

Η ΒΑΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια: ΒΛΑΧΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

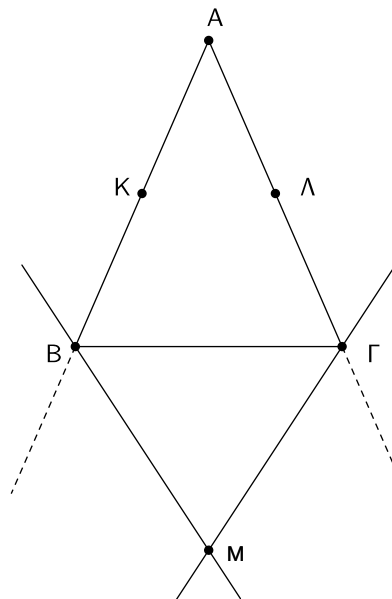
Κεφάλαιο 1

ΤΡΙΓΩΝΑ

1.1 Ισότητα τριγώνων και ισοσκελές τρίγωνο

ΘΕΜΑ Β

- (Θ.1532) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE . Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
 - Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.
 - $EH = \Delta Z$
- (Θ.1545) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:
 - Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα.
 - $A\Delta = A E$
- (Θ.1546) Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσον M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρνουμε τις αποστάσεις MK και $M\Lambda$ του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
 - $MK = M\Lambda$
 - Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{KML}$
- (Θ.1547) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσον M της $B\Gamma$ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
 - $M\Delta = ME$
 - Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- (Θ.1553) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.
 - Να δείξετε ότι το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$
 - Να δείξετε ότι $MK = M\Lambda$

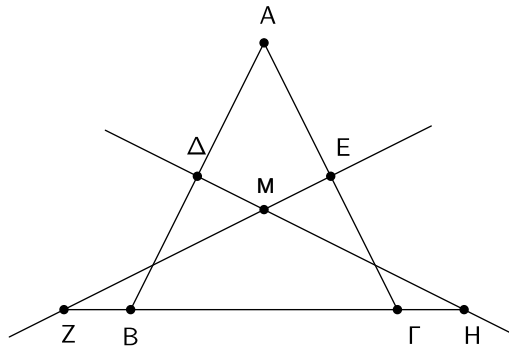


6. **(Θ.1558)** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
- (α') Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.
 - (β') Οι γωνίες $\hat{A\Gamma I}$ και $\hat{A\Gamma B}$ είναι ίσες.
 - (γ') Η ευθεία AI είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.
7. **(Θ.1565)** Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).
- (α') Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A'}$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.
 - (β') Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B'}$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.
8. **(Θ.1568)** Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- (α') Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
 - (β') Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.
9. **(Θ.1569)** Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε την διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
- (α') Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
 - (β') Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.
10. **(Θ.1571)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρνουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A). Να αποδείξετε ότι:
- (α') $AB = BE$
 - (β') Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.
11. **(Θ.1574)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρνουμε $\Delta E \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
- (α') Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.
 - (β') Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

12. **(Θ.1578)** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν την βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

(α') Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\Delta B\eta$ και $E Z \Gamma$.

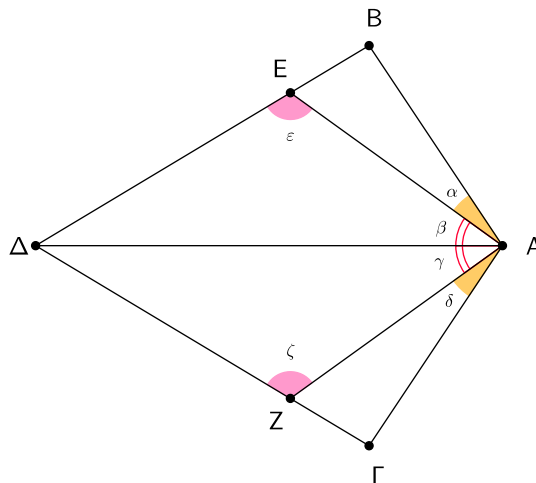
(β') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M Z \eta$ είναι ισοσκελές.



13. **(Θ.1582)** Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

(β') Οι γωνίες $\hat{\epsilon}$ και $\hat{\zeta}$ είναι ίσες.

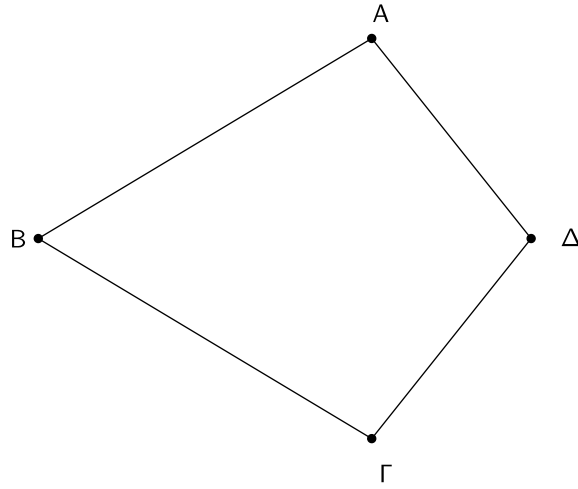


14. **(Θ.1585)** Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$

(β') Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(γ') Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

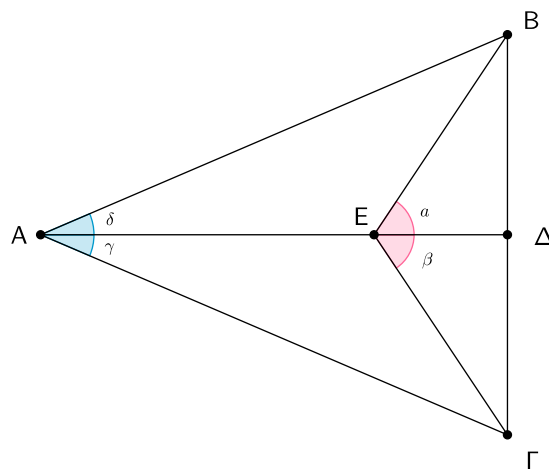


15. **(Θ.1587)** Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μία απόδειξη για κάθε έναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

(α') Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.

(β') Το τρίγωνο ΓEB είναι ισοσκελές.

(γ') Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

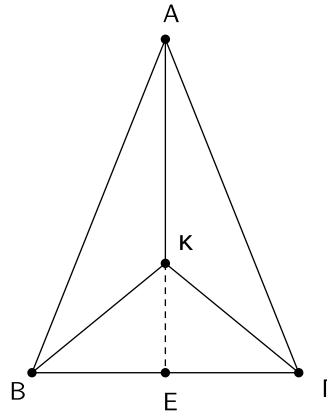


16. **(Θ.1591)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και ένα σημείο K στο εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.

(β') Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}A\Gamma$.

(γ') Η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.

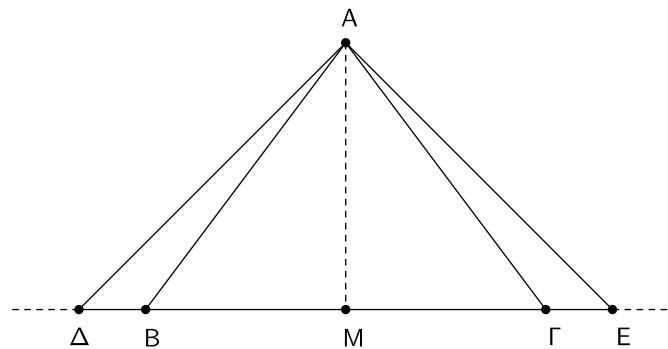


17. **(Θ.1592)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

(β') Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(γ') Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.



18. **(Θ.1598)** Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

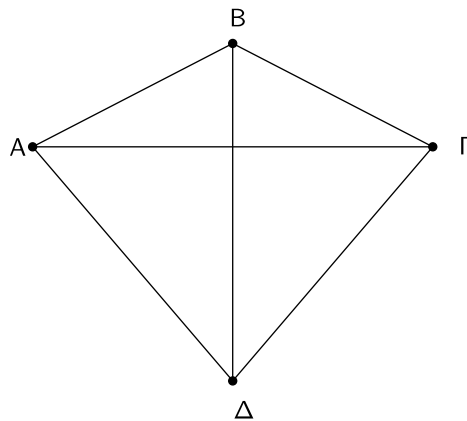
(α') Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ είναι ίσα.

(β') Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου και η προέκταση της AM τέμνει την $E\Delta$ στο Z , να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

ii. $Z\Delta = \frac{E\Delta}{2}$

19. **(Θ.1601)** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) και σημείο $Μ$ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $ΜΒ = ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι:
- (α') Τα τρίγωνα $ΑΜΒ$ και $ΑΜΓ$ είναι ίσα.
- (β') Η ευθεία $ΑΜ$ διχοτομεί την γωνία $\hat{ΒΜΓ}$
20. **(Θ.1621)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) και στις ίσες πλευρές $ΑΒ, ΑΓ$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν $Μ$ είναι το μέσον της $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:
- (α') Τα τμήματα $ΒΔ$ και $ΓΕ$ είναι ίσα.
- (β') Τα τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΜΕΓ$ είναι ίσα.
- (γ') Το τρίγωνο $ΔΕΜ$ είναι ισοσκελές.
21. **(Θ.1622)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΚΑΒ$ ($ΚΑ = ΚΒ$) και η διχοτόμος $ΚΓ$ της γωνίας $\hat{Κ}$. Στην προέκταση της $ΒΑ$ (προς το $Α$) παίρνουμε σημείο $Λ$ και στην προέκταση της $ΑΒ$ (προς το $Β$) παίρνουμε σημείο $Μ$, έτσι ώστε $ΑΛ = ΒΜ$. Να αποδείξετε ότι:
- (α') Το τρίγωνο $ΚΛΜ$ είναι ισοσκελές.
- (β') Η $ΚΓ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΚΛΜ$.
22. **(Θ.1624)** Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$. Οι διαγώνιοι $ΑΓ, ΒΔ$ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:
- (α') Η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Δ}$ του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.
- (β') Η $ΒΔ$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΑΓ$.

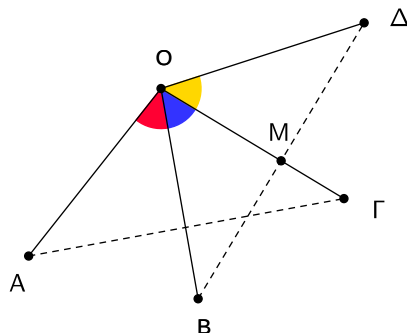


23. **(Θ.1627)** Δίνεται γωνία $\hat{ΧΟΥ}$ και η διχοτόμος της $Οδ$. Θεωρούμε σημείο $Μ$ της $Οδ$ και σημεία $Α$ και $Β$ στις ημιευθείες $Οχ$ και $Ογ$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Να αποδείξετε ότι:
- (α') $ΜΑ = ΜΒ$
- (β') Η $Οδ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{ΑΜΒ}$

24. **(Θ.1632)** Αν $\hat{A}OB = \hat{BO}\Gamma = \hat{\Gamma}O\Delta$ και $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, να αποδείξετε ότι:

(α') $A\Gamma = B\Delta$

(β') Το M είναι το μέσον της $B\Delta$, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και $B\Delta$.



25. **(Θ.1648)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $BE = \Gamma\Delta$

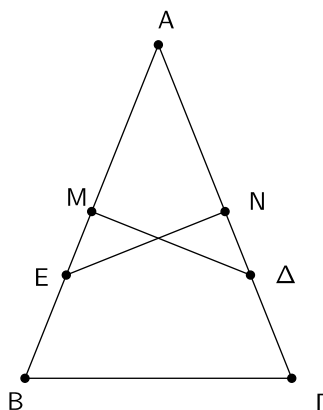
(β') $B\Delta = \Gamma E$

(γ') $\hat{\Delta B\Gamma} = \hat{E\Gamma B}$

26. **(Θ.1656)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

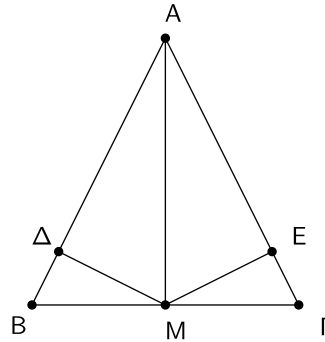
(α') Αν $M\Delta = NE$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(β') Αν $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = NE$



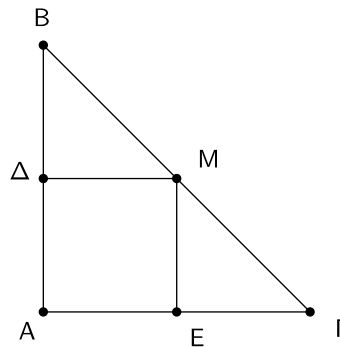
27. **(Θ.1657)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α') Αν $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.
 (β') Αν $AB = A\Gamma$ και το M είναι το μέσον του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$



28. **(Θ.1658)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με την γωνία $\hat{A}$ ορθή και από το μέσον M της πλευράς $B\Gamma$ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

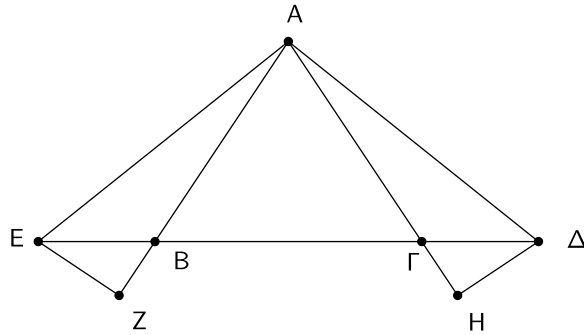
- (α') Αν $M\Delta = ME$, τότε:
 i. Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα.
 ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 (β') Αν $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$



29. **(Θ.1659)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E , έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρνουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρνουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

(α') $A\Delta = AE$

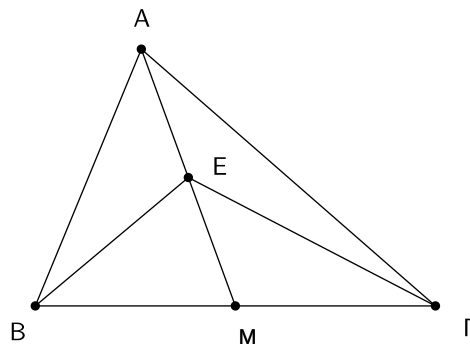
(β') $EZ = \Delta H$



30. **(Θ.1660)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσον της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2BE$, να αποδείξετε ότι:

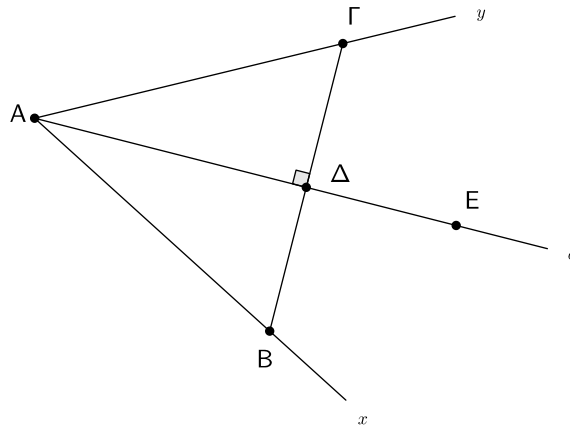
(α') $\hat{AEB} = \hat{EM\Gamma}$

(β') $AB = E\Gamma$



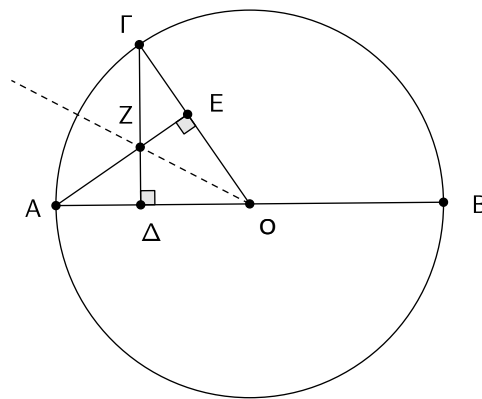
31. **(Θ.1670)** Δίνεται γωνία $\hat{x}\hat{A}\hat{y}$ και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στην διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

- (α') Τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα.
 (β') Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .



32. **(Θ.1677)** Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO , να αποδείξετε ότι:

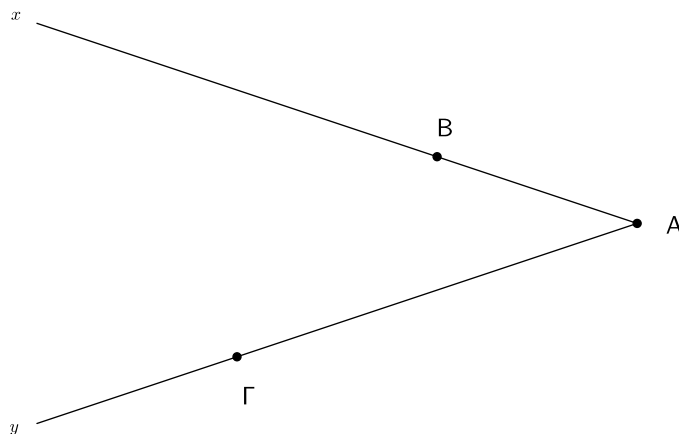
- (α') Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.
 (β') Η OZ διχοτομεί την γωνία $\hat{A}\hat{O}\hat{\Gamma}$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσον του τόξου $\hat{A}\hat{\Gamma}$.



33. **(Θ.1688)** Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τον χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

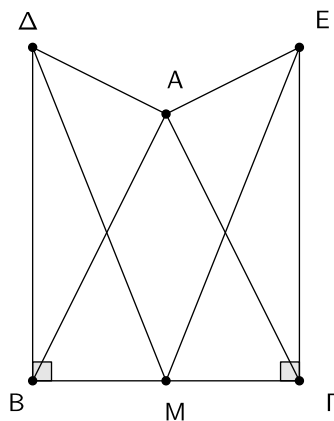
- (α') Ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.
 (β') Ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.
 (γ') Ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



34. **(Θ.1698)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, όπως στο σχήμα, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M είναι το μέσον της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

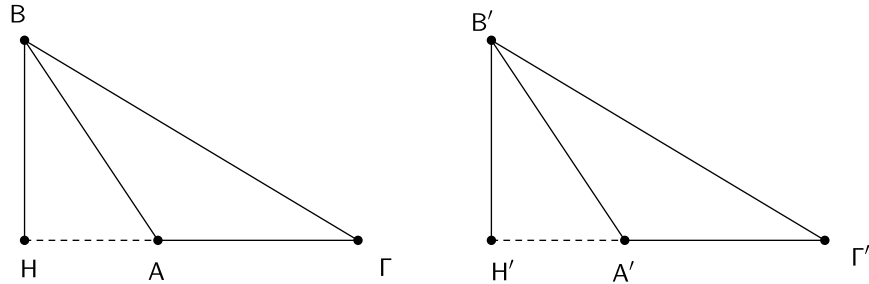
- (α') Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.
 (β') $A\Delta = AE$



35. **(Θ.12149)** Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A}' > 90^\circ$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

(α') $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$

(β') Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



36. **(Θ.12635)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ προς τα B , Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

(α') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

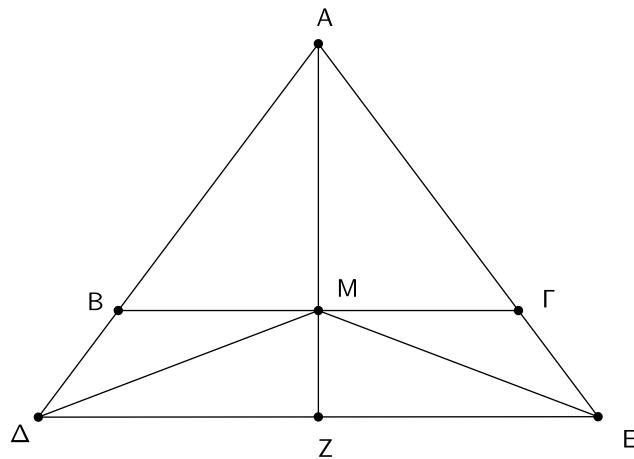
(β') Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\hat{\Delta}E$ είναι ίση με τη γωνία $M\hat{E}\Delta$.

37. **(Θ.12636)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

(α') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

(β') Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\hat{\Delta}E$ είναι ίση με τη γωνία $M\hat{E}\Delta$.

(γ') Αν η AM τέμνει την ΔE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην ΔE .

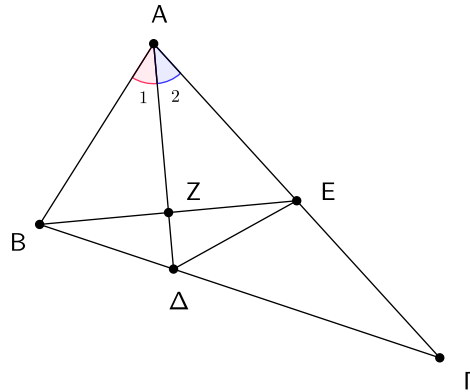


38. **(Θ.12705)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma = 2AB$. Η διχοτόμος του $A\Delta$ τέμνει την διάμεσο BE στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha') \quad AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$$

$$(\beta') \quad \Delta B = \Delta E$$

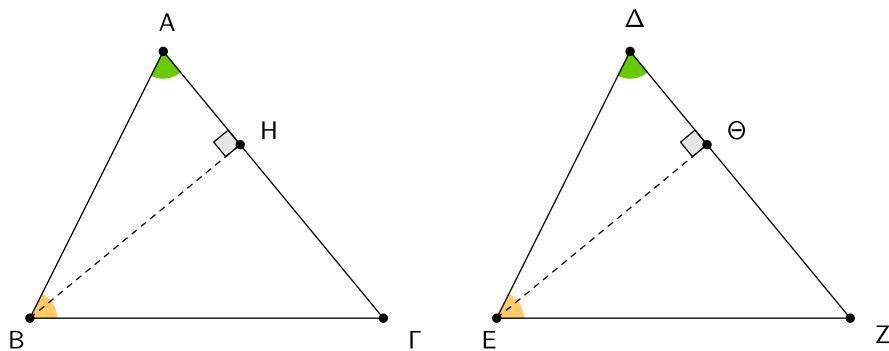
$$(\gamma') \quad AZ \perp BE$$



39. **(Θ.13517)** Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{AB\Gamma} = \hat{\Delta EZ}$. Αν τα ύψη τους BH και $E\Theta$ είναι ίσα, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha') \quad AB = \Delta E$$

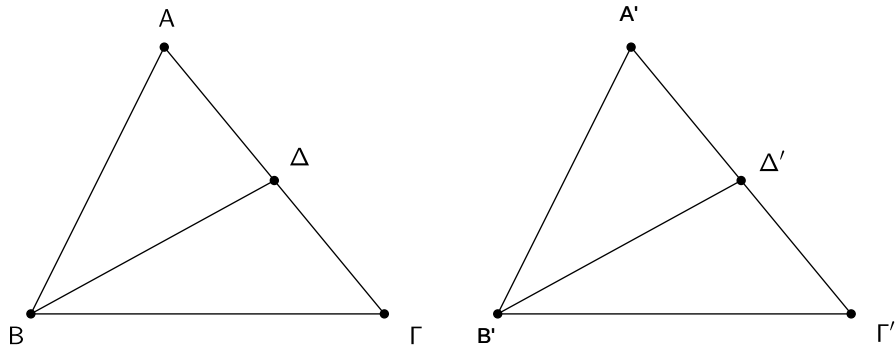
$$(\beta') \quad \text{Τα τρίγωνα } AB\Gamma \text{ και } \Delta EZ \text{ είναι ίσα.}$$



40. **(Θ.13518)** Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

(α') $\hat{A} = \hat{A}'$

(β') Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

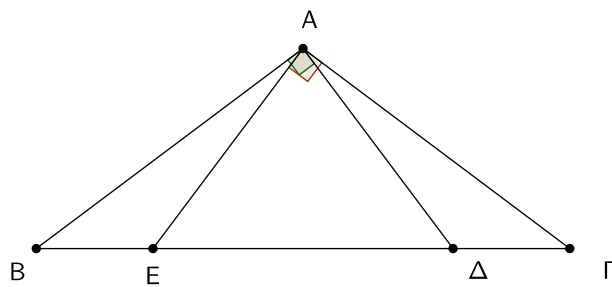


41. **(Θ.13533)** Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(β') Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(γ') $BE = \Gamma\Delta$

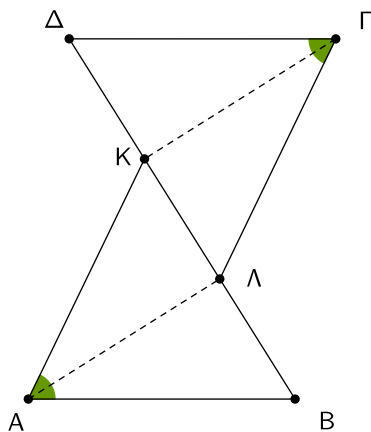


42. (Θ.13826) Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

(α') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$

(β') Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:

- i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda$, ΛK και $K\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii. Να αποδείξετε ότι οι $ΑΛ$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$



1.2 Ανισοτικές σχέσεις

ΘΕΜΑ Β

1. **(Θ.1540)** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρνουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετη ΔE , η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

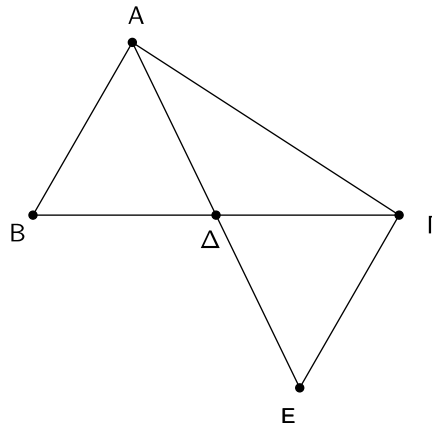
(α') $A\Delta = \Delta E$

(β') $A\Delta < \Delta B$

2. **(Θ.1573)** Στο ακόλουθο σχήμα, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $AB = \Gamma E$

(β') $AE < AB + A\Gamma$

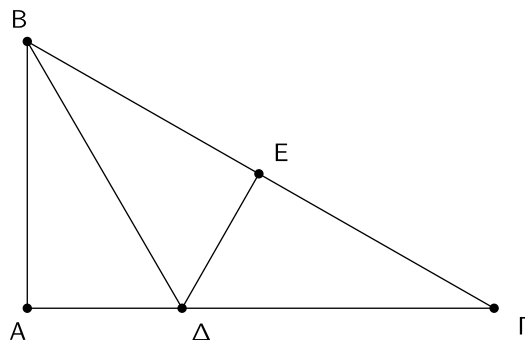


3. **(Θ.1646)** Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία $\hat{A}$. Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\hat{B}$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $A\Delta = \Delta E$

(β') $A\Delta < \Delta\Gamma$

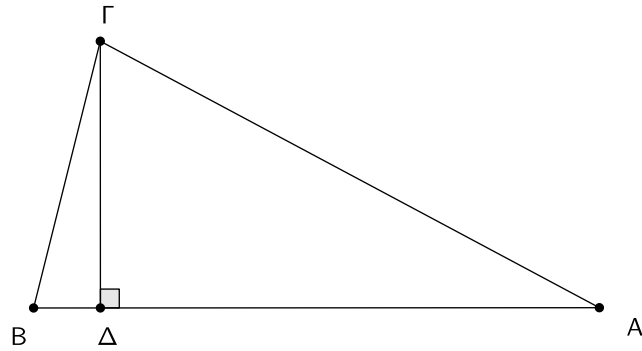
(γ') $A\Gamma > AB$



4. (Θ.13844) Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $B\Delta < A\Delta$, $AB = A\Gamma$ και $\hat{A}\Delta\Gamma = 90^\circ$.

(α') Να αποδείξετε ότι $A\Gamma > B\Gamma$

(β') Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



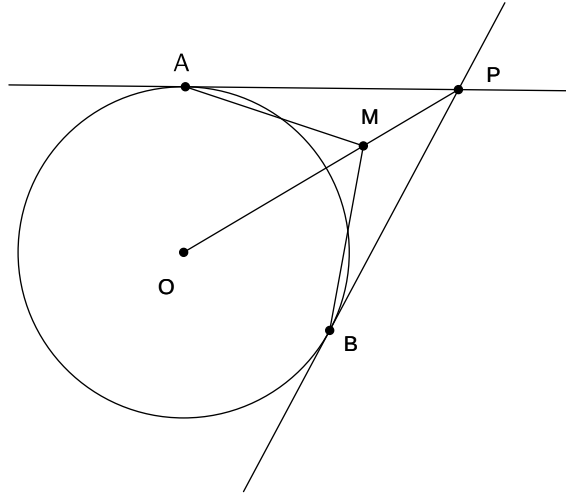
1.3 Σχετική θέση ευθείας και κύκλου

ΘΕΜΑ Β

1. **(Θ.1617)** Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

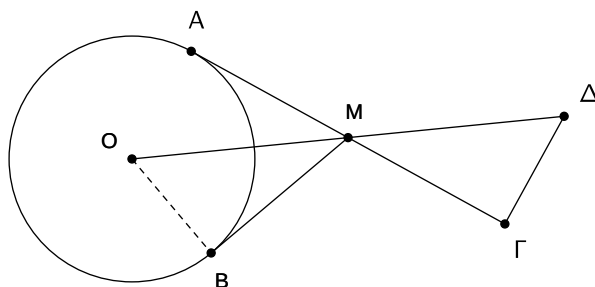
(β') Οι γωνίες $\hat{MAO}$ και $\hat{MBO}$ είναι ίσες.



2. **(Θ.1620)** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.

(α') Να αποδείξετε ότι $MB = M\Gamma$

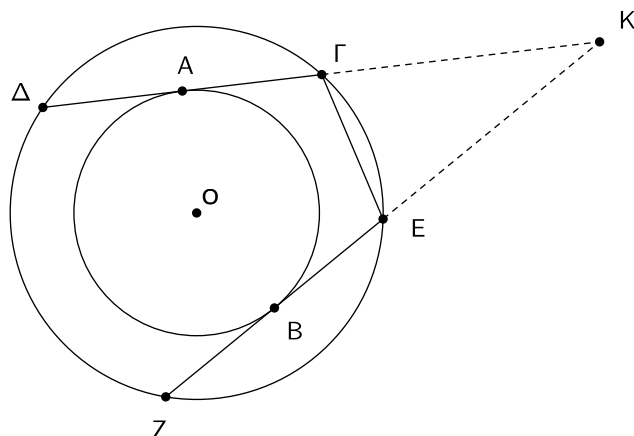
(β') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.



3. **(Θ.1667)** Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

(α') Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$

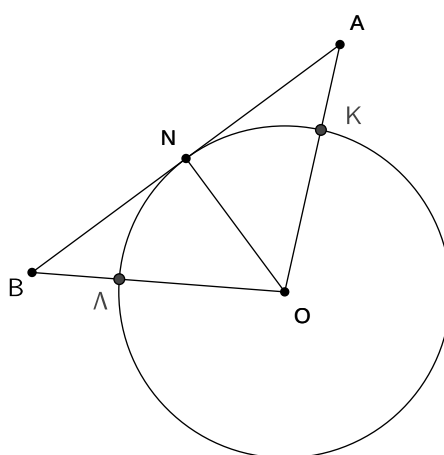
(β') Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.



4. **(Θ.1676)** Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρνουμε την εφαπτομένη του και εκατέρωθεν του N θεωρούμε τα σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

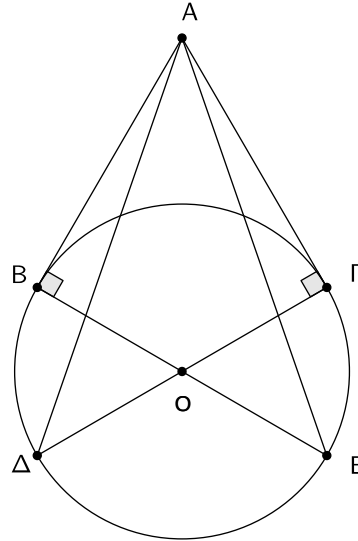
(α') Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.

(β') Το σημείο N είναι το μέσον του τόξου $\widehat{K\Lambda}$



5. **(Θ.1684)** Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρνουμε τα εφάπτομενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α') Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα.
 (β') Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα.



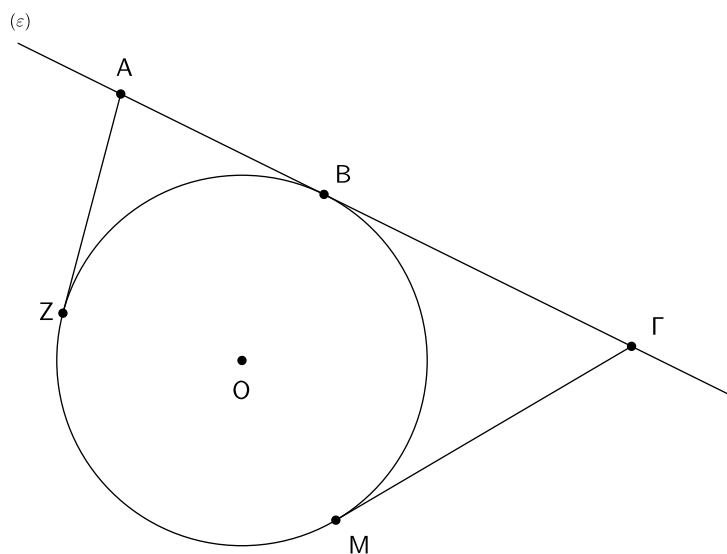
6. **(Θ.13759)** Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μία ευθεία (ε). Να βρείτε την σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

- (α') $d = 3$
 (β') $d = 6$
 (γ') $d = 9$

7. **(Θ.13817)** Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρνουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) . Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

(α') Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(β') Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$



1.4 Σχετική θέση δύο κύκλων

ΘΕΜΑ Β

1. **(Θ.12417)** Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R = 3$, $r = 2$ και $K\Lambda = 4$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .

(β') $\hat{K}\hat{A}\hat{\Lambda} > \hat{A}\hat{\Lambda}\hat{K}$

2. **(Θ.13757)** Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

(α') Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(β') Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

(γ') Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ') Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. **(Θ.13758)** Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε την σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

(α') $K\Lambda = 13$

(β') $K\Lambda = 2$

(γ') $K\Lambda = 5$

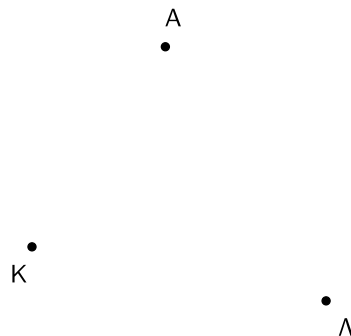
(δ') $K\Lambda = 11$

(ε') $K\Lambda = 9$

4. **(Θ.13835)** Τα σημεία A, K και Λ δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο A απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

(α') Να αποδείξετε ότι $1 < K\Lambda < 9$

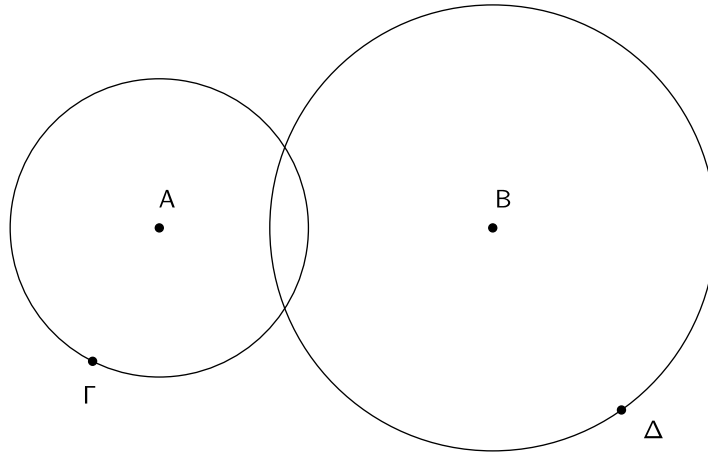
(β') Να βρείτε ένα σημείο B του επιπέδου διαφορετικό από το A , που να απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .



5. **(Θ.13836)** Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

(α') Να αποδείξετε ότι: $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$

(β') Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;



Κεφάλαιο 2

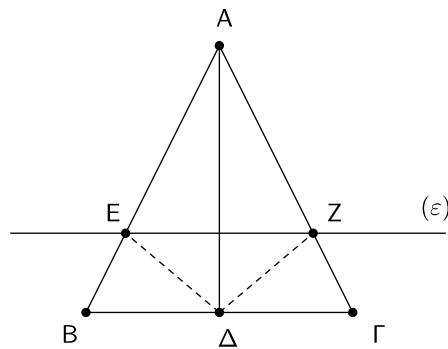
ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

2.1 Παραλληλία

ΘΕΜΑ Β

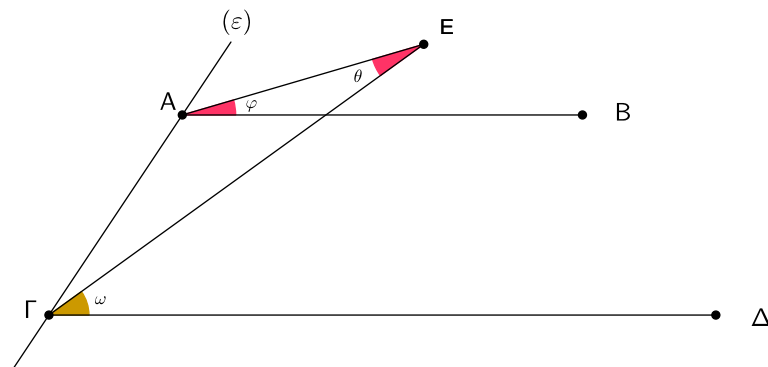
1. **(Θ.1544)** Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε την διχοτόμο $A\Delta$ και μία ευθεία (ε) , παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α') Το τρίγωνο $A\epsilon Z$ είναι ισοσκελές.
(β') Τα τρίγωνα $A\epsilon \Delta$ και $A Z \Delta$ είναι ίσα.

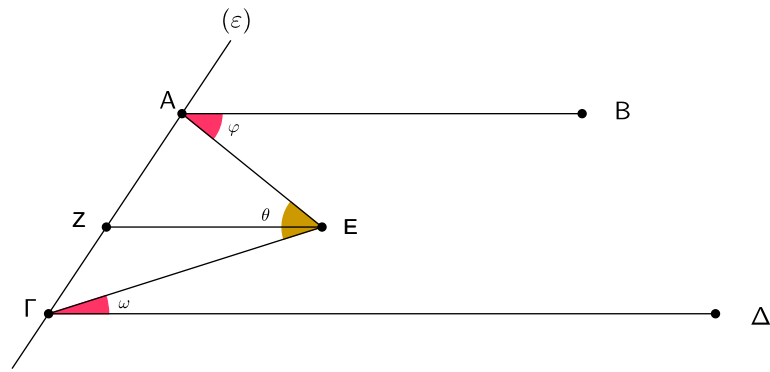


2. **(Θ.1590)** Δίνεται ευθεία (ε) του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της (ε) . Να αποδείξετε ότι:

- (α') Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\phi} + \hat{\theta}$



- (β') Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\phi}$



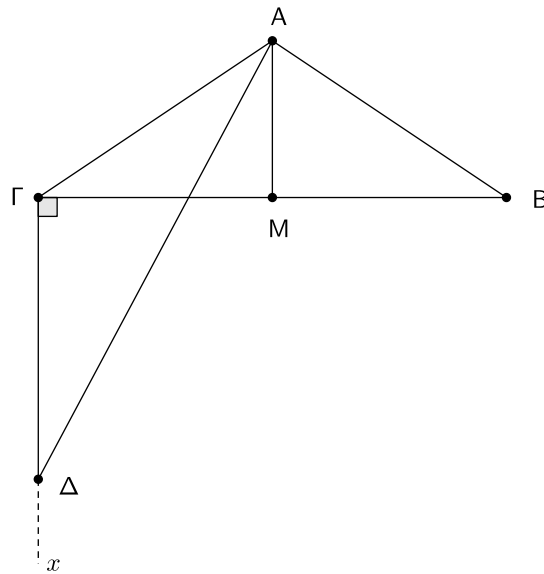
3. **(Θ.1595)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του AM . Φέρνουμε ημιευθεία $\Gamma\chi$, κάθετη στην $B\Gamma$, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

(α') Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ είναι ίση με την γωνία $\hat{\Gamma\hat{\Delta}A}$

(β') Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\Delta \parallel AM$

ii. Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{M\hat{A}\Gamma}$



4. **(Θ.1597)** Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ είναι ίσα.

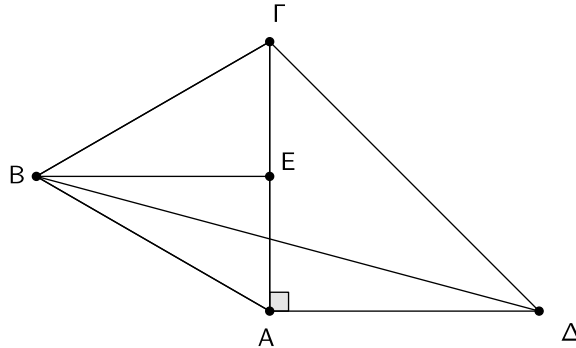
(β') $\epsilon\Delta \parallel B\Gamma$

5. **(Θ.12710)** Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα την $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $BE \parallel A\Delta$

(β') Οι γωνίες $\hat{E}\hat{B}\Delta$ και $\hat{A}\hat{\Delta}B$ είναι ίσες.

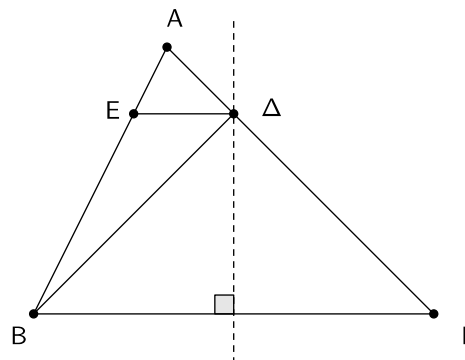
(γ') Το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.



6. **(Θ.13534)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς την $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

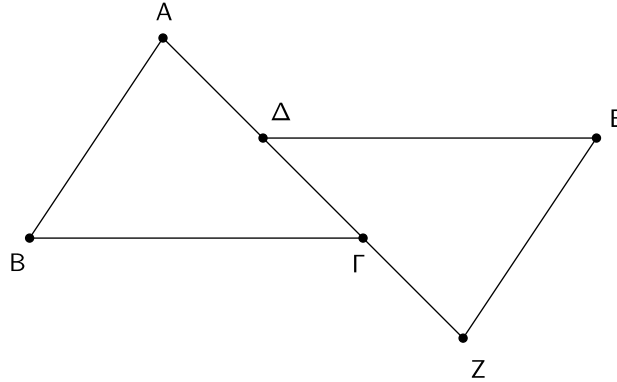
(β') Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{\Delta}B$



7. **(Θ.13748)** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς AG . Φέρνουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την AG προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα.

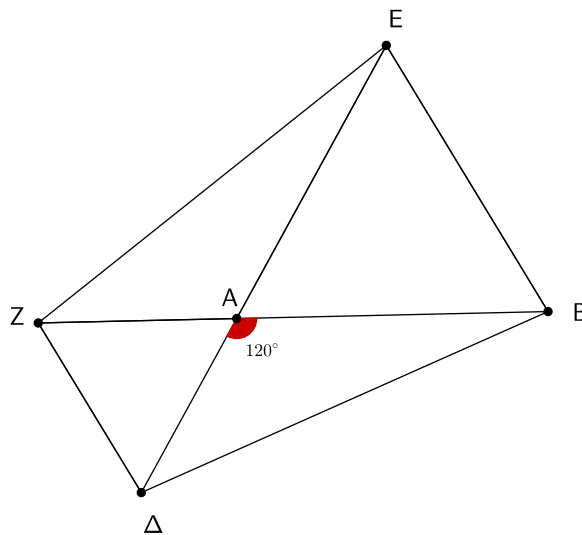
(β') $AB \parallel EZ$



8. **(Θ.14884)** Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ είναι ίσα.

(β') Το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο στο τμήμα BE .



2.2 Άθροισμα γωνιών πολυγώνων

ΘΕΜΑ Β

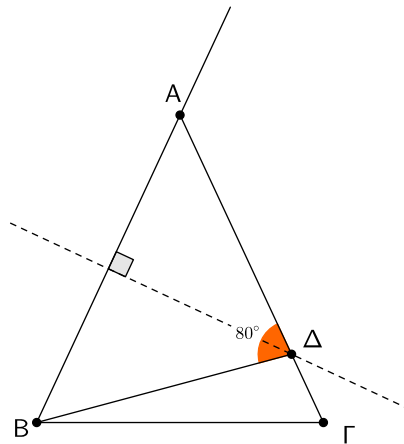
- (Θ.1541)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Φέρνουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $BE = AB$

(β') Αν επιπλέον είναι $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.
- (Θ.1552)** Ένας μαθητής της Α' Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μία τυχαία γωνία $\chi\hat{O}\psi$. Στην συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές $O\chi$ και $O\psi$ της γωνίας στα σημεία A και B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ και Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;
- (Θ.1554)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 2\hat{A\hat{B}\Gamma}$. Φέρνουμε την μεσοκάθετο της πλευράς AB , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ και σχηματίζεται γωνία $\hat{A\Delta B}$ ίση με 80° .

(α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$

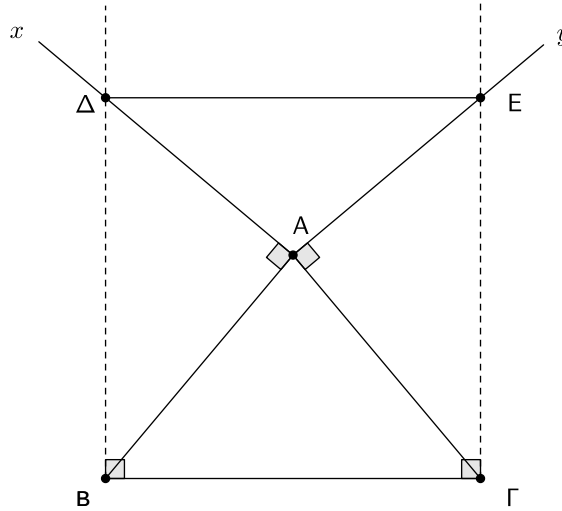
(β') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



4. **(Θ.1556)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρνουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

(α') Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$

(β') Αν η γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta A E$.

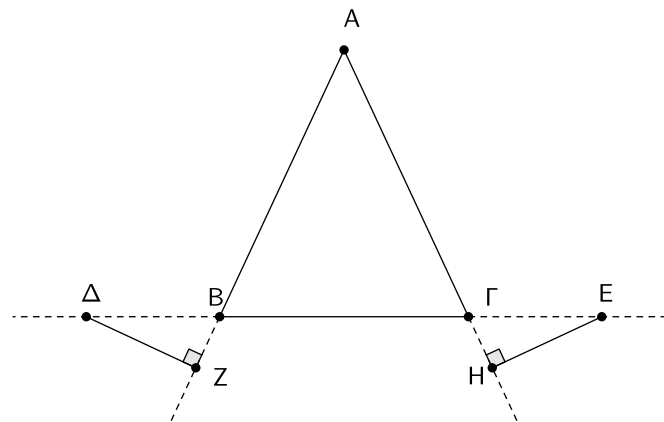


5. **(Θ.1572)** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $E H \perp A\Gamma$.

(α') Να αποδείξετε ότι:

- i. $BZ = \Gamma H$
- ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

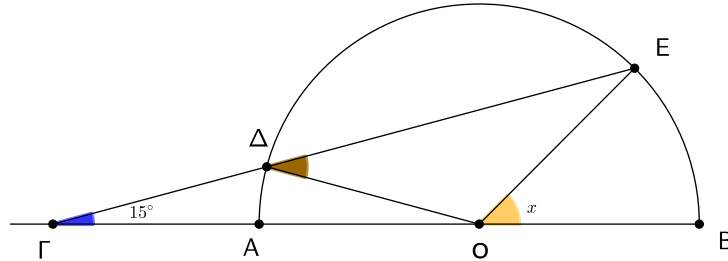
(β') Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .



6. (Θ.1576) Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε ένα σημείο E του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma \Delta$ ισούται με το OB και η γωνία $\widehat{B\Gamma E}$ είναι 15° , τότε:

(α') Να αποδείξετε ότι $\widehat{ODE} = 30^\circ$

(β') Να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{EOB} = x$

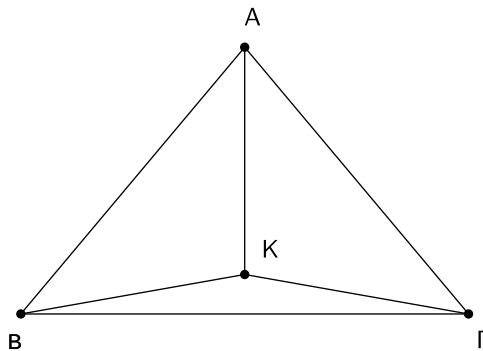


7. (Θ.1593) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $\widehat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{A}$, τέτοιο ώστε $KB = KA = K\Gamma$.

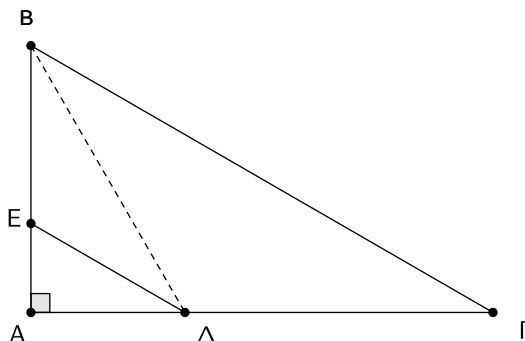
(α') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.

(β') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{ABK}$ και $\widehat{A\Gamma K}$.

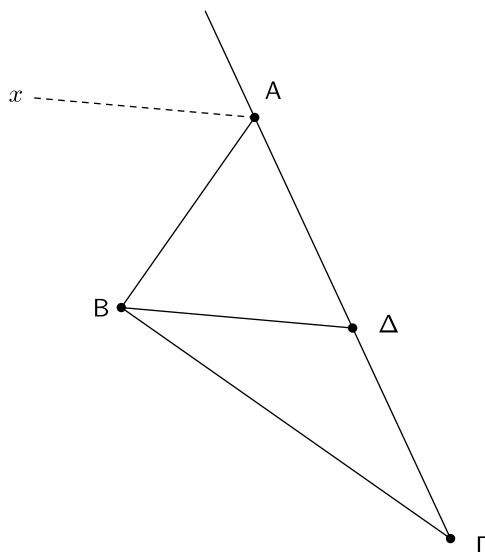
(γ') Να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{BK\Gamma}$.



8. (Θ.1594) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε η διχοτόμος DE της γωνίας $\hat{A\Delta B}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
- (α') $\hat{E\Delta B} = \hat{\Delta B\Gamma}$ και $\hat{E\Delta A} = \hat{\Gamma}$
- (β') Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- (γ') Αν $\hat{A\Delta B} = 60^\circ$, να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Gamma}$.

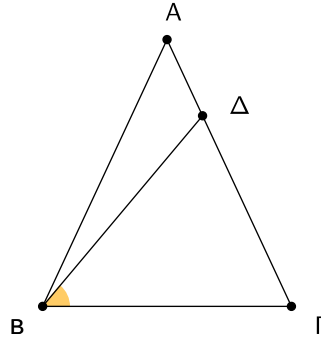


9. (Θ.1596) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ όπου $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{A_{εξ}} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .
- (α') Να αποδείξετε ότι:
- $\hat{AB\Delta} = 60^\circ$
 - Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.
 - $A\Gamma - AB = \Delta\Gamma$
- (β') Αν η γωνία $\hat{B\Delta A}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.



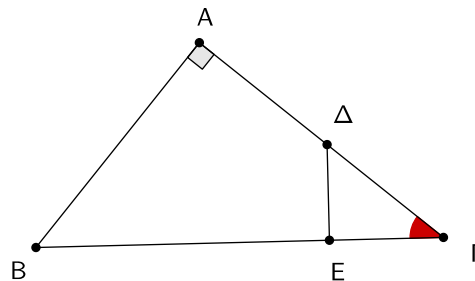
10. **(Θ.1602)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

- (α') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β') Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta B\Gamma$ είναι ίση με την γωνία $\hat{A}$.



11. **(Θ.1603)** Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Να υπολογίσετε:

- (α') Τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.
 (β') Τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta E B$.

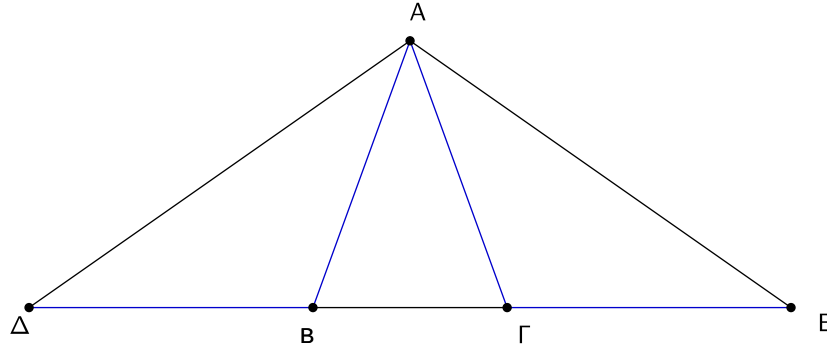


12. **(Θ.1604)** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$. Να υπολογίσετε:

- (α') Τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β') Την γωνία $\Delta A\Gamma$

13. **(Θ.1607)** Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν: $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

- (α') $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E} = 110^\circ$
 (β') Τα τρίγωνα $\Delta B\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
 (γ') Το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές.

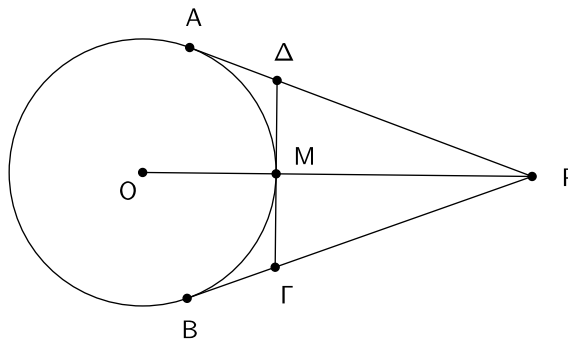


14. **(Θ.1623)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

- (α') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
 (β') Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E}$ και $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$.

15. **(Θ.1636)** Δίνεται κύκλος κέντρου O και από ένα σημείο P εκτός αυτού φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

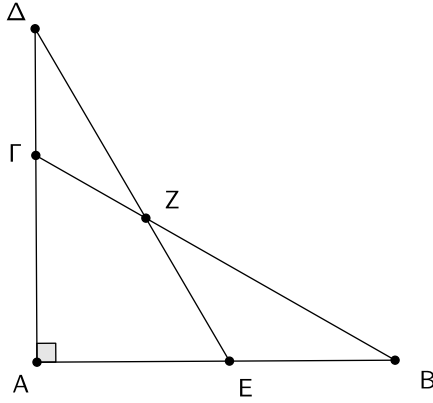
- (α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 (β') Αν η γωνία $\hat{A}\hat{P}\hat{B}$ είναι 40° , να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$.



16. **(Θ.1639)** Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία $\hat{A}$ ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\epsilon Z\Gamma$.

(β') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και EBZ είναι ισοσκελή.

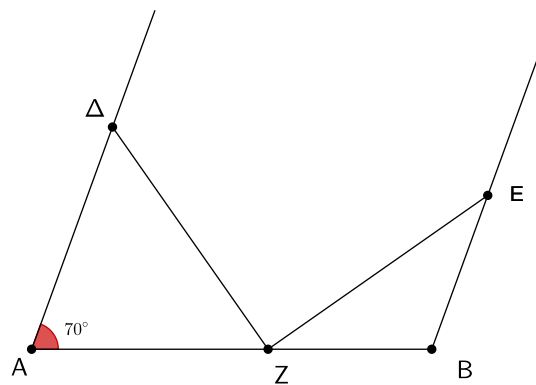


17. **(Θ.1640)** Στο παρακάτω σχήμα, οι $A\Delta$ και BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν:

$$A\Delta = AZ, \quad BE = BZ \quad \text{και} \quad \hat{A} = 70^\circ$$

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $A\Delta Z$ και BZE .

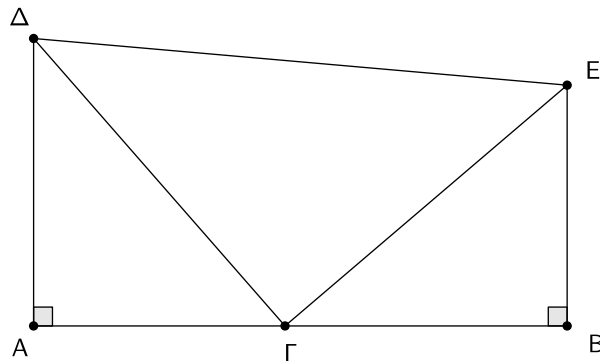
(β') Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta Z E} = 90^\circ$



18. **(Θ.1641)** Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = BE$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.

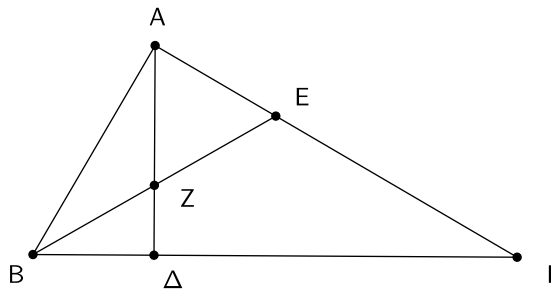
(β') Αν η γωνία $\hat{E\Gamma B}$ είναι ίση με 40° , τότε το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



19. **(Θ.1645)** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$

(α') Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{B}$ είναι 60°

(β') Αν το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

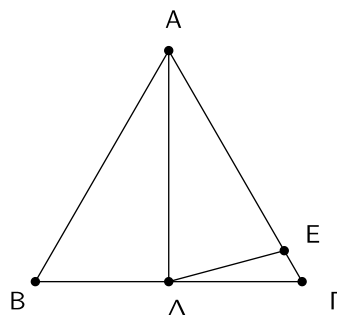


20. **(Θ.1661)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $\hat{B\Delta A} = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.

(α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

(β') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

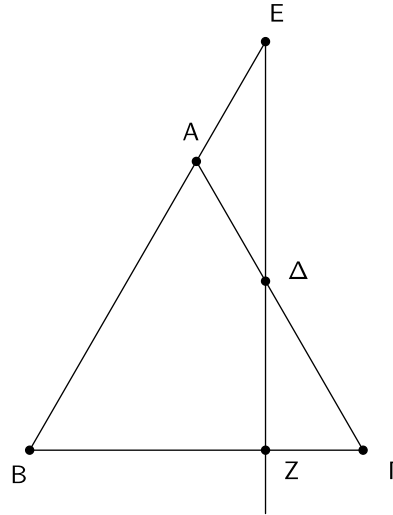
(γ') Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{E\Delta\Gamma}$.



21. **(Θ.1689)** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = A\Delta$.

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

(β') Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.



22. **(Θ.1693)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρνουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

(α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(β') Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A\Delta E}$.

(γ') Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε την γωνία $\hat{E\Delta\Gamma}$.

23. **(Θ.1699)** Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

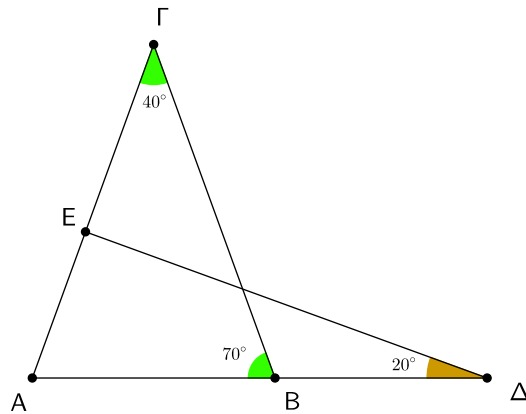
(α') Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από την βάση $B\Gamma$.

(β') Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

24. **(Θ.1700)** Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

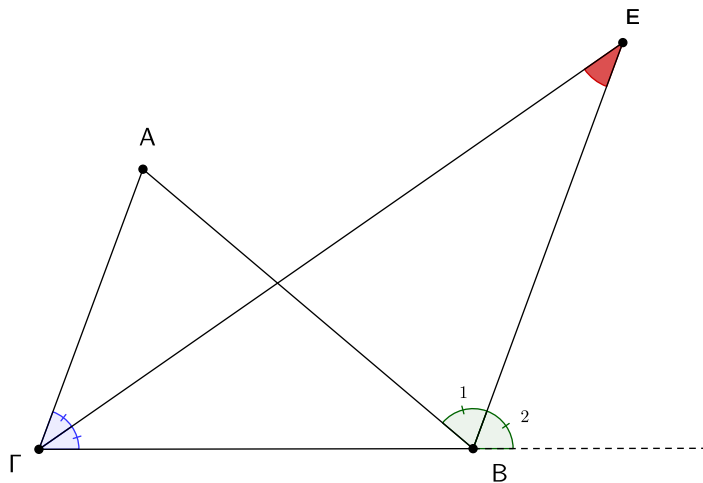
(β') Η γωνία $\hat{A}\hat{E}\Delta$ είναι ορθή.



25. **(Θ.1851)** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της $\Gamma\Lambda$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$, τέμνονται στο E . Δίνεται ότι $\hat{ABE} = 70^\circ = 2 \cdot \hat{GEB}$.

(α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές.

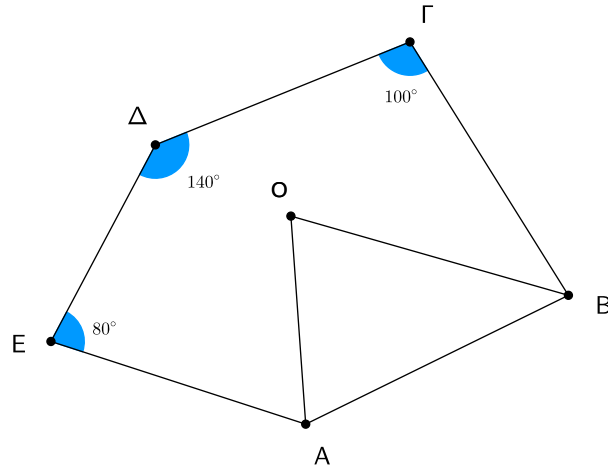
(β') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



26. **(Θ.12640)** Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του $\hat{\Gamma}$ ισούται με 100° , η γωνία του $\hat{\Delta}$ ισούται με 140° και η γωνία του $\hat{E}$ ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

(α') Το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$

(β') Το μέτρο της γωνίας $\hat{AOB}$

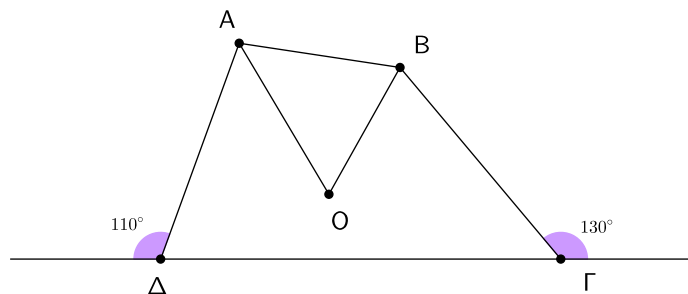


27. **(Θ.12644)** Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της $\hat{\Gamma}$, ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της $\hat{\Delta}$, ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

(α') Τα μέτρα των γωνιών $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου.

(β') Το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$

(γ') Το μέτρο της γωνίας $\hat{AOB}$

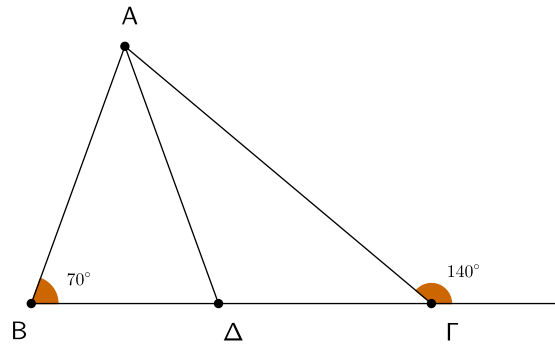


28. **(Θ.12704)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 140^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ , ώστε $A\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $\hat{B\hat{A}\Delta} = 40^\circ$

(β') $\hat{A\Delta\Gamma} = 110^\circ$

(γ') Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

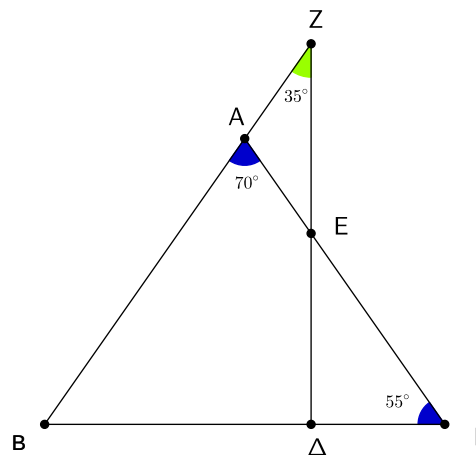


29. **(Θ.12707)** Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το σημείο Z και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Z ώστε $\hat{B\hat{Z}\Delta} = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$. Η $Z\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(β') $\hat{Z\Delta B} = 90^\circ$

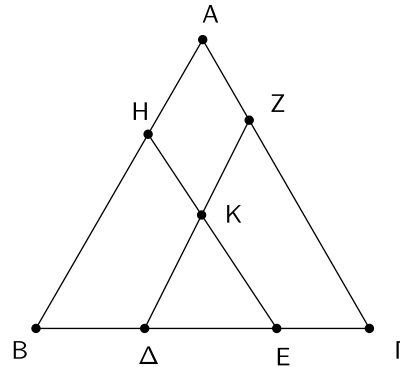
(γ') Το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.



30. **(Θ.12708)** Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $B\Gamma$ και ΓA θεωρούμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε να ισχύει $BE = \Gamma Z$. Στις πλευρές AB και ΓB θεωρούμε σημεία H και Δ αντίστοιχα ώστε να ισχύει $BH = \Gamma\Delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και EH τέμνονται στο σημείο K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $EH = \Delta Z$ και $\hat{BHE} = \hat{\Gamma\Delta Z}$

(β') Τα τρίγωνα BEH και $KE\Delta$ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

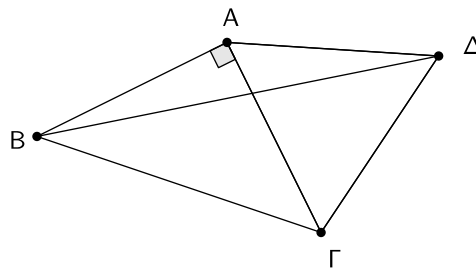


31. **(Θ.12709)** Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$.

(α') Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

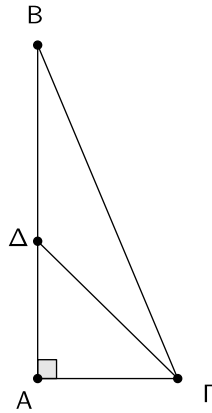
(γ') Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{AB\Delta}$.



32. **(Θ.13442)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά του AB θεωρούμε σημείο Δ ώστε $B\Delta = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = A\Gamma$.

(α') Να αποδείξετε ότι: $\hat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$

(β') Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

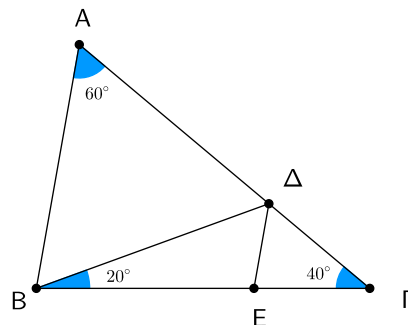


33. **(Θ.13443)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\hat{\Gamma B\Delta} = 20^\circ$.

(α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

(β') Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

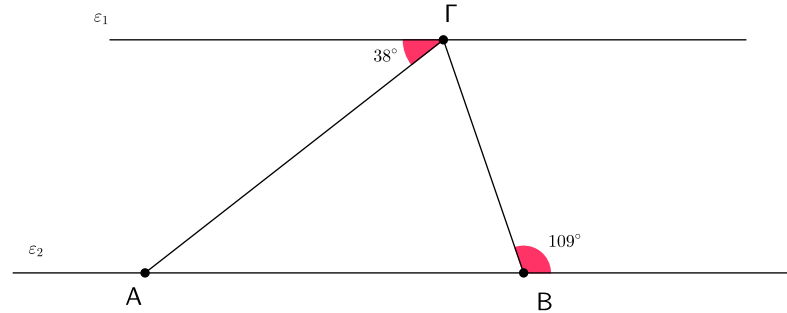
- i. $\hat{B\Delta E} = 60^\circ$
- ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\Delta\Gamma}$



34. **(Θ.13535)** Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία (ε_1) διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $ΑΒΓ$ και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_2) που ορίζεται από τις κορυφές του A και B . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$.

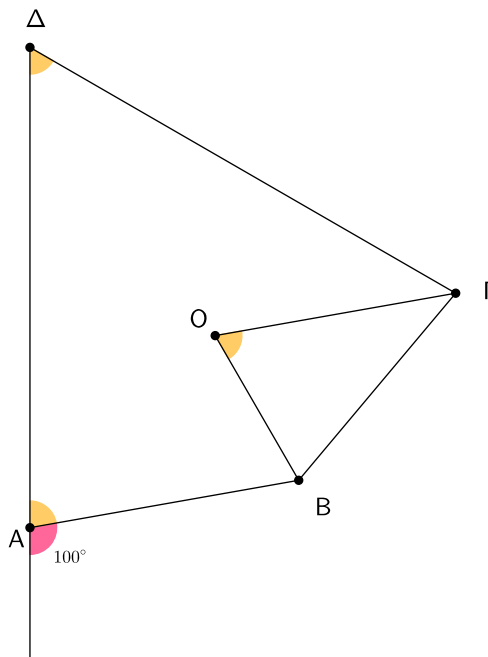
(β') Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.



35. **(Θ.13619)** Θεωρούμε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ του σχήματος με $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 100^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο O , τότε:

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{D}$ του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

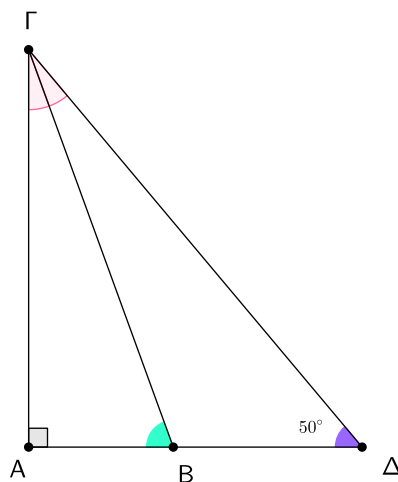
(β') Να αποδείξετε ότι $\hat{BO\Gamma} = 70^\circ$



36. (Θ.13654) Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{AB\Gamma} - \hat{A\Gamma B} = 50^\circ$ και $\hat{A\Delta\Gamma} = 50^\circ$.

(α') Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B}$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

(β') Να αποδείξετε ότι η ΓB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Gamma\Delta}$.

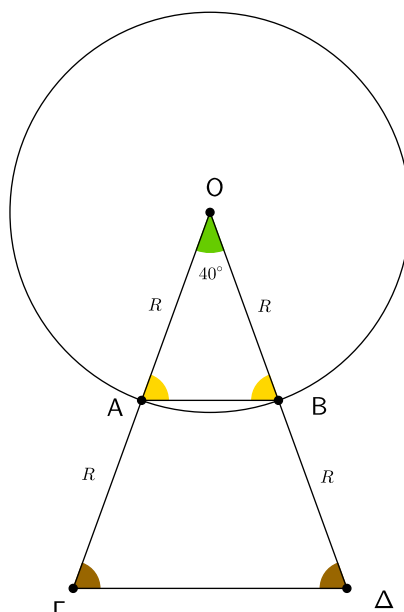


37. (Θ.13687) Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\hat{AOB} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Gamma = OA$ και $B\Delta = OB$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

(α') Να αποδείξετε ότι $\hat{OAB} = \hat{OBA} = 70^\circ$

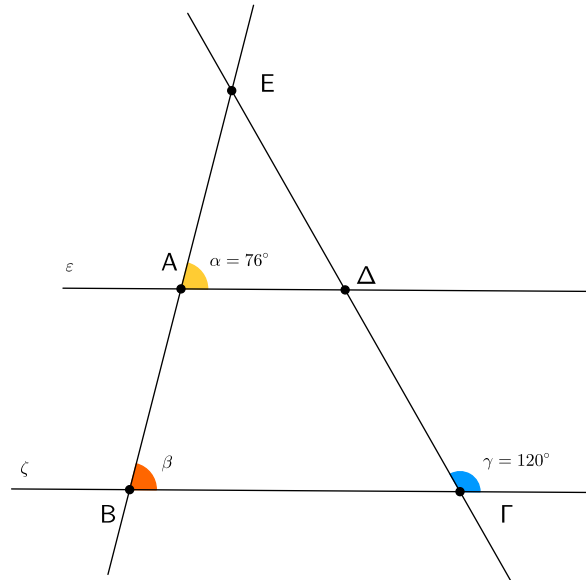
(β') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{O\Gamma\Delta}$ και $\hat{O\Delta\Gamma}$.

(γ') Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$



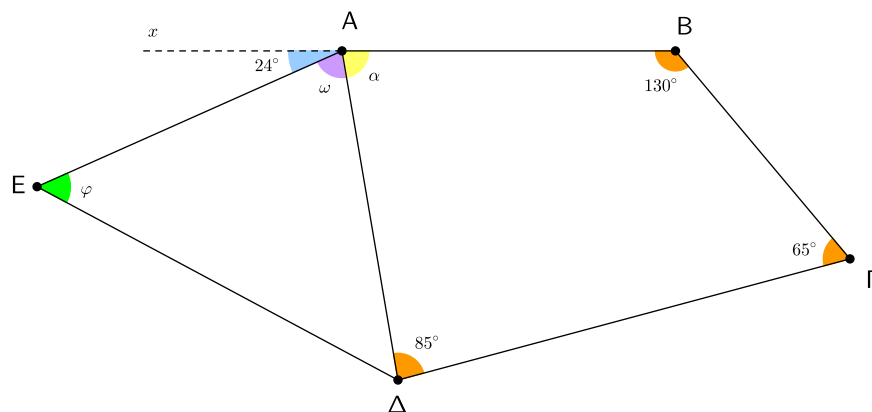
38. **(Θ.13741)** Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες (ε) και (ζ) είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε :

- (α') Την γωνία $\hat{\beta}$
 (β') Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
 (γ') Την γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ.



39. **(Θ.13749)** Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αχ είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- (α') Την γωνία $\hat{\alpha}$
 (β') Την γωνία $\hat{\omega}$
 (γ') Την γωνία $\hat{\varphi}$



Κεφάλαιο 3

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

3.1 Παραλληλόγραμμα

ΘΕΜΑ Β

- (Θ.1531)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρνουμε την BE που τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.
(β') Το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.
(γ') Η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .
- (Θ.1533)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM προς το M κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την ΓN προς το N κατά τμήμα $NE = \Gamma N$.

(α') Να αποδείξετε ότι: $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $A\Gamma \parallel B\Delta$
(β') Είναι τα σημεία E, A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- (Θ.1534)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνιος του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρνουμε τις κάθετες AE και ΓZ στην $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

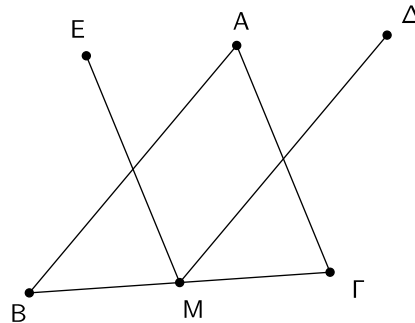
(α') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma B Z$ είναι ίσα.
(β') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma E Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

4. **(Θ.1535)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσον M της πλευράς $B\Gamma$, στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$, φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά GA . Να αποδείξετε ότι:

(α') $\Delta A = AE$

(β') Τα σημεία Δ, A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(γ') $\Delta E = B\Gamma$



5. **(Θ.1538)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2A\Delta$. Φέρνουμε την διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

(α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(β') Είναι το σημείο E μέσον της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6. **(Θ.1539)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

(α') $\Delta E = BZ$

(β') Το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

7. **(Θ.1557)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσον της πλευράς του AB . Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο $E\Delta\Delta$ είναι ισοσκελές.

(β') Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$

8. **(Θ.1559)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμέσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

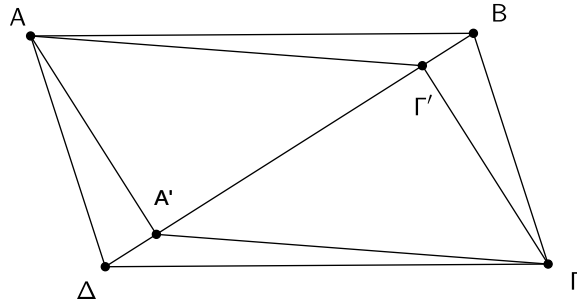
(β') Η BE διέρχεται από το μέσον της διαμέσου AM .

9. **(Θ.1600)** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A' , Γ' τις προβολές των κορυφών A και Γ στην διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

(α') $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$

(β') $AA' = \Gamma\Gamma'$

(γ') Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.



10. **(Θ.1609)** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

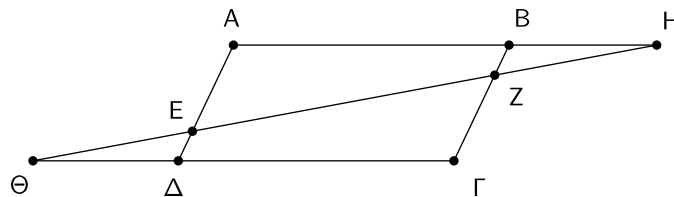
(β') Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

11. **(Θ.1610)** Στις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

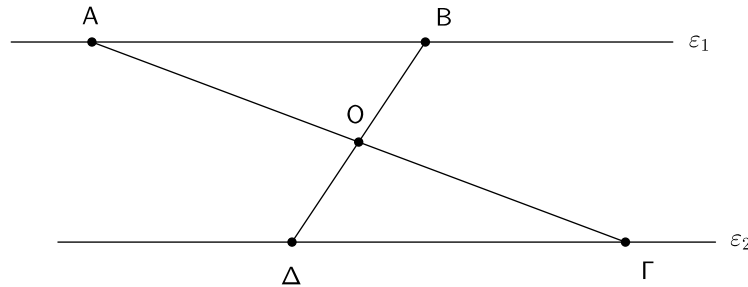
(α') $\hat{HBZ} = \hat{E\Delta\Theta}$

(β') $\hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$

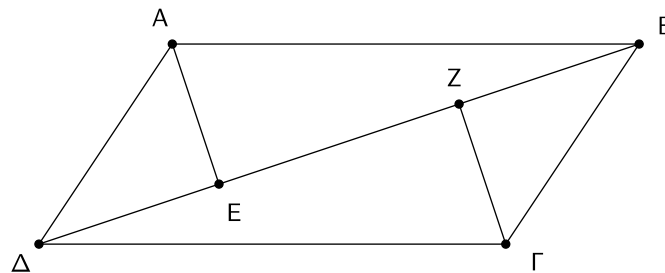
(γ') $BH = \Theta\Delta$



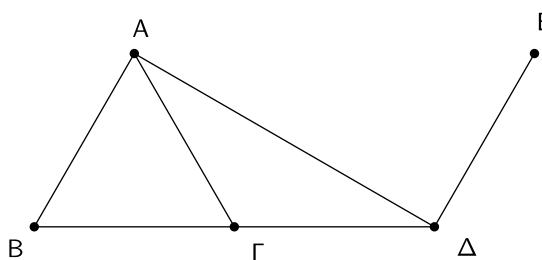
12. **(Θ.1618)** Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) και τα σημεία Α, Β στην (ε_1) και Δ, Γ στην (ε_2) ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσον Ο του ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:
- (α') Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- (β') Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



13. **(Θ.1628)** Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρνουμε από τις κορυφές Α και Γ κάθετες στην διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- (α') $AE = \Gamma Z$
- (β') Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.



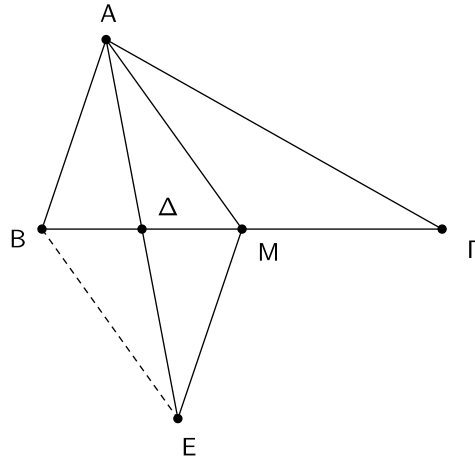
14. **(Θ.1637)** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Φέρνουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ, τέτοιο ώστε να ισχύει $\Delta E = B\Gamma$. (Τα σημεία Α και Ε είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ).
- (α') Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ.
- (β') Να αποδείξετε ότι το ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.



15. **(Θ.1642)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσον της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$, να αποδείξετε ότι:

(α') Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

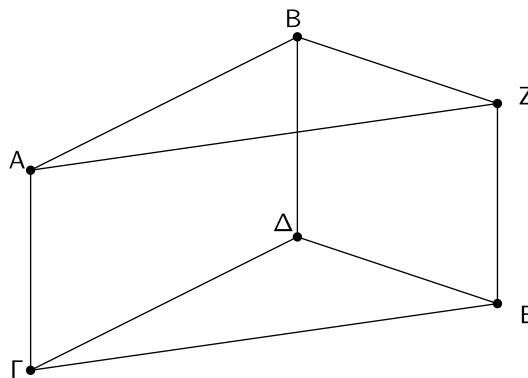
(β') $ME = M\Gamma$



16. **(Θ.1654)** Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

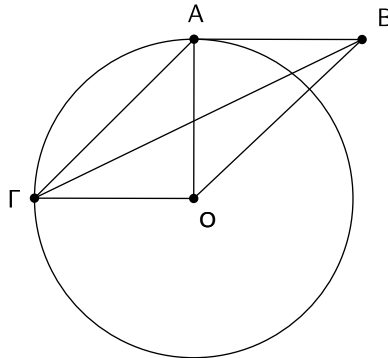
(β') $\hat{A}\hat{B}\hat{Z} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{E}$



17. **(Θ.1678)** Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

(α') Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $BΓ$ διχοτομούνται.

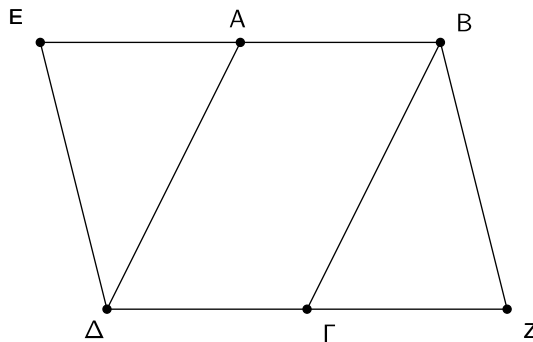
(β') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$.



18. **(Θ.1687)** Έστω παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $ΔΓ$ (προς το $Γ$) κατά τμήματα $AE = AB$ και $ΓΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ είναι ίσα.

(β') Το τετράπλευρο $ΕΒΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.



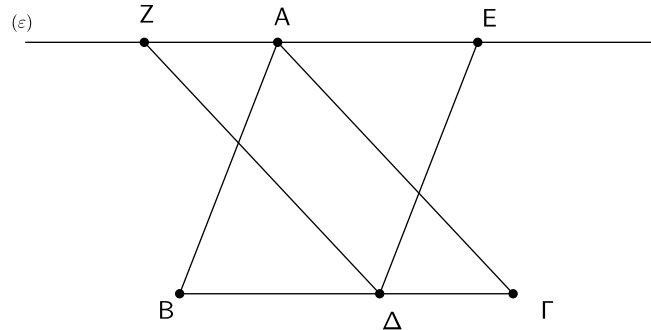
19. **(Θ.1701)** Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $AB < AΓ$ και M το μέσον της $BΓ$. Προεκτείνουμε την διάμεσο AM , προς το M , κατά τμήμα $MΔ = MA$. Από το A φέρνουμε παράλληλη προς την $BΓ$ η οποία τέμνει την προέκταση της $ΔΓ$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τετράπλευρο $ABΔΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(β') $BM = \frac{AE}{2}$

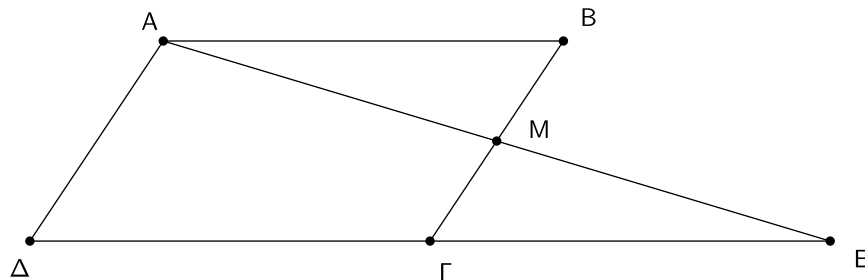
20. **(Θ.13755)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς τις AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- (α') Τα τετράπλευρα $ZA\Gamma\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα.
 (β') Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.



21. **(Θ.13816)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $A\Delta < AB$ και M το μέσον της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι :

- (α') Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
 (β') Τα σημεία Δ, Γ και E είναι συνευθειακά.



22. **(Θ.13825)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

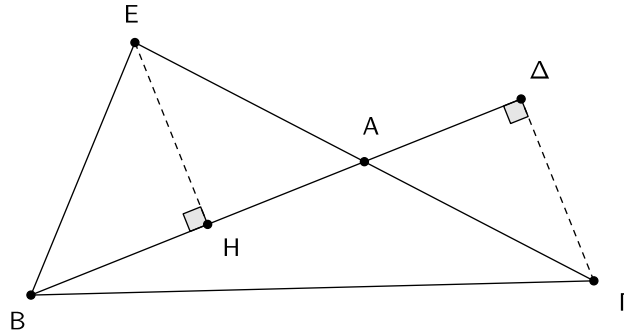
- (α') Τα τετράπλευρα $A\Delta MB$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα.
 (β') $\Delta A = AE$

23. **(Θ.13829)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και ΓO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$.

- (α') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και ΓZB είναι ίσα.
 (β') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

24. **(Θ.13833)** Στο παρακάτω σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $\Lambda\text{Β}\Gamma$, το $\text{Ε}\text{Η}$ είναι ύψος του τριγώνου $\text{Α}\text{Β}\text{Ε}$ και η $\text{Β}\text{Α}$ είναι διάμεσος του τριγώνου $\text{Β}\text{Ε}\Gamma$.

- (α') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\text{Α}\Gamma\Delta$ και $\text{Α}\text{Ε}\text{Η}$ είναι ίσα.
 (β') Να αποδείξετε ότι $\text{Α}\text{Η} = \text{Α}\Delta$
 (γ') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta\text{Ε}\text{Η}$ είναι παραλληλόγραμμο.



25. **(Θ.13834)** Σε τυχαίο τρίγωνο $\text{Α}\text{Β}\Gamma$ φέρουμε την διάμεσό του $\text{Α}\text{Μ}$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\text{Β}\Gamma$ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $\text{Β}\text{Ζ} = \text{Β}\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma\text{Η} = \text{Β}\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε την διάμεσο $\text{Α}\text{Μ}$ κατά τμήμα $\text{Μ}\text{Ε} = \text{Α}\text{Μ}$.

- (α') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\text{Α}\text{Μ}\text{Ζ}$ και $\text{Ε}\text{Μ}\text{Η}$ είναι ίσα.
 (β') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\text{Α}\text{Η}\text{Ε}\text{Ζ}$ είναι παραλληλόγραμμο.

3.2 Ειδικά παραλληλόγραμμα

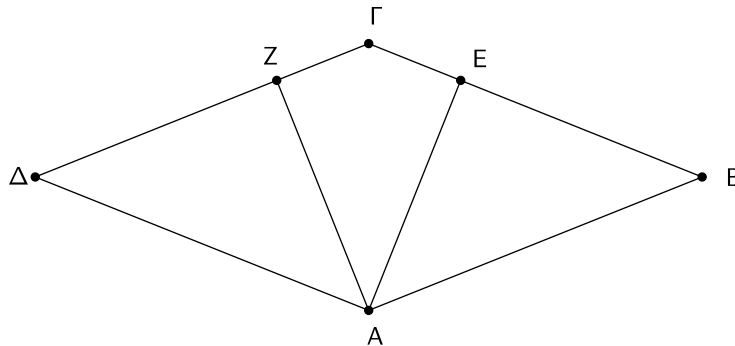
ΘΕΜΑ Β

1. **(Θ.1570)** Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ . Να αποδείξετε ότι:

- (α') Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.
 (β') Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

2. **(Θ.1575)** Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α') Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$
 (β') Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.



3. **(Θ.1584)** Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρνουμε την μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

- (α') Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο.
 (β') Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.

4. **(Θ.1599)** Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

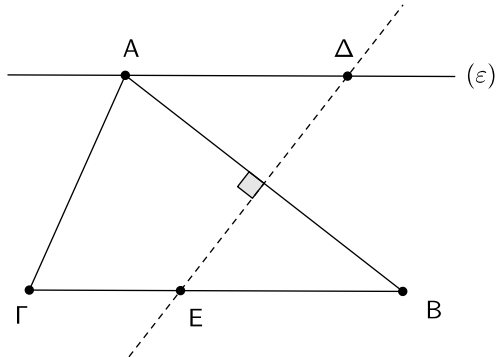
- (α') $M\Delta = M\Gamma$
 (β') Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

5. **(Θ.1630)** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε από την κορυφή A ευθεία (ε) παράλληλη στην $B\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την (ε) στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

(α') Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$

(β') Αν M είναι το μέσον του AB , να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και EMB .

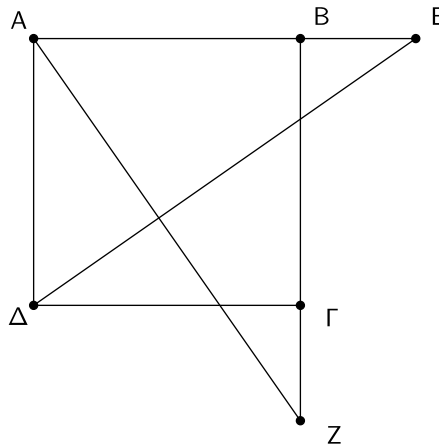
(γ') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ρόμβος.



6. **(Θ.1643)** Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα ABZ και $A\epsilon\Delta$ είναι ίσα.

(β') Οι γωνίες $\hat{E}\Delta\Gamma$ και $\hat{A}ZB$ είναι ίσες.



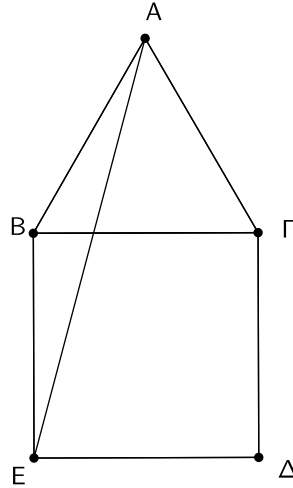
7. **(Θ.1651)** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες:

i. $\hat{ABE}$.

ii. $\hat{BEA}$.

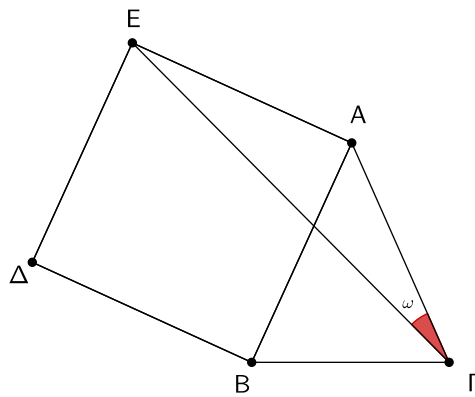
(β') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.



8. **(Θ.1652)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

(β') $2 \cdot \hat{E\Gamma A} = 90^\circ - \hat{B\hat{A}\Gamma}$

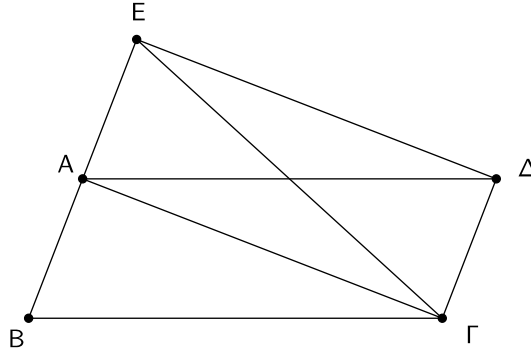


9. **(Θ.1653)** Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και το $ΑΓΔΕ$ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

(α') Το σημείο A είναι το μέσον του $ΒΕ$.

(β') Το τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι ισοσκελές.

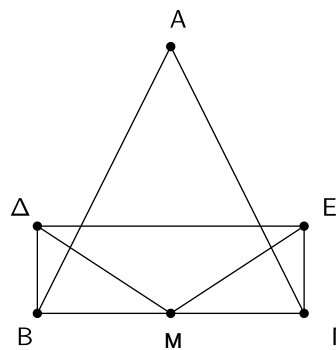
(γ') $\hat{B\Gamma A} = \hat{A\Delta E}$



10. **(Θ.1668)** Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και M το μέσον της πλευράς $ΒΓ$. Στα σημεία B και $Γ$ φέρνουμε κάθετες στην $ΒΓ$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία $Δ$ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $MΔ = ME$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τμήματα $BΔ$ και $ΓΕ$ είναι ίσα.

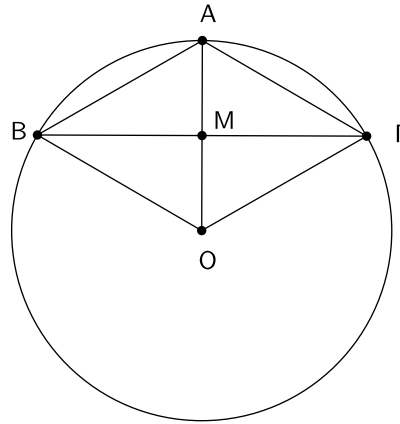
(β') Το τετράπλευρο $BΔΕΓ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



11. **(Θ.1679)** Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε την ακτίνα OA και την χορδή $B\Gamma$ κάθετη στην OA στο μέσον της M .

(α') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma OB$ είναι ρόμβος.

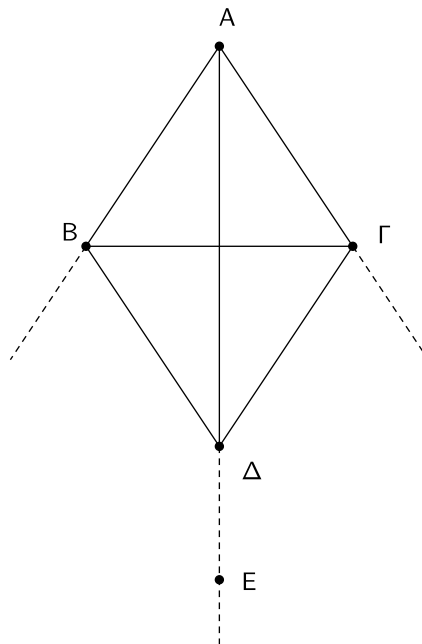
(β') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Gamma OB$.



12. **(Θ.1681)** Δίνεται ρόμβος $AB\Delta\Gamma$. Στην προέκταση της διαγωνίου $A\Delta$ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

(α') Το σημείο E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα).

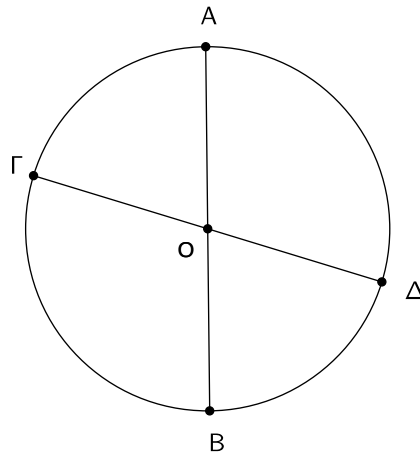
(β') Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ .



13. **(Θ.1683)** Σε κύκλο κέντρου O φέρνουμε δύο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες.

(β') Το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.



14. **(Θ.1692)** Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

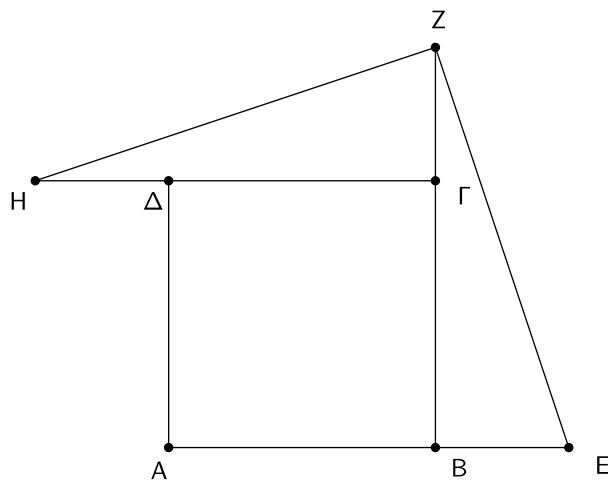
(α') Τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα.

(β') Το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

15. **(Θ.13536)** Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB προς το B , $B\Gamma$ προς το Γ και $\Gamma\Delta$ προς το Δ θεωρούμε σημεία E , Z και H αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.

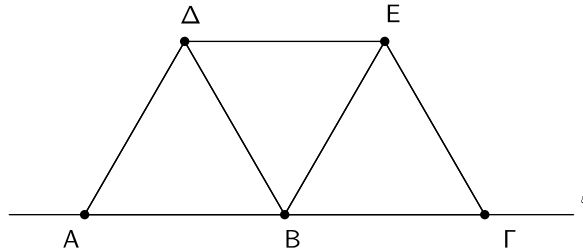
(α') Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$

(β') Να αποδείξετε ότι $\hat{EZH} = 90^\circ$



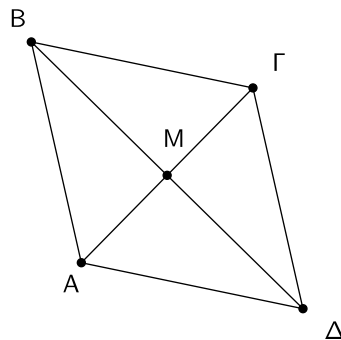
16. (Θ.13767) Σε ευθεία (ε) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Στην συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία (ε) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- (α') Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta B E}$
 (β') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
 (γ') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta E B$ είναι ρόμβος.



17. (Θ.13832) Στο σχήμα το M είναι μέσο των τμημάτων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης $\hat{A M B} = \hat{\Gamma M B}$.

- (α') Να αποδείξετε ότι:
 i. Οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι κάθετες.
 ii. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.
 (β') Το $AB\Gamma\Delta$ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά AB του κήπου χωρίς φράχτη, πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαζούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;

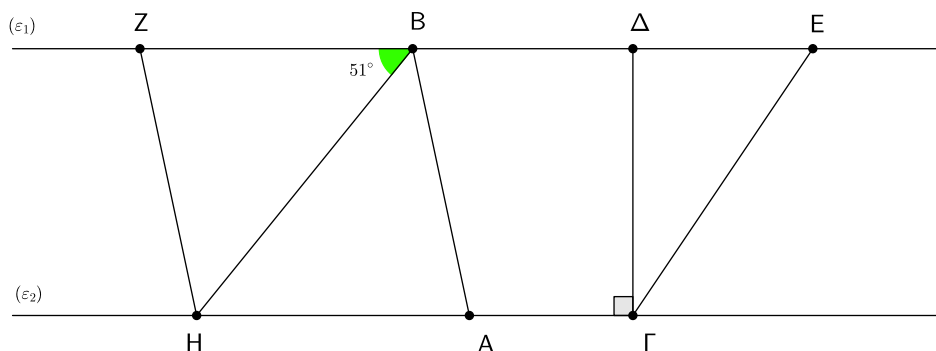


18. **(Θ.13842)** Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $ABZH$ είναι ρόμβος. Επίσης δίνεται ότι $\hat{ZBH} = 51^\circ$ και ότι η $\hat{A\Gamma\Delta}$ είναι ορθή.

(α') Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{ABH}$

(β') Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{AHB}$

(γ') Αν η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.



19. **(Θ.14883)** Σε κύκλο κέντρου O φέρνουμε τις διαμέτρους του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

(α') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(β') Τι είδους γωνία πρέπει σχηματίζουν οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$ αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3.3 Συνέπειες παραλληλογράμμων

ΘΕΜΑ Β

- (Θ.1537)** Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$, προεκτείνουμε την πλευρά $ΔΑ$ (προς το μέρος του A) κατά τμήμα $ΑΗ = ΔΑ$. Φέρνουμε την διχοτόμο της γωνίας $\hat{Δ}$, η οποία τέμνει την $ΑΒ$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο $ΑΔZ$ είναι ισοσκελές.

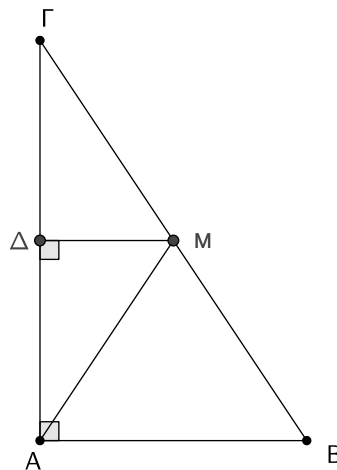
(β') Το τρίγωνο $ΔZH$ είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία $\hat{Z}$
- (Θ.1542)** Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $ΑΔ$ η διάμεσός του. Από το σημείο $Δ$ φέρνουμε παράλληλη προς την $ΑΒ$ που τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο $ΔΕΓ$ είναι ορθογώνιο.

(β') $ΔE = \frac{ΑΓ}{2}$
- (Θ.1548)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $BΓ = 8cm$. Έστω $ΑΜ$ η διάμεσος του τριγώνου και $ΜΔ \perp ΑΓ$. Αν η γωνία $\hat{ΑΜΓ}$ είναι ίση με 120° , τότε:

(α') Να δείξετε ότι $ΑΒ = 4cm$

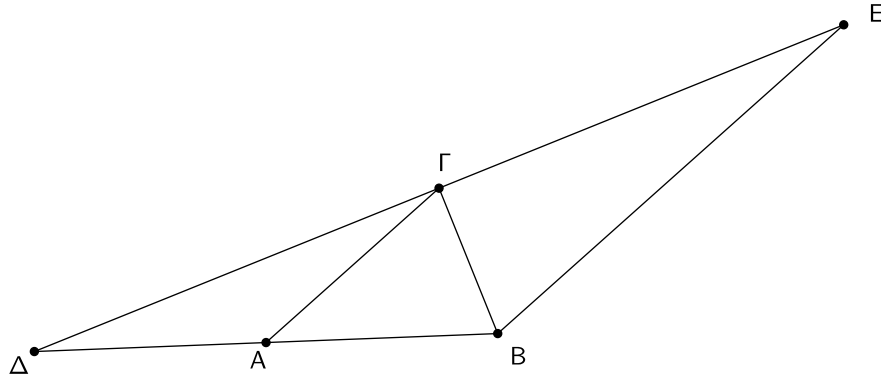
(β') Να βρείτε το μήκος της $ΜΔ$.



4. **(Θ.1551)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

(α') Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.

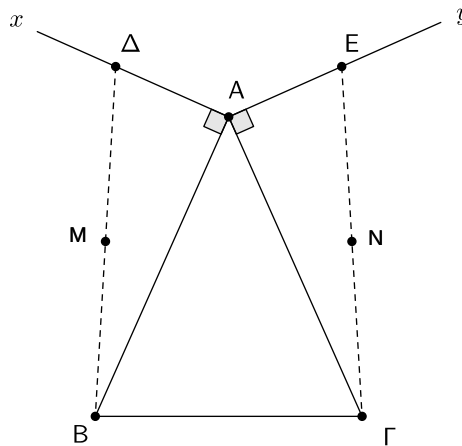
(β') Να δείξετε ότι $A\Gamma \parallel BE$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$



5. **(Θ.1555)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρνουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.

(α') Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$

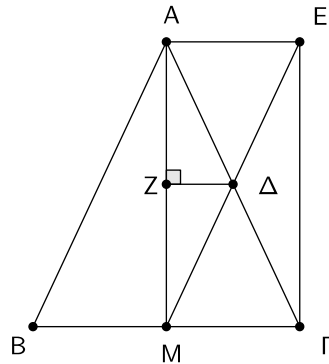
(β') Αν M και N είναι τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.



6. **(Θ.1560)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$. Αν το σημείο Z είναι το ίχνος του Δ στην AM , να αποδείξετε ότι:

(α') Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

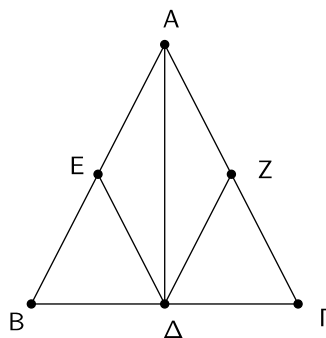
(β') $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$



7. **(Θ.1564)** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.

(β') Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.



8. **(Θ.1566)** Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

(β') Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

9. **(Θ.1567)** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος $A\Delta$ και το μέσον Z της πλευράς $A\Gamma$.

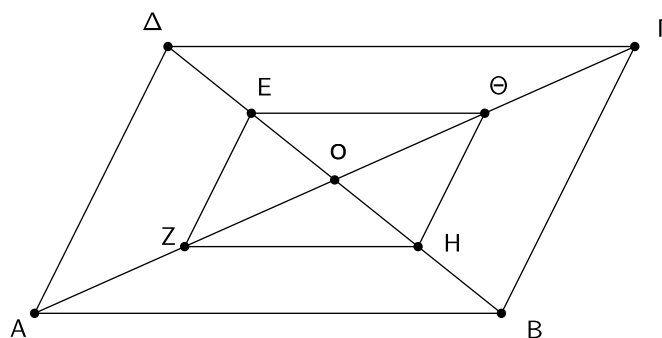
(α') Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$

(β') Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

10. **(Θ.1583)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του. Έστω E, Z, H, Θ τα μέσα των OD, OA, OB και OG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(β') Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $EZH\Theta$.

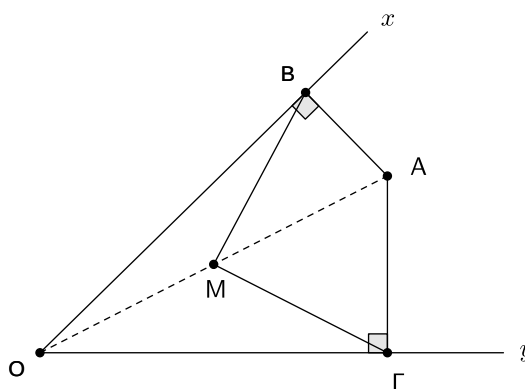


11. **(Θ.1586)** Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB, AG προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε M το μέσον του OA . Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.

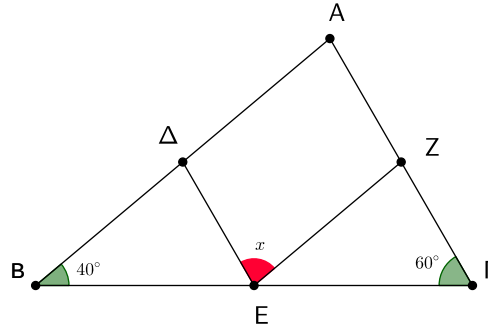
(β') Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(γ') $\hat{BMA} = 2 \cdot \hat{xOA}$



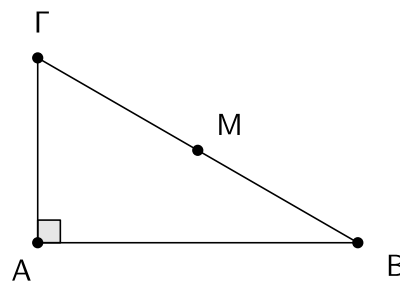
12. **(Θ.1589)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

- (α') Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β') Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$ και $ZE \parallel AB$.
 (γ') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.



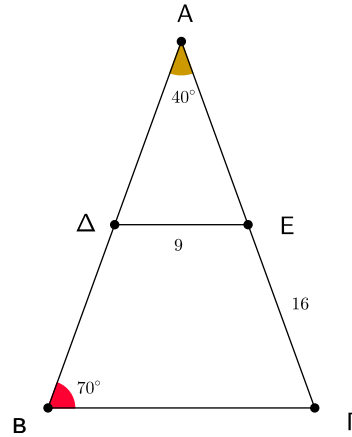
13. **(Θ.1606)** Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και το μέσον M της $B\Gamma$.

- (α') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β') Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 (γ') Να βρείτε την γωνία $\hat{AM\Gamma}$.



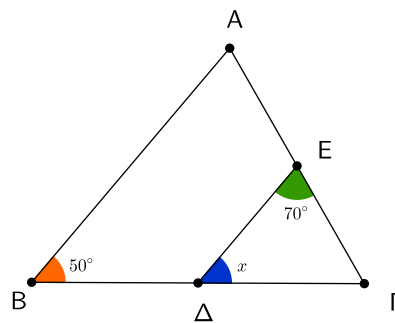
14. **(Θ.1608)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

- (α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.
 (β') Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$
 (γ') Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.



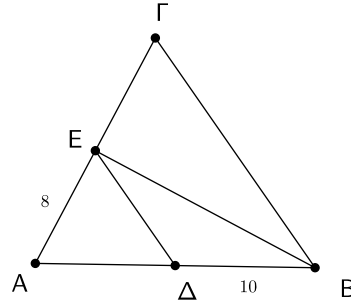
15. **(Θ.1611)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\hat{\Delta E\Gamma} = 70^\circ$.

- (α') Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$
 (β') Να υπολογίσετε:
 i. Την γωνία $\hat{x}$
 ii. Τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.



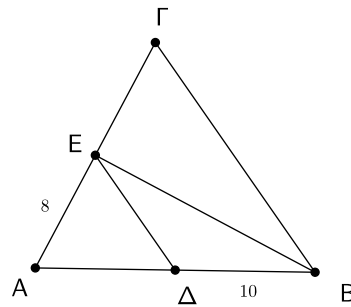
16. **(Θ.1614)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

- (α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.
 (β') Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$
 (γ') Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.



17. **(Θ.1615)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

- (α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.
 (β') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 (γ') Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

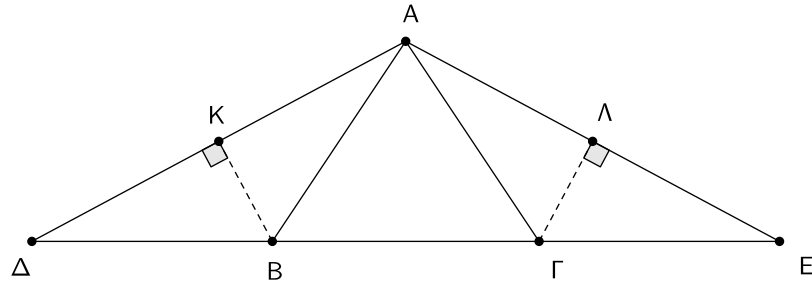


18. **(Θ.1616)** Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Delta$ με $AB = B\Delta = 5$ και $A\Gamma E$ με $A\Gamma = \Gamma E = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ, B, Γ και E να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους BK και $\Gamma\Lambda$ αντίστοιχα.

(α') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσοσκελή.

(β') Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

(γ') Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.

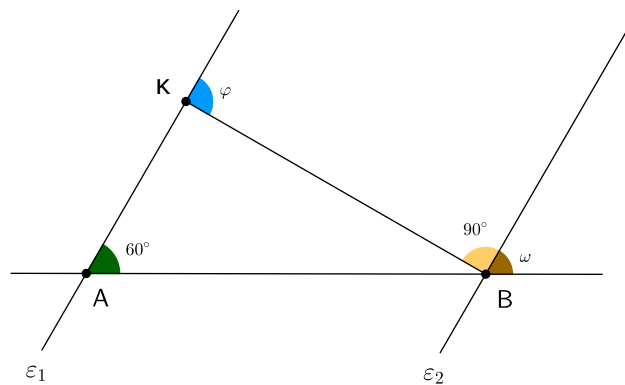


19. **(Θ.1619)** Στο παρακάτω σχήμα είναι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ και $AB = 6$.

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες ϕ και ω .

(β') Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

(γ') Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

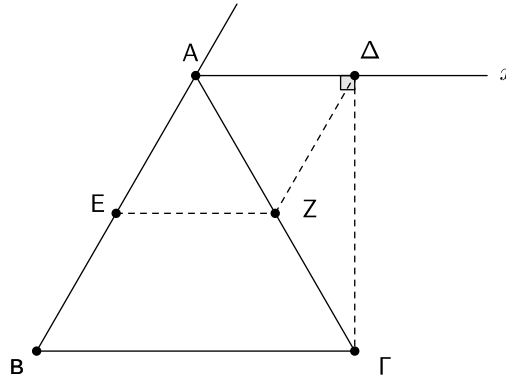


20. **(Θ.1625)** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετη $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α') $EZ = AE = AZ$

(β') $\hat{A\Gamma\Delta} = 30^\circ$

(γ') Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.



21. **(Θ.1631)** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

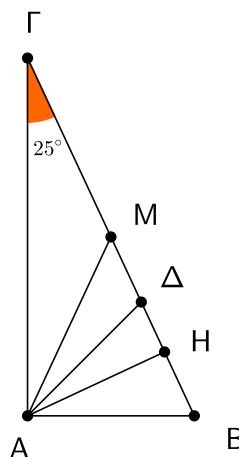
(α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(β') Αν $B\Gamma = 2\text{cm}$, να βρείτε το μήκος της AB .

22. **(Θ.1633)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνίας $\hat{A}$.

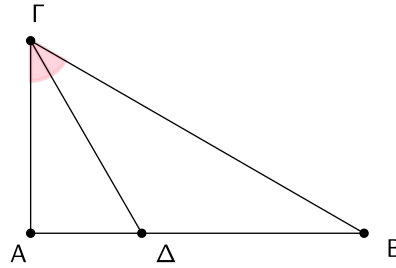
(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{AMB}$, $\hat{HAB}$, $\hat{ADB}$

(β') Να αποδείξετε ότι $\hat{M\Delta\Delta} = \hat{\Delta\Delta H} = 20^\circ$



23. **(Θ.1638)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$. Να αποδείξετε ότι:

- (α') $\hat{B} = 30^\circ$
 (β') $AB = 3\text{cm}$

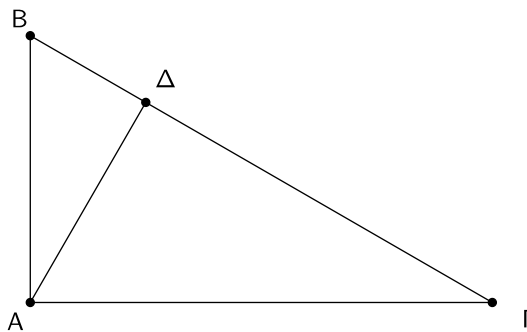


24. **(Θ.1647)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσον της $B\Gamma$.

- (α') Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\Gamma}$.
 (β') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

25. **(Θ.1649)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με την γωνία $\hat{A}$ ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και $A\Delta$ το ύψος του.

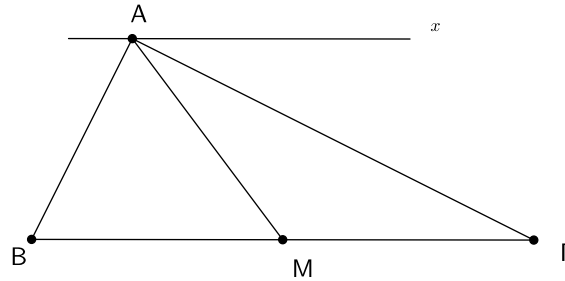
- (α') Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β') Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{B\hat{A}\Delta}$.
 (γ') Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \frac{AB}{2}$



26. **(Θ.1655)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με την γωνία $\hat{A}$ ορθή και M το μέσον της $B\Gamma$. Φέρνουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στην $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

(α') $\hat{M\hat{A}\Gamma} = \hat{M\hat{\Gamma}A}$

(β') Η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{M\hat{A}x}$.



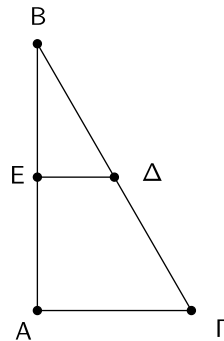
27. **(Θ.1671)** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

(α') $A\Gamma = \dots$

(β') $B\Gamma = \dots$

(γ') $A\Delta = \dots$

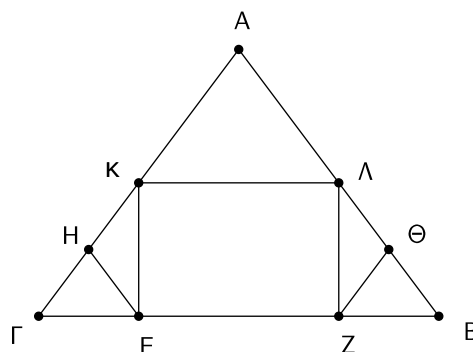
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



28. **(Θ.1675)** Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, φέρνουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα $KE\Gamma$ και ΛZB είναι ίσα.

(β') $EH = Z\Theta$, όπου H, Θ είναι τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma$ και ΛB αντίστοιχα.



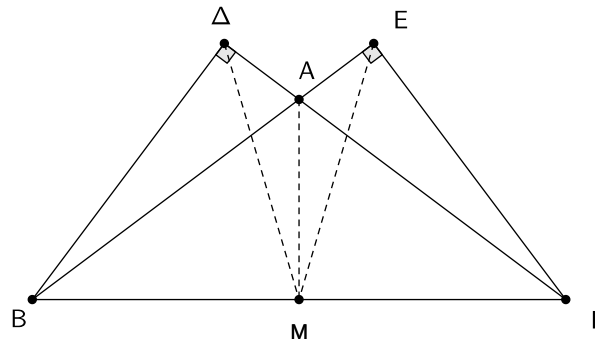
29. **(Θ.1680)** Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρνουμε τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

(α') Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$

(β') Αν M είναι το μέσον της $B\Gamma$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$

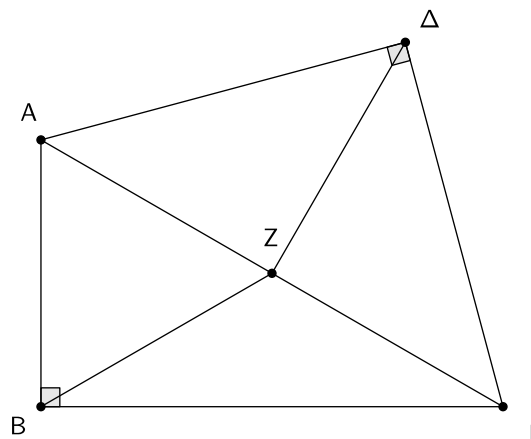
ii. Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί την γωνία $\hat{\Delta ME}$



30. **(Θ.1685)** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 90^\circ$ και Z το μέσον του $A\Gamma$. Με υποτείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ με $\hat{\Delta} = 90^\circ$.

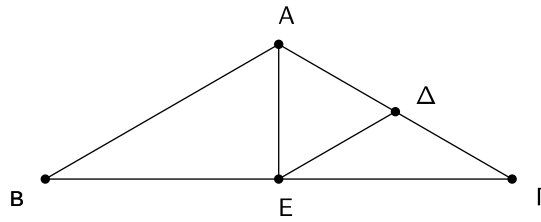
(α') Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$

(β') Αν $\hat{A\Gamma B} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B\Delta\Delta}$ και $\hat{B\Gamma\Delta}$



31. **(Θ.1686)** Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και γωνία $\hat{B} = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

- (α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
 (β') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.



32. **(Θ.1690)** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμεσο AM στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α') Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma\Delta A}$ είναι ίσες.
 (β') $\hat{AM\Delta} = 2\hat{\Gamma}$

33. **(Θ.1691)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλόγραμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- (α') $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$
 (β') Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$.
 (γ') Το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο.

34. **(Θ.1702)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A), θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

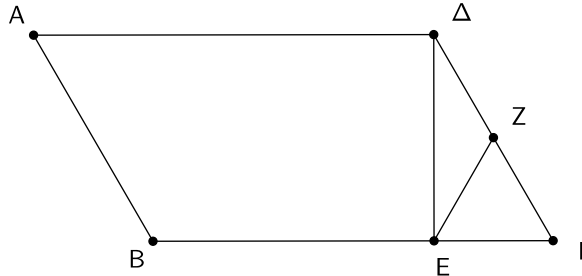
- (α') $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$
 (β') Η γωνία $\hat{E\Delta\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{A\Delta\Gamma}$

35. **(Θ.1704)** Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου.

(β') Αν K είναι το μέσον της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$

(γ') Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{EZ\Gamma}$



36. **(Θ.12639)** Από το μέσον M της διαμέσου $A\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$, φέρνουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Αν η παράλληλη από το Δ στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

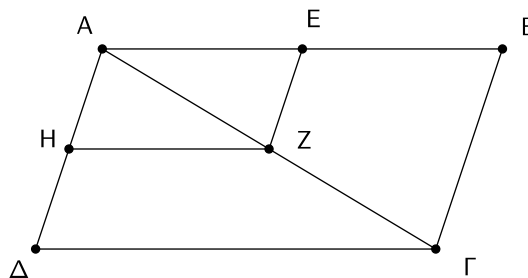
(α') Το Z είναι μέσον της $A\Gamma$.

(β') Το AE ισούται με το $\frac{1}{4}$ του $A\Gamma$.

37. **(Θ.13532)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E, Z και H των $AB, A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

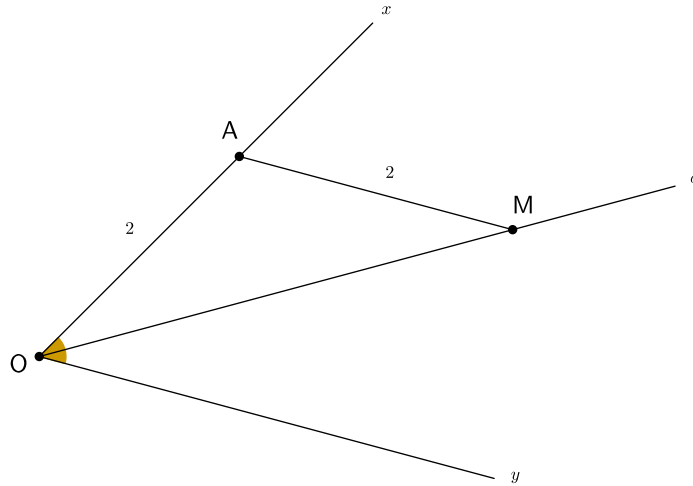
(α') $ZH = \frac{AB}{2}$

(β') Το τετράπλευρο $A EZH$ είναι παραλληλόγραμμο.



38. **(Θ.13653)** Σχεδιάζουμε γωνία $\hat{xOy} = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο A επί της πλευράς Ox , τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρνουμε την διχοτόμο Od της γωνίας $\hat{xOy}$ και θεωρούμε σημείο M στην Od , τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

- (α') Την γωνία δOy
 (β') Τις γωνίες του τριγώνου AOM .
 (γ') Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στην βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM .

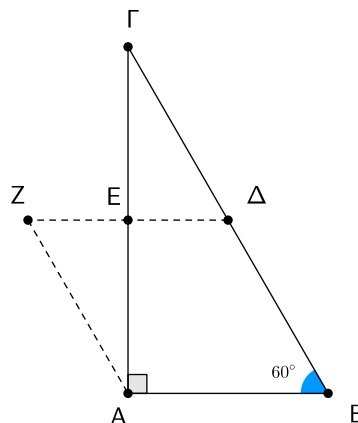


39. **(Θ.13831)** Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.

- (α') Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > A\Gamma$. Ποιά είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;
 (β') Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο (α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μία από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:
 i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$;
 ii. Ποιά πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

40. **(Θ.13837)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και E που είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$.

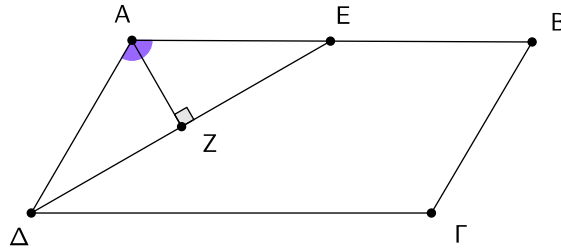
- (α') Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = AZ$.
 (β') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.



41. **(Θ.14876)** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$. Φέρνουμε την διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E και στην συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στην ΔE . Να αποδείξετε ότι:

(α') $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$

(β') $AZ = \frac{AB}{4}$



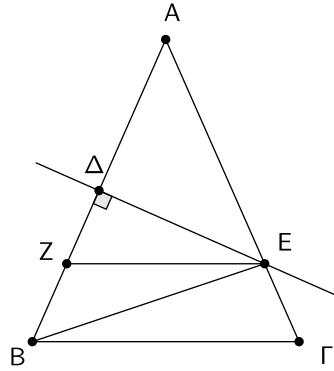
3.4 Τραπεζία

ΘΕΜΑ Β

1. **(Θ.1529)** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} < 90^\circ$. Στο μέσον Δ της πλευράς AB φέρνουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

(α') Να αποδείξετε ότι $AE = BE$

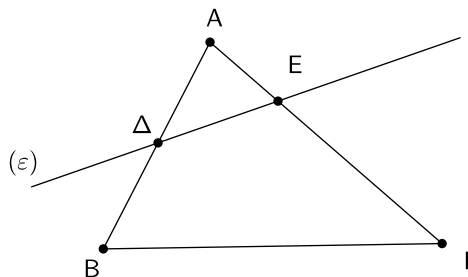
(β') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



2. **(Θ.1536)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσον της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μία τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

(α') Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

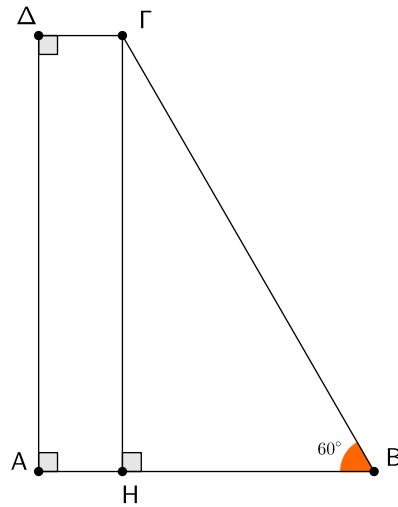
(β') Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



3. (Θ.1549) Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε την $\Gamma H \perp AB$. Να δείξετε ότι:

(α') $HB = 2\Delta\Gamma$

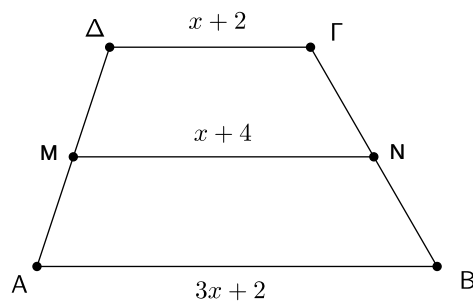
(β') Το τετράπλευρο $AH\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AH = \frac{1}{2}HB$



4. (Θ.1550) Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

(α') Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

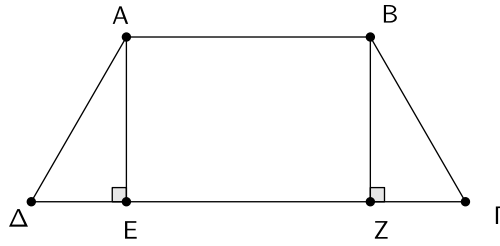
(β') Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.



5. **(Θ.1562)** Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:

(α') $\Delta E = \Gamma Z$

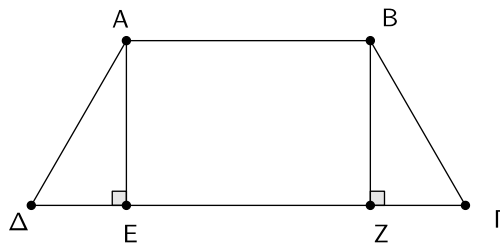
(β') Το τετράπλευρο $A EZB$ είναι ορθογώνιο.



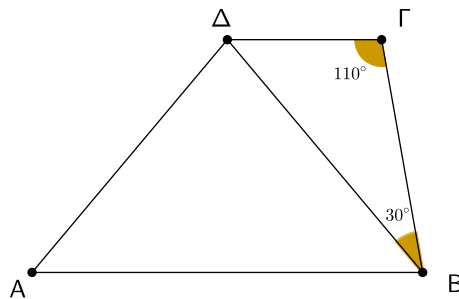
6. **(Θ.1563)** Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρνουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:

(α') $\Delta E = \Gamma Z$

(β') $AZ = BE$



7. **(Θ.1577)** Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$. Αν $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{\Delta B \Gamma} = 30^\circ$, να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A \Delta B}$.



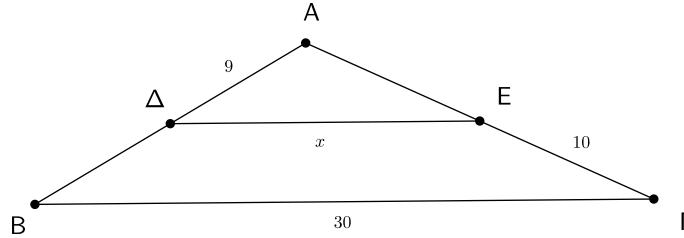
8. **(Θ.1579)** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

(α') $\Delta Z = \Gamma E$

(β') Τα τρίγωνα $E K Z$ και $\Delta K \Gamma$ είναι ισοσκελή.

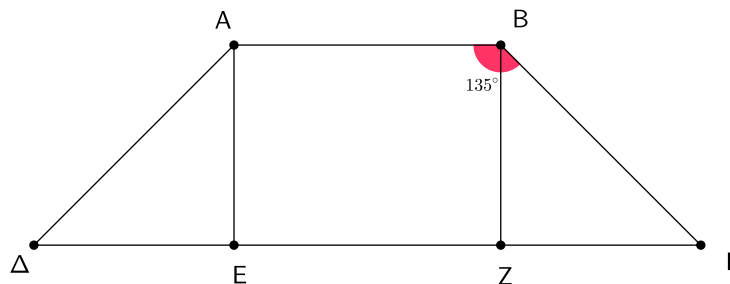
9. **(Θ.1612)** Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

- (α') Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DE\Gamma B$ είναι τραπέζιο.
 (γ') Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος DE .



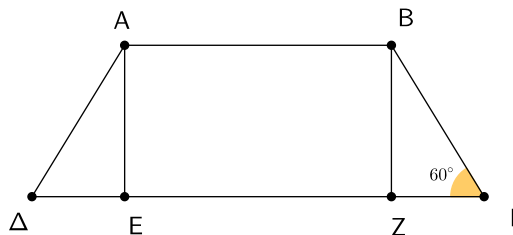
10. **(Θ.1629)** Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρνουμε τα ύψη του AE και BZ .

- (α') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.
 (β') Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$



11. **(Θ.1634)** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

- (α') Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.
 (β') Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα.
 (γ') Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

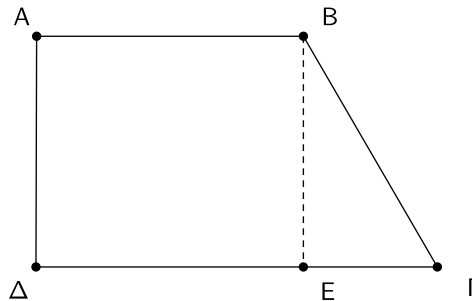


12. (Θ.1635) Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = B\Gamma = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος BE από την κορυφή B .

(α') Να υπολογίσετε τις άλλες δύο γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.

(β') Να αποδείξετε ότι $2E\Gamma = B\Gamma$

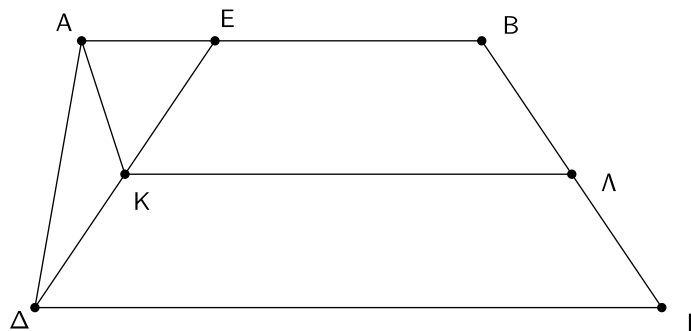
(γ') Αν M, N είναι τα μέσα των πλευρών $A\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος MN .



13. (Θ.1644) Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των ED και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

(α') Να υπολογίσετε την διάμεσο $K\Lambda$ του τραπέζιου $EB\Gamma\Delta$.

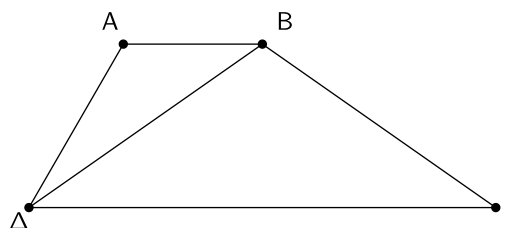
(β') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.



14. (Θ.1650) Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\hat{\Delta B \Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{A \Delta B} = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

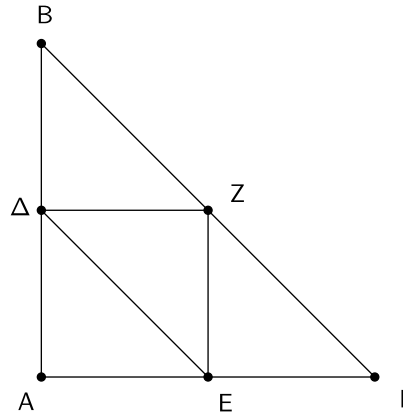
(α') Την γωνία $\hat{\Gamma}$

(β') Την γωνία $\hat{A}$



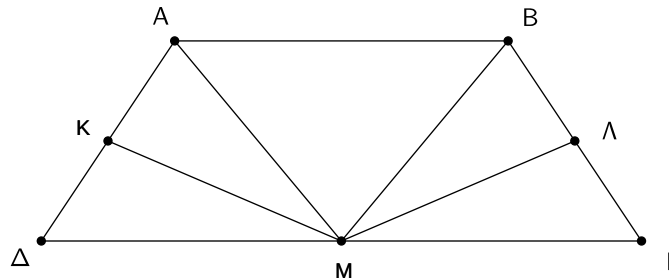
15. **(Θ.1666)** Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α') Το τετράπλευρο $A\epsilon Z\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
 (β') Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



16. **(Θ.1669)** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσον της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α') Τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.
 (β') Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.



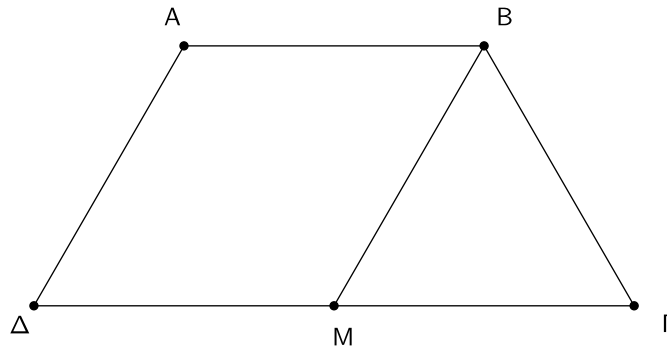
17. **(Θ.1694)** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραπέζιου, τότε:

- (α') Να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$
 (β') Να υπολογίσετε την διάμεσο του τραπέζιου.

18. (Θ.1697) Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{\Delta} = 60^\circ$ και M το μέσον της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

(α') Η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$

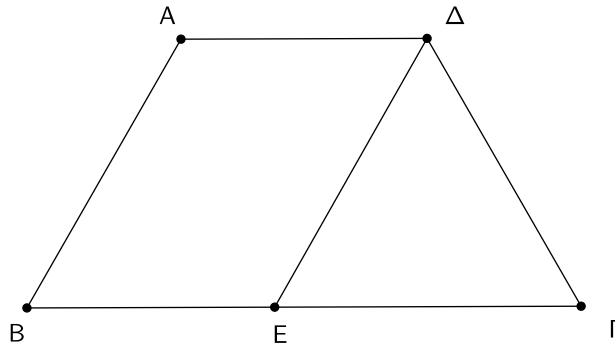
(β') Η BM χωρίζει το τραπέζιο σε έναν ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.



19. (Θ.13497) Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

(α') Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $\hat{A\Delta\Gamma}$

(β') Αν $\hat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

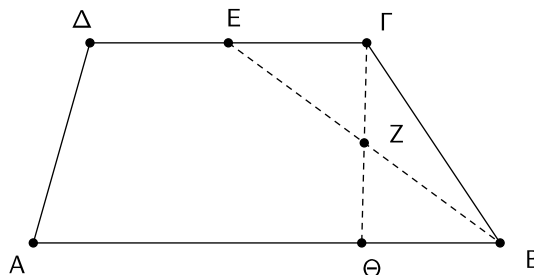


20. (Θ.13824) Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

(α') Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα.

(β') $E\Gamma = \Theta B$

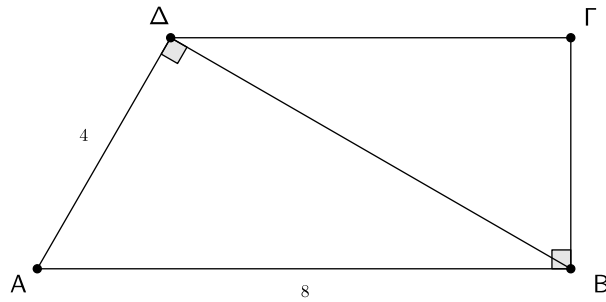
(γ') Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



21. **(Θ.13828)** Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $B\Delta$ είναι κάθετη στην πλευρά $A\Delta$ και η πλευρά ΓB κάθετη στη βάση AB . Αν $A\Delta = 4$ και $AB = 8$, τότε:

(α') Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Delta A B}$

(β') Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος $B\Delta$ του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$.

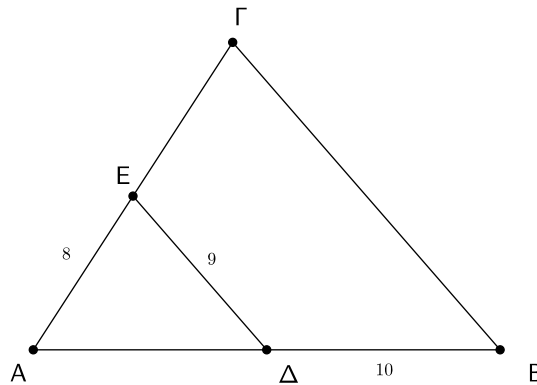


22. **(Θ.14877)** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE = 8$, $E\Delta = 9$ και $\Delta B = 10$.

(α') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

(β') Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

(γ') Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$.



Κεφάλαιο 4

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

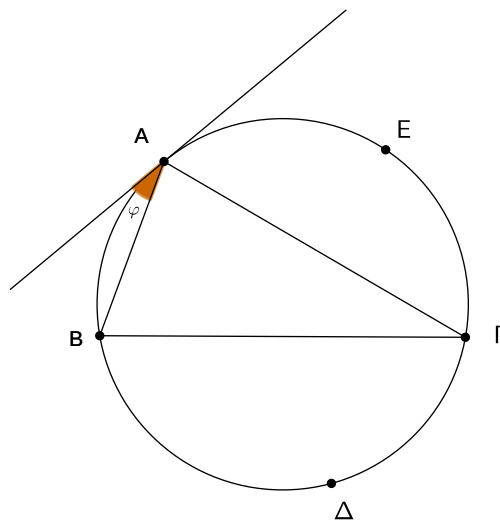
4.1 Γωνίες και κύκλος

ΘΕΜΑ Β

1. **(Θ.1561)** Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζει γωνία $\hat{\phi} = 30^\circ$ με την πλευρά AB . Αν το μέτρο του τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι 160° , τότε:

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

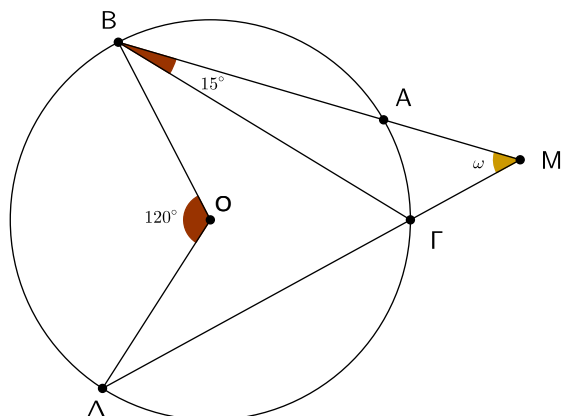
(β') Να βρείτε το μέτρο του τόξου $\widehat{A\epsilon\Gamma}$



2. **(Θ.1580)** Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία $\widehat{B\hat{O}D}$ είναι 120° και η γωνία $\widehat{\Gamma B A}$ είναι 15° .

(α') Να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{B\hat{\Gamma}D}$

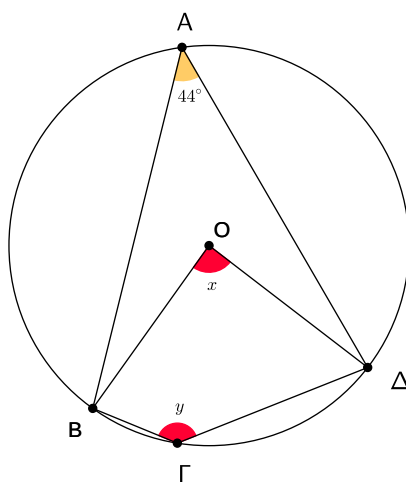
(β') Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45° .



3. **(Θ.1581)** Σε κύκλο κέντρου O δίνονται οι χορδές AB και AD τέτοιες ώστε η γωνία $\widehat{B\hat{A}D}$ να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$.

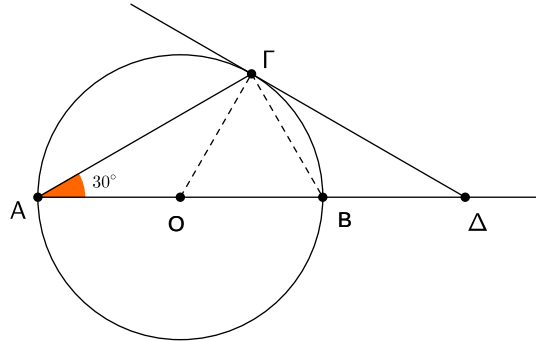
(α') Να υπολογίσετε την γωνία x

(β') Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136° .



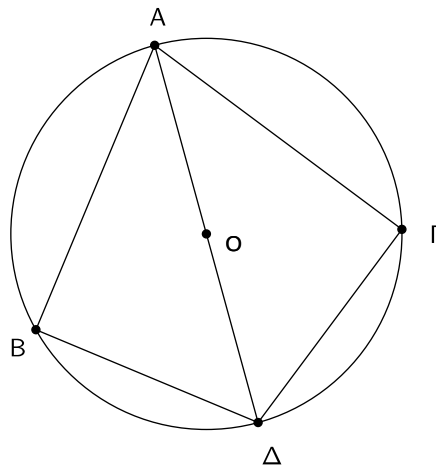
4. **(Θ.1626)** Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB και χορδή AG τέτοια ώστε $\widehat{BAG} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .

- (α') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $O\Gamma\Delta$.
 (β') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.



5. **(Θ.1663)** Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Αν η διάμετρος AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BAG}$, να αποδείξετε ότι:

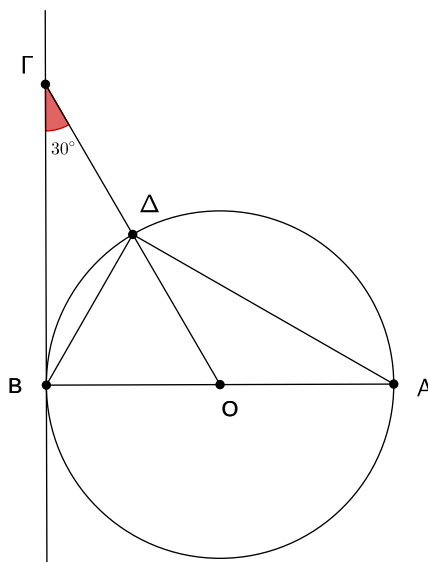
- (α') Τα τόξα $\widehat{B\Delta}$ και $\widehat{\Delta\Gamma}$ είναι ίσα.
 (β') Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.



6. **(Θ.1665)** Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και διάμετρό του AB . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο B θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε η γωνία $\widehat{B\Gamma O}$ να είναι ίση με 30° . Αν η $O\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στο Δ , να αποδείξετε ότι:

(α') $O\Gamma = 2OA$

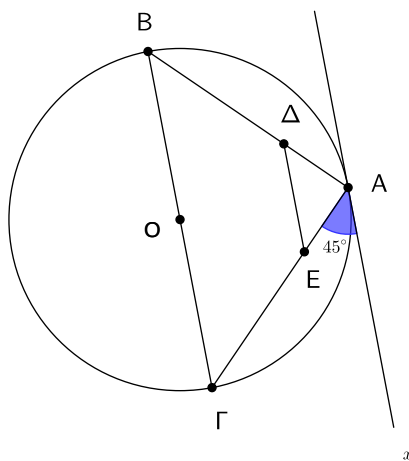
(β') $B\Gamma = A\Delta$



7. **(Θ.1672)** Σε σημείο A ενός κύκλου, φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου Ax και την χορδή AG που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία 45° . Φέρνουμε την διάμετρο GB και μία παράλληλη ευθεία στην $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Δ και την AG στο E .

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAG .

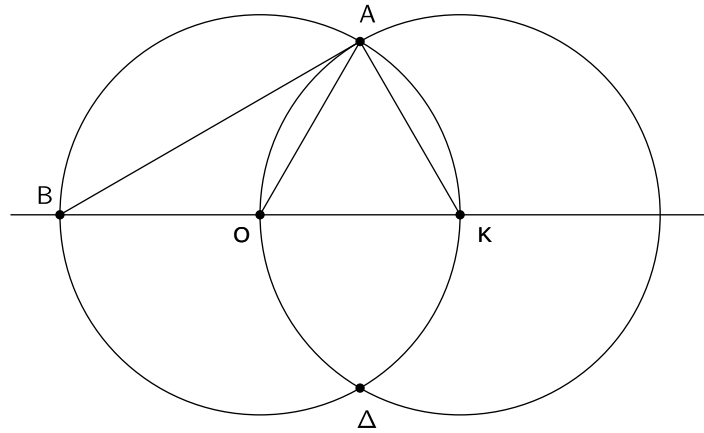
(β') Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



8. **(Θ.1673)** Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .

(α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

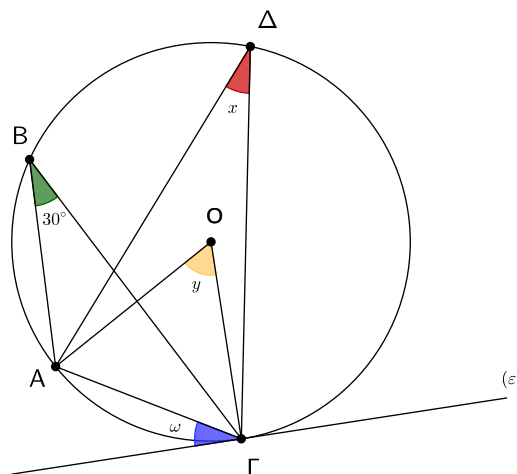
(β') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK .



9. **(Θ.1695)** Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο σημείο Γ .

(α') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}$, $\hat{y}$ και $\hat{\omega}$ δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(β') Να βρείτε το είδος του τριγώνου OAG ως προς τις πλευρές.

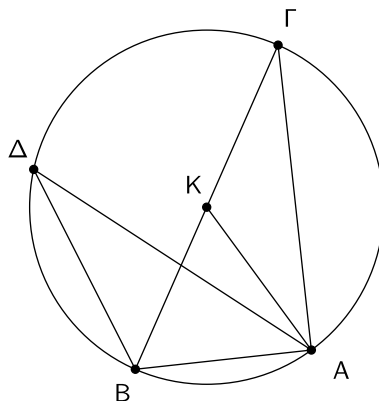


10. **(Θ.1696)** Έστω κύκλος κέντρου K , μία διάμετρος του $B\Gamma$ και χορδή του $BA = \rho$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ , όπως στο σχήμα που ακολουθεί,

(α') Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

(β') Να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{B\Delta A}$.

(γ') Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

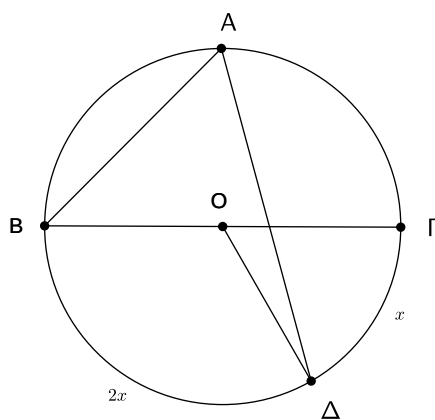


11. **(Θ.1703)** Έστω κύκλος κέντρου O και διάμετρος του $B\Gamma$. Θεωρούμε σημεία A και Δ του κύκλου εκάτερωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $\widehat{B\Delta}$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\widehat{\Delta\Gamma}$. Να υπολογίσετε:

(α') Το μέτρο x του τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$

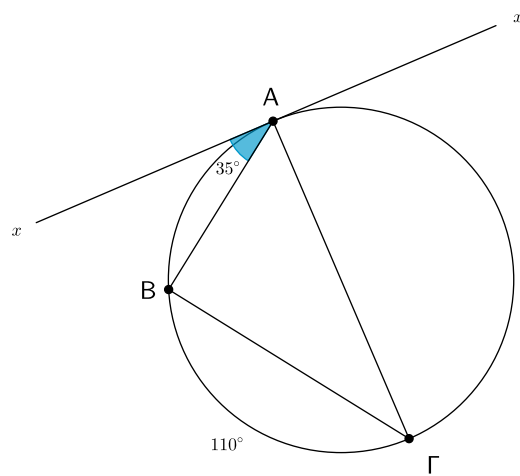
(β') Την γωνία $\widehat{B\hat{O}\Delta}$

(γ') Την γωνία $\widehat{B\hat{A}\Delta}$



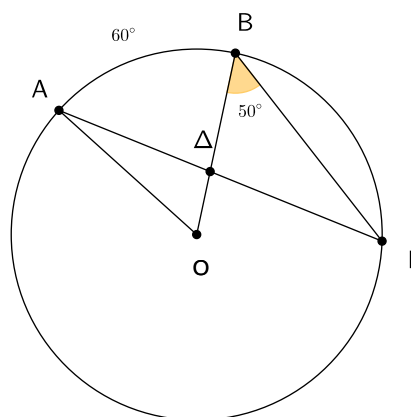
12. **(Θ.12637)** Στο παρακάτω σχήμα η $\chi\chi'$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και επιπλέον ισχύουν:
 $\hat{B}\hat{A}\chi = 35^\circ$ και $\hat{B}\hat{\Gamma} = 110^\circ$.

- (α') Ποιό είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 (β') Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



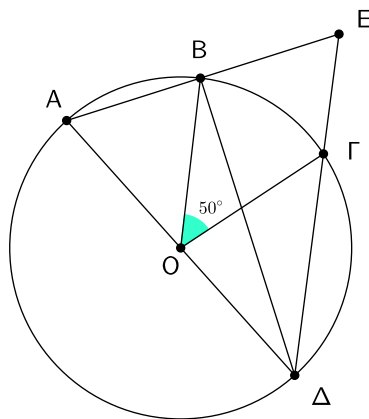
13. **(Θ.12638)** Στον κύκλο του σχήματος, το Ο είναι το κέντρο του, το τόξο $\hat{AB}$ ισούται με 60° και η γωνία $\hat{B}$ ισούται με 50° . Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

- (α') Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$
 (β') Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}O$



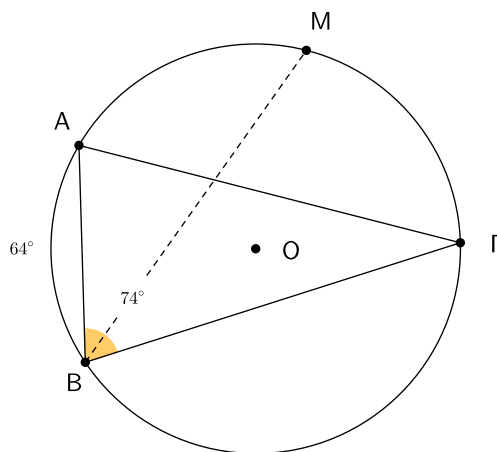
14. (Θ.12642) Σε κύκλο με κέντρο O , παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ και Δ , ώστε η $A\Delta$ να είναι διάμετρος και η γωνία $\hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma}$ να ισούται με 50° . Αν η προέκταση της AB προς το B , τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ προς το Γ στο E , αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

- (α') Το μέτρο της γωνίας $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$
 (β') Το μέτρο της γωνίας $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$



15. (Θ.13441) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\hat{B} = 74^\circ$. Το μέτρο του τόξου $\hat{A}\hat{B}$ που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64° και M είναι το μέσο του τόξου $\hat{A}\hat{\Gamma}$.

- (α') Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β') Ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
 (γ') Να αποδείξετε ότι η BM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$



16. **(Θ.13740)** Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε μία τυχαία χορδή του AB , την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του B κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Φέρνουμε κάθετη στην AG στο σημείο της B που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

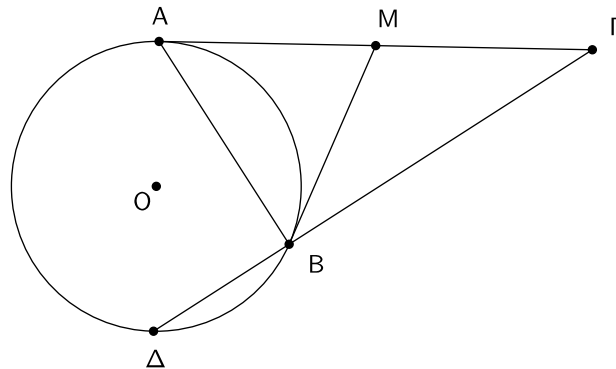
(α') $\Delta A = \Delta \Gamma$

(β') Η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

17. **(Θ.13747)** Από σημείο M εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου O φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε το τμήμα AM προς το μέρος του M και παίρνουμε τμήμα $M\Gamma = AM$. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα $\Gamma B\Delta$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

(α') Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(β') Τα σημεία A και Δ είναι αντιδιαμετρικά.

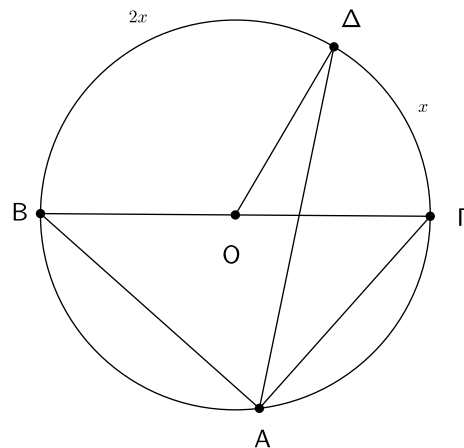


18. **(Θ.13753)** Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$. Έστω A και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς την διάμετρο $B\Gamma$. Τα μέτρα των τόξων $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι $2x$ και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:

(α') Της γωνίας $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$

(β') x του τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$

(γ') Της γωνίας $\widehat{B\hat{O}\Delta}$

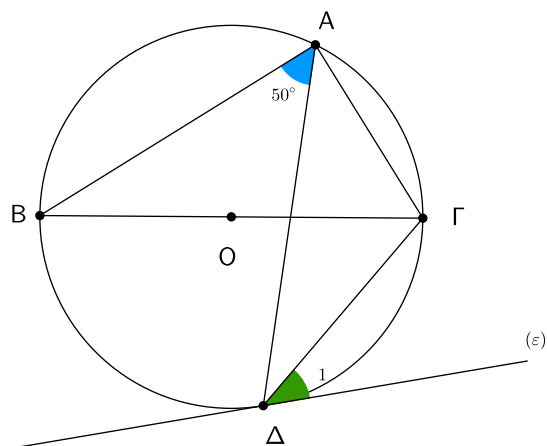


19. **(Θ.13754)** Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$ και τα σημεία A, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου $B\Gamma$ έτσι ώστε $\hat{B\Delta A} = 50^\circ$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ . Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας:

(α') $\hat{B\Delta\Gamma}$

(β') $\hat{B\Gamma\Delta}$

(γ') $\hat{\Delta}_1$

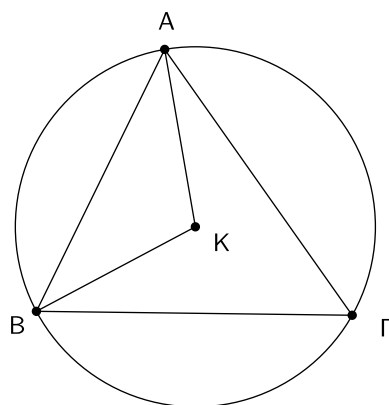


20. **(Θ.13756)** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) . Να αποδείξετε ότι:

(α') $\hat{AKB} = 2 \cdot \hat{A\Gamma B}$

(β') Το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές.

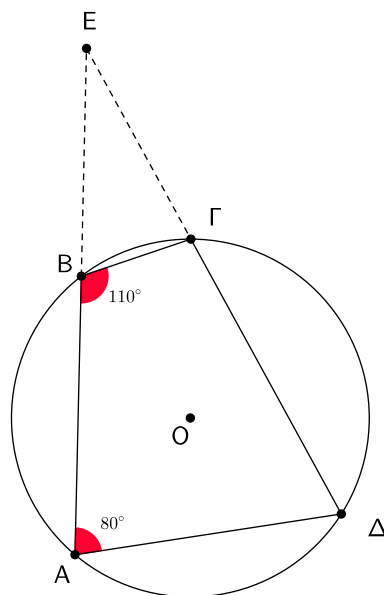
(γ') $\hat{K\Delta B} + \hat{A\Gamma B} = 90^\circ$



3. **(Θ.12643)** Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο E . Αν η γωνία $\hat{A}$ του τετραπλεύρου ισούται με 80° και η γωνία $\hat{B}$ ισούται με 110° , να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α') Το μέτρο της γωνίας $\hat{E\Gamma B}$

(β') Το μέτρο της γωνίας $\hat{B\Xi\Gamma}$



4. **(Θ.13818)** Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40^\circ, x + 20^\circ, 3x$. Να υπολογίσετε :

(α') Πόσες μοίρες είναι το x

(β') Τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

