιότητα*
4.	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	*Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού*
5.	Για κάθε αριθμό $a \neq 0$ υπάρχει ένας αριθμός που συμβολίζεται $\frac{1}{a}$ και ονομάζεται αντίστροφος του a ώστε: $$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$	*Ύπαρξη αντιστρόφου*

Η *αφαίρεση* και η *διαίρεση* δεν αποτελούν νέες πράξεις. Η αφαίρεση ορίζεται ως πρόσθεση του αντίθετου αριθμού, ενώ η διαίρεση ορίζεται ως πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο αριθμό.

$$a - b = a + (-b)$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \qquad b \neq 0.$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται ορισμένες ακόμη βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Επιπλέον ιδιότητες των πράξεων	
1.	$(a = b \text{ και } c = d) \Rightarrow a + c = b + d$
2.	$(a = b \text{ και } c = d) \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$
3.	$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
4.	Αν $c \neq 0$, τότε: $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$
5.	$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0$
6.	$a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } b \neq 0$

Στην Άλγεβρα χρησιμοποιούμε συχνά κλάσματα και κλασματικές παραστάσεις. Κάθε φορά που γράφουμε ένα κλάσμα της μορφής

$$\frac{a}{b}$$

θεωρούμε πάντοτε ότι

$$b \neq 0.$$

Δηλαδή, ο παρονομαστής ενός κλάσματος δεν μπορεί ποτέ να είναι μηδέν.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι βασικοί κανόνες του λογισμού των κλασμάτων.

Λογισμός με κλάσματα	
1.	$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2.	$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$
3.	$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$
4.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
5.	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
6.	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Μια ισότητα της μορφής

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ονομάζεται *αναλογία.*

Οι αριθμοί a και d λέγονται *άκροι όροι* της αναλογίας, ενώ οι αριθμοί b και c λέγονται *μέσοι όροι.* Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των αναλογιών.

Ιδιότητες των αναλογιών	
1.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$
2.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
3.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
4.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
5.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Αν $a=5$ και $b+c=8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=ab+ac$.

Α2 | Αν οι αριθμοί $a=x-4y+5z$ και $b=2y-x-3z$ είναι αντίθετοι, να αποδείξετε ότι $z=y$.

Α3 | Αν οι αριθμοί a,b είναι αντίθετοι και οι αριθμοί c,d είναι αντίστροφοι, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=1-2\left(a-1\right)-c\left(3d-b\right)+b\left(-c-2\right)$$

Α4 | Αν $3a+2b+c=106$ και $2a+3b+4c=204$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=a+b+c$$

Α5 | Αν $c+d=4$ και $ac+ad+bc+bd=68$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=a+b+c+d$$

Α6 | Αν οι αριθμοί $2a-1$ και $b-1$ είναι αντίστροφοι, με $a\neq 1$ και $b\neq 1$, να δείξετε ότι:

1. $2a+b=2ab$
2. Οι αριθμοί $x=a-b$ και $y=a\left(1-2b\right)+2b$ είναι αντίθετοι.

Α7 | Αν ισχύει $\dfrac{2a+3b}{3a-6b}=\dfrac{1}{2}$, να υπολογίσετε το άθροισμα $A=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

Α8 | Αν $b\neq 0$, $c+d\neq 0$ και $\dfrac{a}{b}=3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{ac+ad-bc-bd}{ac+ad+bc+bd}$$

Α9 | Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς a,b,c ισχύουν $a+\dfrac{1}{b}=1$ και $b+\dfrac{1}{c}=1$, να αποδείξετε ότι $c+\dfrac{1}{a}=1$

Α10 | Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a,b,c για τους οποίους ισχύει $a+b+c=24$ και $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}$

Α11 | Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a,b,c για τους οποίους ισχύει $3a+2b+c=32$ και $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}$

Α12 | Αν $b\neq 0$, $d\neq 0$, $f\neq 0$ και $2b+3d-5f\neq 0$ και ισχύει $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{a}{b}=\frac{2a+3c-5e}{2b+3d-5f}$$

1.8 Δυνάμεις

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τις δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη, θα παρουσιάσουμε τις βασικές ιδιότητές τους και θα μάθουμε να τις χρησιμοποιούμε σε αλγεβρικές παραστάσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, με $n \neq 0$. Ορίζουμε:

$$a^n = \begin{cases} a, & \text{αν } n = 1, \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ φορές}}, & \text{αν } n > 1. \end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $a \neq 0$ και n φυσικός αριθμός. Τότε ορίζουμε:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων. Στην πορεία μας στην Άλγεβρα θα ορίσουμε και δυνάμεις όπου ο εκθέτης δεν είναι ακέραιος αριθμός, αλλά είναι ρητός ή άρρητος αριθμός. Οι ιδιότητες των δυνάμεων όμως ισχύουν σε όλες τις περιπτώσεις, ανεξάρτητα τι αριθμός είναι στον εκθέτη.

Ιδιότητες των δυνάμεων	
1.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2.	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5.	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = \frac{(2^3)^2 \cdot 2^4}{4^2}.$$

Λύση

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{(2^3)^2 \cdot 2^4}{4^2} \\
&= \frac{2^{3\cdot 2} \cdot 2^4}{(2^2)^2} && \text{(δύναμη δύναμης)} \\
&= \frac{2^6 \cdot 2^4}{2^{2\cdot 2}} && \text{(δύναμη δύναμης)} \\
&= \frac{2^{6+4}}{2^4} && \text{(γινόμενο δυνάμεων με την ίδια βάση)} \\
&= 2^{10-4} && \text{(πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση)} \\
&= 2^6 \\
&= 64.
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων για να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $A = \dfrac{3^0 \cdot 2^6 \cdot 4^3 \cdot 8^{-1}}{16^2}$ ii) $B = \dfrac{3^5 \cdot 5^3 \cdot 9^4 \cdot 25}{625 \cdot 27^4}$

iii) $C = \dfrac{21^3 \cdot 49 \cdot 81}{63^3}$ iv) $D = \dfrac{6^9 \cdot 10^6 \cdot 8^7}{15^6 \cdot 30^2 \cdot 32^6}$

Α2 | Να αναλύσετε τους αριθμούς σε κάθε κλάσμα σε γινόμενα πρώτων και στην συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων για να υπολογίσετε τις τιμές τους.

i) $A = \dfrac{1575 \cdot 735 \cdot 343}{147 \cdot 2205 \cdot 105}$ ii) $B = \dfrac{3861 \cdot 1056 \cdot 936}{572 \cdot 4356 \cdot 1404}$

Α3 | Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων για τις τιμές των παραμέτρων που σας δίνονται:

i) $A = \left[\left(x^2y^{-4}\right)^3 \left(y^{-2}\right)^{-5}\right]^2 \div \left(xy^{-3}\right)^4$ για $xy = -1$

ii) $B = \left[\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{-5} \div \left(\dfrac{x^3}{y^4}\right)^{-3}\right] \div \left(x^3y^{-1}\right)$ για $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$

iii) $C = \left(\dfrac{x^2y^{-1}}{z^2}\right)^{-2} \left(\dfrac{x^3y^{-2}}{z^{-2}}\right)^{-1} \left(zx^3\right)^2$ για $x = \dfrac{1}{2}$ και $yz = 2$

iv) $D = \left[\dfrac{\left(x^3y^{-2}\right)^2}{\left(x^{-4}y^2\right)^{-1}}\right]^{-2}$ για $x = 101$ και $y = 1010$

v) $E = \left[\left(x^3y^2\right)^{-2} \cdot \left(x^3y\right)^4\right] \left(\dfrac{y^3}{x}\right)^{-3}$ για $x = 2y$

Α4 | Να υπολογίσετε, για $x = 42$, την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{-1}{x^2 - x} + \dfrac{x}{x - 1}$

Α5 | Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\dfrac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$

1. Να αποδείξετε ότι $y = 2x$
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$

Α6 | Αν ο n είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = (-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + (-1)^{n+3}$$

Α7 | Έστω a, b, c πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $a + b + c = 0$ και $abc \neq 0$.

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $b + c = -a$ ii) $\dfrac{a^2}{b + c} = -a$

2. Με παρόμοιο τρόπο, να απλοποιήσετε τα κλάσματα: $\dfrac{b^2}{c+a}$ και $\dfrac{c^2}{a+b}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

Α8 | Είναι ο αριθμός $a=5^{23}-5^{21}$ πολλαπλάσιο του 8;

Α9 | Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, ο αριθμός $a=3^{n+3}-3^{n+2}-3^n$ είναι πολλαπλάσιο του 17.

Α10 | Δίνεται ο αριθμός $a=(2002)^{2002}$. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του a;

Α11 | Τρεις φυσικοί αριθμοί m,n,k με $n<k$ ικανοποιούν την σχέση $m^2+mk+mn+nk=15$. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές των αριθμών αυτών;

1.9 Οι ταυτότητες

Στην ενότητα αυτή διαπραγματευόμαστε ένα πάρα πολύ σημαντικό θέμα, τις ταυτότητες της Άλγεβρας. Η γνώση των ταυτοτήτων αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση ώστε κάποιος να μπορέσει να προχωρήσει στην Άλγεβρα. Με την βοήθεια των ταυτοτήτων θα μπορέσουμε να χειριστούμε περίπλοκες αλγεβρικές παραστάσεις, να παραγοντοποιήσουμε και να απλοποιήσουμε αλγεβρικές παραστάσεις, ικανότητες που είναι εντελώς απαραίτητες για να προχωρήσουμε στα Μαθηματικά. Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε καταρχήν τις βασικές ταυτότητες.

Οι ταυτότητες της Άλγεβρας	
1.	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2.	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3.	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4.	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
5.	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
6.	$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
7.	$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
8.	$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνουμε την γενίκευση των ταυτοτήτων της διαφοράς και του αθροίσματος n-οστών δυνάμεων:

Γενίκευση ταυτοτήτων	
1.	$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$
2.	$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \quad , \quad n$ περιττός φυσικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)$$

Α2 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(a-b)^2 - 2(a-b)(a+b) + (a+b)^2 = 4b^2$$

Α3 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$$

Α4 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(1+ab)^2 + (a-b)^2 = \left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)$$

Α5 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 + (cx)^2 + (cy)^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2\right)$$

Α6 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

Α7 |

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

Ταυτότητα Euler

2. Να αποδείξετε ότι αν για τρεις πραγματικούς αριθμούς a, b, c ισχύει $a+b+c=0$, τότε $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

Α8 | Αν $p = 3^{2000} + 3^{-2000}$ και $q = 3^{2000} - 3^{-2000}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $p^2 - q^2$.

Α9 | Αν $a - b = 3$, να αποδείξετε ότι $3a - b^2 - 3b + 2ab = a^2$

Α10 | Αν $a + b = 1$, να αποδείξετε ότι $a^3(b+1) - b^3(a+1) = a - b$

Α11 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $a, b \neq 0$, ισχύει ότι $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι

1. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$
2. $a = b$

Α12 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $(x-2y)^2 - 2(3-2xy) = 5y^2 - 1$

1. Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x+y)^3 \cdot (x-y)^3$

Α13 | Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $(x+4y)(x+y) = 9xy$

1. Να αποδείξετε ότι:

   i) $(2y-x)^2=0$ ii) $y=\dfrac{x}{2}$

2. Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\dfrac{x}{2}\right)^2=10y^2$

Α14 | Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε $A=2\left(x+y\right)^2-\left(x-y\right)^2-6xy-y^2$

1. Να αποδείξετε ότι $A=x^2$
2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B=2\cdot 2022^2-2020^2-6\cdot 2021-1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού, τον οποίο να προσδιορίσετε.

Α15 | 1. Να αποδείξετε ότι $x^3=\left(\dfrac{x\left(x+1\right)}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x\left(x-1\right)}{2}\right)^2$
2. Να γράψετε τον αριθμό 19^3 σαν διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

Α16 | 1. Να αποδείξετε ότι $ab=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$
2. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς x και y για τους οποίους να ισχύει $x^2-y^2=176$

Α17 | Αν $a+b+c=0$, να αποδείξετε ότι $\left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(c+a\right)^2=a^2+b^2+c^2$

Α18 | Για τρεις θετικούς αριθμούς x,y,z ισχύουν:

$$x+y+z=xy+yz+zx \quad \text{και} \quad x^2+y^2+z^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

Με τι είναι ίσο το γινόμενο xyz;

Α19 | Αν $a+b+c=0$ και $a^2+b^2+c^2=1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=a^4+b^4+c^4$$

Α20 | Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ ii) $B=\dfrac{4x^3-4x^2y+xy^2}{xy^2-4x^3}$

iii) $C=\dfrac{7x^2-7xy}{5x^2y-10xy^2+5y^3}$ iv) $D=\dfrac{x^3+2x^2-9x-18}{x^3+3x^2-4x-12}$

v) $E=\dfrac{ab+2b+3a+6}{b^2+6b+9}\cdot\dfrac{8-4a}{a^2-4}$ vi) $F=\dfrac{5y-10y^2}{12y^2+6y^3}\cdot\dfrac{2y+y^2}{2y-1}$

Α21 | Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων για τις τιμές των παραμέτρων που σας δίνονται:

i) $A=\dfrac{a^2+4a+4}{ax-ay}\cdot\dfrac{a^2x-a^2y}{a^2+2a}$ για $a=2000$

ii) $B=\left[\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\right]\div\left(x-\dfrac{y^2}{x}\right)$ για $x=502$ και $y=500$

iii) $C=\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}\div\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{-3}$ για $x=\dfrac{101}{33}$

Α22 | Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν:

$$a^2 = 2a + b \quad \text{και} \quad b^2 = 2b + a$$

1. Να αποδείξετε ότι:
   i) $a^2 - b^2 = a - b$ ii) $a + b = 1$
2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = a^2 + b^2$

Α23 | Αν $a^2 + b^2 = 9$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $S = (a + b)^2 + (a - b)^2$

Α24 | Αν $a + b = 1$ και $ab = -6$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $a^2 + b^2$ ii) $a^3 + b^3$

Α25 | Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι ίση με 34 και το εμβαδόν του είναι ίσο με 60. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου του.

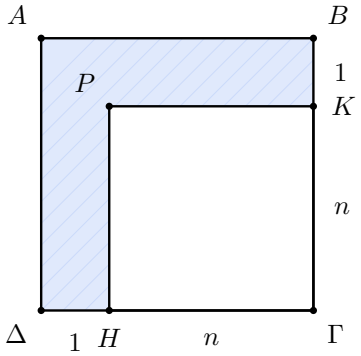
Α26 | Αν $a + b - c = 2(a + c - b)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$$

Α27 | Σε έναν αριθμό a προσθέτουμε το 2 και στην συνέχεια υψώνουμε το αποτέλεσμα στο τετράγωνο και βρίσκουμε τον αριθμό b. Στον ίδιο αριθμό a αφαιρούμε το 2 και στην συνέχεια υψώνουμε το αποτέλεσμα στο τετράγωνο και βρίσκουμε τον αριθμό c. Αν $b + c = 106$, ποιος είναι ο a;

Α28 | Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός a γράφεται στην μορφή $a = 2k + 1$, k ακέραιος.

1. Να γράψετε τους αριθμούς $3, 5, 7$ ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.
2. (a) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.
   (b) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.
3. Στο σχήμα τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και ΓHPK είναι τετράγωνα με $\Gamma H = \Gamma K = n$ και $BK = \Delta H = 1$. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου n.



1.10 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους. Για οποιουσδήποτε δύο πραγματικούς αριθμούς μπορούμε πάντοτε να αποφασίσουμε αν είναι ίσοι ή ποιος από τους δύο είναι μεγαλύτερος. Η δυνατότητα αυτή ονομάζεται *διάταξη των πραγματικών αριθμών* και αποτελεί βασικό εργαλείο στη μελέτη των ανισοτήτων και των διαστημάτων.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ένα *διατεταγμένο σύνολο*. Αυτό σημαίνει ότι για οποιουσδήποτε δύο πραγματικούς αριθμούς a και b ισχύει ακριβώς μία από τις σχέσεις

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται *ιδιότητα της τριχοτομίας*.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θα λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός a είναι *μεγαλύτερος* από τον πραγματικό αριθμό b και θα γράφουμε

$$a > b,$$

αν και μόνο αν η διαφορά $a - b$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή,

$$a > b \iff a - b > 0.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θα λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός a είναι *μικρότερος* από τον πραγματικό αριθμό b και θα γράφουμε

$$a < b,$$

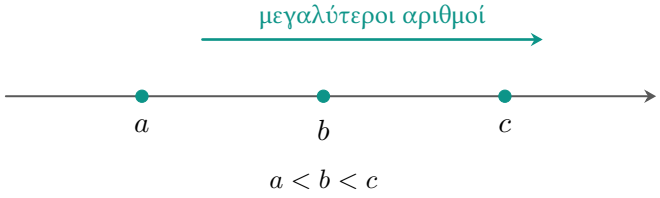
αν και μόνο αν η διαφορά $a - b$ είναι αρνητικός αριθμός. Δηλαδή,

$$a < b \iff a - b < 0.$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς

$$a \geq b \qquad \text{και} \qquad a \leq b,$$

για να δηλώσουμε αντίστοιχα ότι ο a είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον b και ότι ο a είναι μικρότερος ή ίσος με τον b.



Όσο πιο δεξιά βρίσκεται ένας πραγματικός αριθμός στον άξονα, τόσο μεγαλύτερος είναι.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Διάστημα ονομάζεται κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει, μαζί με δύο οποιαδήποτε στοιχεία του, και κάθε πραγματικό αριθμό που βρίσκεται ανάμεσά τους.

Φραγμένα διαστήματα

Διάστημα	Γραφική παράσταση	Συνθήκη
$[a,b]$		$x \in [a,b] \iff a \le x \le b$
(a,b)		$x \in (a,b) \iff a < x < b$
$(a,b]$		$x \in (a,b] \iff a < x \le b$
$[a,b)$		$x \in [a,b) \iff a \le x < b$

Μη φραγμένα διαστήματα

Διάστημα	Γραφική παράσταση	Συνθήκη
$[a,+\infty)$		$x \in [a,+\infty) \iff x \ge a$
$(a,+\infty)$		$x \in (a,+\infty) \iff x > a$
$(-\infty,a]$		$x \in (-\infty,a] \iff x \le a$
$(-\infty,a)$		$x \in (-\infty,a) \iff x < a$

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Κλειστό άκρο

$[a,b]$



- a **ανήκει** στο διάστημα.
- Είναι ο **μικρότερος αριθμός** του διαστήματος.

Ανοικτό άκρο

$(a,b]$



- a **δεν ανήκει** στο διάστημα.
- Δεν υπάρχει **μικρότερος αριθμός** του διαστήματος.

$[a,b]$



- b **ανήκει** στο διάστημα.
- Είναι ο **μεγαλύτερος αριθμός** του διαστήματος.

$[a,b)$



- b **δεν ανήκει** στο διάστημα.
- Δεν υπάρχει **μεγαλύτερος αριθμός** του διαστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $a\,(a+3) \geq a-1$

Α2 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$

Α3 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$

Α4 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) \geq (ab+1)^2$

Α5 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \geq (ax+by)^2$

Α6 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $\dfrac{ab}{a^2+b^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Α7 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

Α8 | Αν $a > 2$, να αποδείξετε ότι $3\,(a-3) > a-5$

Α9 | Αν $a > -1$, να αποδείξετε ότι $a^3 + 1 \geq a^2 + a$

Α10 | Αν $a \geq 0$, να αποδείξετε ότι $a^5 + a^3 \geq 2a^4$

Α11 | Αν $a + b \geq 0$, να αποδείξετε ότι $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

Α12 | Αν $a, b > 0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \dfrac{a+b}{2}$

Α13 | Αν $x > y$, να αποδείξετε ότι $x + \dfrac{y}{2} > y + \dfrac{x}{2}$

Α14 | Δίνονται πραγματικοί αριθμοί a, b με $a > 0$ και $b > 0$. Να αποδείξετε ότι:

1. $a + \dfrac{4}{a} \geq 4$
2. $\left(a + \dfrac{4}{a}\right)\left(b + \dfrac{4}{b}\right) \geq 16$

Α15 | Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $0 < a < b$

1. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{3}{b} < \dfrac{3}{a}$
2. Να αποδείξετε ότι $a^3 + \dfrac{3}{b} < b^3 + \dfrac{3}{a}$

Α16 | Αν $x > y > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $a = x^3 - y^3$ και $b = (x-y)^3$

Α17 | Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a, να συγκρίνετε τους αριθμούς $x = a^3 - 2$ και $y = a^2 - 2a$

Α18 | Αν $0 < a < 1$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $a^3 < a$
2. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $0\,,\ a^3\,,\ 1\,,\ a\,,\ \dfrac{1}{a}$

Α19 | Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2a^2 + b^2 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2ab \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των a, b.
2. Για ποιες τιμές των a, b ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α20 | Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = a^2 + b^2 \quad \text{και} \quad B = 2ab \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$
2. Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$

Α21 | Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = a^2 + 4a + 5 \quad \text{και} \quad B = (2b + 1)^2 - 1 \quad \text{με} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει: $A = (a + 2)^2 + 1$
2. (a) Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$
   (b) Για ποιες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

Α22 | 1. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

2. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε να ισχύει

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

Α23 | 1. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$$

Α24 | Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

Α25 | Αν a και b πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq a \leq 4$ και $-4 \leq b \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $a + 2b$ ii) $a - b$

Α26 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $x + y$ ii) $2x - 3y$ iii) $\dfrac{x}{y}$

Α27 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

i) $y - x$ ii) $x^2 + y^2$

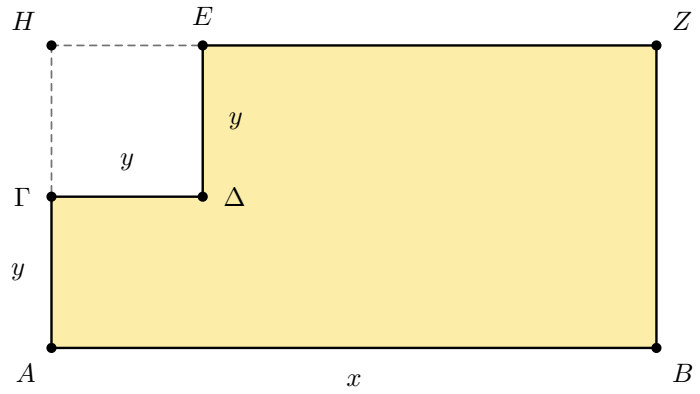
Α28 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $2 < x < 3$ και $1 < y < 4$, να αποδείξετε ότι

i) $4 < x + 2y < 11$ ii) $-7 < 2x - 3y + 1 < 4$ iii) $1 < \dfrac{2x}{y} < 6$

Α29 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $2 \leq x \leq 3$ και $-3 \leq y \leq -2$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

i) $x - 3y$ ii) $x^2 - 3xy$ iii) xy

Α30 | Από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma\Delta EH$ πλευράς y.



1. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZBA\Gamma\Delta$ που απέμεινε, δίνεται από την σχέση $\Pi = 2x + 4y$
2. Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Α31 | Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

1. Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
2. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Α32 | Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40cm$. Αν $x\ cm$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

1. $0 < x < 20$
2. Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$
3. Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.
4. Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10cm$

Α33 | Έστω ότι

$$10 \leq x \leq 20 \ , \ 40 \leq y \leq 60 \ \text{ και } \ w = \frac{x^2}{2y}$$

Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει ο αριθμός w.

Α34 | Έστω ότι

$$-2 \leq x \leq 5 \ , \ -3 \leq y \leq 7 \ , \ 4 \leq z \leq 8 \ \text{και} \ w = xy - z$$

Να βρείτε την μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο αριθμός w.

1.11 Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών

Η απόλυτη τιμή αποτελεί μία από τις βασικότερες έννοιες της Άλγεβρας και χρησιμοποιείται σε πλήθος μαθηματικών εφαρμογών.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως απόλυτη τιμή του a

$$|a| = \begin{cases} -a & , \text{ αν } a < 0 \\ a & , \text{ αν } a \geq 0 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστούν οι παρακάτω απόλυτες τιμές.

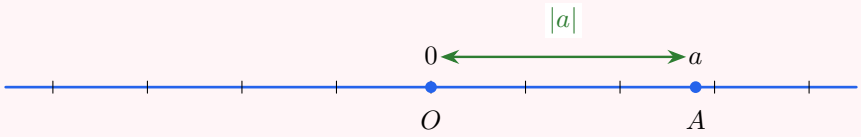
α) $|5| = 5$,

β) $|-2| = -(-2) = 2$,

γ) $|\pi - 3| = \pi - 3$, επειδή $\pi > 3$,

δ) $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$, επειδή $2 - \pi < 0$.

Η απόλυτη τιμή είναι μία γεωμετρική έννοια, αν ένας πραγματικός αριθμός a έχει εικόνα το σημείο A στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε η απόλυτη τιμή του a είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την αρχή O του άξονα.

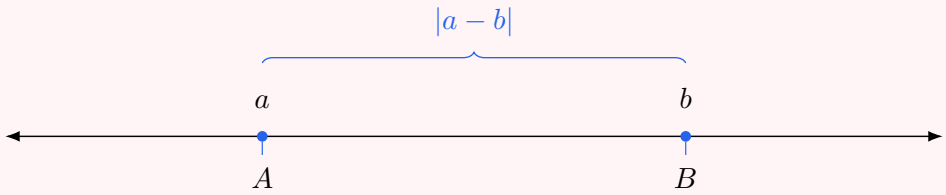


Εικόνα 1.1. Η απόλυτη τιμή του αριθμού a είναι η απόσταση του σημείου A από την αρχή O.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί a και b, με εικόνες στον άξονα των πραγματικών αριθμών τα σημεία A και B αντίστοιχα. Η απόσταση των σημείων A και B συμβολίζεται με $d(A, B)$ και είναι ίση με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αριθμών a και b.

$$d(A, B) = |a - b|$$



Εικόνα 1.2. Η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με $|a-b|$.

Οι βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

	Ιδιότητες της απόλυτης τιμής
1.	$\|a\| \geq 0$
2.	$\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3.	$\|-a\| = \|a\|$
4.	$\|a\| \geq a \quad$ και $\quad \|a\| \geq -a$
5.	$\|a\|^2 = a^2$
6.	$\|ab\| = \|a\|\|b\|$
7.	$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}, \qquad b \neq 0$
8.	$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν οι αριθμοί a και b είναι ομόσημοι ή ένας από αυτούς είναι ίσος με το μηδέν.

Απόδειξη (Ιδιότητα 6)

Επειδή οι αριθμοί $|ab|$ και $|a||b|$ είναι μη αρνητικοί, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν ίσα τετράγωνα. Πράγματι,

$$|ab|^2 = (ab)^2 = a^2b^2$$

και

$$\big(|a||b|\big)^2 = |a|^2|b|^2 = a^2b^2$$

Άρα

$$|ab|^2 = \big(|a||b|\big)^2$$

Εφόσον οι δύο αριθμοί είναι μη αρνητικοί και έχουν ίσα τετράγωνα, συμπεραίνουμε ότι

$$|ab| = |a||b|$$

Απόδειξη (Ιδιότητα 8)

Έχουμε

$$\big(|a| + |b|\big)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$$

Επειδή

$$|ab| \geq ab,$$

προκύπτει

$$\big(|a| + |b|\big)^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Άρα

$$\big(|a| + |b|\big)^2 \geq |a+b|^2$$

Οι αριθμοί $|a| + |b|$ και $|a+b|$ είναι μη αρνητικοί, επομένως

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Δίνεται η παράσταση $A = |3x - 6| + 2\,,\, x \in \mathbb{R}$

1. Να αποδείξετε ότι:
   (a) για κάθε $x \geq 2\,,\, A = 3x - 4$
   (b) για κάθε $x < 2\,,\, A = 8 - 3x$
2. Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$

Α2 | Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

1. Να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{|x - 5|}{x - 5} + \dfrac{|x - 10|}{x - 10}$

Α3 | Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| - |x - 2|$

1. Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι $A = 2x - 3$
2. Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

Α4 | Αν $1 < x < 3$, να αποδείξετε ότι $|x - 1| - |x - 3| = 2\,(x - 2)$

Α5 | Αν $2 \leq x \leq 5$, να αποδείξετε ότι $|2 - x| + |5 - x| - |x - 6| = x - 3$

Α6 | Αν $1 < x < 2$, να αποδείξετε ότι $|2x - 4| - |4x - 4| = 8 - 6x$

Α7 | Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|\,,\, x \in \mathbb{R}$.

1. Για κάθε $2 \leq x < 3$, να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$
2. Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α8 | Αν $2 < x < 3$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = |x - 2| - 2\,|4 - x| + 3\,|x - 3|$ είναι ανεξάρτητη του x.
2. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $B = ||2 - x| - 1|$

Α9 | Έστω a, b, c πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $a < 0 < b < c$

1. Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = a\,(a - b)\,(c - b)\,b$ είναι θετικός.
2. Να αποδείξετε ότι $a + |a - b| + |c - b| - c = 0$

Α10 | Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| + |y - 3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι

1. $A = x - y + 2$
2. $0 < A < 4$

Α11 | Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b, για τους οποίους ισχύει $2 \leq a \leq 3$ και $-2 \leq b \leq -1$.

1. Να δείξετε ότι $|a - 3| = 3 - a$ και $|b + 2| = b + 2$
2. Να δείξετε ότι $0 \leq a + b \leq 2$
3. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|a + b| + |a - 3| - |b + 2|$ είναι ίση με 1.

Α12 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $-2 < x < 1$ και $-2 < y < 1$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = |x + 3y + 8| + |2x + y - 3| + x - 2y$ είναι σταθερή.

Α13 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $2 < x < 3$ και $-1 < y < 0$, να γράψετε την παράσταση $S = |x + 2y| + |y - x + 2|$ χωρίς απόλυτα.

Α14 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η παράσταση

$$A = \left|a^2 + 2a + 1\right| + \left|a^2 - 2a + 1\right| - 2\left|a^2 + 3\right|$$

είναι σταθερή.

Α15 | Αν $0 < x < y$, να αποδείξετε ότι $2\left|x^2 - y^2\right| - 3\left|x^2 - xy\right| - 3\left|y^2 - xy\right| = x^2 - y^2$

Α16 | Αν $x \neq 0$, να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές της παράστασης $A = \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{|x|}{x}$

Α17 | Αν $x \neq 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \left|\dfrac{x}{|x|} - 2\right| + \left|\dfrac{x}{|x|} + 1\right|$

Α18 | Να δείξετε ότι

$$|x| + |x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & , \text{ αν } x < 0 \\ 1 & , \text{ αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & , \text{ αν } x > 1 \end{cases}$$

Α19 | Να δείξετε ότι

$$|x + 3| - |2x - 4| = \begin{cases} x - 7 & , \text{ αν } x < -3 \\ 3x - 1 & , \text{ αν } -3 \leq x \leq 2 \\ -x + 7 & , \text{ αν } x > 2 \end{cases}$$

Α20 | Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

1. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:
   i) $|x + 2|$ ii) $|x - 7|$
2. Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:
   $$|x + 2| + |x - 7|$$
3. Να βρείτε γεωμετρικά την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$
4. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Α21 | Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a και b για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(a - 1)(1 - b) > 0$$

1. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των a και b.
2. Αν επιπλέον $|b - a| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
   $$K = |a - 1| + |1 - b|$$

Α22 | Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει

$$|x + 3| + |-y - 1| = 0$$

Α23 | Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει

$$|x-1| \leq 2xy - x^2 - y^2$$

Α24 | Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει

$$|x-2| + \left|x^2-1\right| = 0$$

Α25 | Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \dfrac{|x| + 2x^2}{2|x| + 1}$

Α26 | Αν ισχύει $\dfrac{1}{a^2-4} = -\dfrac{1}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = |a-2| \cdot |a+2|$$

Α27 | Να υπολογίσετε την τιμή της παρακάτω παράστασης, για $x = -102$.

$$A = \left|\frac{x^2+2x-xy-2y}{x^2+4x+4}\right| \cdot \left|\frac{1}{x-y}\right|$$

Α28 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(|a| - |b|)^2 + 2|ab| = a^2 + b^2$$

Α29 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|a|\, a^2 - |b|\, b^2 = (|a| - |b|)\left(a^2 + |ab| + b^2\right)$$

Α30 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, με $|a| \neq |b|$, ισχύει

$$\frac{a^2-b^2}{|a|-|b|} = |a| + |b|$$

Α31 | Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a και b με $a \neq b$ ισχύει

$$\left|ba^2 - a\right| = \left|ab^2 - b\right|$$

να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και b είναι αντίστροφοι ή αντίθετοι.

Α32 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b με $ab \neq 0$ ισχύει

$$a|b| + b|a| = 0$$

να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και b είναι ετερόσημοι.

Α33 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b, ισχύει $a > b$, με $b > 1$ και $a > 1$, τότε

1. Να δείξετε ότι $\dfrac{a-b}{|a-b|} - \dfrac{|1-a|}{1-a} = 2$
2. Να δείξετε ότι $a + b > \dfrac{a-b}{|a-b|} - \dfrac{|1-a|}{1-a}$

Α34 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\dfrac{4x^2+9}{12} \geq |x|$

Α35 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$

Α36 |
1. Αν $a < 0$, να αποδείξετε ότι $a + \dfrac{1}{a} \leq -2$
2. Αν $a < 0$, να αποδείξετε ότι $|a| + \left|\dfrac{1}{a}\right| \geq 2$

Α37 |
1. Αν $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{a}{b}\right| + \left|\dfrac{b}{a}\right| \geq 2$
2. Πότε ισχύει η ισότητα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α38 | Να αποδείξετε την ισοδυναμία $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

Α39 | Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει $|a + b| \leq |a + c| + |c - b|$

Α40 | Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq \dfrac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι $|3x + 4y| \leq 10$

Α41 | Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει $|a + 2| = ||a| - 2|$, να δείξετε ότι $a \leq 0$.

Α42 | Αν $a + b \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{|a| + |b|}{|a + b|} \geq 1$

Α43 | Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $abc \neq 0$. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|} + \dfrac{c}{|c|} \leq 3$

1.12 Ρίζες πραγματικών αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a και την συμβολίζουμε με $\sqrt{a}$, τον μη αρνητικό αριθμό που όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό a.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστούν οι παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

$$\sqrt{25} = 5,$$

διότι $5^2 = 25$.

$$\sqrt{0} = 0,$$

διότι $0^2 = 0$.

▶ **ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ**

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού είναι **πάντοτε μη αρνητικός αριθμός**. Για παράδειγμα,

$$\sqrt{25} = 5$$

και **όχι** ± 5 ή -5, παρόλο που

$$(-5)^2 = 25.$$

Πράγματι, η τετραγωνική ρίζα είναι ο *μη αρνητικός* αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αρχικό αριθμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε n-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a, όπου $n \geq 2$, και την συμβολίζουμε με $\sqrt[n]{a}$, τον μη αρνητικό αριθμό που όταν υψωθεί στην n-στή δύναμη δίνει τον αριθμό a.

Η τετραγωνική ρίζα είναι ειδική περίπτωση της n-οστής ρίζας. Συγκεκριμένα

$$\sqrt[1]{a} = a \quad \text{και} \quad \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έχουμε:

$$\sqrt[3]{64} = 4,$$

αφού $4^3 = 64$.

$$\sqrt[4]{81} = 3,$$

αφού $3^4 = 81$.

Με την βοήθεια της n-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού a μπορούμε να ορίσουμε δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό ως ακολούθως:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορίζουμε:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad \text{αν } a > 0,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

$$0^{\frac{m}{n}} = 0, \qquad \text{αν } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να γραφούν οι παρακάτω ρίζες με τη μορφή δύναμης.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt[4]{3^5} = 3^{\frac{5}{4}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις.

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4,$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{4096} = 8.$$

▶ **ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ**

Όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων που αποδείξαμε για ακέραιους εκθέτες εξακολουθούν να ισχύουν και όταν οι εκθέτες είναι ρητοί αριθμοί.

Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τις ιδιότητες των ριζών.

Ιδιότητες των ριζών		
1.	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	αν $a \geq 0$
2.	$\sqrt[n]{a^n} = a$	αν $a \geq 0$
3.	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	αν $a \in \mathbb{R}$ και n άρτιος
4.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	αν $a, b \geq 0$
5.	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	αν $a \geq 0$ και $b > 0$
6.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	αν $a \geq 0$
7.	$\sqrt[mr]{a^{nr}} = \sqrt[m]{a^n}$	αν $a \geq 0$

Απόδειξη (της ιδιότητας 4)

Είναι,

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Επίσης,

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab.$$

Άρα,

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^n \iff \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Απόδειξη (της ιδιότητας 5)

Είναι,

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$$

Επίσης,

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}.$$

Άρα,

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n \iff \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Απόδειξη (της ιδιότητας 6)

Είναι,

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a.$$

Επίσης,

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a.$$

Άρα,

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} \iff \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Απόδειξη (της ιδιότητας 7)

Είναι,

$$\begin{aligned}\sqrt[mr]{a^{nr}} &= \sqrt[m]{\sqrt[r]{a^{nr}}} \\ &= \sqrt[m]{\sqrt[r]{(a^n)^r}} \\ &= \sqrt[m]{a^n}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sqrt[mr]{a^{nr}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να αποδείξετε ότι

(i) $\left(\sqrt{50}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{98}-\sqrt{72}-\sqrt{18}\right)=-12$ (ii) $\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{27}=4\sqrt{3}$

(iii) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{108}\right)\sqrt{3}=12$ (iv) $\dfrac{\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}=5$

Α2 | Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

(i) $\left(\sqrt{24}+\sqrt{54}\right)\div\sqrt{6}$ (ii) $\left(4\sqrt{32}-3\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)\div 2\sqrt{2}$

(iii) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}\right)\sqrt{2}$ (iv) $\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}\right)$

Α3 | Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$ και $B=2+\sqrt{3}$, τότε

1. Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$

Α4 | Δίνονται οι αριθμοί $a=\dfrac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $b=\dfrac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα $a+b$ και το γινόμενο ab.
2. Να αποδείξετε ότι $a^2+b^2=7$

Α5 | Δίνονται οι αριθμοί $a=\sqrt{3}-1$ και $b=\sqrt{3}+1$

1. Να δείξετε ότι $a^2+ab+b^2=10$
2. Να δείξετε ότι $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+1=5$

Α6 |

1. Να αποδείξετε ότι $2<\sqrt{5}$
2. Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$
3. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$

Α7 |

1. Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$
2. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9-4\sqrt{5}$ και $9+4\sqrt{5}$

Α8 |

1. Να δείξετε ότι

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^2=9+4\sqrt{5}\quad\text{και}\quad\left(1-\sqrt{5}\right)^2=6-2\sqrt{5}$$

2. Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=1+2\sqrt{5}$$

Α9 | Να αποδείξετε ότι

(i) $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=2$ (ii) $\sqrt{3\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\sqrt{4\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=-1$

(iii) $\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^4}+\left(\sqrt{14}-1\right)^2=24$ (iv) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{7}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{7}+2}=3$

Α10 | Να αποδείξετε ότι

(i) $\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=4$ (ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{17}-\sqrt{13}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{17}+\sqrt{13}}=2$

(iii) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=5$ (iv) $\dfrac{1}{\left(5-\sqrt{23}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(5+\sqrt{23}\right)^2}=24$

Α11 | Θεωρούμε τον αριθμό $a=\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1. Να υπολογίσετε τον a^2
2. Να αποδείξετε ότι $a=-2$

Α12 | Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις $a=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $b=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ και $c=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$

1. Να δείξετε ότι $a+b+c=23$
2. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$
   Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α13 | Αν m,n θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $m\neq n$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{m-\sqrt{mn}}+\frac{1}{m+\sqrt{mn}}\right)\cdot\frac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}=2$$

Α14 | Για $a=\dfrac{9}{25}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right)\div\left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)$$

Α15 | Να συγκρίνετε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών

(i) $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(ii) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ και $\sqrt{7}+\sqrt{2}$

(iii) $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ και $1-\sqrt{6}$

Α16 | Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα με ρητό παρονομαστή:

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (iii) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(v) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ (vi) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ (vii) $\dfrac{10}{\sqrt{5}+1}$ (viii) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

Α17 | Να αποδείξετε ότι

(i) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt[8]{128}$ (ii) $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{9}$

(iii) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[3]{27}=9$ (iv) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{15}\cdot\sqrt[4]{75}=5\sqrt[12]{3^5}$

(v) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}=3$ (vi) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[12]{2}}=\sqrt{2}$

Α18 | Για $x=11$ και $y=12$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\left(x^{1/3}+y^{1/3}\right)\cdot\left(x^{2/3}-x^{1/3}\cdot y^{1/3}+y^{2/3}\right)$$

Α19 | Για $x=16$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$$

Α20 | Για $a = 196$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{a - a^{-2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} - \frac{2}{a^{3/2}} - \frac{1 - a^{-2}}{a^{1/2} + a^{-1/2}}$$

Α21 | Δίνεται η παράσταση

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

1. Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
2. Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Α22 | Αν $0 < x < 1$, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x - 1$

Α23 | Αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{x + 1 + 2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,(x - \sqrt{x}) = x - 1$

2

Εξισώσεις

«“An equation means nothing to me unless it expresses a thought of God.”

«Μια εξίσωση δεν έχει κανένα νόημα για μένα, αν δεν εκφράζει μια σκέψη του Θεού.»»

— **Srinivasa Ramanujan**

2.1 Η έννοια της εξίσωσης

Στην καθημερινή ζωή συναντούμε συχνά προβλήματα στα οποία δεν γνωρίζουμε κάποια ποσότητα και προσπαθούμε να την υπολογίσουμε. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις **εξισώσεις**.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εξίσωση ονομάζεται κάθε ισότητα στην οποία εμφανίζεται ένας ή περισσότεροι άγνωστοι.

Για παράδειγμα, αν το άθροισμα ενός αριθμού και του 5 είναι ίσο με 12, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$x + 5 = 12$$

Το γράμμα x παριστάνει τον άγνωστο αριθμό που αναζητούμε και ονομάζεται άγνωστος της εξίσωσης. Αν αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό 7, τότε προκύπτει

$$7 + 5 = 12,$$

που είναι αληθής ισότητα.

Λέμε τότε ότι ο αριθμός 7 είναι λύση της εξίσωσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ

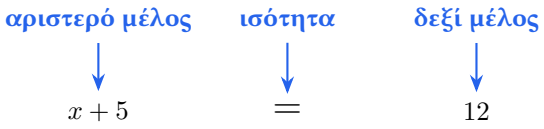
Λύση μιας εξίσωσης ονομάζεται κάθε τιμή του αγνώστου που μετατρέπει την εξίσωση σε αληθή ισότητα.

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Στην εξίσωση

$$x + 5 = 12$$

διακρίνουμε τρία βασικά στοιχεία:



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εξετάσετε αν ο αριθμός 4 είναι λύση της εξίσωσης

$$2x - 3 = 5.$$

Λύση
Αντικαθιστούμε το x με 4:

$$2 \cdot 4 - 3 = 5$$

$$8 - 3 = 5$$

$$5 = 5,$$

που είναι αληθής ισότητα.
Άρα ο αριθμός 4 είναι λύση της εξίσωσης.

Για να ελέγξουμε αν ένας αριθμός είναι λύση μιας εξίσωσης, τον αντικαθιστούμε στη θέση του αγνώστου.
Αν μετά την αντικατάσταση προκύψει αληθής ισότητα, τότε ο αριθμός είναι λύση της εξίσωσης.
Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **επαλήθευση**.

2.2 Ισοδύναμες εξισώσεις

Κατά την επίλυση μιας εξίσωσης, συχνά μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε μια άλλη, πιο απλή, η οποία όμως έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται ισοδύναμες και αποτελούν τη βάση κάθε μεθόδου επίλυσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο εξισώσεις λέγονται **ισοδύναμες**, όταν έχουν ακριβώς το ίδιο σύνολο λύσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω εξισώσεις είναι ισοδύναμες:

$$x + 3 = 8$$

και

$$x + 7 = 2$$

Λύση:

Η πρώτη εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = 5$.
Η δεύτερη εξίσωση έχει επίσης μοναδική λύση τον αριθμό $x = 5$.
Επομένως, οι δύο εξισώσεις έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων και είναι ισοδύναμες.

Για να λύσουμε μία εξίσωση, εφαρμόζουμε πράξεις και στα δύο μέλη της, έτσι ώστε να προκύψει μία απλούστερη εξίσωση.

Οι πράξεις αυτές επιτρέπονται μόνο όταν δεν μεταβάλλουν το σύνολο λύσεων της εξίσωσης. Οι εξισώσεις που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο είναι ισοδύναμες.

Επιτρεπτές πράξεις σε μία εξίσωση

1.

Προσθέτουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη.

$$A = B \iff A + \lambda = B + \lambda$$

2.

Αφαιρούμε τον ίδιο αριθμό και από τα δύο μέλη.

$$A = B \iff A - \lambda = B - \lambda$$

3.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο **μη μηδενικό** αριθμό.

$$A = B \iff \lambda A = \lambda B, \qquad \lambda \neq 0$$

4.

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο **μη μηδενικό** αριθμό.

$$A = B \iff \frac{A}{\lambda} = \frac{B}{\lambda}, \qquad \lambda \neq 0$$

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Στις δύο τελευταίες πράξεις απαιτούμε ο αριθμός λ να είναι διαφορετικός από το μηδέν. Πράγματι:

- Η διαίρεση με το μηδέν δεν ορίζεται.
- Ο πολλαπλασιασμός και των δύο μελών μιας εξίσωσης με το μηδέν οδηγεί πάντοτε στην

ισότητα

$$0 = 0,$$

η οποία δεν είναι γενικά ισοδύναμη με την αρχική εξίσωση.

Στα παρακάτω παραδείγματα θα χρησιμοποιήσουμε τις επιτρεπτές πράξεις που παρουσιάσαμε, ώστε να μετασχηματίσουμε τις δοσμένες εξισώσεις σε ισοδύναμες, μέχρι να προσδιορίσουμε τη λύση τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λύσετε την εξίσωση

$$x + 7 = 15$$

Λύση:

$$\begin{aligned} x + 7 &= 15 \\ x + 7 - 7 &= 15 - 7 \quad \text{(Αφαιρούμε το 7 και από τα δύο μέλη.)} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Επαλήθευση:
Για $x = 8$ έχουμε

$$8 + 7 = 15,$$

που ισχύει. Επομένως, η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός

$$\boxed{x = 8}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λύσετε την εξίσωση

$$4x = 20$$

Λύση:

$$\begin{aligned} 4x &= 20 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{20}{4} \quad \text{(Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 4.)} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Επαλήθευση:
Για $x = 5$ έχουμε

$$4 \cdot 5 = 20,$$

που ισχύει. Επομένως, η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός

$$\boxed{x = 5}$$

Όταν λύνουμε μία εξίσωση, στόχος μας είναι να την μετασχηματίσουμε, με τη βοήθεια ισοδύναμων εξισώσεων, σε μία απλούστερη εξίσωση, της οποίας τη λύση γνωρίζουμε ήδη ή μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα γνωρίσουμε τις βασικές μορφές εξισώσεων και θα μάθουμε πώς, χρησιμοποιώντας τις επιτρεπτές πράξεις, μπορούμε να οδηγούμαστε σε αυτές.

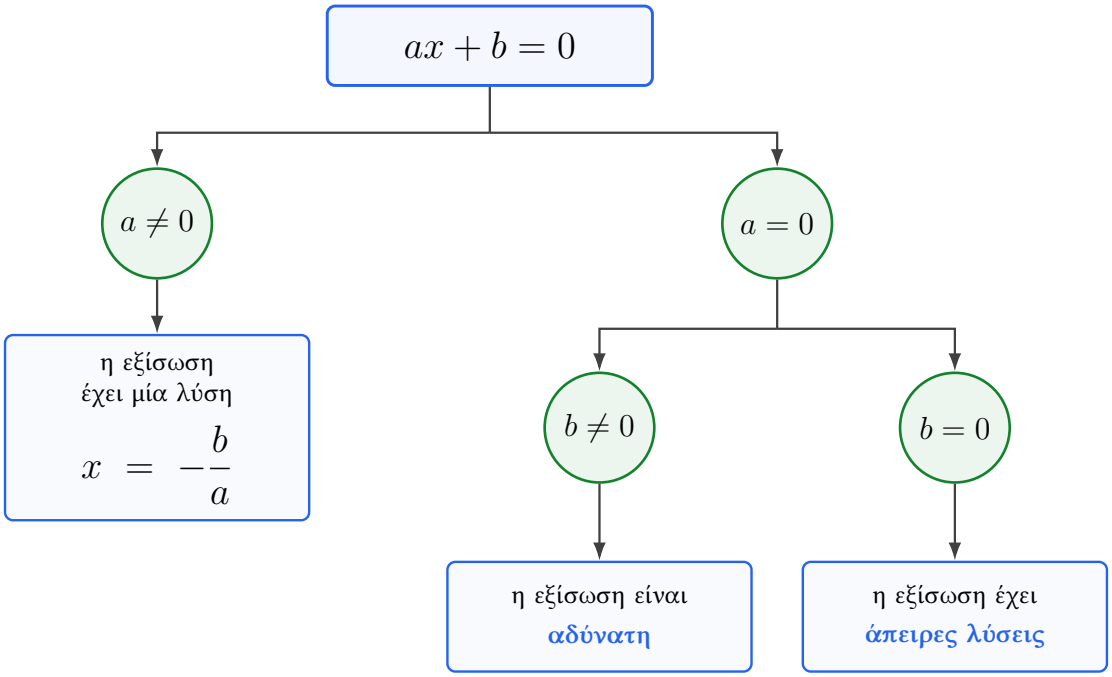
2.3 Η εξίσωση πρώτου βαθμού

Η εξίσωση της μορφής

$$ax + b = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

ονομάζεται εξίσωση πρώτου βαθμού, όταν $a \neq 0$.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται όλες οι περιπτώσεις που προκύπτουν κατά την επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής $ax + b = 0$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $2(x-3)-3(1-3x)=13$

(ii) $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{2x+6}{3}=\dfrac{3x+21}{4}$

(iii) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{2x-4}{4}=\dfrac{3x+4}{6}$

(iv) $\dfrac{4x+1}{3}=x+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2-2x}{6}$

Α2 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $\dfrac{x}{6}-\dfrac{x-6}{3}=1-\dfrac{x-8}{4}$

(ii) $\dfrac{5+3x}{18}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{6x-2}{9}$

(iii) $\dfrac{2x}{5}-\dfrac{x-3}{15}=-1-\dfrac{x+1}{10}$

(iv) $\dfrac{x-2}{8}+\dfrac{7}{16}=3+\dfrac{2x-5}{4}$

Α3 | Να λύσετε τις εξισώσεις.

(i) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{5x-12}{12}$

(ii) $\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{2x-5}{6}=-\dfrac{x+4}{12}$

(iii) $\dfrac{5x-4}{5}-\dfrac{7x-10}{7}=\dfrac{22}{35}$

(iv) $\dfrac{4x-1}{6}=-\dfrac{4}{3}\left(-1-\dfrac{9x+1}{18}\right)$

Α4 | Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2),\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

1. Να λύσετε την εξίσωση για τις τιμές $\lambda=1$ και $\lambda=-1$.
2. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α5 | Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda,,\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

1. Να γράψετε τις εξισώσεις που προκύπτουν για $\lambda=0$ και $\lambda=3$.
2. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει μία και μοναδική λύση.
3. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης να ισούται με 4.

Α6 | Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x=x+\lambda^2-1,\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

2. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.
3. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α7 | Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

(i) $(\lambda-2)x=\lambda+4$

(ii) $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda-3)$

(iii) $\lambda x=5x+2\lambda-11$

(iv) $\lambda x+3=2x+\lambda^2-1$

Α8 | Η ηλικία ενός πατέρα είναι τετραπλάσια από την ηλικία του γιου του. Σε 8 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια από την ηλικία του γιου του. Να βρείτε τις σημερινές ηλικίες τους.

Α9 | Σήμερα ο Γιώργος είναι κατά 18 χρόνια μεγαλύτερος από τον αδελφό του. Σε 6 χρόνια η ηλικία του Γιώργου θα είναι διπλάσια από την ηλικία του αδελφού του. Να βρείτε τις σημερινές ηλικίες τους.

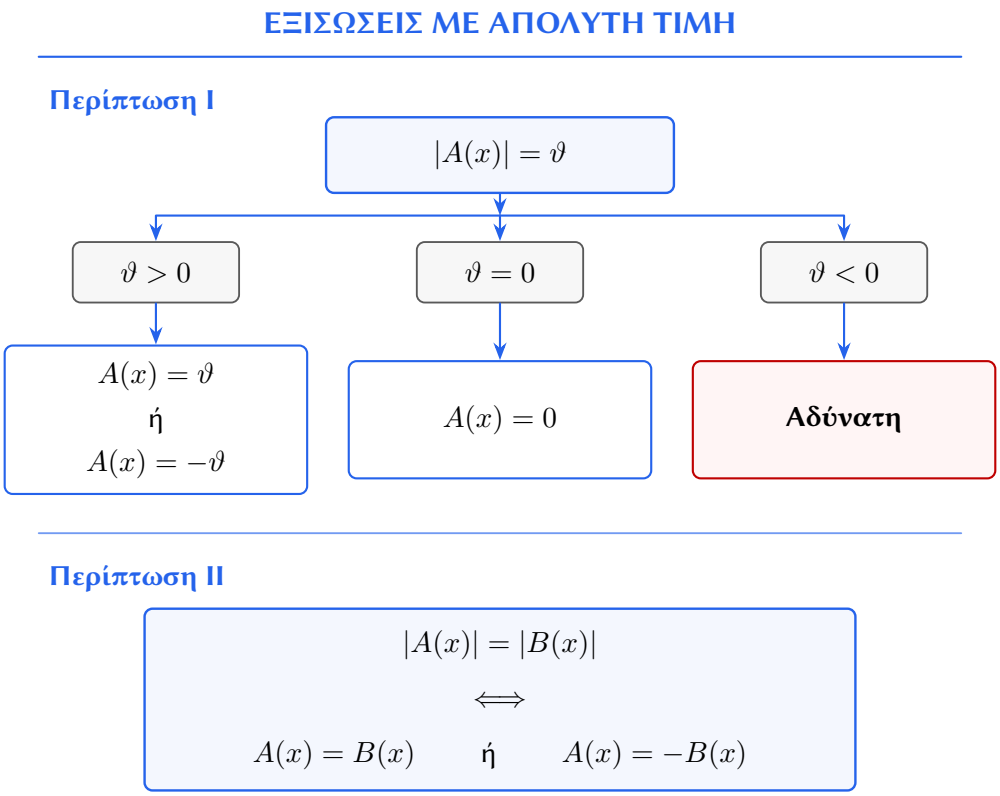
Α10 | Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι κατά 5cm μεγαλύτερο από το πλάτος του. Αν η περίμετρός του είναι ίση με το τριπλάσιο του μήκους του, να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.

Α11 | Δύο ποδηλάτες ξεκινούν ταυτόχρονα και κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Ο δεύτερος κινείται με ταχύτητα κατά 6 km/h μεγαλύτερη από τον πρώτο. Αν σε 3 ώρες έχουν διανύσει συνολικά 126 km, να υπολογίσετε τις ταχύτητές τους.

Α12 | Δύο αυτοκίνητα ξεκινούν ταυτόχρονα από δύο πόλεις που απέχουν 420 km και κινούνται το ένα προς το άλλο. Η ταχύτητα του ενός αυτοκινήτου είναι κατά 15 km/h μεγαλύτερη από την ταχύτητα του άλλου. Αν συναντηθούν μετά από 3 ώρες, να υπολογίσετε τις ταχύτητές τους.

2.4 Εξίσωση με απόλυτη τιμή

Για την επίλυση εξισώσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές χρησιμοποιούμε τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής. Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο βασικές περιπτώσεις.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $|x+4|=6$ (ii) $|2x-1|=19$

(iii) $|3-5x|=7$ (iv) $|4x-2|=0$

(v) $|3x-1|=-1$ (vi) $1-|2x+3|=-2$

Α2 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $2|x|-1=0$ (ii) $\dfrac{|x|+4}{3}-\dfrac{|x|+4}{5}=\dfrac{2}{3}$

(iii) $\dfrac{|x-2|+1}{3}+\dfrac{|4-2x|+3}{4}=2$ (iv) $|x-1|=|2x+3|$

(v) $\big||x|-1\big|=2$ (vi) $\big|2|x|-1\big|=3$

Α3 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $|3x-1|=|x-2|$ (ii) $|4x-3|-2|x+1|=0$

(iii) $|5x-1|=|3x-2|$ (iv) $|2x+1|=|x-4|$

(v) $|x-1|-|5-2x|=0$ (vi) $\sqrt{x^2-2x+1}=|3x-5|$

Α4 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $(|x|-1)(|x-2|-4)=0$ (ii) $|x-3|\cdot|x+2|=|x-3|$

(iii) $|x+4|=x^2+8x+16$ (iv) $|x-5|-(x-5)^2=0$

(v) $x^2+6x+9-|x+3|=0$ (vi) $|x-4|\cdot|x+5|=|2x+7|\cdot|4-x|$

Α5 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $|2x-1|=2x-1$ (ii) $|x-1|=1-x$

(iii) $|x+2|=-x^2-1$ (iv) $|2x-3|+3=2x$

(v) $|x-2|+x-2=0$ (vi) $2|x+1|-|5-x|=x$

Α6 | Να βρείτε την ελάχιστη ακέραια τιμή του x που είναι λύση της εξίσωσης

$$|x-3|+2\,|x+1|=4$$

2.5 Η εξίσωση $x^n = a$

Για την εξίσωση

$$x^n = a, \qquad n \in \mathbb{N}^*, \qquad a \in \mathbb{R},$$

εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση $a = 0$.

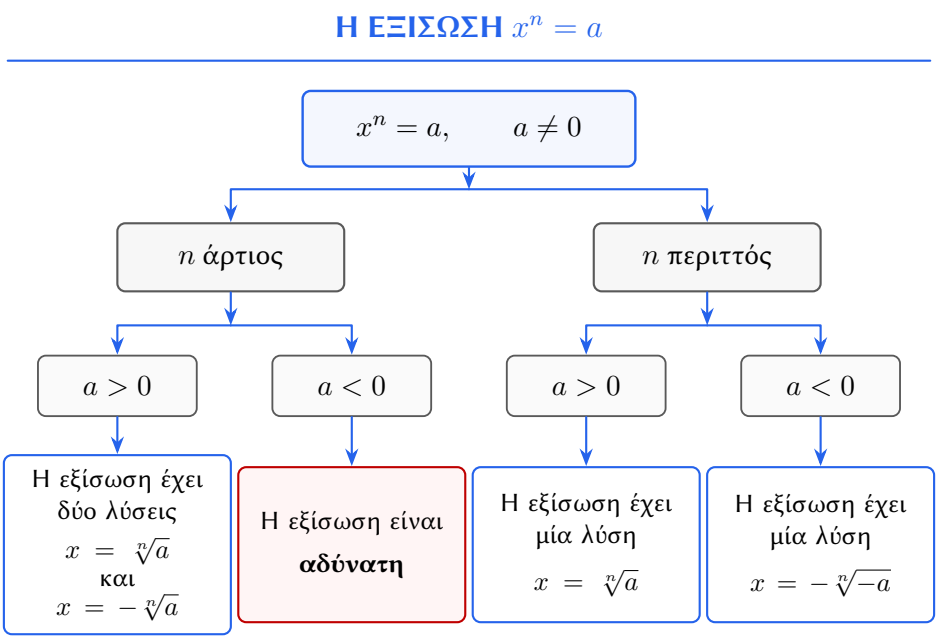
Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση

$$x^n = 0$$

έχει μοναδική λύση την

$$x = 0.$$

Αν $a \neq 0$, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το αν ο εκθέτης n είναι άρτιος ή περιττός.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $x^2 - 9 = 0$

(ii) $x^3 - 8 = 0$

(iii) $x^5 + 1 = 0$

(iv) $2x^4 = 32$

(v) $x^4 = -1$

(vi) $x^5 - 243 = 0$

Α2 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $x^5 + 16x = 0$

(ii) $x^6 - 16x^2 = 0$

(iii) $x^5 + 2x^3 - 8x^2 - 16 = 0$

(iv) $\left(x^2 - 2x\right)^3 = -1$

(v) $(2\,|x| - 3)^5 = -32$

(vi) $\left(x^3 - 1\right)^2 = 49$

2.6 Η εξίσωση δεύτερου βαθμού

Το πολυώνυμο της μορφής

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0,$$

ονομάζεται **τριώνυμο δευτέρου βαθμού**.

Ονομάζεται έτσι επειδή:

- αποτελείται από τρεις όρους,
- ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2.

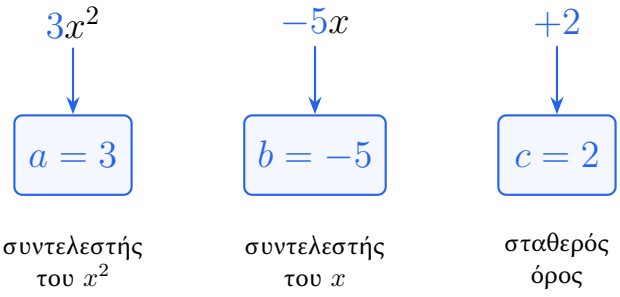
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο τριώνυμο

$$3x^2 - 5x + 2$$

οι συντελεστές είναι

$$a = 3, \qquad b = -5, \qquad c = 2.$$



2.6.1 Ελλιπείς εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει τη μορφή

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0$$

Όταν ένας από τους συντελεστές b ή c είναι ίσος με το μηδέν, η εξίσωση ονομάζεται **ελλιπής εξίσωση δευτέρου βαθμού**.

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο μορφές.

1η μορφή: $ax^2 + bx = 0$

Όταν $c = 0$, η εξίσωση έχει τη μορφή

$$ax^2 + bx = 0$$

Για να τη λύσουμε, βγάζουμε κοινό παράγοντα το x:

$$ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0$$

Επομένως,

$$x = 0 \qquad \text{ή} \qquad ax + b = 0$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x_1 = 0 \qquad \text{και} \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση

$$2x^2 - 6x = 0$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2x$:

$$2x^2 - 6x = 0 \iff 2x(x - 3) = 0$$

Επομένως,

$$2x = 0 \qquad \text{ή} \qquad x - 3 = 0$$

Άρα,

$$x = 0 \qquad \text{ή} \qquad x = 3$$

Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι

$$S = \{0, 3\}.$$

2η μορφή: $ax^2 + c = 0$

Όταν $b = 0$, η εξίσωση έχει τη μορφή

$$ax^2 + c = 0$$

Μεταφέρουμε τον σταθερό όρο στο δεύτερο μέλος:

$$ax^2 + c = 0 \iff ax^2 = -c \iff x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε το πρόσημο του αριθμού $-\dfrac{c}{a}$

- Αν $-\dfrac{c}{a} > 0$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

- Αν $-\dfrac{c}{a} < 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση

$$2x^2 - 18 = 0$$

Έχουμε:

$$2x^2 - 18 = 0 \iff 2x^2 = 18 \iff x^2 = 9$$

Επομένως,

$$x = 3 \qquad \text{ή} \qquad x = -3$$

Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι

$$S = \{-3, 3\}.$$

2.6.2 Η γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού

Κάθε εξίσωση που μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0,$$

ονομάζεται **εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο**.

Στη γενική περίπτωση, όπου $b \neq 0$ και $c \neq 0$, η εξίσωση δεν μπορεί συνήθως να λυθεί με τις απλές μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε στις ελλιπείς μορφές.

Για την επίλυσή της χρησιμοποιούμε μία ποσότητα που ονομάζεται **διακρίνουσα**.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Ο αριθμός

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης.

Οι ελλιπείς εξισώσεις μπορούν να λυθούν με σχετικά απλές μεθόδους. Αντίθετα, για τη γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού απαιτείται μία πιο γενική διαδικασία. Η βασική ιδέα είναι να μετατρέψουμε το τριώνυμο σε τέλειο τετράγωνο, με τη μέθοδο της **συμπλήρωσης τετραγώνου**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

Μεταφέρουμε τον σταθερό όρο στο δεύτερο μέλος:

$$x^2 + 6x = -5$$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό 9 ώστε το πρώτο μέλος να γίνει τέλειο τετράγωνο:

$$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$$

ή ισοδύναμα

$$(x+3)^2 = 4$$

Επειδή

$$(x+3)^2 = 4 = 2^2,$$

προκύπτει

$$x + 3 = \pm 2$$

και επομένως

$$x = -3 \pm 2$$

Άρα,

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -5$$

Επομένως,

$$S = \{-5, -1\}.$$

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού. Ωστόσο, όταν οι συντελεστές a, b και c είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, οι πράξεις γίνονται αρκετά πολύπλοκες.
Από τη γενίκευση της μεθόδου αυτής προκύπτει ένας ενιαίος τρόπος επίλυσης όλων των εξισώσεων δευτέρου βαθμού, ο οποίος βασίζεται στη **διακρίνουσα** της εξίσωσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω η εξίσωση δευτέρου βαθμού

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

Ο αριθμός

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης.

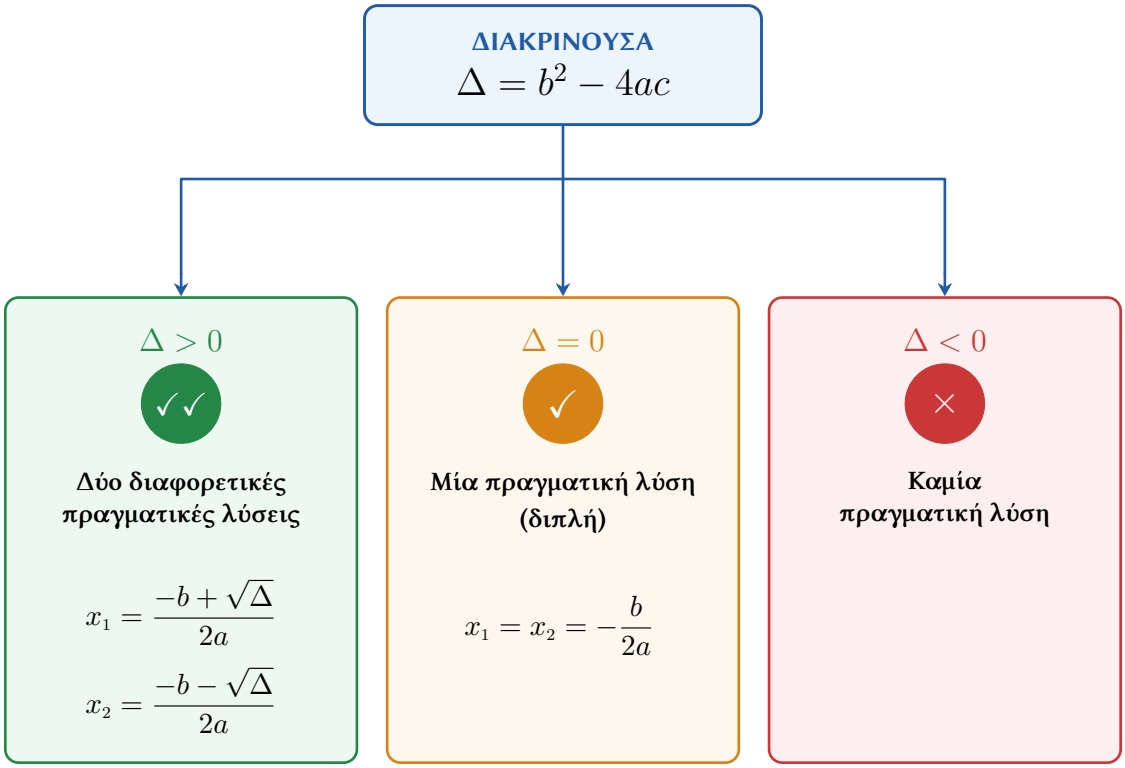
Πώς υπολογίζουμε τη διακρίνουσα;

1. Υπολογίζουμε το b^2
2. Υπολογίζουμε το $4ac$

3. Υπολογίζουμε τη διαφορά

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Η τιμή της διακρίνουσας καθορίζει το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Έχουμε:

$$a = 1, \qquad b = -5, \qquad c = 6$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

Επειδή

$$\Delta > 0,$$

η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις.
Εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5+1}{2} = 3,$$

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5-1}{2} = 2$$

Άρα,

$$S = \{2, 3\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Έχουμε:

$$a = 1, \qquad b = -6, \qquad c = 9$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Επειδή

$$\Delta = 0,$$

η εξίσωση έχει μία πραγματική (διπλή) λύση.
Έχουμε:

$$x_1 = x_2 = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Άρα,

$$S = \{3\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

Έχουμε:

$$a = 1, \qquad b = -2, \qquad c = 5$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

Επειδή

$$\Delta < 0,$$

η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.
Άρα,

$$S = \varnothing.$$

2.6.3 Οι τύποι του Vieta

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Τύποι του Vieta] Έστω η εξίσωση δευτέρου βαθμού

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

με πραγματικές λύσεις x_1 και x_2.
Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

και

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται **τύποι του Vieta**.

Απόδειξη

Από τους τύπους επίλυσης της εξίσωσης έχουμε

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Επειδή

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

προκύπτει

$$x_1x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$
$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Άρα,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

και

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Αν δύο πραγματικοί αριθμοί έχουν άθροισμα S και γινόμενο P, τότε είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Πράγματι, για την εξίσωση

$$x^2 - Sx + P = 0$$

έχουμε

$$a = 1, \qquad b = -S, \qquad c = P$$

Επομένως, από τους τύπους του Vieta,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-S}{1} = S$$

και

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{P}{1} = P$$

Άρα οι αριθμοί αυτοί είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 7 και γινόμενο 10.
Θέτουμε

$$S = 7, \qquad P = 10$$

Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Άρα,

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Έχουμε

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$$

Επειδή

$$\Delta > 0,$$

οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{9}}{2} = 5,$$

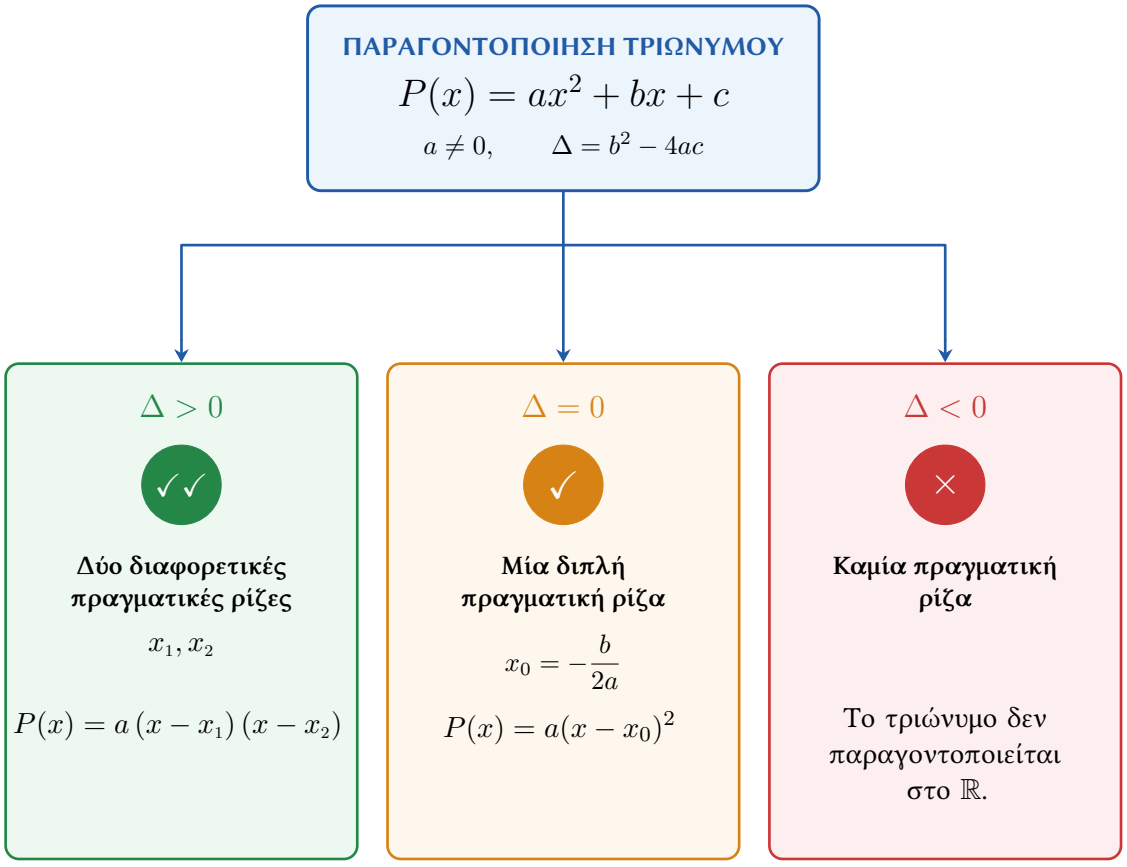
$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{9}}{2} = 2$$

Επομένως, οι δύο αριθμοί είναι

$$\boxed{2 \text{ και } 5.}$$

2.6.4 Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Αν γνωρίζουμε τις ρίζες ενός τριωνύμου, μπορούμε να το γράψουμε ως γινόμενο παραγόντων. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **παραγοντοποίηση του τριωνύμου**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο

$$x^2 - 5x + 6$$

Λύση

Για την εξίσωση

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

έχουμε

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

Άρα

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$$

και

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2$$

Επομένως,

$$\boxed{x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο

$$2x^2 - 7x + 3$$

Λύση

Για την εξίσωση

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

έχουμε

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$$

Άρα

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{25}}{4} = 3$$

και

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2}$$

Επομένως,

$$2x^2 - 7x + 3 = 2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Επειδή

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1,$$

τελικά

$$\boxed{2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)(2x - 1)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο

$$x^2 - 6x + 9$$

Λύση
Για την εξίσωση

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

έχουμε

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα

$$x_0 = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$$

Επομένως,

$$\boxed{x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εξεταστεί αν το τριώνυμο

$$x^2 + 2x + 5$$

παραγοντοποιείται στους πραγματικούς αριθμούς.
Λύση
Για την εξίσωση

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

έχουμε

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.
Επομένως, το τριώνυμο

$$x^2 + 2x + 5$$

δεν παραγοντοποιείται στους πραγματικούς αριθμούς.

2.6.5 Επίλυση εξισώσεων με παραγοντοποίηση

Σε πολλές περιπτώσεις μια εξίσωση μπορεί να μετατραπεί σε γινόμενο δύο ή περισσότερων παραγόντων. Τότε η επίλυσή της βασίζεται στην παρακάτω ιδιότητα.

Νόμος μηδενικού γινομένου
Αν το γινόμενο δύο παραστάσεων είναι ίσο με μηδέν, τότε μία τουλάχιστον από αυτές είναι ίση με μηδέν.

$$A(x)\,B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ ή } B(x) = 0.$$

▶ **ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ**

Για να εφαρμόσουμε τον νόμο του μηδενικού γινομένου, η εξίσωση πρέπει να έχει τη μορφή

$$(\cdots)(\cdots) = 0.$$

Αν το δεξί μέλος δεν είναι μηδέν, μεταφέρουμε πρώτα όλους τους όρους στο ίδιο μέλος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση

$$(3x+2)(x-6)=0.$$

Λύση

Από τον νόμο του μηδενικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} 3x+2=0 \quad &\text{ή} \quad x-6=0 \\ 3x=-2 \quad &\text{ή} \quad x=6 \\ x=-\frac{2}{3} \quad &\text{ή} \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις

$$\boxed{x=-\frac{2}{3} \text{ ή } x=6}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση

$$(x+1)(x-2)=(2x-1)(x+1)$$

Λύση

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος:

$$\begin{aligned} &(x+1)(x-2)-(2x-1)(x+1)=0 \\ \iff &(x+1)\big[(x-2)-(2x-1)\big]=0 \\ \iff &(x+1)(-x-1)=0 \\ \iff &-(x+1)^2=0 \\ \iff &(x+1)^2=0 \end{aligned}$$

Από τον νόμο του μηδενικού γινομένου έχουμε

$$x+1=0$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση

$$\boxed{x=-1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση

$$(x+2)(x+1)-2x(x^2+2x+1)=0$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
&(x+2)(x+1) - 2x(x+1)^2 = 0 \\
\iff &(x+1)\Big[(x+2) - 2x(x+1)\Big] = 0 \\
\iff &(x+1)(x+2-2x^2-2x) = 0 \\
\iff &(x+1)(-2x^2-x+2) = 0.
\end{aligned}
$$

Από τον νόμο του μηδενικού γινομένου έχουμε

$$
\begin{aligned}
x+1=0 \qquad &\text{ή} \qquad -2x^2-x+2=0 \\
x=-1 \qquad &\text{ή} \qquad x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \\
&\text{ή} \qquad x=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}
\end{aligned}
$$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις

$$\boxed{x=-1, \quad x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \quad x=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $3x^2 - 2x = 0$ (ii) $x^2 - 4 = 0$

(iii) $2x^2 + 3 = 0$ (iv) $5x^2 + 4x = 0$

(v) $4x^2 - 1 = 0$ (vi) $36x^2 - 25 = 0$

Α2 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (ii) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

(iii) $-x^2 + 3x - 5 = 0$ (iv) $2x^2 + 6x + 1 = 0$

(v) $3x^2 - 13x + 12 = 0$ (vi) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Α3 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $(x-2)^2 + (x+1)^2 = x^2 + 13$ (ii) $x(x+2) + x^2(x+1) = x^3 + 4$

(iii) $x(x+1) = 2x^2 - 3(x+4)$ (iv) $(2x-1)^2 - (3-x)^2 = (x+1)(2x-1) - 1$

Α4 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $x^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)x - \sqrt{2} = 0$ (ii) $x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + 2\sqrt{2} = 0$

(iii) $\left(x^2 - 9x + 8\right)\left(-x^2 + 5x - 7\right) = 0$ (iv) $\dfrac{x(3x-2)}{3} - \dfrac{(2x-1)^2 + 2}{6} = 1 - \dfrac{x-6}{2}$

Α5 | 1. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης

$$-2x^2 + 10x = 12$$

2. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$$

Α6 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.
2. Για $\lambda = 2$, να λύσετε την εξίσωση.

Α7 | Δίνεται η εξίσωση

$$ax^2 - 2ax - 2a - 2 = 0, \qquad \text{με } a \in \mathbb{R}^*.$$

1. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$, για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζα το 3.
2. Για $a = 2$, να λύσετε την εξίσωση.

Α8 | Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

(i) $(\lambda-3)x^2+2\lambda x+\lambda+3=0$ (ii) $(\lambda+1)x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-3=0$

(iii) $\lambda^2x^2+4x-4=0$ (iv) $(\lambda-2)x^2+(3\lambda-5)x+3=0$

Α9 | Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού m, για τις οποίες η εξίσωση

$$4x^2-2(m+1)x+m^2-3m-1=0$$

έχει μία πραγματική ρίζα. Σε κάθε περίπτωση, να προσδιορίσετε τη ρίζα αυτή.

Α10 | Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού m, για τις οποίες η εξίσωση

$$4x^2-2(m+1)x+m^2-3m-1=0$$

έχει μία πραγματική ρίζα. Σε κάθε περίπτωση, να προσδιορίσετε τη ρίζα αυτή.

Α11 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$$

1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι
$$\Delta=(2\lambda-4)^2$$
2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.
3. Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, ο αριθμός $x=2$ είναι λύση της εξίσωσης.

Α12 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2-(4\lambda+1)x+4\lambda=0,\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι
$$\Delta=(4\lambda-1)^2$$
2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.
3. Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, ο αριθμός $x=1$ είναι λύση της εξίσωσης.
4. Αν $\lambda\in\mathbb{Z}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν μπορεί να έχει ρίζα που να είναι πρώτος αριθμός.

Α13 | Δίνεται η εξίσωση

$$ax^2-\left(a^2-1\right)x-a=0,\qquad a\in\mathbb{R}^*$$

1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι
$$\Delta=\left(a^2+1\right)^2$$
2. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι
$$\rho_1=a\qquad \text{και}\qquad \rho_2=-\frac{1}{a}$$
3. Να βρείτε τις τιμές του a, για τις οποίες ισχύει
$$|\rho_1-\rho_2|=2$$

Α14 | Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$x^2 + 2x + \lambda - 1 = 0 \tag{1}$$

και

$$x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + \frac{9}{4} = 0 \tag{2}$$

Αν η εξίσωση (1) έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) είναι αδύνατη.

Α15 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης για $\lambda = -2$ και για $\lambda = 3$.
2. (a) Να αποδείξετε ότι, αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.
   (b) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ, για την οποία η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.
3. Αν ισχύει
$$\left|\lambda^2 - 4\lambda - 5\right| = 4\lambda - \lambda^2 + 5, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\},$$
να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

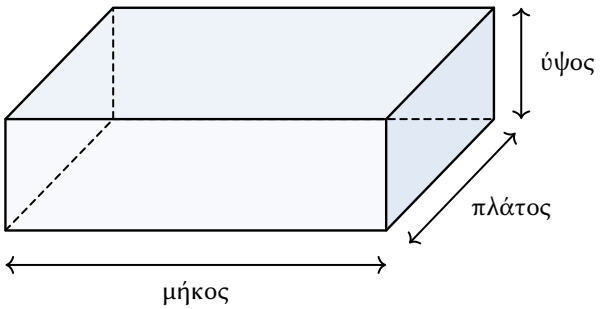
Α16 | Το πάτωμα του εργαστηρίου Πληροφορικής ενός σχολείου έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

1. Να εκφράσετε, με τη βοήθεια του x, την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.
2. Αν το εμβαδόν του πατώματος είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

Α17 | Για την κάλυψη μέρους ενός τοίχου με τετράγωνα πλακάκια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d + 1)$ cm.

1. Να εκφράσετε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν ενός πλακιδίου τύπου Α και ενός πλακιδίου τύπου Β.
2. Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 πλακάκια τύπου Β, να βρείτε
   (a) το μήκος της πλευράς των πλακιδίων κάθε τύπου.
   (b) το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτεται.

Α18 | Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τετράγωνη βάση και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.



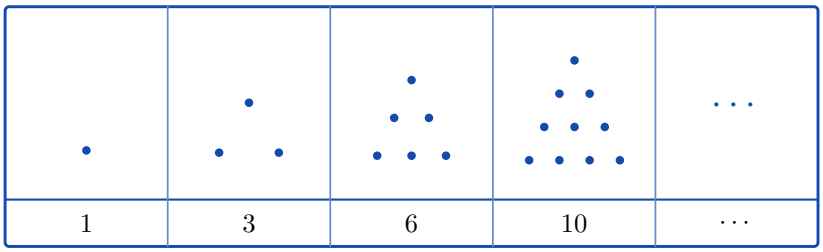
1. Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16\,\mathrm{m}^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.

2. Λόγω έλλειψης χώρου, η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος $2\,\mathrm{m}$. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά $2\,\mathrm{m}$ μικρότερο από το μήκος της, να υπολογίσετε τις διαστάσεις της βάσης, ώστε ο όγκος της να παραμείνει $16\,\mathrm{m}^3$.
3. Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10\,\mathrm{m}^3$ πετρέλαιο, να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου.

Α19 | Οι αριθμοί

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ldots$$

και γενικά οι αριθμοί που μπορούν να παρασταθούν με τελείες τοποθετημένες σε τριγωνική διάταξη, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ονομάζονται *τριγωνικοί αριθμοί*.



Αποδεικνύεται ότι ο n-οστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Να βρείτε τον $10^{\text{ο}}$ τριγωνικό αριθμό.
2. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.
3. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου.

Α20 | Να παραγοντοποιήσετε, εφόσον είναι δυνατόν, τα παρακάτω τριώνυμα.

(i) $x^2 + x - 20$ (ii) $2x^2 - 17x - 9$

(iii) $2x^2 - x + 1$ (iv) $3x^2 - 30x + 75$

(v) $-x^2 + 3x + 28$ (vi) $5x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Α21 | Δίνεται το τριώνυμο

$$-x^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right) x + \sqrt{3}$$

1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2$$

2. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Α22 | Δίνεται η παράσταση

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$$

1. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

$$2x^2 - 3x - 2$$

2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
3. Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

Α23 | Δίνονται οι παραστάσεις

$$S = \frac{4a^2 - 1}{2a^2 + 5a - 3} \qquad \text{και} \qquad T = \frac{2a^2 - 5a - 3}{a^2 - 9}$$

1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a, για τις οποίες ορίζονται και οι δύο παραστάσεις.
2. Να αποδείξετε ότι, για όλες τις τιμές του a που βρήκατε, ισχύει

$$S = T$$

Α24 | Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$2x^2 + 3x - 4 = 0,$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

(i) $x_1 + x_2$ (ii) $x_1 \cdot x_2$

(iii) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ (iv) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

Α25 | Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x - 4 = 0,$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

(i) $x_1 + x_2$ (ii) $x_1 \cdot x_2$

(iii) $x_1^2 + x_2^2$ (iv) $x_1^3 + x_2^3$

Α26 | Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$-x^2 + 4x + 7 = 0,$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

(i) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ (ii) $|x_1 - x_2|$

(iii) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$ (iv) $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$

Α27 | Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a, για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 + \left(2 - a - a^2\right) x - a^2 = 0$$

έχει πραγματικές ρίζες με άθροισμα ίσο με 0.

Α28 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x - \left(\lambda^2 + 5\right) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$$

Α29 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε την τιμή του λ, για την οποία ισχύει

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$

Α30 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + ax + 12 = 0, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης και ισχύει

$$x_2 - x_1 = 1,$$

να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a.

Α31 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a, ώστε η εξίσωση να έχει δύο πραγματικές ρίζες, από τις οποίες η μία να είναι διπλάσια της άλλης.

Α32 | Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}} \qquad \text{και} \qquad B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$$

1. Να αποδείξετε ότι

   (i) $A + B = \dfrac{1}{2}$ (ii) $A \cdot B = \dfrac{1}{20}$

2. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

Α33 | Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}} \qquad \text{και} \qquad B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$$

1. Να αποδείξετε ότι

   (i) $A + B = 3$ (ii) $A \cdot B = \dfrac{1}{2}$

2. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

Α34 | Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύουν

$$a + b = 2 \qquad \text{και} \qquad a^2 b + ab^2 = -30$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$ab = -15$$

2. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς a και b και στη συνέχεια να τους προσδιορίσετε.

Α35 | Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί a και b, για τους οποίους ισχύουν

$$a+b=12 \qquad \text{και} \qquad a^2+b^2=272$$

1. Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

να αποδείξετε ότι

$$ab=-64$$

2. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς a και b.
3. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς a και b.

Α36 | Δίνεται το τριώνυμο

$$x^2-\kappa x-2, \qquad \kappa\in\mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι $\Delta>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$, όπου Δ είναι η διακρίνουσα του τριωνύμου.
2. Για $\kappa=3$, έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-3x-2=0$$

(a) Να βρείτε το άθροισμα

$$S=x_1+x_2$$

και το γινόμενο

$$P=x_1\cdot x_2$$

των ριζών της εξίσωσης.

(b) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες ρ_1 και ρ_2, όπου

$$\rho_1=2x_1 \qquad \text{και} \qquad \rho_2=2x_2$$

Α37 | Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί a και b, με $a\neq b$, για τους οποίους ισχύει

$$\frac{a^2+1}{b^2+1}=\frac{a}{b}$$

1. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και b είναι αντίστροφοι.
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=\frac{a^{22}\left(b^3\right)^8}{a^{-2}(ab)^{25}}$$

3. Αν επιπλέον οι αριθμοί a και b εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και έχουν άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους προσδιορίσετε.
4. Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προστεθεί στο μικρότερο από τα δύο μήκη, ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

Α38 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $x^2-8|x|+15=0$

(ii) $x^2-4|x|-5=0$

(iii) $6(x+2)^2-|x+2|-1=0$

(iv) $x^2-4x+4-7|x-2|=-10$

(v) $x^4-13x^2+36=0$

(vi) $x^4+15x^2+16=0$

Α39 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4}{x+1}=4$ (ii) $\dfrac{2x+1}{x+3}-\dfrac{x-1}{x^2-9}=\dfrac{x+3}{3-x}-\dfrac{x+4}{x+3}$

(iii) $\dfrac{2x}{x-9}-\dfrac{x^2+25}{x^2-81}=\dfrac{5}{x+9}-\dfrac{5}{x-9}$ (iv) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{3x}{2x-2}=-\dfrac{5}{2}$

Α40 | Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $\left|x^2-5x+5\right|=1$ (ii) $\left|x^2+3x-5\right|=\left|2x^2-4x+5\right|$

(iii) $x^2+|x-1|=1$ (iv) $\left|x^2+4x+2\right|=\dfrac{5x+16}{3}$

Α41 | Δίνεται η εξίσωση

$$a|x-1|+6|b|=9+b^2, \qquad a\neq 0, \quad b\in\mathbb{R}$$

Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης, να βρείτε τις δυνατές τιμές του b.

Α42 | 1. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση

$$x^4-7x^2+12=0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες και να τις προσδιορίσετε.

2. Γενικεύοντας το προηγούμενο ερώτημα, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση

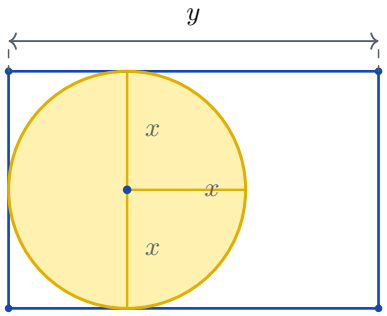
$$x^4+bx^2+c=0, \tag{1}$$

όπου $b, c\in\mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι, αν

$$b<0, \qquad c>0 \qquad \text{και} \qquad b^2-4c>0,$$

τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Α43 | Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Στο εσωτερικό του βρίσκεται κύκλος ακτίνας x cm, ο οποίος εφάπτεται σε τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



1. (a) Να αποδείξετε ότι το μήκος y του ορθογωνίου, ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου, δίνεται από τη σχέση

$$y=5-2x, \qquad 0<x\leq\frac{5}{4}$$

(b) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου, σε cm^2, δίνεται από τη σχέση

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2, \qquad 0 < x \leq \frac{5}{4}$$

2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μέρους του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση

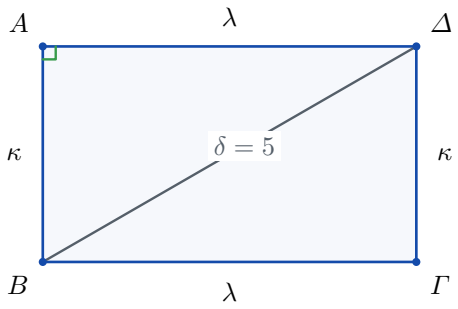
$$E = 10x - (\pi + 4)x^2, \qquad 0 < x \leq \frac{5}{4}$$

3. Αν το εμβαδόν του μέρους του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi)\,\text{cm}^2$ και ο x είναι ρητός αριθμός, να βρείτε:

   (a) την ακτίνα x του κύκλου,

   (b) τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Α44 | Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ, περίμετρο $\Pi = 14\,\text{cm}$ και διαγώνιο $\delta = 5\,\text{cm}$.



1. (a) Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2,$$

   να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου είναι

$$E = 12\,\text{cm}^2$$

   (b) Να αιτιολογήσετε γιατί οι διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

   (c) Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.

2. Να αποδείξετε ότι κάθε ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14\,\text{cm}$ έχει εμβαδόν

$$E \leq \frac{49}{4}\,\text{cm}^2$$

3

Ανισώσεις

«“Τα μαθηματικά συγκρίνουν τα πιο διαφορετικά φαινόμενα και ανακαλύπτουν τις κρυφές αναλογίες που τα ενώνουν.”»

— **Joseph Fourier**

3.1 Έννοια ανίσωσης

Στα μαθηματικά δεν μας ενδιαφέρει πάντοτε να εξετάζουμε αν δύο ποσότητες είναι ίσες. Πολύ συχνά χρειάζεται να συγκρίνουμε δύο αριθμούς ή αλγεβρικές παραστάσεις και να εκφράσουμε ότι η μία είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την άλλη. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις ανισώσεις.

Μια **ανίσωση** είναι μια μαθηματική πρόταση που συγκρίνει δύο αριθμούς ή αλγεβρικές παραστάσεις χρησιμοποιώντας ένα από τα σύμβολα

$$<, \quad >, \quad \leq, \quad \geq .$$

Σύμβολο	Διαβάζεται
$<$	μικρότερο από
$>$	μεγαλύτερο από
$\leq$	μικρότερο ή ίσο από
$\geq$	μεγαλύτερο ή ίσο από

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι παρακάτω είναι ανισώσεις:

$$5 < 9,$$

$$3x - 2 \geq 7,$$

$$2x + 1 < 5x - 4$$

Αν μια ανίσωση περιέχει άγνωστο, τότε **λύση** της ονομάζεται κάθε τιμή του αγνώστου που κάνει την ανίσωση αληθή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην ανίσωση

$$x + 2 < 7$$

η τιμή

$$x = 3$$

είναι λύση, γιατί

$$3 + 2 < 7$$

δηλαδή

$$5 < 7,$$

που είναι αληθής πρόταση.

Αντίθετα, η τιμή

$$x = 6$$

δεν είναι λύση, γιατί

$$6 + 2 < 7$$

δηλαδή

$$8 < 7,$$

που είναι ψευδής πρόταση.

Το σύνολο όλων των λύσεων μιας ανίσωσης ονομάζεται **σύνολο λύσεων** της ανίσωσης.

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Στις περισσότερες περιπτώσεις, μια ανίσωση έχει περισσότερες από μία λύσεις. Οι λύσεις της αποτελούν ένα σύνολο αριθμών, το οποίο ονομάζεται **σύνολο λύσεων**.

3.2 Ισοδύναμες ανισώσεις

Όπως και στις εξισώσεις, πολλές φορές μετασχηματίζουμε μια ανίσωση σε μια άλλη, ευκολότερη στη λύση της. Οι μετασχηματισμοί αυτοί πρέπει να διατηρούν το ίδιο σύνολο λύσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ανισώσεις ονομάζονται **ισοδύναμες**, όταν έχουν ακριβώς το ίδιο σύνολο λύσεων.

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε μια ανίσωση με μια ισοδύναμή της αν:

1. προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη της ανίσωσης,
2. πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με τον ίδιο θετικό αριθμό,
3. πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, αλλάζοντας τη φορά της ανίσωσης.

ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ

Η φορά της ανίσωσης δεν αλλάζει

- $+$ Προσθέτουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη.
- $-$ Αφαιρούμε τον ίδιο αριθμό και από τα δύο μέλη.
- $\times$ Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με θετικό αριθμό.
- $\div$ Διαιρούμε και τα δύο μέλη με θετικό αριθμό.

Η φορά της ανίσωσης αντιστρέφεται

- $\times$ Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με αρνητικό αριθμό.
- $\div$ Διαιρούμε και τα δύο μέλη με αρνητικό αριθμό.

3.3 Η ανίσωση πρώτου βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ

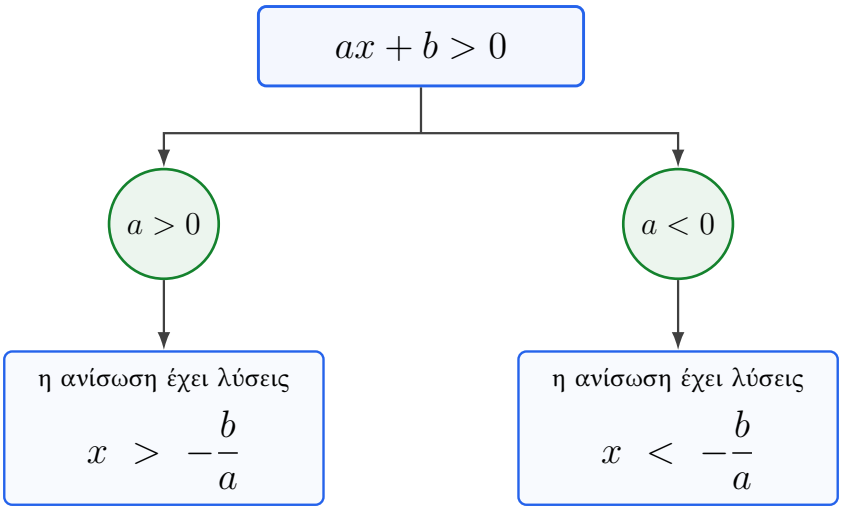
Ανίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε ανίσωση που μπορεί να πάρει μία από τις μορφές

$$ax + b > 0, \qquad ax + b < 0, \qquad ax + b \geq 0, \qquad ax + b \leq 0,$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

Για να μελετήσουμε τις δυνατές περιπτώσεις, θεωρούμε αρχικά την ανίσωση

$$ax + b > 0$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η ανίσωση

$$2x - 5 > 3$$

Λύση:

$$\begin{aligned} 2x - 5 &> 3 \\ 2x &> 8 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

Άρα

$$S = (4, +\infty).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η ανίσωση

$$-3x + 6 > 0$$

Λύση:

$$\begin{aligned} -3x &> -6 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κατά τη διαίρεση με τον αρνητικό αριθμό -3 η φορά της ανίσωσης αντιστρέφεται.
Άρα

$$S = (-\infty, 2).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x-1}{2}\leq\dfrac{3x+6}{6}$ (ii) $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{x-2}{2}<2-\dfrac{x}{6}$

(iii) $\dfrac{x-3}{5}+\dfrac{3x-4}{2}\leq\dfrac{5x-2}{10}$ (iv) $\dfrac{3x-2}{3}+\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{2-x}{3}+\dfrac{16x+25}{12}$

Α2 | Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $(x-3)(x+3)+2(x+1)\geq(x-1)^2+4$ (ii) $(x+2)^2-2(x-2)^2\leq 25-(x+1)^2$

(iii) $(x+4)(x-2)+3(x-1)<(x+1)^2-3$ (iv) $2(x-1)^2-(x+2)^2\geq(x-3)^2-5$

Α3 | Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού m, ώστε η εξίσωση

$$x^2-x+m=0$$

1. να έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες,
2. να έχει μία διπλή ρίζα,
3. να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Α4 | Να βρείτε τη μικρότερη ακέραια τιμή του πραγματικού αριθμού k, για την οποία η εξίσωση

$$x^2-2(k+2)x+k^2+12=0$$

έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Α5 | Δίνονται οι ανισώσεις

$$3x-1<x+9 \qquad \text{και} \qquad 2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$$

1. Να λύσετε καθεμία από τις παραπάνω ανισώσεις.
2. Να βρείτε το σύνολο των κοινών λύσεών τους.

Α6 | Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ζευγών ανισώσεων

(i) $\begin{cases}3-2(1-x)\geq -1\\ x-4<2(1-x)\end{cases}$

(ii) $\begin{cases}\dfrac{4x-3}{5}-x>\dfrac{6}{15}\\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{2}\leq\dfrac{5}{4}\end{cases}$

Α7 | Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $-x+4<x\leq 3+\dfrac{x-1}{3}$ (ii) $-5-4(x-2)<2(x+3)<5(2+x)-4x$

Α8 | Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, να λύσετε την ανίσωση

$$\lambda(x+4)<2\left(\lambda^2+x\right)$$

Α9 | Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, να λύσετε την ανίσωση

$$\lambda(x+6)>2\lambda^2+3x$$

Α10 | Να βρείτε τη μικρότερη ακέραια τιμή της παραμέτρου m, ώστε η ανίσωση

$$mx + 2m \geq 3x + 5$$

να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α11 | Δίνεται η παράσταση

$$A = \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}\right)$$

1. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A, και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Α12 | Μια εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων Α προσφέρει ένα αυτοκίνητο για τέσσερις ημέρες με χρέωση $80\,€$ και επιπλέον $0{,}10\,€$ για κάθε χιλιόμετρο που διανύεται.

Η εταιρεία Β προσφέρει το ίδιο αυτοκίνητο, για το ίδιο χρονικό διάστημα, με χρέωση $60\,€$ και επιπλέον $0{,}20\,€$ για κάθε χιλιόμετρο.

Πόσα τουλάχιστον ολόκληρα χιλιόμετρα πρέπει να διανύσει κάποιος, ώστε η προσφορά της εταιρείας Α να είναι οικονομικότερη από την προσφορά της εταιρείας Β;

Α13 | Ο Νίκος εργάζεται σε μία εταιρεία με βασικό μηνιαίο μισθό $700\,€$ και επιπλέον bonus ίσο με το 4% της αξίας των πωλήσεων που πραγματοποιεί.

Ποια πρέπει να είναι, τουλάχιστον, η αξία των πωλήσεών του κάθε μήνα, ώστε οι συνολικές μηνιαίες αποδοχές του να μην είναι μικρότερες από $1500\,€$;

Α14 | Για τη μέτρηση της θερμοκρασίας χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin).

Η μετατροπή της θερμοκρασίας από βαθμούς Κελσίου σε βαθμούς Φαρενάιτ και από βαθμούς Κελσίου σε βαθμούς Κέλβιν περιγράφεται από τις παρακάτω προτάσεις:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (°C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1.8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (°C) σε βαθμούς Κέλβιν (K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου τον αριθμό 273.

1. Να εκφράσετε συμβολικά καθεμία από τις παραπάνω προτάσεις.
2. Να αποδείξετε ότι η σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F) δίνεται από τον τύπο

$$K = \frac{F - 32}{1.8} + 273$$

3. Κατά τη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από $278\,\text{K}$ έως $283\,\text{K}$.

   Να βρείτε το αντίστοιχο διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F).

3.4 Ανισώσεις με απόλυτο

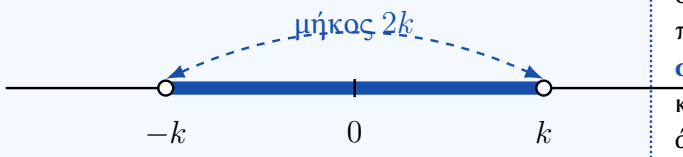
Όπως γνωρίζουμε, η απόλυτη τιμή της παράστασης (A(x)) εκφράζει την απόστασή της από το (0). Επομένως, οι ανισώσεις με απόλυτη τιμή μπορούν να ερμηνευθούν γεωμετρικά πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τις δύο βασικές περιπτώσεις, όταν (k>0).

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ $(k > 0)$

1 $|A(x)| < k$ Η απόσταση του $A(x)$ από το 0 είναι **μικρότερη** από k.

Ισοδύναμα: $-k < A(x) < k$

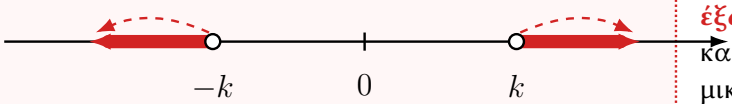


Οι λύσεις είναι όλοι οι αριθμοί που βρίσκονται **ανάμεσα** στα $-k$ και k, χωρίς τα άκρα.

Σύνολο λύσεων: $(-k, k)$

2 $|A(x)| > k$ Η απόσταση του $A(x)$ από το 0 είναι **μεγαλύτερη** από k.

Ισοδύναμα: $A(x) < -k$ ή $A(x) > k$



Οι λύσεις είναι όλοι οι αριθμοί που βρίσκονται **έξω από** τα $-k$ και k, δηλαδή μικρότεροι από $-k$ ή μεγαλύτεροι από k.

Σύνολο λύσεων: $(-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$

! ΣΧΟΛΙΟ Τα σύμβολα $\leq$ και $\geq$ συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο:

$|A(x)| \leq k \iff -k \leq A(x) \leq k, \qquad |A(x)| \geq k \iff A(x) \leq -k$ ή $A(x) \geq k.$

Στις περιπτώσεις αυτές συμπεριλαμβάνονται και τα άκρα $-k$ και k.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η ανίσωση

$$|2x - 1| < 5$$

Λύση:

Επειδή $5 > 0$, έχουμε

$$-5 < 2x - 1 < 5$$

Προσθέτουμε 1 σε όλα τα μέλη:

$$-4 < 2x < 6$$

Διαιρούμε με 2:

$$-2 < x < 3$$

Άρα

$$S = (-2, 3).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η ανίσωση

$$|3x + 2| > 8$$

Λύση:
Επειδή $8 > 0$, έχουμε

$$3x + 2 < -8 \qquad \text{ή} \qquad 3x + 2 > 8$$

Λύνουμε την πρώτη ανίσωση:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &< -8 \\ 3x &< -10 \\ x &< -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

Λύνουμε τη δεύτερη ανίσωση:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &> 8 \\ 3x &> 6 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Άρα

$$S = \left(-\infty, -\frac{10}{3}\right) \cup (2, +\infty).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $|x+1| \leq 5$ (ii) $|x-2| > 2$

(iii) $|3x+7| < 3$ (iv) $|x-1| > -1$

(v) $2|x| - 1 < 0$ (vi) $|x-4| \leq 2$

Α2 | Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $|2x-5| \leq 0$ (ii) $|x+4| < 0$

(iii) $|x| - \dfrac{1-|x|}{3} > -1$ (iv) $3|x-1| - 2 \leq 2|1-x|$

(v) $(1-|x|)^2 > x^2$ (vi) $\dfrac{7-3|2x+1|}{4} > 1$

Α3 | Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $|x-2| + 8 < |5x-10| - |4-2x|$ (ii) $|x-2| \leq |x+4|$

(iii) $|2x-1| > 3 - \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$ (iv) $|2x-4| < x-1$

(v) $|x-1| > |x+3|$ (vi) $||x-2|-3| \leq 1$

Α4 | Να λύσετε την ανίσωση

$$1 \leq ||x-1| - 4| \leq 3$$

Α5 | Να λύσετε την ανίσωση

$$|x+2| - |x-1| < x - \frac{3}{2}$$

Α6 | Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$|2x| < 2,$$

τότε:

1. Να αποδείξετε ότι
$$-1 < x < 1$$
2. Να αποδείξετε ότι
$$x^2 < 1$$

Α7 | Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει

$$|x-2| < 3$$

1. Να αποδείξετε ότι
$$-1 < x < 5$$
2. Να απλοποιήσετε την παράσταση
$$K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$$

Α8 | Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση

$$|x+1|<2,$$

τότε:

1. Να αποδείξετε ότι
$$x\in(-3,1)$$
2. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης
$$K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}$$
είναι ανεξάρτητη του x.

Α9 | Δίνεται η ανίσωση

$$|2x-5|<3$$

1. Να λύσετε την ανίσωση.
2. Αν ο αριθμός a είναι λύση της ανίσωσης, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου
$$(a-1)(a-5)$$

Α10 | 1. Να λύσετε την ανίσωση
$$|x-5|<4$$
2. Αν ένας αριθμός a είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι
$$\frac{1}{9}<\frac{1}{a}<1$$

Α11 | 1. Να λύσετε την ανίσωση
$$|x+4|\geq 3$$
2. Αν $a\geq -1$, να γράψετε την παράσταση
$$A=||a+4|-3|$$
χωρίς απόλυτες τιμές και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α12 | Δίνεται η παράσταση

$$S=\frac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$$

1. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ορίζεται η παράσταση S, και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.
2. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει
$$|S-1|>1$$

Α13 | Για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει

$$|a-1|=|a-3|$$

1. Να βρείτε τον αριθμό a.
2. Να λύσετε την εξίσωση
$$||x+a|+a|=a$$

3. Να λύσετε την ανίσωση
$$|x + a| > 3$$

Α14 |

1. Να λύσετε την ανίσωση
$$|2x - 1| \leq 7$$

2. Να λύσετε την ανίσωση
$$|x - 1| > 2$$

3. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των προηγούμενων ερωτημάτων και και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Α15 |

1. Να λύσετε την ανίσωση
$$|x - 5| < 2$$

2. Να λύσετε την ανίσωση
$$|2 - 3x| > 5$$

3. Να παραστήσετε τα σύνολα λύσεων των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το γράψετε σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων.

Α16 |

1. Να λύσετε την ανίσωση
$$-\frac{3 - 2x}{7} \geq 5$$

2. Να λύσετε την ανίσωση
$$|-x - 1| \leq 23$$

3. Να βρείτε τις τιμές του x που είναι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

Α17 | Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων
$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4 \qquad \text{και} \qquad |x + 5| \geq 3$$

Α18 |

1. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του y, για τις οποίες ισχύει
$$|y - 3| < 1$$

2. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν
$$1 < x < 3 \qquad \text{και} \qquad 2 < y < 4,$$
να αποδείξετε ότι
$$3 < x + y < 7$$

Α19 | Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν
$$|x - 3| \leq 2 \qquad \text{και} \qquad |y - 6| \leq 4$$

1. Να αποδείξετε ότι
$$1 \leq x \leq 5 \qquad \text{και} \qquad 2 \leq y \leq 10$$

2. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y.

Α20 | Για τους πραγματικούς αριθμούς a και b ισχύουν

$$|a-2|<1 \qquad \text{και} \qquad |b-3|\leq 2$$

1. Να αποδείξετε ότι
$$1<a<3$$
2. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο b.
3. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση
$$2a-3b$$
4. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση
$$\frac{a}{b}$$

Α21 | Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει

$$d(x,5)\leq 9$$

1. Να αποδώσετε λεκτικά την παραπάνω σχέση.
2. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.
3. Να γράψετε την παραπάνω σχέση με τη βοήθεια της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.
4. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι
$$|x+4|+|x-14|=18$$

Α22 | 1. Να λύσετε την ανίσωση
$$|x-1|\leq 3$$
2. Να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της ανίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης
$$|x-1|$$
3. Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση
$$|x-1|\leq 3$$
4. Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση
$$||x|-1|\leq 3$$
και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α23 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2-x+\lambda-\lambda^2=0, \tag{1}$$

όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
2. Να βρείτε την τιμή του λ, για την οποία η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα.
3. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει
$$0<d\left(x_1,x_2\right)<2$$

3.5 Ανισώσεις δεύτερου βαθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ανίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζεται κάθε ανίσωση που μπορεί να πάρει μία από τις μορφές

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0,$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

Για να λύσουμε μια ανίσωση δευτέρου βαθμού, εξετάζουμε σε ποια διαστήματα το τριώνυμο είναι θετικό και σε ποια αρνητικό.

Αυτό εξαρτάται από:

- το πρόσημο του συντελεστή a,
- τον αριθμό των πραγματικών ριζών του τριωνύμου.

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $ax^2+bx+c, \quad a\neq 0$

Για να λύσουμε μια ανίσωση δευτέρου βαθμού, εξετάζουμε σε ποια διαστήματα το τριώνυμο είναι θετικό και σε ποια αρνητικό.

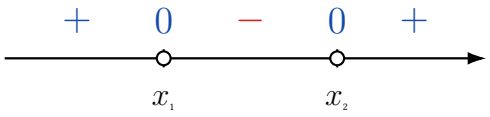
Αυτό εξαρτάται από:

- το πρόσημο του συντελεστή a,
- τον αριθμό των πραγματικών ριζών του τριωνύμου.

1 $\Delta > 0$

Δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες $x_1 < x_2$.

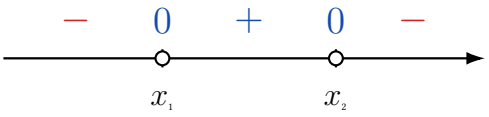
$a > 0$



Το τριώνυμο είναι:

- **θετικό** για $x < x_1$
- **αρνητικό** για $x_1 < x < x_2$
- **θετικό** για $x > x_2$

$a < 0$



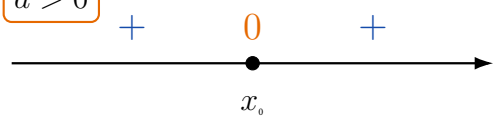
Το τριώνυμο είναι:

- **αρνητικό** για $x < x_1$
- **θετικό** για $x_1 < x < x_2$
- **αρνητικό** για $x > x_2$

2 $\Delta = 0$

Μία διπλή πραγματική ρίζα x_0.

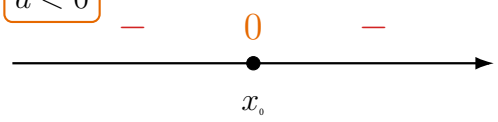
$a > 0$



Το τριώνυμο είναι:

- **θετικό** για $x \neq x_0$
- ίσο με 0 για $x = x_0$

$a < 0$



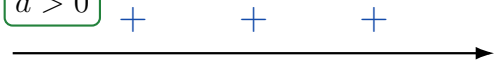
Το τριώνυμο είναι:

- **αρνητικό** για $x \neq x_0$
- ίσο με 0 για $x = x_0$

3 $\Delta < 0$

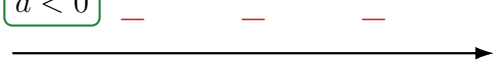
Το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

$a > 0$



Το τριώνυμο είναι **θετικό** για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$a < 0$



Το τριώνυμο είναι **αρνητικό** για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $x^2 + 3x > 0$ (ii) $x^2 - 4 \leq 0$ (iii) $x^2 + 3x - 10 < 0$

(iv) $2x^2 - 3x \geq 5$ (v) $x^2 + 3x + 5 \leq 0$ (vi) $4x^2 + 20x + 25 \geq 0$

(vii) $6x^2 + 20 > 23x$ (viii) $-x^2 + 4x < 7$ (ix) $x(x-7) \geq 3x^2 - 10x - 54$

Α2 | Θεωρούμε το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x - 3$$

1. Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$.
2. Να επιλύσετε την ανίσωση
$$-2f(x) < 0$$

Α3 | Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(i) $x^2 + (\lambda - 3)x + 6 = 0$ (ii) $x^2 + (\lambda - 3)x + 6 - \lambda = 0$

Α4 | Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να είναι αδύνατες.

(i) $-x^2 + (\lambda + 5)x - 3\lambda - 7 = 0$ (ii) $(\lambda - 7)x^2 + (\lambda - 4)x - 1 = 0$

(iii) $x^2 - x + \lambda^2 = 0$ (iv) $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 2\lambda - 1 = 0$

Α5 | Να λύσετε την εξίσωση

$$|x^2 - 5x + 4| + x^2 - 5x + 4 = 0$$

Α6 | 1. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$$

2. Να λύσετε την ανίσωση

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

3. Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του πρώτου ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του δεύτερου ερωτήματος.

Α7 | Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = 3x^2 + 9x - 12, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) \leq 0$$

και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

2. Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του πρώτου ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α8 | Δίνεται το τριώνυμο

$$2x^2 - 3x + 1$$

1. Να βρείτε τις ρίζες του.
2. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες

$$2x^2 - 3x + 1 < 0$$

3. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης.

Α9 | 1. Αν

$$x^2 - 3x - 4 < 0,$$

να αποδείξετε ότι

$$-1 < x < 4$$

2. Δίνεται η παράσταση

$$A = |2x + 2| + |x - 5|$$

Για τις τιμές του x που ικανοποιούν την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι

$$A = x + 7$$

Α10 | Αν

$$-x^2 + 5x - 6 > 0,$$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$T = \frac{|x - 2| + |x - 3|}{|x - 1| + |x - 5|}$$

Α11 | 1. Να αποδείξετε ότι

$$x^2 + 4x + 5 > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

2. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση

$$B = \left|x^2 + 4x + 5\right| - \left|x^2 + 4x + 4\right|$$

Α12 |

1. Να λύσετε την ανίσωση

$$x^2 - 10x + 21 < 0$$

2. Δίνεται η παράσταση

$$A = |x - 3| + \left|x^2 - 10x + 21\right|$$

(a) Για $3 < x < 7$, να αποδείξετε ότι

$$A = -x^2 + 11x - 24$$

(b) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού $x \in (3, 7)$ για τις οποίες ισχύει

$$A = 6$$

Α13 |

1. Να λύσετε την ανίσωση

$$3x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

2. Αν a, b είναι δύο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{3a + 6b}{9}$$

είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

Α14 | Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1} \qquad \text{και} \qquad B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$$

1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται καθεμία από τις παραστάσεις A και B.
2. Να αποδείξετε ότι

$$A = 3 - |x| \qquad \text{και} \qquad B = |x| - 2$$

για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις A και B, αντίστοιχα.

3. Να λύσετε την ανίσωση

$$B - A < 2d(x, 4) - 5$$

Α15 |

1. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση

$$x^2 < x$$

2. Δίνεται πραγματικός αριθμός a τέτοιος ώστε

$$0 < a < 1$$

(a) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$0, \qquad 1, \qquad a, \qquad a^2, \qquad \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας και το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

(b) Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{1+a} < 1 + \sqrt{a}$$

A16 | 1. Να λύσετε την ανίσωση

$$x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \tag{1}$$

2. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί κ και λ, οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση

$$(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$$

(a) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 βρίσκεται μεταξύ των κ και λ.

(b) Να αποδείξετε ότι

$$|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$$

A17 | 1. Να λύσετε την ανίσωση

$$x^2 - 5x - 6 < 0$$

2. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Αν $a \in (-6, 6)$,, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

A18 | Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.
2. Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου

$$f(2.999) \cdot f(-1.002)$$

3. Αν $a \in (-3, 3)$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$-a^2 + 2|a| + 3$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

A19 | Δίνονται οι ανισώσεις

$$-x^2 + 5x - 6 < 0 \tag{1}$$

και

$$x^2 - 16 \leq 0 \tag{2}$$

1. Να βρείτε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).
2. Να παραστήσετε τα σύνολα λύσεων των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές λύσεις τους.

A20 | Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \qquad \text{και} \qquad 3x^2 - 2x - 1 > 0.$$

A21 | Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0 \qquad \text{και} \qquad 2x^2 - 7x + 3 > 0$$

A22 | Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x + 1| \leq 2 \qquad \text{και} \qquad x^2 - x - 2 > 0$$

1. Να λύσετε τις ανισώσεις.
2. Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.
3. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να αποδείξετε ότι

$$\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$$

A23 | Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $6x - 11 < x^2 - 3 < 6x - 8$ (ii) $2 \leq x^2 - 2 \leq 4x - 5$

(iii) $\left|x^2 - 3x + 3\right| < 1$ (iv) $\left|x^2 - 5x + 5\right| \leq 1$

A24 | Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $x^2 - 5|x| + 4 < 0$ (ii) $x^4 - 10x^2 + 9 > 0$

(iii) $(2x - 3)^2 - |12x - 18| + 5 \leq 0$ (iv) $x^2 - 7|x| + 10 \leq 0$

A25 | Να βρείτε, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε η ανίσωση να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(i) $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ (ii) $4x^2 + 4(2\lambda - 1)x + 4 - 3\lambda \geq 0$

(iii) $(\lambda + 4)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 6 < 0$ (iv) $(\lambda - 3)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 6 > 0$

A26 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x + \left(\lambda^2 + \lambda - 1\right) = 0 \tag{1}$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές ρίζες.
2. Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε την ανίσωση

$$S^2 - P - 2 \geq 0,$$

όπου S και P είναι, αντίστοιχα, το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1).

Α27 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0 \tag{1}$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι

$$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

2. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
3. Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες x_1 και x_2, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η απόσταση των δύο ριζών στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με $\sqrt{24}$, δηλαδή

$$d\left(x_1, x_2\right) = \sqrt{24}$$

Α28 | Δίνεται το τριώνυμο

$$x^2 + bx + b^2, \qquad b \in \mathbb{R}$$

1. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.
2. (a) Αν $b \neq 0$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για το πρόσημο του τριωνύμου;
   (b) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα, όταν $b = 0$;
3. Με τη βοήθεια της απάντησής σας στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι

$$a^2 + ab + b^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα μηδέν.

Α29 | Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - ax - (a + 1), \qquad x \in \mathbb{R}$$

με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

1. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a, να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών του τριωνύμου.
2. Αν $a > -2$, τότε:
   (a) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $a + 1$.

(b) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού a για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης

$$x^2 - ax - (a+1) \leq 0$$

είναι ίσο με 2024.

(c) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$f\left(\frac{a}{2}\right)$$

Α30 | Δίνεται το τριώνυμο

$$x^2 - 2x - 8$$

1. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.
2. Αν $\kappa = -\dfrac{8889}{4444}$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$\kappa^2 - 2\kappa - 8$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Αν $-4 < \mu < 4$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α31 | 1. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου

$$x^2 - 5x + 6$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

2. Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2 + (2-\lambda)x + \lambda - 2 = 0 \tag{1}$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(b) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και ομόσημες ρίζες.

Α32 | 1. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου

$$x^2 - x - 12$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

2. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \frac{\pi+9}{3} - 12 > 0,$$

όπου $\pi = 3.1415\ldots$.

3. Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει

$$(|a|+3)^2-(|a|+3)-12<0,$$

να αποδείξετε ότι $a\in(-1,1)$.

Α33 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0,\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

1. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για κάθε τιμή του λ, δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
2. Να λύσετε την εξίσωση.
   Έστω ρ_1 και ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης, με $\rho_1<\rho_2$.
3. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 8.
4. Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό k τέτοιον ώστε $\rho_1<k<\rho_2$. Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του αριθμού

$$k^2-2\lambda k+\lambda^2-1$$

Α34 | Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\qquad \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
2. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμά τους

$$S=x_1+x_2$$

συναρτήσει του λ και να βρείτε την τιμή του γινομένου τους

$$P=x_1\cdot x_2$$

3. Αν $\lambda>0$, να εξετάσετε αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι θετικές ή αρνητικές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
4. Αν $\lambda>0$ και $\lambda\neq 1$, και x_1,x_2, με $x_1<x_2$, είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu),$$

όπου κ,μ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$.

Α35 | Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x)=x^2-6x+\lambda-3,\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

1. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.
2. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
3. Αν $3<\lambda<12$, τότε:

(a) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

(b) Αν x_1 και x_2, με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α36 | Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0 \tag{1}$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση (1) έχει δύο ίσες ρίζες.
3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = \frac{1}{\sqrt{S - P}},$$

όπου S και P είναι, αντίστοιχα, το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1), ορίζεται ως πραγματικός αριθμός για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α37 | Δίνεται η ανίσωση

$$|x - 1| \leq 3 \tag{1}$$

1. Να λύσετε την ανίσωση (1).
2. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).
3. Να βρείτε μία ανίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με την ανίσωση (1).
4. Να αποδείξετε ότι, αν το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού, ελαττωμένο κατά 8, δεν ξεπερνά το διπλάσιό του, τότε η απόστασή του από το 1 δεν ξεπερνά το 3.

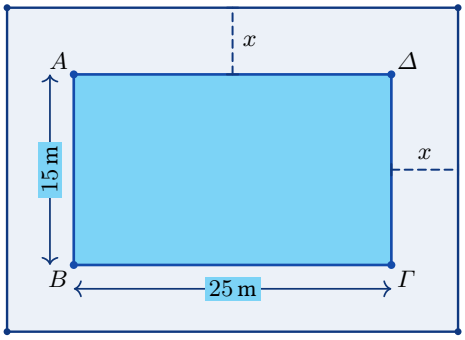
Α38 | Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \qquad \lambda \in (0, 4)$$

1. Να βρείτε:
   (a) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ,
   (b) το εμβαδόν E του ορθογωνίου.
2. Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$ για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.
3. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16. Τι μπορείτε να συμπεράνετε τότε για το ορθογώνιο;

Α39 | Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις $15\,\mathrm{m}$ και $25\,\mathrm{m}$. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το

κολυμβητήριο μία πλακοστρωμένη ζώνη σταθερού πλάτους x m, όπου $x > 0$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πλακοστρωμένης ζώνης δίνεται από τη σχέση

$$E(x) = 4x^2 + 80x, \qquad x > 0$$

2. Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν το εμβαδόν της είναι $500\,\mathrm{m}^2$.
3. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πλάτους x της ζώνης, αν το εμβαδόν της είναι μικρότερο από $500\,\mathrm{m}^2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4

Συναρτήσεις

«Οι μαθηματικοί δεν μελετούν αντικείμενα, αλλά σχέσεις μεταξύ αντικειμένων.»

— Henri Poincaré

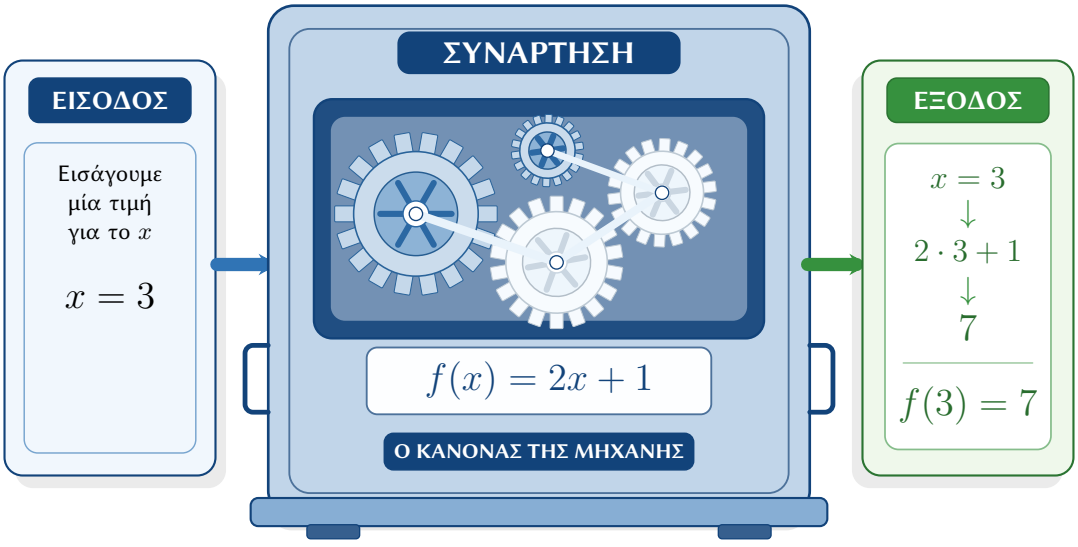
4.1 Έννοια συνάρτησης

Στην καθημερινή ζωή συναντάμε πολλές καταστάσεις όπου μία ποσότητα εξαρτάται από μία άλλη.

Για παράδειγμα:

όσο περισσότερα λίτρα βενζίνης αγοράζουμε, τόσο αυξάνεται το κόστος, όσο περισσότερες ώρες εργαζόμαστε, τόσο αυξάνεται η αμοιβή, όσο αυξάνεται η πλευρά ενός τετραγώνου, τόσο αυξάνεται το εμβαδόν του.

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις μία ποσότητα καθορίζεται από την άλλη.



ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία **συνάρτηση** είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε επιτρεπτή τιμή μίας μεταβλητής x **μία και μόνο μία** τιμή μίας άλλης μεταβλητής, η οποία συμβολίζεται με $y = f(x)$.

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Η μεταβλητή x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ η ποσότητα $y = f(x)$, που εξαρτάται

από την τιμή του x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + 1$$

Για $x = 3$ έχουμε

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Άρα στην τιμή $x = 3$ αντιστοιχεί η τιμή 7.

4.2 Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την τιμή μίας συνάρτησης για κάθε πραγματικό αριθμό.

Σε ορισμένες συναρτήσεις υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες ο τύπος της συνάρτησης δεν ορίζει πραγματικό αριθμό.

Επίσης, όταν μία συνάρτηση περιγράφει ένα πραγματικό πρόβλημα, είναι δυνατόν ορισμένες τιμές του x να μην έχουν πρακτικό νόημα και, επομένως, να μην επιτρέπονται.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το σύνολο όλων των τιμών της μεταβλητής x για τις οποίες ορίζεται μία συνάρτηση ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Αν μία συνάρτηση συμβολίζεται με f, τότε το πεδίο ορισμού της συμβολίζεται με

$$D_f$$

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, πρέπει να εντοπίσουμε τις τιμές του x για τις οποίες ο τύπος της συνάρτησης δεν έχει πραγματικό νόημα. Οι πιο συνηθισμένες περιπτώσεις συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Μορφή της συνάρτησης	**Περιορισμός**
$\dfrac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$ Ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται.
$\sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$ Το υπόρριζο είναι μη αρνητικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = 2x - 5$$

Λύση
Ο τύπος της συνάρτησης έχει νόημα για κάθε πραγματικό αριθμό.
Άρα

$$D_f = \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Λύση
Πρέπει

$$x - 2 \neq 0$$

δηλαδή

$$x \neq 2$$

Άρα

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

Λύση
Πρέπει

$$x + 3 \geq 0$$

οπότε

$$x \geq -3$$

Άρα

$$D_f = [-3, +\infty).$$

4.3 Σύνολο τιμών συνάρτησης

Μέχρι τώρα εξετάσαμε ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x, δηλαδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Τώρα θα εξετάσουμε ποιες τιμές μπορεί να πάρει η ίδια η συνάρτηση, δηλαδή οι τιμές του $y = f(x)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το σύνολο όλων των πραγματικών τιμών που μπορεί να πάρει μία συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης.

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Αν μία συνάρτηση συμβολίζεται με f και έχει πεδίο ορισμού D_f, τότε το σύνολο τιμών της συμβολίζεται με

$$f(D_f)$$

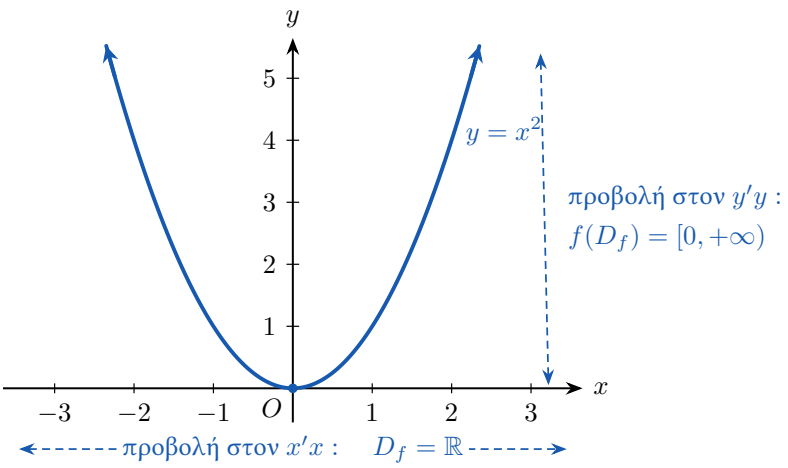
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2$$

Με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, να προσδιορίσετε:

1. το πεδίο ορισμού της,
2. το σύνολο τιμών της.



Λύση

Η γραφική παράσταση εκτείνεται χωρίς διακοπή προς τα αριστερά και προς τα δεξιά. Επομένως, η συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό.

Άρα

$$D_f = \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι η τιμή 0, την οποία παίρνει για $x = 0$. Όλες οι υπόλοιπες τιμές της είναι θετικές.

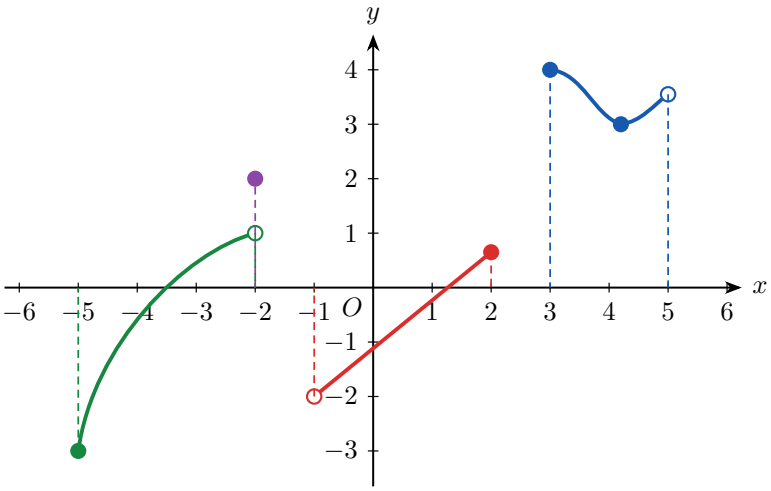
Επομένως,

$$f(D_f) = [0, +\infty)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, χωρίς να είναι γνωστός ο τύπος της.
Να προσδιορίσετε:

1. το πεδίο ορισμού της.
2. το σύνολο τιμών της.

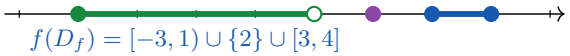


προβολή στον $x'x$:



$D_f = [-5, -2] \cup (-1, 2] \cup [3, 5)$

προβολή στον $y'y$:



$f(D_f) = [-3, 1) \cup \{2\} \cup [3, 4]$

Λύση

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι υπάρχουν σημεία της συνάρτησης για

$$-5 \leq x \leq -2$$

για

$$-1 < x \leq 2$$

και για

$$3 \leq x < 5$$

Άρα

$$D_f = [-5, -2] \cup (-1, 2] \cup [3, 5).$$

Για τις τιμές της συνάρτησης παρατηρούμε ότι:

- παίρνει όλες τις τιμές από -3 μέχρι 1, χωρίς να περιλαμβάνεται το 1.
- παίρνει επίσης τη μεμονωμένη τιμή 2.
- και τέλος όλες τις τιμές από 3 μέχρι 4, με τα δύο άκρα να περιλαμβάνονται.

Άρα

$$f(D_f) = [-3, 1) \cup \{2\} \cup [3, 4].$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Να υπολογίσετε τις τιμές

$$f(-1), \qquad f(6), \qquad f(2+\sqrt{5})$$

εφόσον αυτές ορίζονται.

Α2 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Να υπολογίσετε τις τιμές

$$f(1), \qquad f(2), \qquad f(4)$$

εφόσον αυτές ορίζονται.

Α3 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
2. Να αποδείξετε ότι

$$f(2) + f(4) = 0$$

Α4 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$$

3. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = \frac{5}{2}$$

Α5 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3-9x}{x-3}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της, ισχύει

$$f(x) = x^2 + 3x$$

2. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = 18$$

Α6 | Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

1. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης g για

$$x = 2, \qquad x = 0, \qquad x = \frac{1}{2}$$

2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση g.
3. Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της g, στο 3.

Α7 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & , \quad x < 0 \\ \\ x-1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$f(-1) = f(3)$$

2. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = 0$$

Α8 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4 & , \quad x < 0 \\ \\ x+2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Να βρείτε τις τιμές $f(4)$ και $f(-4)$.
2. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = 5$$

Α9 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x & , \quad x < 0 \\ \\ 5-x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$ και $f(3)$.
2. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = 2$$

3. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -2 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης.

Α10 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & , \quad x < 0 \\ \\ x^2-2x+2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

2. Για $x \geq 0$, να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) \geq 2$$

Α11 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x \text{ είναι άρρητος} \\ 2x & , \text{ αν } x \text{ είναι ρητός} \end{cases}$$

1. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Αν x είναι ρητός, να λύσετε την εξίσωση

$$[f(x)]^2 = 4x - 1$$

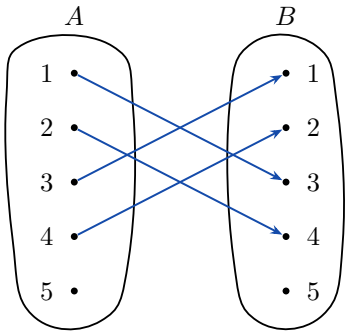
Α12 | Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \to y$, με το x να παίρνει μόνο τις τιμές

$$-2,\ -1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 3$$

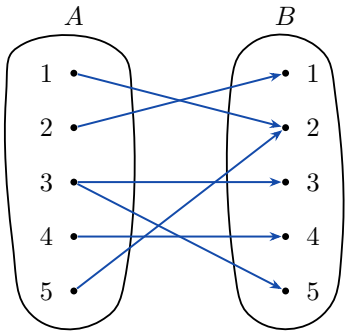
x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

1. (a) Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση.
   (b) Είναι η αντιστοίχιση $y \to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \to y$.

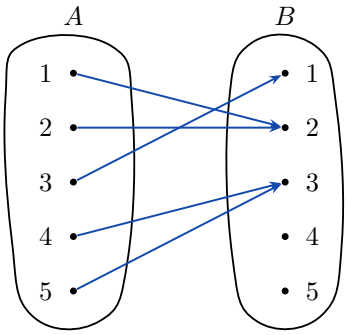
Α13 | Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τρεις αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

1. Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν είναι συναρτήσεις από το A στο B, ενώ η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι συνάρτηση από το A στο B.
2. Συμβολίζουμε με f τη συνάρτηση που παριστάνεται στο σχήμα 3.
   (a) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(b) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f.

(c) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

Α14 | Έχουμε τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα

$$A = \text{μικρά ονόματα των μαθητών του τμήματος}$$

και

$$B = \text{επώνυμα των μαθητών του τμήματος}$$

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f : A \to B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχίζουμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του, και την αντιστοίχιση $g : B \to A$, σύμφωνα με την οποία αντιστοιχίζουμε κάθε επώνυμο μαθητή στο μικρό του όνομα.

1. Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f : A \to B$ ορίζει πάντοτε συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B.
2. Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g : B \to A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A. Στην περίπτωση αυτή, να προσδιορίσετε ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή.

Α15 | Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 4x + a \qquad \text{και} \qquad g(x) = ax - 5, \qquad a \in \mathbb{R}$$

1. Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του a
2. Για $a = 1$:

   (a) Να λύσετε την εξίσωση
   $$f(x) = g(x)$$

   (b) Να λύσετε την ανίσωση
   $$f(x) \geq g(x)$$
   και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση
   $$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$$

Α16 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 7|x| + 12}{|x| - 4}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
2. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in D_f$, ισχύει
   $$f(x) = |x| - 3$$
3. Για $x \in D_f$, να λύσετε την εξίσωση
   $$(f(x) + 3)^2 - 5f(x) - 11 = 0$$

Α17 | 1. Θεωρούμε την εξίσωση
   $$x^2 - 4x + 7 = a, \qquad a \in \mathbb{R}$$

   (a) Να βρείτε για ποιες τιμές του a η εξίσωση
   $$x^2 - 4x + 7 = a$$
   έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(b) Να βρείτε την τιμή του a, ώστε η εξίσωση να έχει μία διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

2. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = x^2 - 4x + 7, \qquad x \in \mathbb{R}$$
(a) Να αποδείξετε ότι
$$f(x) \geq 3$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(b) Να λύσετε την ανίσωση
$$\sqrt{f(x) - 3} \leq 2$$

Α18 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = 3x^2 + 6ax + 6b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$
1. Να αποδείξετε ότι
$$f(a) + f(b) \geq b^2 - 36$$
2. Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει
$$f(a) + f(b) = b^2 - 36$$
3. Αν $a = 2$ και $b = -6$:
(a) Να λύσετε την εξίσωση
$$f(x) = 6x$$
(b) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$$

Α19 | Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ–Λ (Σωστό–Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται $\frac{1}{3}$ της μονάδας. Δηλαδή, για κάθε τρεις λανθασμένες απαντήσεις αφαιρείται μία μονάδα.

1. Να αποδείξετε ότι, αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο
$$E(x) = \frac{4}{3}(x - 25)$$
2. Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88 μονάδες. Πόσες σωστές και πόσες λανθασμένες απαντήσεις έδωσε;
3. Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50 μονάδες. Πόσες τουλάχιστον σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής, ώστε να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση, η οποία είναι 50 μονάδες;
4. Το άθροισμα των βαθμολογιών δύο φοιτητών ήταν 140 μονάδες. Πόσες ήταν συνολικά οι λανθασμένες απαντήσεις των δύο φοιτητών;

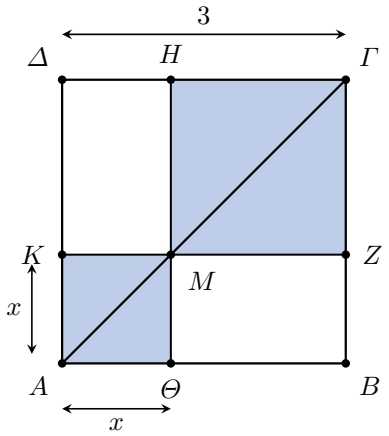
Α20 | Το ποσό που πληρώνει ετησίως, σε ευρώ, ένας συνδρομητής του συστήματος κοινόχρηστων ποδηλάτων μιας πόλης Α, όταν χρησιμοποιεί τα ποδήλατα για x ώρες μέσα σε ένα έτος, δίνεται από τη συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} 0{,}4x + 10 & , \quad 0 \leq x \leq 40 \\ 0{,}6x + 2 & , \quad x > 40 \end{cases}$$

1. Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει ένας συνδρομητής, αν μέσα σε ένα έτος:
   (a) δεν χρησιμοποίησε καθόλου τα κοινόχρηστα ποδήλατα.
   (b) τα χρησιμοποίησε για 20 ώρες.
   (c) τα χρησιμοποίησε για 100 ώρες.
2. Σε μια άλλη πόλη Β, το ετήσιο ποσό, σε ευρώ, που πληρώνει ένας συνδρομητής για x ώρες χρήσης δίνεται από τη συνάρτηση

$$g(x) = 10 + 0{,}5x, \qquad x \geq 0$$

Ένας συνδρομητής της πόλης Α και ένας συνδρομητής της πόλης Β χρησιμοποίησαν τα κοινόχρηστα ποδήλατα για τον ίδιο αριθμό ωρών. Αν ο συνδρομητής της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό από τον συνδρομητή της πόλης Β, να αποδείξετε ότι καθένας από τους δύο χρησιμοποίησε τα ποδήλατα για περισσότερες από 80 ώρες.

Α21 | Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3\,\text{cm}$ και το σημείο M κινείται στο εσωτερικό της διαγωνίου $A\Gamma$.



1. Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των δύο σκιασμένων τετραγώνων ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
2. Να αποδείξετε ότι

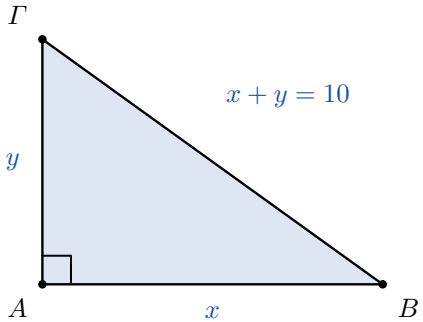
$$E(x) \geq \frac{9}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in (0, 3)$$

3. Για ποια θέση του σημείου M πάνω στη διαγώνιο $A\Gamma$ το συνολικό εμβαδόν των δύο σκιασμένων τετραγώνων γίνεται ελάχιστο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α22 | Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\widehat{A} = 90°$, του οποίου οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη

$$AB = x \qquad \text{και} \qquad A\Gamma = y$$

όπου $x + y = 10$.



1. Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
2. Να αποδείξετε ότι
$$E(x) \leq \frac{25}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in (0, 10).$$
3. Να βρείτε την τιμή του $x \in (0, 10)$, για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

A23 | Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = 10 - 2x - f(6 - x), \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε την τιμή $f(3)$.

A24 | Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(2x) = 8 - 4x - f(4 - 2x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε την τιμή $f(4)$.

4.4 Το καρτεσιανό σύστημα αξόνων

Στο επίπεδο θεωρούμε δύο άξονες κάθετους μεταξύ τους. Ως αρχή κάθε άξονα θεωρούμε το σημείο τομής τους, δηλαδή το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί ο αριθμός 0 και στους δύο άξονες. Το σημείο αυτό λέγεται *αρχή των αξόνων*.

Ο οριζόντιος άξονας (συμβολίζεται $x'x$) ονομάζεται *άξονας τετμημένων*, ενώ ο κατακόρυφος άξονας (συμβολίζεται $y'y$) ονομάζεται *άξονας τεταγμένων*.

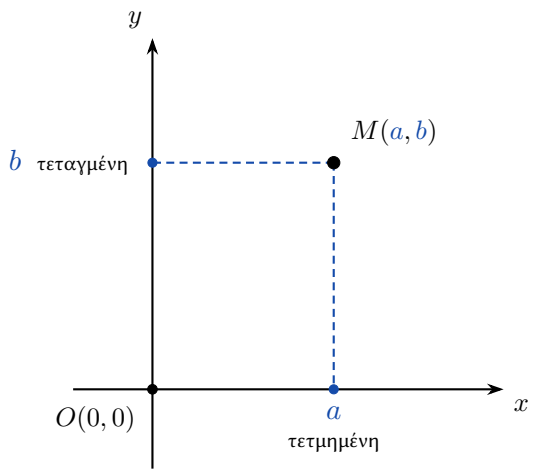
Έστω ένα σημείο M του επιπέδου. Αν από το σημείο αυτό φέρουμε κάθετες προς τους δύο άξονες, τότε αυτές τέμνουν τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο που αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό a και τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο που αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό b.

Στο σημείο M αντιστοιχίζουμε το διατεταγμένο ζεύγος των αριθμών a και b και γράφουμε

$$M(a, b)$$

Το ζεύγος (a, b) λέγεται *συντεταγμένες* του σημείου M. Ο αριθμός a λέγεται *τετμημένη*, ενώ ο αριθμός b λέγεται *τεταγμένη* του σημείου M.

Η παραπάνω αντιστοίχιση σημείων του επιπέδου και διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών ονομάζεται *καρτεσιανό σύστημα αξόνων* ή *ορθοκανονικό σύστημα αξόνων*.



▶ ΝΑ ΘΥΜΑΣΑΙ

Για να τοποθετήσουμε ένα σημείο $M(a, b)$ στο καρτεσιανό επίπεδο, ξεκινάμε πάντοτε από την αρχή των αξόνων O.
Αρχικά, ο αριθμός a μάς δείχνει πόσο θα κινηθούμε οριζόντια:

- προς τα δεξιά, αν $a > 0$,
- προς τα αριστερά, αν $a < 0$.

Στη συνέχεια, ο αριθμός b μάς δείχνει πόσο θα κινηθούμε κατακόρυφα:

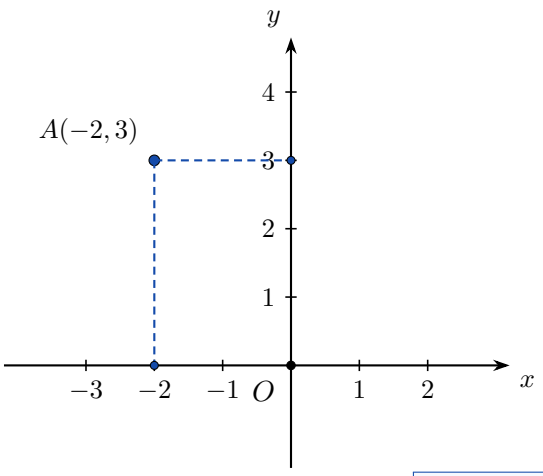
- προς τα πάνω, αν $b > 0$,
- προς τα κάτω, αν $b < 0$.

Ακολουθώντας διαδοχικά αυτές τις δύο κινήσεις, καταλήγουμε στο σημείο $M(a, b)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να τοποθετήσετε στο καρτεσιανό επίπεδο το σημείο

$$A(-2,3)$$



Για να τοποθετήσουμε το σημείο $A(-2,3)$:

- κινούμαστε 2 μονάδες προς τα αριστερά,
- στη συνέχεια 3 μονάδες προς τα πάνω.

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

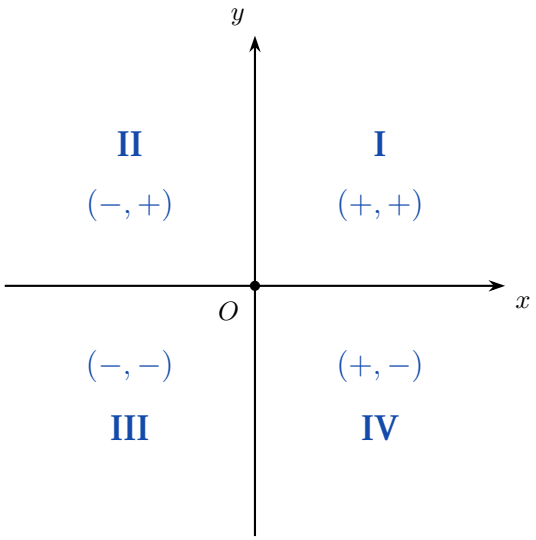
Ένα σημείο $M(a,b)$ ανήκει στον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν

$$b = 0$$

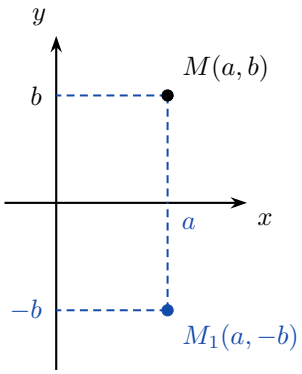
Αντίστοιχα, ένα σημείο $M(a,b)$ ανήκει στον άξονα $y'y$ αν και μόνο αν

$$a = 0$$

Οι άξονες $x'x$ και $y'y$ χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερις περιοχές, που ονομάζονται *τεταρτημόρια*. Τα τεταρτημόρια αριθμούνται με τη φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, αρχίζοντας από το επάνω δεξί.

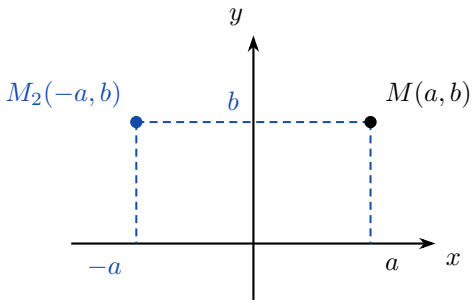


Στο καρτεσιανό επίπεδο μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα τις συντεταγμένες του συμμετρικού ενός σημείου ως προς έναν άξονα, την αρχή των αξόνων ή την ευθεία $y = x$. Στις παρακάτω περιπτώσεις φαίνεται πώς μεταβάλλονται οι συντεταγμένες του σημείου $M(a, b)$.



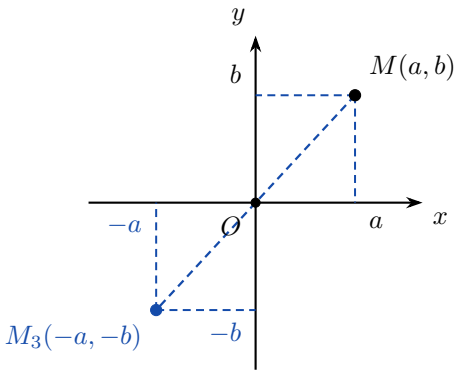
Το συμμετρικό του σημείου $M(a, b)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο

$M_1(a, -b)$.



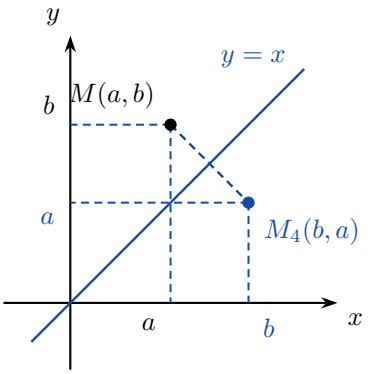
Το συμμετρικό του σημείου $M(a, b)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο

$M_2(-a, b)$.



Το συμμετρικό του σημείου $M(a,b)$ ως προς την αρχή των αξόνων O είναι το σημείο

$$M_3(-a,-b).$$



Το συμμετρικό του σημείου $M(a,b)$ ως προς την ευθεία $y=x$ είναι το σημείο

$$M_4(b,a).$$

Έστω δύο σημεία

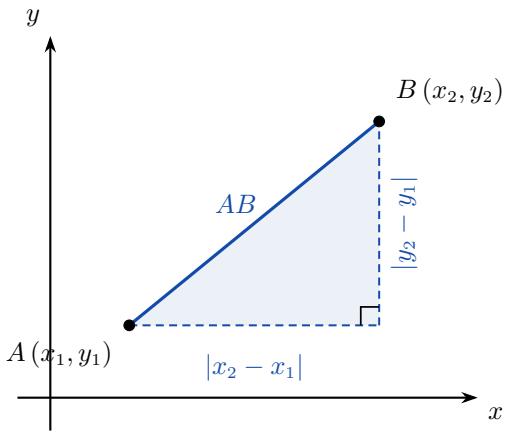
$$A\left(x_1,y_1\right) \qquad \text{και} \qquad B\left(x_2,y_2\right)$$

Αν φέρουμε από τα σημεία A και B παράλληλες προς τους άξονες, σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα το ευθύγραμμο τμήμα AB. Τα μήκη των κάθετων πλευρών του είναι

$$|x_2-x_1| \qquad \text{και} \qquad |y_2-y_1|$$

Επομένως, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, η απόσταση των σημείων A και B δίνεται από τον τύπο

$$AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$



Έστω δύο σημεία

$$A\left(x_1,y_1\right) \qquad \text{και} \qquad B\left(x_2,y_2\right).$$

Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο που χωρίζει το τμήμα σε δύο ίσα μέρη. Αν M είναι το μέσο του AB, τότε οι συντεταγμένες του είναι οι μέσοι όροι των αντίστοιχων συντεταγμένων των άκρων του τμήματος.

Οι συντεταγμένες του μέσου M του AB είναι

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Θεωρούμε το σημείο

$$A\left(3\lambda-2,\ 2\lambda^2-\lambda-1\right)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν το σημείο:

i) βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

ii) βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

Α2 | Θεωρούμε το σημείο

$$A\left(|\lambda-2|,\ 2\lambda-5\right)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν το σημείο:

i) βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

ii) βρίσκεται στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας.

Α3 | Θεωρούμε το σημείο

$$A\left(\sqrt{\lambda+5},\ \lambda-2\right)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν το σημείο:

i) βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

ii) βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

Α4 | Θεωρούμε το σημείο

$$A\left(\lambda^2-4,\ |\lambda-1|-2\right)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν το σημείο:

1. ανήκει στον θετικό ημιάξονα Ox.
2. ανήκει στον αρνητικό ημιάξονα Oy.

Α5 | Θεωρούμε το σημείο

$$A\left(|\lambda-2|,\ \lambda-1\right).$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν το σημείο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο.

Α6 | Θεωρούμε το σημείο

$$A\left(\sqrt{\lambda+4}-1,\ 2-\lambda\right)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν το σημείο ανήκει στο τέταρτο τεταρτημόριο.

Α7 | Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου $A(3,-2)$:
i) ως προς τον άξονα $x'x$.
ii) ως προς τον άξονα $y'y$.
iii) ως προς την αρχή των αξόνων.

Α8 | Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου $A(-5,4)$:
i) ως προς τον άξονα $x'x$.
ii) ως προς τον άξονα $y'y$.
iii) ως προς την διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

Α9 | Θεωρούμε το σημείο

$$A(\lambda-2,\ 2\lambda+1)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα $x'x$ ανήκει στον άξονα $y'y$.

Α10 | Θεωρούμε το σημείο

$$A(2\lambda - 1,\ 3 - \lambda)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν το συμμετρικό του A ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο.

Α11 | (⋆) Θεωρούμε το σημείο

$$A(\lambda + 1,\ 2\lambda - 3)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν το συμμετρικό του A ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο.

Α12 | Δίνονται τα σημεία

$$A(0, 2), \qquad B(2, 4) \qquad \text{και} \qquad \Gamma(6, 0)$$

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές ορθογώνιου τριγώνου.
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
3. Αν $B\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ προς την πλευρά $A\Gamma$, να υπολογίσετε το μήκος του $B\Delta$.

4.5 Γραφική παράσταση συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ

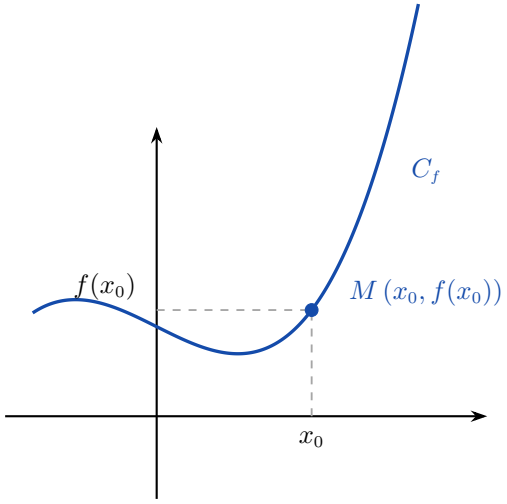
Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f και ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy.
Το σύνολο όλων των σημείων της μορφής

$$M\big(x, f(x)\big), \qquad x \in D_f$$

δηλαδή το σύνολο

$$C_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$$

λέγεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης f.



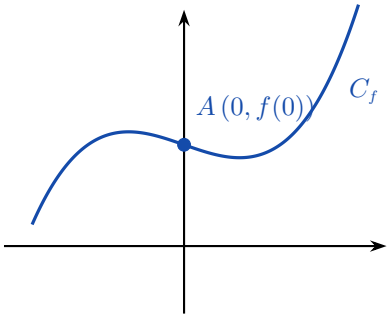
Ένα σημείο $M\,(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν

$$f\,(x_0) = y_0$$

4.5.1 Σημείο τομής με τον άξονα $y'y$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, υπολογίζουμε την τιμή $f(0)$, εφόσον $0 \in D_f$.
Το σημείο τομής είναι

$$(0, f(0))$$



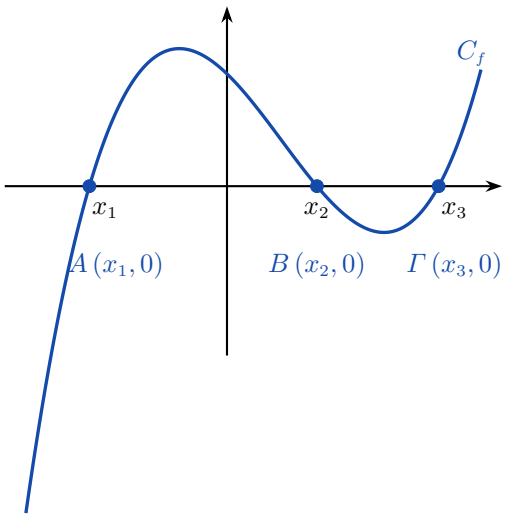
4.5.2 Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0$$

στο πεδίο ορισμού της f.
Αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, τότε τα σημεία τομής είναι

$$(x_1, 0)\,, (x_2, 0)\,, \ldots, (x_\nu, 0)$$



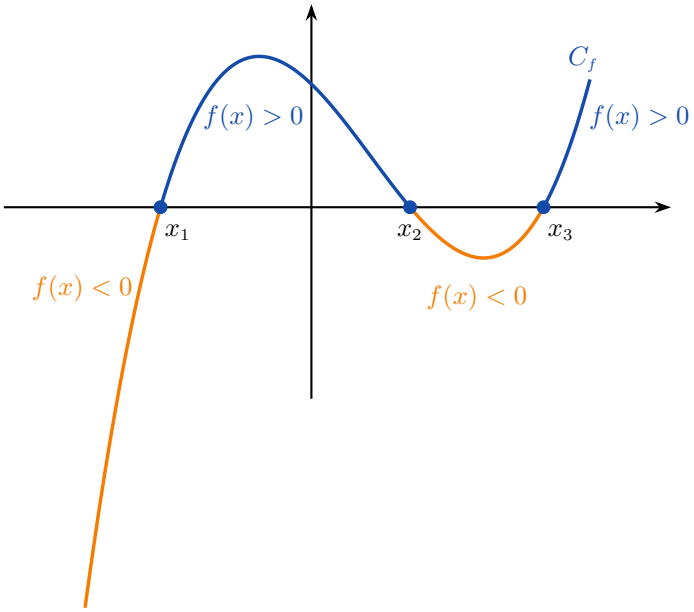
4.5.3 Σχετική θέση γραφικής παράστασης με τον άξονα $x'x$.

Για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν:

$f(x) > 0 \iff$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

ενώ

$f(x) < 0 \iff$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$



4.5.4 Σχετική θέση δύο γραφικών παραστάσεων

Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g, λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = g(x)$$

στο κοινό πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων.
Αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, τότε τα σημεία τομής είναι

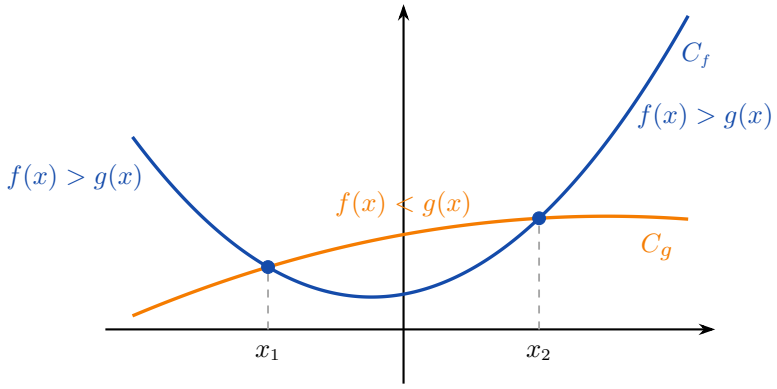
$$(x_1, f(x_1)),\ (x_2, f(x_2)),\ \ldots,\ (x_\nu, f(x_\nu))$$

Για κάθε x του κοινού πεδίου ορισμού των συναρτήσεων ισχύουν:

$$f(x) > g(x) \iff \text{η γραφική παράσταση της } f \text{ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της } g$$

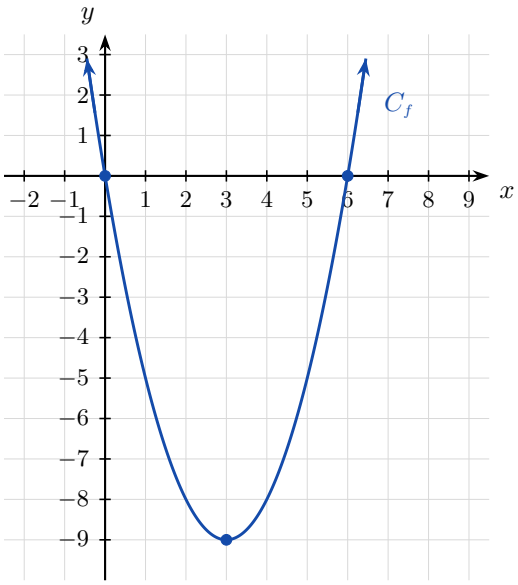
ενώ

$$f(x) < g(x) \iff \text{η γραφική παράσταση της } f \text{ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της } g$$


C_f
$f(x) > g(x)$
$f(x) > g(x)$
$f(x) < g(x)$
C_g
x_1
x_2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

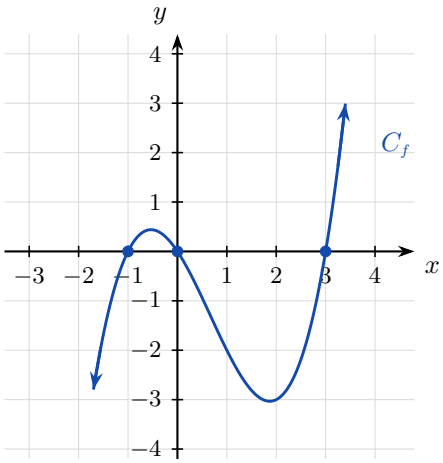
Α1 | Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, η οποία είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

1. Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.
2. Να λύσετε γραφικά την εξίσωση
$$f(x) = 0$$
3. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση
$$f(x) < 0$$

Α2 | Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

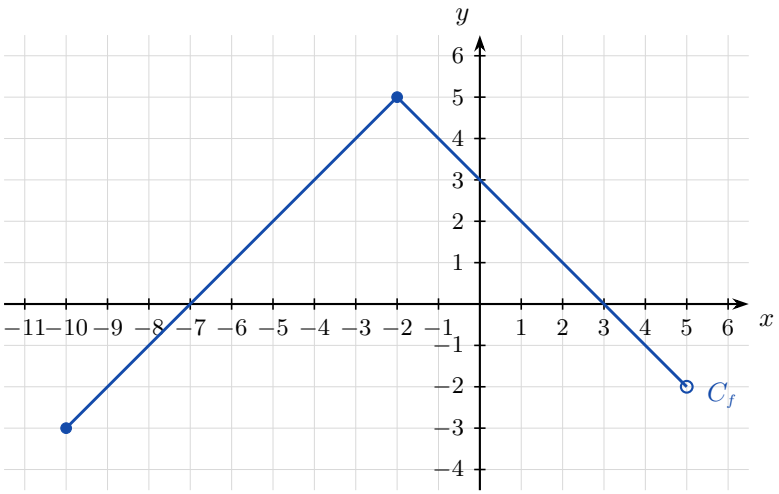


Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση:

1. Να λύσετε την εξίσωση
$$f(x) = 0$$

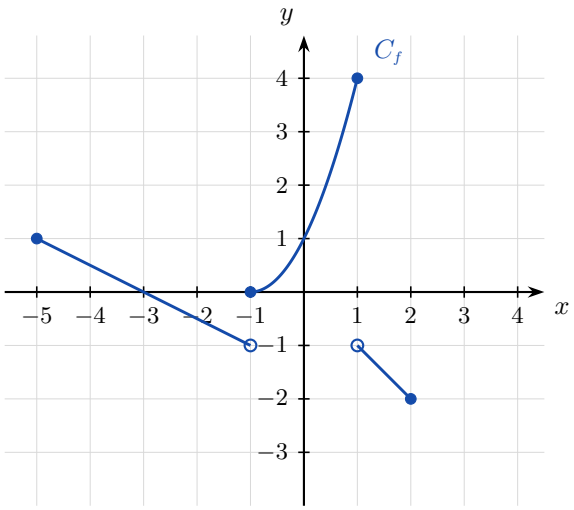
2. Να λύσετε την ανίσωση
$$f(x) < 0$$
3. Να λύσετε την ανίσωση
$$f(x) \geq 0$$

Α3 | Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f.



1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f και το σύνολο τιμών $f(D_f)$ της συνάρτησης f.
2. Να βρείτε τις τιμές
$$f(-2), \qquad f(0), \qquad f(3)$$
3. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες
$$f(x) = 0$$
4. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες
$$f(x) < 0$$

Α4 | Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f.



Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση:

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

2. Να λύσετε την εξίσωση
$$f(x) = 1$$
3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$$T = f(-5) \cdot f(-4) \cdot f(-3) \cdot f(-2)$$

Α5 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$$
Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f.

i) $A\left(3, \frac{9}{2}\right)$ ii) $B\left(1, 2\right)$ iii) $\Gamma\left(-1, 3\right)$

Α6 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{3} + 1$$
1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Να υπολογίσετε το $f(5)$.
3. Να εξετάσετε αν το σημείο $(-4, 1)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση.

Α7 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}, \qquad x \neq 2$$
1. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι
$$f(x) = x + 3$$
για κάθε $x \neq 2$.
2. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(1, 4\right)$.

Α8 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$$
1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
2. Να εξετάσετε αν το σημείο $M\left(4, 5\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
3. Να εξετάσετε αν το σημείο $N\left(-4, -1\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Α9 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a, ώστε το σημείο $M(a,\, 2a + 1)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση C_f.

Α10 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} ax - b & , \quad x < 2 \\ \\ bx^2 + 5 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b, ώστε η γραφική παράσταση C_f να διέρχεται από τα σημεία
$$A(1, 1) \qquad \text{και} \qquad B(3, 14)$$

Α11 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{3 - |1 - x|} + \left|k^3 + 1\right|, \qquad k \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
2. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού k, ώστε το σημείο $M(-1, 1)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση C_f.

Α12 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x - 5, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$f(-1) + f(0) + f(1)$$

2. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

Α13 | Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}$$

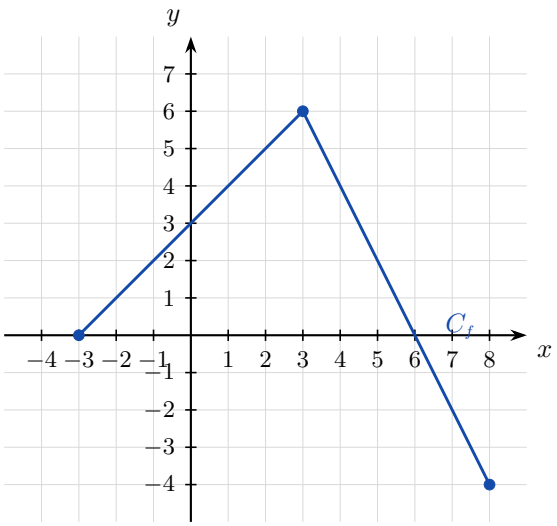
1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
2. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.
3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Α14 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x - 6}{x + 2}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
2. Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4, 1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

Α15 | Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f.



1. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.
4. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

Α16 | Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
2. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.
3. (a) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = 0$$

(b) Να υπολογίσετε τις τιμές

$$f(0) \qquad \text{και} \qquad f(4)$$

4. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

Α17 | Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & , \quad x \leq 3 \\ \\ x^2 & , \quad 3 < x < 10 \end{cases}$$

1. Να υπολογίσετε τις τιμές

$$f(-1), \qquad f(3) \qquad \text{και} \qquad f(5)$$

2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $x'x$.
3. Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α18 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

1. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία

$$A(2, 7) \qquad \text{και} \qquad B(-1, -2),$$

να βρείτε τις τιμές των a και b.

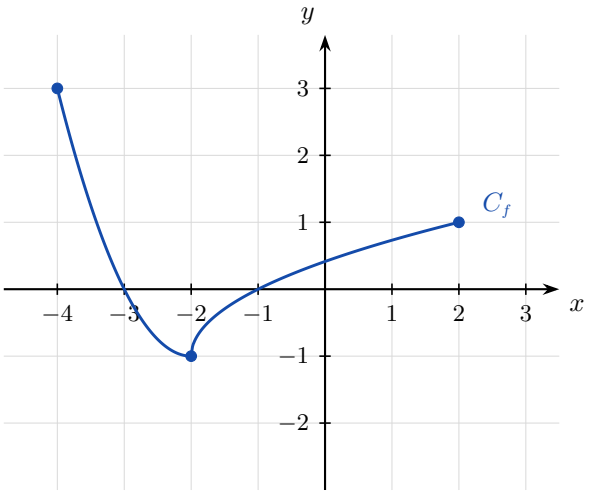
2. Αν $a = 3$ και $b = 1$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Α19 | Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^3 \qquad \text{και} \qquad g(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g τέμνονται σε τρία σημεία και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες τους.
2. Αν A, O και B είναι τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς το O.

Α20 | Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f.



Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση:

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
3. Να λύσετε την εξίσωση
$$f(x) = 0$$
4. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης
$$f(x) = \kappa$$

Α21 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3\left|x^2 - 16\right|$$
Για $|x| \leq 4$:

1. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς σύμβολα απόλυτης τιμής και να αποδείξετε ότι
$$f(x) = 3x^2 - x - 44$$
2. (a) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
   (b) Αν το σημείο $M\,(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C_f, να βρείτε την ακέραια τιμή του μ.

Α22 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 - |x|}$$

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f.
2. Για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, να αποδείξετε ότι
$$f(x) = 4 + |x|$$

3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.
4. Αν
$$g(x) = 4 - x^2,$$
να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Α23 | Δίνονται οι συναρτήσεις
$$f(x) = (x+2)^2 - 9 \qquad \text{και} \qquad g(x) = |x+2| + 3, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες
$$f(x) > 0$$
2. Να δείξετε ότι
$$g(x) > 0,$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

Α24 | Δίνονται οι συναρτήσεις
$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \qquad \text{και} \qquad g(x) = x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.
2. Δίνεται η συνάρτηση
$$h(x) = x + a, \qquad x \in \mathbb{R}$$
Να δείξετε ότι:
   (a) Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_h έχουν δύο κοινά σημεία.
   (b) Αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_h δεν έχουν κοινά σημεία.

Α25 | Δίνονται οι συναρτήσεις
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5} \qquad \text{και} \qquad g(x) = |x+3|$$

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.
2. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.
3. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

Α26 | Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = x^2 + x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
2. Να αποδείξετε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό $a \neq -\dfrac{1}{2}$, τα σημεία της C_f με τετμημένες a και $-a-1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.
3. Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της C_f με τετμημένη $b > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες τέμνουν τους άξονες στα σημεία A και Δ αντίστοιχα, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι
$$\left[\sqrt{2}\,(b+1)\right]^2$$

Α27 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x^2 + (a-6)x - 2a}{x-2}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
2. Να αποδείξετε ότι
$$f(x) = 3x + a$$
για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
3. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.
4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Α28 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Για $\lambda \neq 0$, να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης
$$f(x) = 0$$
3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4, 4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
4. Για $\lambda = -1$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Α29 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 5x + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 6$.

1. Να αποδείξετε ότι $k = 6$.
2. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
3. Έστω
$$A(a, f(a)) \qquad \text{και} \qquad B(b, f(b)), \qquad a < b$$
δύο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
   (a) Να αποδείξετε ότι
   $$a < \frac{3a + 2b}{5} < b$$
   (b) Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη
   $$x_0 = \frac{3a + 2b}{5}$$
   βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

Α30 | Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο

$$y = 60 + 0.20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

1. Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα διένυσε απόσταση 400 km.
2. Να βρείτε πόσα χιλιόμετρα διένυσε ένας πελάτης, ο οποίος για μία ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ.
3. Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$$y = 80 + 0.10x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες συμφέρει να επιλέξει ένας πελάτης, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύει να διανύσει.

4. Αν

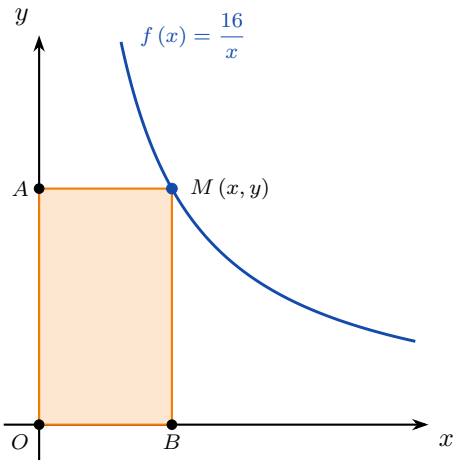
$$f(x) = 60 + 0.20x \qquad \text{και} \qquad g(x) = 80 + 0.10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει καθεμία από τις συντεταγμένες του σημείου αυτού σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα.

Α31 | Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{16}{x}, \qquad x > 0$$

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



1. Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}, \qquad x > 0$$

όπου x είναι η τετμημένη του σημείου M.

2. Να βρείτε τις δυνατές συντεταγμένες του σημείου M, ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.
3. Έστω M' το σημείο της γραφικής παράστασης C_f, ώστε το ορθογώνιο $OA'M'B'$, όπου A' και B' είναι οι προβολές του M' στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα, να είναι τετράγωνο.

(a) Να δείξετε ότι το σημείο M' έχει τετμημένη 4.

(b) Να δείξετε ότι το τετράγωνο $OA'M'B'$ έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι

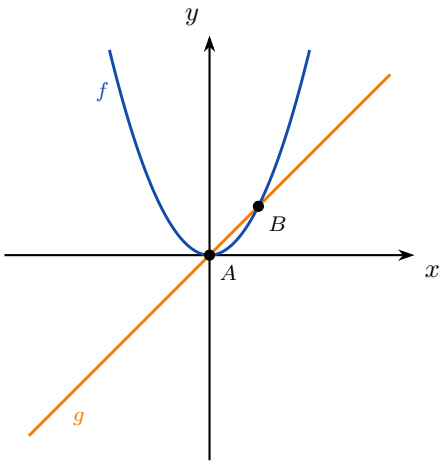
$$\Pi(x) \geq \Pi(4)$$

για κάθε $x > 0$.

Α32 | Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 \qquad \text{και} \qquad g(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

οι οποίες τέμνονται στα σημεία A και B.



1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.
2. Αν

$$A(0,0) \qquad \text{και} \qquad B(1,1)$$

τότε:

(a) Με βάση το σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

(b) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

3. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $b \neq 0$, για τους οποίους ισχύει

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a}{b}$$

Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ότι

$$|a| < |b|$$

Α33 | Δίνεται το τριώνυμο

$$x^2 - \lambda x + 1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta = \lambda^2 - 4$$

2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g, οι οποίες είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \lambda x - \lambda + 2 \qquad \text{και} \qquad g(x) = x^2 - \lambda + 3, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

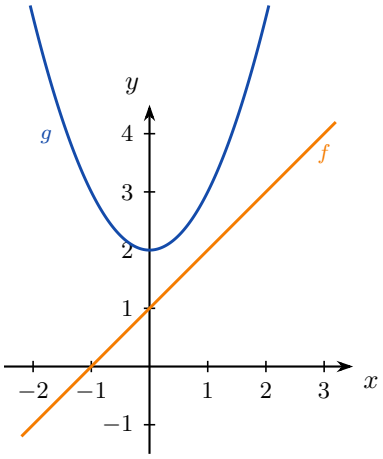
(a) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία προσδιορίζονται οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0$$

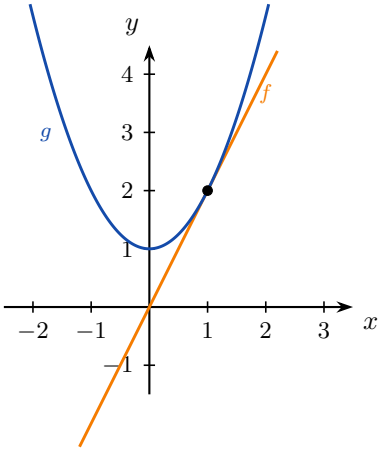
(b) Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων για διαφορετική τιμή της παραμέτρου λ.
Με δεδομένο ότι

$$\lambda \in \{1, 2, 4\}$$

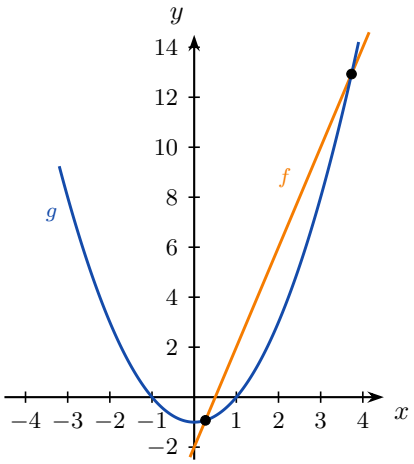
να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ που αντιστοιχεί σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



ΣΧΗΜΑ (I)



ΣΧΗΜΑ (II)

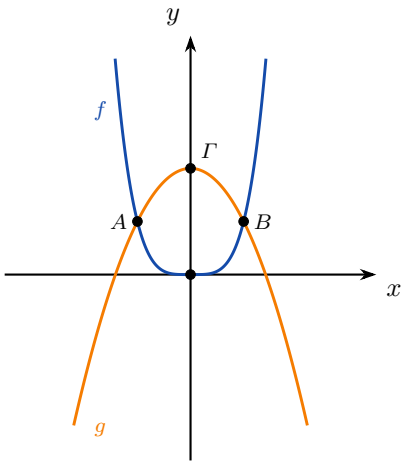


ΣΧΗΜΑ (III)

Α34 | Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

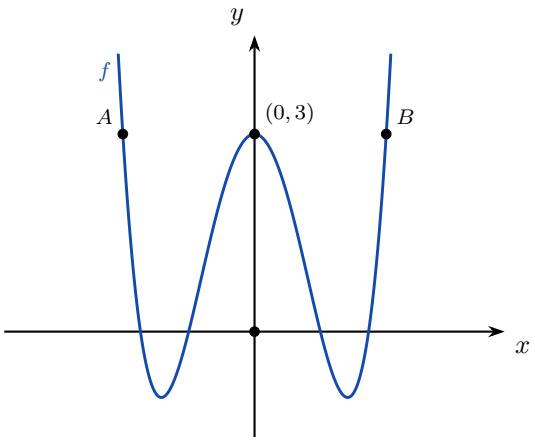
$$f(x) = x^4 \qquad \text{και} \qquad g(x) = 2 - x^2, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Τα σημεία A και B είναι τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και g, ενώ το σημείο Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και Γ.
2. Αν είναι
$$A\left(-1,1\right), \qquad B\left(1,1\right) \qquad \text{και} \qquad \Gamma\left(0,2\right)$$
με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.
3. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Α35 | Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης
$$f\left(x\right) = ax^4 - 4x^2 + c, \qquad a, c \in \mathbb{R},$$
η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

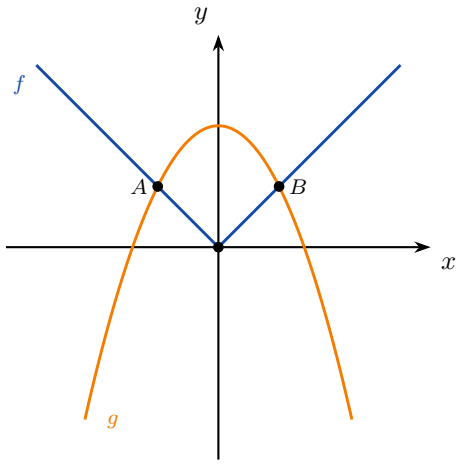


1. Να δείξετε ότι $c = 3$.
2. Αν είναι
$$A\left(a^2-3,3\right) \qquad \text{και} \qquad B\left(5-3a,3\right)$$
είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f με τεταγμένη 3, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f.
3. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
4. Με τη βοήθεια του σχήματος και της απάντησης στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Α36 | Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| \qquad \text{και} \qquad g(x) = 2 - x^2, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Τα σημεία A και B είναι τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g.



1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.
2. Αν είναι
$$A(-1, 1) \qquad \text{και} \qquad B(1, 1)$$
τότε:
   (a) Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει
   $$f(x) < g(x)$$
   (b) Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση
   $$f(x) < g(x)$$
   επαληθεύοντας την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Α37 | Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = (x-2)^2 - 1 \qquad \text{και} \qquad g(x) = 2|x-2| - 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.
2. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση C_g.
3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση
$$K = \sqrt{g(x) - f(x)}$$

Α38 | Δίνεται το τριώνυμο

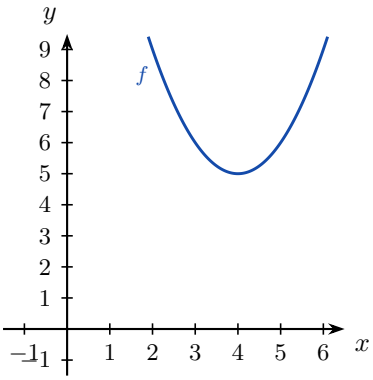
$$x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι
$$\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$$

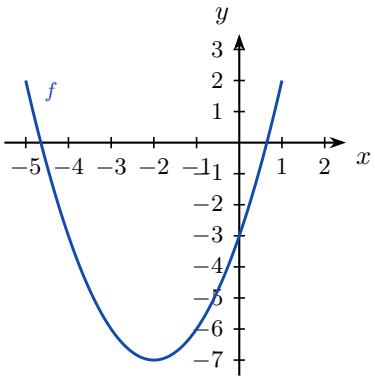
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

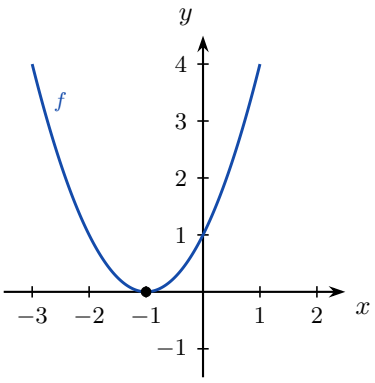
Στο καθένα από τα παρακάτω σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετική τιμή της παραμέτρου λ.



ΣΧΗΜΑ (I)



ΣΧΗΜΑ (II)



ΣΧΗΜΑ (III)

(a) Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι

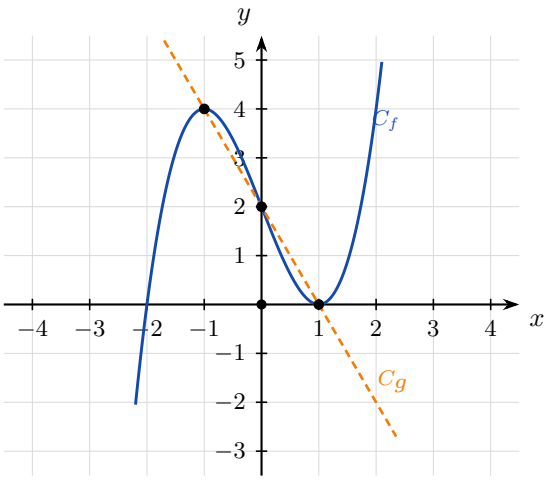
$$\lambda \in \{-2, 4\}$$

Να βρείτε την τιμή του λ που αντιστοιχεί σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(b) Για το σχήμα (III), να βρείτε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε ποια από αυτές αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο σχήμα.

Α39 | Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

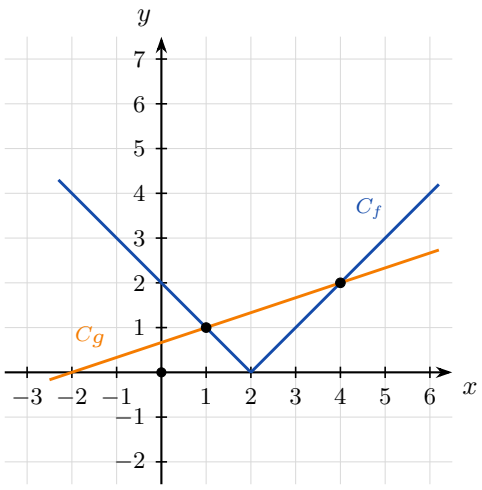
$$g(x) = -2x + 2, \qquad x \in \mathbb{R}$$



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

1. Τις τιμές του x για τις οποίες
$$f(x) = -2x + 2$$
2. Τις τιμές
$$f(-1), \qquad f(0) \qquad \text{και} \qquad f(1)$$
3. Τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.
4. Τις τιμές του x για τις οποίες η παράσταση
$$A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$$
ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

Α40 | Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με
$$f(x) = |x - 2| \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \qquad x \in \mathbb{R}$$



1. Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.
2. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

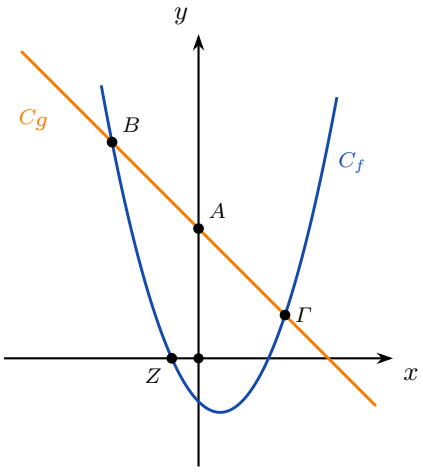
3. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.
4. Με τη βοήθεια της απάντησής σας στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση

$$K = \sqrt{3\,|2-x| - (x+2)}$$

Α41 | Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f\,(x) = x^2 - x - 1 \qquad \text{και} \qquad g\,(x) = 3 - x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

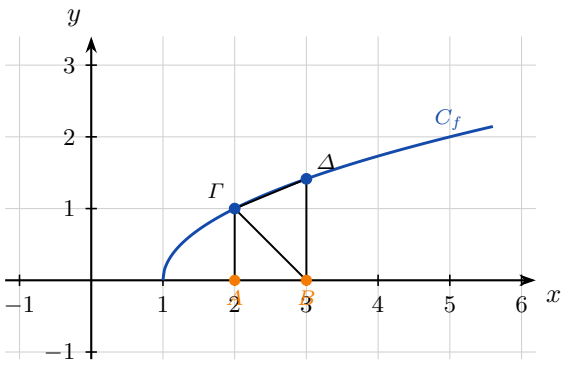
Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ και Z.
2. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την C_g.
3. Να αποδείξετε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό a, η απόσταση των αριθμών $f(a)$ και $-g(a)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον ίση με 1.

Α42 | Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f\,(x) = \sqrt{x-a}, \qquad a \in \mathbb{R}$$



1. Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$.
2. Αν $a = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
3. (a) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι

$$\Gamma\,(2,1) \qquad \text{και} \qquad \Delta\left(3, \sqrt{2}\right)$$

αντίστοιχα.

(b) Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$.

(c) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Α43 | Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 \qquad \text{και} \qquad g(x) = \lambda x + (1-\lambda), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda \neq 0$$

1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν, για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.
2. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ για την οποία οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και στη συνέχεια να προσδιορίσετε το σημείο αυτό.
3. Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ, ώστε να ισχύει

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$$

5

Η ΕΥΘΕΙΑ

5.1 Η εξίσωση της ευθείας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίσαμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και μάθαμε να παριστάνουμε σημεία στο επίπεδο. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς μπορούμε να περιγράψουμε μία ευθεία με μία εξίσωση και πώς από την εξίσωσή της μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη θέση και την κλίση της.

Στα επόμενα μαθηματικά που θα συναντήσετε, θα διαπιστώσετε ότι όχι μόνο οι ευθείες αλλά και κάθε καμπύλη που παρουσιάζει μαθηματικό ενδιαφέρον μπορεί να περιγραφεί με μία κατάλληλη εξίσωση. Αυτή είναι η μεγάλη δύναμη του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, συνδέει τη Γεωμετρία με την Άλγεβρα. Κάθε σημείο αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος αριθμών και κάθε εξίσωση αντιστοιχεί σε ένα γεωμετρικό σχήμα. Έτσι μπορούμε να μελετούμε γεωμετρικά προβλήματα με αλγεβρικές μεθόδους και αντίστροφα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy και μία ευθεία (ε), η οποία δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. **Γωνία που σχηματίζει η ευθεία** (ε) **με τον άξονα** $x'x$ ονομάζουμε τη γωνία ω, την οποία διαγράφει ο θετικός ημιάξονας Ox, όταν περιστραφεί κατά τη θετική φορά διαγραφής (αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού), μέχρι να συμπέσει με την ευθεία (ε).
Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε ορίζουμε ότι:

$$\omega = 0^\circ.$$

Η γωνία που σχηματίζει μία ευθεία με τον άξονα x'x καθορίζει την κλίση της. Όσο μεταβάλλεται η γωνία αυτή, μεταβάλλεται και η θέση της ευθείας στο επίπεδο. Στη συνέχεια θα δούμε πώς η κλίση αυτή περιγράφεται με έναν πραγματικό αριθμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

έχει ως γραφική παράσταση μία ευθεία.
Πολλές φορές, αντί να αναφερόμαστε στη συνάρτηση f, θα λέμε απλώς ότι η ευθεία έχει εξίσωση

$$y = ax + b$$

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Στην εξίσωση

$$y = ax + b$$

ο αριθμός b παριστάνει την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$. Πράγματι, κάθε σημείο του άξονα $y'y$ έχει τετμημένη ίση με 0. Θέτοντας λοιπόν $x = 0$, προκύπτει

$$y = a \cdot 0 + b = b$$

Επομένως, η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο

$$(0, b)$$

Καθώς μεταβάλλεται η γωνία που σχηματίζει μία ευθεία με τον άξονα $x'x$, μεταβάλλεται και η κλίση της. Όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία, τόσο πιο έντονα ανεβαίνει ή κατεβαίνει η ευθεία.

Η σχέση ανάμεσα στη γωνία αυτή και στην κλίση της ευθείας εκφράζεται από τον συντελεστή a της εξίσωσης $y = ax + b$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω η ευθεία

$$y = ax + b$$

Ο αριθμός

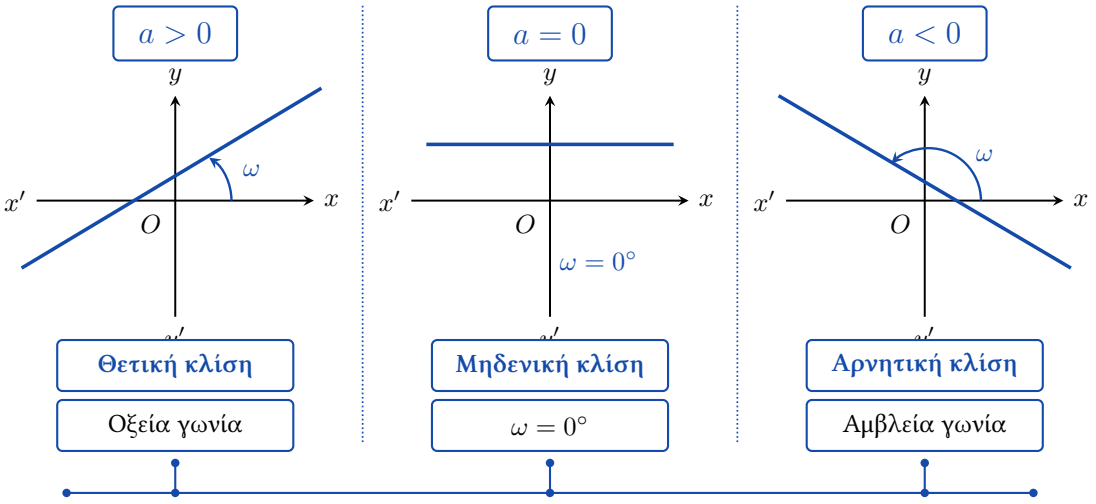
$$a = \varepsilon\varphi\omega$$

ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** ή **κλίση** της ευθείας.

◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

- Αν $a > 0$, τότε η γωνία ω είναι οξεία και η ευθεία είναι αύξουσα.
- Αν $a < 0$, τότε η γωνία ω είναι αμβλεία και η ευθεία είναι φθίνουσα.
- Αν $a = 0$, τότε $\omega = 0^\circ$ και η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Η τιμή του συντελεστή διεύθυνσης καθορίζει την κλίση της ευθείας.



◇ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Αν μία ευθεία διέρχεται από τα σημεία

$$A\left(x_1, y_1\right) \quad \text{και} \quad B\left(x_2, y_2\right)$$

με

$$x_1 \neq x_2$$

τότε ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1 | Θεωρούμε τα σημεία $A\left(4,6\right)$, $B\left(-2,-6\right)$, $\Gamma\left(7,11\right)$ και την ευθεία:

$$\left(\varepsilon\right):y=ax-2$$

Αν το σημείο A ανήκει στην ευθεία $\left(\varepsilon\right)$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $a=2$.
2. Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία $\left(\varepsilon\right)$. Κατόπιν, να εξετάσετε αν το σημείο Γ ανήκει στην ίδια ευθεία.

Α2 | Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=ax+b\quad,\qquad a,b\in\mathbb{R}$$

για την οποία ισχύουν:

$$f\left(0\right)=5\qquad\text{και}\qquad f\left(1\right)=3$$

1. Να δείξετε ότι $a=-2$ και $b=5$.
2. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Α3 | 1. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο:

$$x^2-x-6$$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-x-6}{x-3}$$

   (a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f.

   (b) Να δείξετε ότι:

$$f\left(x\right)=x+2$$

   για κάθε $x\in D_f$.

   (c) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

Α4 | Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-3x}{x-3}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f.
2. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x\right)=x$$

   για κάθε $x\in D_f$.

3. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Α5 | Δίνεται η ευθεία:

$$\left(\varepsilon\right):y=-x+2$$

1. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία $\left(\varepsilon\right)$ με τον άξονα $x'x$.
2. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $\left(\varepsilon\right)$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
3. Να σχεδιάσετε την ευθεία $\left(\varepsilon\right)$.

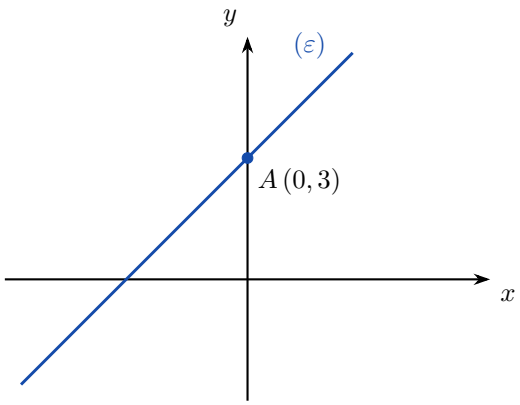
Α6 | Δίνεται η ευθεία

$$y = ax + b$$

η οποία έχει κλίση 3 και διέρχεται από το σημείο $(2, 1)$.

1. Να βρείτε τις τιμές των a και b.
2. Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.
3. Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

Α7 | Η παρακάτω ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A\,(0, 3)$.



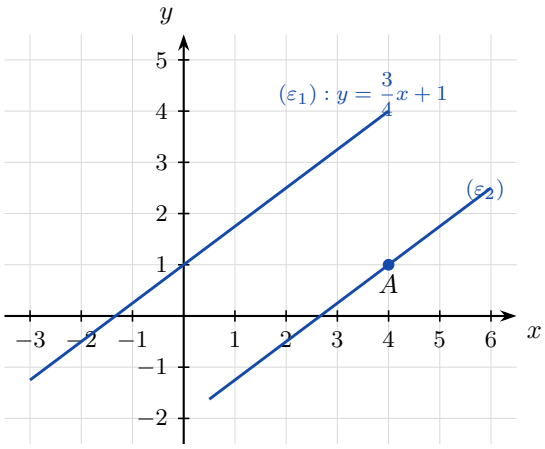
1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε).
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).
3. Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $x'x$.

Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

Α8 | Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουν χαραχθεί δύο ευθείες: η ευθεία (ε_1) με εξίσωση

$$y = \frac{3}{4}x + 1$$

και η ευθεία (ε_2), η οποία διέρχεται από το σημείο $A\,(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1).



1. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2).
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2).

3. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Α9 | Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση:

$$y = -2x + 3$$

και μία ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο $A(-1, 4)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1).

1. Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$.
2. Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$;

Α10 | Δίνεται η ευθεία

$$(\varepsilon) : y = ax - 4$$

Αν η ευθεία

$$(\delta) : y = 2x + 3$$

είναι παράλληλη στην ευθεία (ε), τότε:

1. (a) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).
   (b) Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.
2. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Α11 | Δίνεται η ευθεία

$$y = ax + b$$

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b, αν η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$.
2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ, αν η ευθεία

   $$y = \lambda x + \kappa$$

   είναι παράλληλη στην ευθεία

   $$y = -x + 4$$

   και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 3.

Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 135^\circ = -1$.

Α12 | Έστω η ευθεία

$$(\varepsilon_1) : y = ax + b$$

η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2), η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
3. Να σχεδιάσετε τις δύο ευθείες στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

Α13 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{16 - x^2}}$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f.

2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
3. Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία A και B.

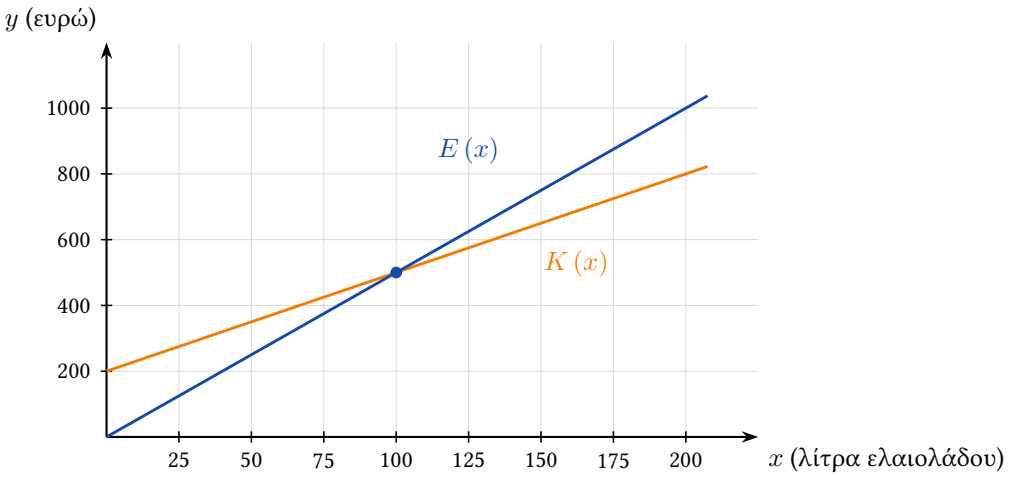
Α14 | Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 3x + 1 \qquad \text{και} \qquad g(x) = x^2 - 16$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.
2. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε κάποιο από τα σημεία $(4, 0)$ και $(-4, 0)$.
3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.
4. Να βρείτε συνάρτηση h, της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του θετικού ημιάξονα Ox.

Α15 | Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο μέσω διαδικτύου. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που περιγράφουν τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ της εταιρείας από την πώληση x λίτρων ελαιολάδου σε έναν μήνα.



1. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.
2. Ποια είναι τα αρχικά πάγια έξοδα της εταιρείας;
3. Πόσα τουλάχιστον λίτρα ελαιολάδου πρέπει να πουλήσει η εταιρεία, ώστε να μην έχει ζημιά;
4. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων K και E και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Α16 | Ένας αθλητής, όταν κολυμπάει ύπτιο, καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει να κάψει συνολικά 360 θερμίδες κολυμπώντας.

1. Αν ο αθλητής κολυμπήσει ύπτιο για 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα, ώστε να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;
2. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα, ώστε να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.
   (a) Αν x είναι ο χρόνος, σε λεπτά, που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο, σε λεπτά, που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα έχει τύπο:
   $$f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$
   (b) Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f, στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.
3. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Α17 | Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
2. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία:
   $$y = 2x + 5$$
3. Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει:
   $$|x - 2| < 2$$
   να δείξετε ότι το σημείο M βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 5$.

Α18 | Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad \text{και} \quad g(x) = x + 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.
2. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g.
3. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = a$, με $a < 1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

Α19 | Δύο εταιρείες ταχυμεταφορών αναλαμβάνουν παραδόσεις δεμάτων σε μια πόλη.

Η εταιρεία «FAST» χρεώνει 3 ευρώ ως πάγιο κόστος παραλαβής και επιπλέον $0,5$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο διανομέας.

Η εταιρεία «SPEED» χρεώνει 1 ευρώ ως πάγιο κόστος παραλαβής και επιπλέον $0,7$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο διανομέας.

Οι παραπάνω χρεώσεις ισχύουν για αποστάσεις έως 20 χιλιόμετρα.

1. (a) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία «FAST» για μια παράδοση σε απόσταση x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x (km)	0	4	10
$f(x)$ (ευρώ)			

(b) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία «SPEED» για μια παράδοση σε απόσταση x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x (km)			
$g(x)$ (ευρώ)	1	3.8	8

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού D_f και D_g και τους τύπους των συναρτήσεων f και g.
3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «FAST» είναι οικονομικότερη από την επιλογή της εταιρείας «SPEED», αιτιολογώντας την απάντησή σας.
4. Αν δύο πελάτες Α και Β χρησιμοποιήσουν την εταιρεία «FAST» και ο πελάτης Α διανύσει 4 χιλιόμετρα περισσότερα από τον Β, να βρείτε πόσα ευρώ περισσότερα θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

Α20 | Δίνεται η συνάρτηση f, με:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & , \quad x < 0 \\ \\ x+1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.
2. (a) Να χαράξετε την C_f και την ευθεία $y = 4$ και, στη συνέχεια, να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.
   (b) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
3. (a) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a η ευθεία $y = a$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
   (b) Για τις τιμές του a που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = a$ και να εξετάσετε αν ισχύει το συμπέρασμα του ερωτήματος (2b), αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Α21 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{|x-1|}$$

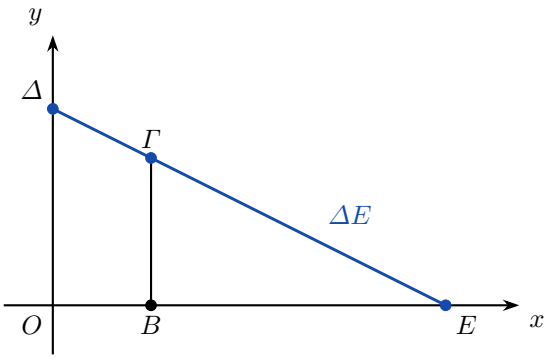
1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f.
2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & , \quad x < 1 \\ \\ x-3 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

3. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

4. Να λύσετε την ανίσωση:
$$f(x) \leq 0$$

Α22 | Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, το σημείο Δ ανήκει στον άξονα $y'y$, το σημείο E ανήκει στον άξονα $x'x$ και το O είναι η αρχή των αξόνων.

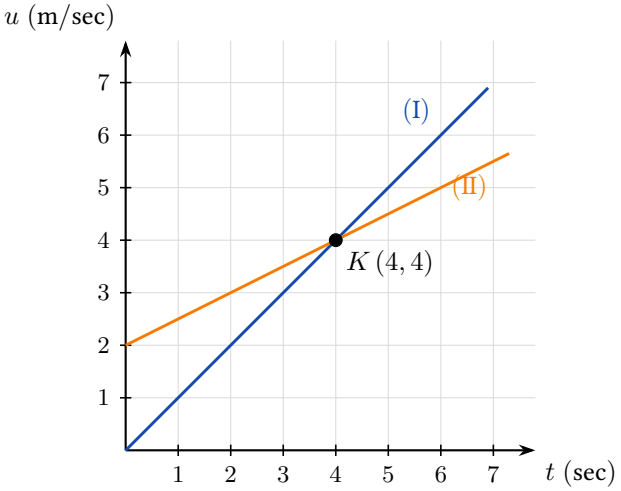


Η ευθεία ΔE έχει εξίσωση
$$y + \frac{1}{2}x = 4$$

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E.
2. Ένα σημείο $\Gamma\,(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔE και το σημείο B ανήκει στον άξονα $x'x$, έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ να είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$.
   (a) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ.
   (b) Να δείξετε ότι:
   $$y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$$
3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:
   $$\mathcal{A}(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$$
   εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου $OB\Gamma\Delta$ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.
4. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου $OB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με $9{,}75$ τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Α23 | Ένα όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση:
$$u = u_0 + at$$
όπου u είναι η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t, u_0 η αρχική του ταχύτητα και a η σταθερή επιτάχυνσή του.

1. Αν η παραπάνω σχέση ορίζει την ταχύτητα του οχήματος ως συνάρτηση του χρόνου, να προσδιορίσετε την εξαρτημένη και την ανεξάρτητη μεταβλητή, καθώς και το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης στο πλαίσιο του προβλήματος.
2. Ένα όχημα A, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από την ηρεμία και τη χρονική στιγμή $4\,\mathrm{s}$ έχει ταχύτητα $4\,\mathrm{m/s}$. Ένα άλλο όχημα B, το οποίο επίσης εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα $2\,\mathrm{m/s}$.
   Οι ευθείες (I) και (II) στο παρακάτω διάγραμμα ταχύτητας–χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.



(a) Ποια από τις δύο ευθείες (I) και (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος A και ποια την ταχύτητα του οχήματος B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

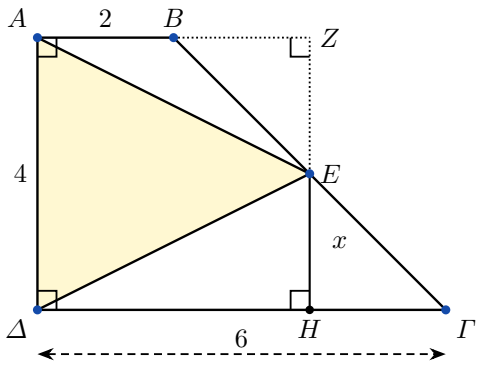
(b) Να προσδιορίσετε ποιο από τα δύο οχήματα κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή $t \in [3, 5]$.

3. Ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $2\,\mathrm{m/s}$ και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος A. Να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την ταχύτητά του.

Α24 | Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, για το οποίο ισχύουν:

$$AB = 2, \qquad A\Delta = 4 \qquad \text{και} \qquad \Gamma\Delta = 6$$

ενώ η πλευρά $A\Delta$ είναι κάθετη στις βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Το σημείο E κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ και συμβολίζουμε με x την απόστασή του από την ευθεία $\Gamma\Delta$.



1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AE\Delta$ εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = -2x + 12$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f στο πλαίσιο του προβλήματος.

2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

3. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + \ldots + f\left(\frac{64}{16}\right)$$

Α25 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 2|a|x - 3 \qquad \text{και η ευθεία} \qquad (\varepsilon) : y = 2x - a^2 - 1, \qquad a \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
2. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο διαφορετικά σημεία, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
3. Για $a = -3$, να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τη γραφική παράσταση της f.
4. Αν A και B είναι τα σημεία τομής του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε την απόσταση AB.

Α26 | Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 \qquad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία

$$(\varepsilon) : y = -2x + b \qquad , \qquad b \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύει

$$f(-1 + x) = f(-1 - x)$$

2. Με τη βοήθεια του πρώτου ερωτήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = f(0{,}62) - f(-2{,}62) + f(0{,}38) - f(-2{,}38)$$

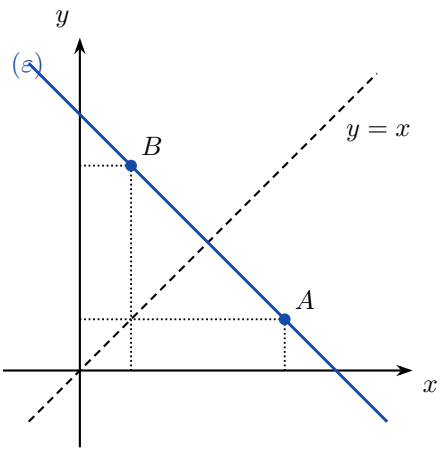
3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία (ε), όταν $b = -4$.
4. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του b, ώστε η γραφική παράσταση C_f να έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την ευθεία (ε).

Α27 | Δίνεται η ευθεία

$$(\varepsilon) : y = \left(a^2 - 6a + 8\right)x + 2 \qquad , \qquad a \in \mathbb{R}$$

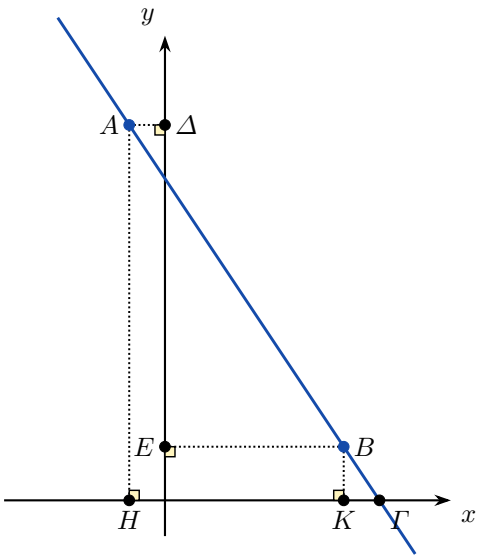
1. Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.
2. Αν ο αριθμός a είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία, τότε:
   (a) Να αποδείξετε ότι $a = 3$.
   (b) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
   (c) Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε).

Α28 | Τα σημεία A και B βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της πρώτης και της τρίτης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



1. Αν
$$A\left(x_A, y_A\right) \qquad \text{και} \qquad B\left(x_B, y_B\right)$$
να γράψετε τις σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B.
2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από τα σημεία A και B, έχει κλίση -1.
3. Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες
$$A\left(4, a^2-3a+1\right) \qquad \text{και} \qquad B\left(a-2, 4\right)$$
αντίστοιχα, τότε:
   (a) Να δείξετε ότι $a=3$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.
   (b) Για $a=3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

Α29 | Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$$f\left(x\right) = ax+b$$
όπου a, b είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$.
Θεωρούμε δύο σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Οι προβολές του σημείου A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι τα σημεία H και Δ αντίστοιχα, ενώ οι προβολές του σημείου B στους ίδιους άξονες είναι τα σημεία K και E αντίστοιχα.
Γνωρίζουμε ότι:
$$HK = 6 \qquad \text{και} \qquad \Delta E = 9$$



1. Να αποδείξετε ότι $a = -\frac{3}{2}$.
2. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, το οποίο έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $b = 9$.
3. Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ), η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.