

Φυλλάδιο Μαθηματικών Κατεύθυνσης

Για την Β Λυκείου

ΤΕΥΧΟΣ Α

Βλαχάκης Γιάννης

Περιεχόμενα

1	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ	5
1.1	Ορισμός και ισότητα διανυσμάτων	6
1.2	Πρόσθεση διανυσμάτων	8
1.3	Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα	13
1.4	Τριγωνική ανισότητα	18
1.5	Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων	21
1.6	Το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς	26
1.7	Οι βασικές προτάσεις	29
1.8	Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος	34
1.9	Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	38
2	Η ΕΥΘΕΙΑ	53
2.1	Βασικές έννοιες	54
2.2	Η εξίσωση της ευθείας	56
2.3	Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας	66
2.4	Απόσταση σημείου από ευθεία και εμβαδόν τριγώνου	70

Κεφάλαιο 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

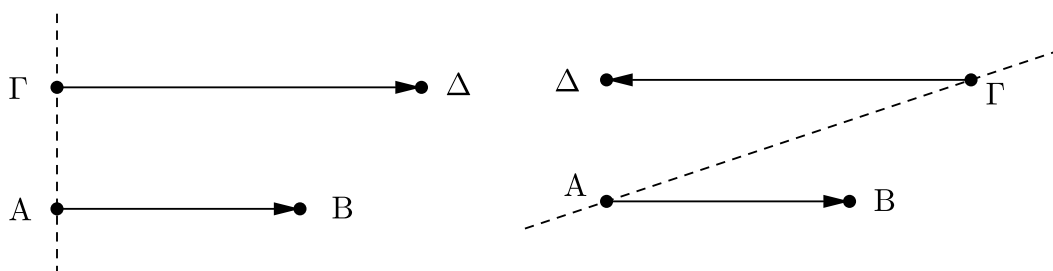
1.1 Ορισμός και ιδιότητα διανυσμάτων

Ορισμός: 1.1 Ονομάζουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα AB που έχει αρχή το σημείο A και τέλος το σημείο B . Αν η αρχή και το τέλος ενός διανύσματος συμπίπτουν, το διάνυσμα ονομάζεται *μηδενικό διάνυσμα* και συμβολίζεται $\vec{0}$.

Αν έχουμε δύο διαφορετικά σημεία A και B στο επίπεδο, αυτά ορίζουν την θέση μίας ευθείας, της ευθείας AB . Η ευθεία αυτή και κάθε παράλληλή της, ορίζουν στο επίπεδο μία διεύθυνση. Διανύσματα που ανήκουν στην ίδια ευθεία ή σε παράλληλες ευθείες λέμε ότι είναι *παράλληλα* ή ότι είναι *συγγραμμικά*. Θα συμβολίζουμε:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

Έστω δύο παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Αν η ευθεία $A\Gamma$ αφήνει τα διανύσματα στο ίδιο ημιεπίπεδο, τότε λέμε ότι τα διανύσματα έχουν την ίδια φορά, είναι *ομόρροπα* και συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ενώ αν η ευθεία $A\Gamma$ αφήνει τα διανύσματα σε διαφορετικά ημιεπίπεδα, τότε λέμε ότι τα διανύσματα έχουν αντίθετη φορά, είναι *αντίρροπα* και συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} \downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



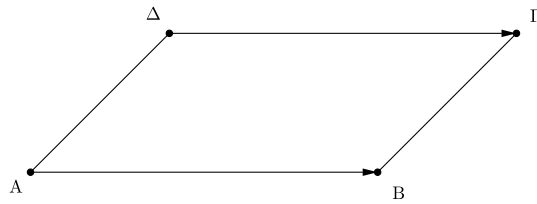
Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB το ονομάζουμε *μέτρο* του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και το συμβολίζουμε $|\overrightarrow{AB}|$. Προφανώς ισχύουν:

$$|\overrightarrow{AB}| \geq 0$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Ορισμός: 1.2 Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν είναι παράλληλα, είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα.

Θεώρημα: 1.1 $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$



Π Με βάση την παραπάνω πρόταση, ισχύουν και οι παρακάτω ισοδυναμίες:

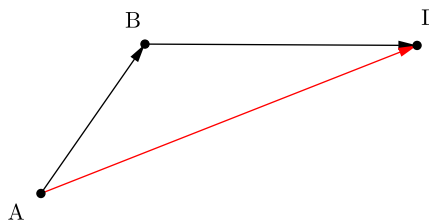
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{\Gamma B}$$

1.2 Πρόσθεση διανυσμάτων

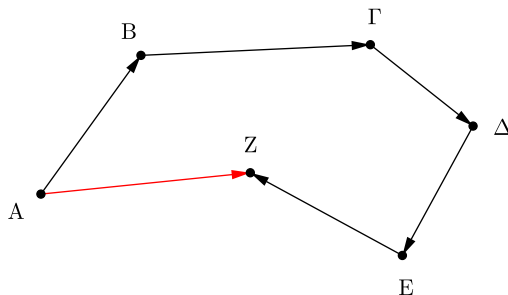
Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα πρέπει να τα τοποθετήσουμε έτσι ώστε το τέλος του πρώτου να συμπίπτει με την αρχή του δεύτερου. Το άθροισμά τους τότε έχει ως αρχή, την αρχή του πρώτου διανύσματος και ως τέλος, το τέλος του δεύτερου διανύσματος.



Δηλαδή ισχύει:

$$\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}$$

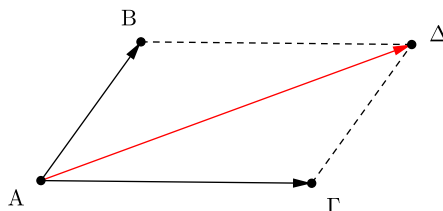
Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε και αν έχουμε περισσότερα από δύο διανύσματα. Τοποθετούμε διαδοχικά τα διανύσματα και τότε το άθροισμά τους είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή, την αρχή του πρώτου διανύσματος και ως τέλος, το τέλος του τελευταίου διανύσματος.



Δηλαδή ισχύει:

$$\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta\epsilon} = \vec{AZ}$$

Μπορούμε επίσης να προσθέσουμε δύο διανύσματα τοποθετώντας τα σε κοινή αρχή και να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Δηλαδή ισχύει:

$$\vec{AB} + \vec{AG} = \vec{AD}$$

Θεώρημα: 1.2 (Οι ιδιότητες της πρόσθεσης)

Η πρόσθεση διανυσμάτων έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i) Για δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a}$$

ii) Για τρία διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει:

$$(\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$$

iii) Για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ ισχύει:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

iv) Για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ υπάρχει ένα διάνυσμα που λέγεται *αντίθετο* του $\vec{a}$, συμβολίζεται $-\vec{a}$, για το οποίο ισχύει:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

Π Το αντίθετο του $\vec{a}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{a}$, είναι αντίρροπο του $\vec{a}$ και έχει το ίδιο μέτρο με αυτό.

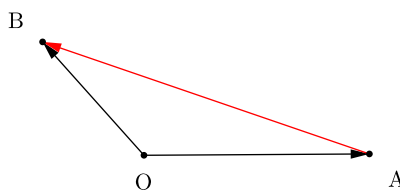
**Αφαίρεση διανυσμάτων**

Καταρχήν, όπως πάντοτε ισχύει:

$$\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta})$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, μπορούμε να καταλήξουμε στην ισότητα:

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.1 Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε το κέντρο του O . Να συμπληρώσετε τις ισότητες που ακολουθούν:

i) $\vec{AO} + \dots = \vec{AB}$

ii) $\dots + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$

iii) $\vec{AB} + \vec{A\Delta} = \dots$

iv) $\vec{AB} - \vec{A\Delta} = \dots$

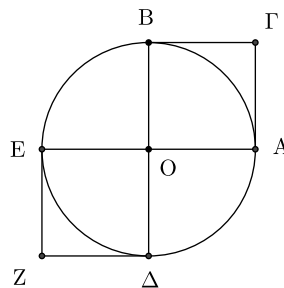
v) $\vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} = \dots$

vi) $\vec{AO} + \vec{\Gamma O} = \dots$

vii) $\vec{A\Delta} + \vec{O\Delta} + \vec{AB} + \vec{\Gamma B} + \dots = \vec{0}$

viii) $\vec{B\Gamma} + \vec{\Delta\Gamma} - \dots = \vec{0}$

Άσκηση: 1.2 Στο παρακάτω σχήμα το O είναι το κέντρο του κύκλου και τα τετράπλευρα $OAGB$ και $ODZE$ είναι τετράγωνα.



Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i) $\vec{OB} + \vec{O\Delta} = \dots$

ii) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Delta} + \dots = \vec{0}$

iii) $\vec{B\Gamma} + \vec{\Delta Z} = \dots$

iv) $\vec{OZ} + \vec{BE} - \vec{BO} = \dots$

v) $\vec{OA} + \vec{OB} + \dots = \vec{0}$

vi) $\vec{A\Delta} + \vec{ZE} - \vec{AB} - \vec{Z\Delta} = \dots$

Άσκηση: 1.3 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

i) $-\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B} + \vec{B\Delta}$

ii) $\vec{A\Gamma} + \vec{\Delta A} + \vec{B\Delta}$

iii) $\vec{A\Gamma} + \vec{\Delta A} + \vec{\Gamma B}$

Άσκηση: 1.4 Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ, Δ, E . Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} - \vec{\Gamma B} - \vec{E\Delta}$$

Άσκηση: 1.5 Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ, Δ, O . Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\vec{OA} + \vec{\Gamma\Delta} - \vec{OB} - \vec{\Gamma B} + \vec{AB}$$

Άσκηση: 1.6 (★) Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Gamma E}$ τέτοια ώστε:

$$\vec{B\Delta} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}$$

1. α'. Να δείξετε ότι $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{AE} = \vec{\Gamma B}$.
β'. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.
2. Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

■

Άσκηση: 1.7 Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K, Λ τυχαία σημεία. Να δείξετε ότι:

$$\vec{KB} + \vec{\Lambda B} - \vec{KA} - \vec{\Lambda \Gamma} = \vec{\Delta B}$$

■

Άσκηση: 1.8 Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ, E ισχύει:

$$\vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{\Delta B} - \vec{E\Gamma}$$

να δείξετε ότι τα σημεία Δ και E ταυτίζονται.

■

Άσκηση: 1.9 Αν για τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, M, \Sigma$ ισχύει:

$$\vec{BA} + \vec{M\Sigma} = \vec{M\Gamma} + \vec{\Delta\Sigma}$$

και τα σημεία A, B, Γ, Δ δεν είναι όλα στην ίδια ευθεία, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

■

Άσκηση: 1.10 Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ, Δ, E για τα οποία ισχύει:

$$\vec{A\Delta} - \vec{B\Delta} = \vec{\Delta E} - \vec{\Delta \Gamma}$$

Αν τα σημεία A, B, Γ, E δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

■

Άσκηση: 1.11 Θεωρούμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα διανύσματα $\vec{AM} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{BN} = \vec{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι το σημείο Γ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος MN .

■

Άσκηση: 1.12 Θεωρούμε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα παραλληλόγραμμα $ABEZ, B\Gamma H\Theta, \Gamma\Delta IK, \Delta A\Lambda M$. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{Z\Lambda} + \vec{M\Gamma} + \vec{K\Theta} + \vec{\Theta E} = \vec{0}$$

■

Άσκηση: 1.13 Δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στο εξωτερικό των πλευρών του κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $AB\Theta I$, $B\Gamma ZH$ και $A\Gamma E\Delta$. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

i) $\vec{I\Delta} + \vec{E\Z} + \vec{H\Theta}$

ii) $\vec{I\Theta} + \vec{H\Z} + \vec{E\Delta}$

■

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ορισμός: 1.3 Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$ και ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός λ . Ονομάζουμε γινόμενο του αριθμού λ με το διάνυσμα $\vec{a}$ και συμβολίζουμε $\lambda\vec{a}$, ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{a}$.
 - είναι ομόρροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda < 0$.
 - έχει μέτρο ίσο με $|\lambda||\vec{a}|$, δηλαδή ισχύει: $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$
- Επίσης ορίζουμε: $0\vec{a} = \vec{0}$ και $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

Θεώρημα: 1.3 (Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα)

Ο πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i) Για τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει:

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$$

ii) Για τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

iii) Για τον πραγματικό αριθμό λ ισχύει:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$$

iv) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$$

v) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{\beta}$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$

vi) Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$, τότε $\lambda = \mu$

Θεώρημα: 1.4 Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \text{υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ώστε } \vec{a} = \lambda\vec{\beta}$$

Θεώρημα: 1.5 Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και το μέσον του M . Για οποιοδήποτε σημείο O ισχύει:

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

Θεώρημα: 1.6 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το βαρύκεντρό του G . Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$G \text{ βαρύκεντρο του τριγώνου} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$$

Και, αν O τυχαίο σημείο, τότε:

$$G \text{ βαρύκεντρο του τριγώνου} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.14 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα K, Λ των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} = 2\overrightarrow{K\Lambda}$$

■

Άσκηση: 1.15 Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα μέσα E, Z των πλευρών του $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$$

■

Άσκηση: 1.16 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω O το κέντρο του. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M ισχύει:

$$4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta}$$

■

Άσκηση: 1.17 Θεωρούμε τα παραλληλόγραμμα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ και $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ και έστω O_1 και O_2 τα κέντρα τους αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$4\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2} + \overrightarrow{\Delta_1\Delta_2}$$

■

Άσκηση: 1.18 Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Αν είναι E το μέσον της AB , Z είναι το μέσον της $\Gamma\Delta$ και O είναι το μέσον του EZ , να δείξετε ότι:

$$\text{i) } \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ} \quad \text{ii) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} = 4\overrightarrow{AO}$$

$$\text{iii) } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta} = \vec{0}$$

■

Άσκηση: 1.19 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Θεωρούμε σημείο M της $A\Delta$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{M\Delta} = \vec{0}$$

Αν K, Λ, N είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{M\Lambda} + \overrightarrow{MN}) + \overrightarrow{M\Delta} = 6\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

■

Άσκηση: 1.20

1. Θεωρούμε τα τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ και $A_2B_2\Gamma_2$ και έστω G_1 και G_2 τα βαρύκεντρα τους αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$3\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2}$$

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα K, Λ, M των πλευρών του $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

■

Άσκηση: 1.21 Αν για τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει:

$$2(\vec{a} - 2\vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{a} - (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$$

να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

■

Άσκηση: 1.22 Έστω τα σημεία A, B, Γ, Δ, O και τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} + 2\vec{\beta}, \quad \overrightarrow{OB} = 3\vec{a} - \vec{\beta}, \quad \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{a} - 4\vec{\beta}, \quad \overrightarrow{O\Delta} = -3\vec{a} + 2\vec{\beta}$$

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίρροπα.

■

Άσκηση: 1.23 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα μέσα M και N των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

1. Να δείξετε ότι:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$$

2. Ποιές ιδιότητες προκύπτουν από την παραπάνω ισότητα για το ευθύγραμμο τμήμα MN ;

■

Άσκηση: 1.24 Στο επίπεδο δίνονται τέσσερα διακεκριμένα σημεία A, B, Γ, Δ . Θεωρούμε τα μέσα I, Z των τμημάτων $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα καθώς και ένα σημείο E για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{IZ}$. Να αποδείξετε ότι:

1. $2\overrightarrow{IZ} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

2. Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

■

Άσκηση: 1.25 Θεωρούμε ένα κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και με τις διαδοχικές πλευρές του AB και $B\Gamma$ κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma E$. Αν K, Λ, M είναι τα μέσα των $AB, \Gamma\Delta, \Delta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

1. $2\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$

2. Το τετράπλευρο $AK\Lambda M$ είναι παραλληλόγραμμο. ■

Άσκηση: 1.26 Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και δύο κάθετες χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Σ . Να αποδείξετε ότι:

1. $2\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG} + \vec{OD}$
2. Αν K, Λ είναι τα μέσα των χορδών AG και BD αντίστοιχα, το τετράπλευρο $OK\Sigma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. ■

Άσκηση: 1.27 Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε σημείο M για το οποίο ισχύει:

$$\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MG} = \vec{AG}$$

■

Άσκηση: 1.28 Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε σημείο M για το οποίο ισχύει:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = \vec{MD}$$

■

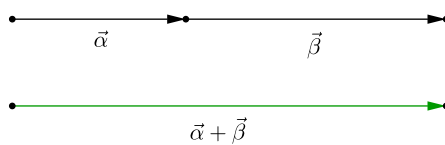
1.4 Τριγωνική ανισότητα

Θεώρημα: 1.7 Για δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$

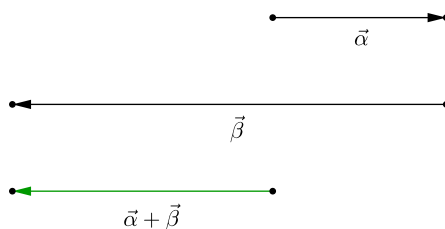
Π Όταν τα διανύσματα είναι ομόρροπα ή ένα τουλάχιστον από τα δύο είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ισχύει:

$$|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$



Π Όταν τα διανύσματα είναι αντίρροπα ή ένα τουλάχιστον από τα δύο είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ισχύει:

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.29 Να αποδείξετε ότι για τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει:

$$|\vec{a} - \vec{\beta}| \leq |\vec{a} - \vec{\gamma}| + |\vec{\beta} - \vec{\gamma}|$$

■

Άσκηση: 1.30 Για δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν:

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad |\vec{a} - \vec{\beta}| = 3$$

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα αυτά είναι αντίρροπα.

■

Άσκηση: 1.31 Για δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν:

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{\beta}| = 6, \quad |\vec{a} + \vec{\beta}| = 9$$

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα αυτά είναι ομόρροπα.

■

Άσκηση: 1.32 Για τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύουν:

$$\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \quad \text{και} \quad 6|\vec{a}| = 3|\vec{\beta}| = 2|\vec{\gamma}|$$

Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.

■

Άσκηση: 1.33 Για δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν:

$$|\vec{a}| = 1 \quad \text{και} \quad |\vec{a} + \vec{\beta}| = 5$$

Να αποδείξετε ότι:

$$4 \leq |\vec{\beta}| \leq 6$$

■

Άσκηση: 1.34 Για δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν:

$$|4\vec{a} + 3\vec{\beta}| \leq 1 \quad \text{και} \quad |3\vec{a} + 4\vec{\beta}| \leq 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{a} + \vec{\beta}| \leq \frac{2}{7}$$

■

Άσκηση: 1.35 Για τρία διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύουν:

$$|\vec{a}| = 2 \quad , \quad |\vec{\beta}| = 3 \quad \text{και} \quad |\vec{\gamma}| = 5$$

Να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{a} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}| \leq 10$$

■

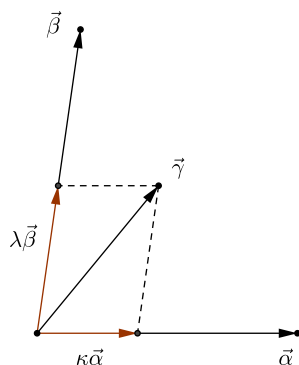
1.5 Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Ορισμός: 1.4 Ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ λέμε ότι είναι *γραμμικός συνδυασμός* των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ και λ ώστε να ισχύει:

$$\vec{\gamma} = \kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$$

Θεώρημα: 1.8 Έστω δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ του επιπέδου τους, γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με μοναδικό τρόπο, δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι ώστε:

$$\vec{\gamma} = \kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$$



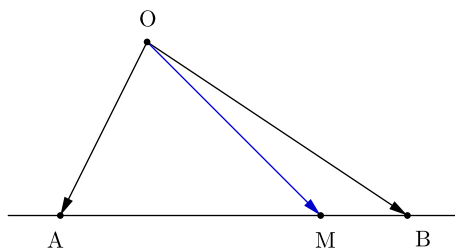
Θεώρημα: 1.9 Έστω δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\kappa \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.36 Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία A και B είναι σταθερά και το σημείο M είναι τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}, \quad \lambda \neq -1$$



1. Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί να είναι $\lambda = -1$.
2. Ποιά είναι η θέση του σημείου M όταν $\lambda = 0$;
3. Για ποιές τιμές του λ το σημείο M βρίσκεται:
 - i) αριστερότερα του σημείου A
 - ii) ανάμεσα στα σημεία A και B
 - iii) δεξιότερα του σημείου B
4. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda} (\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

■

Άσκηση: 1.37 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, θεωρούμε τα μέσα M, N, K των τμημάτων $B\Gamma, AM, AB$ αντίστοιχα. Να γράψετε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{BN}$ και $\overrightarrow{MK}$.

■

Άσκηση: 1.38 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{B\Delta} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$. Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

■

Άσκηση: 1.39 Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB , το μέσον του M καθώς και το σημείο του Γ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο O ισχύει:

$$\text{i) } \overrightarrow{O\Gamma} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{ii) } \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OM} = \frac{7}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OB}$$

■

Άσκηση: 1.40 Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο το σημείο O δίνεται ότι:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$$

Αν K, Λ είναι τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Lambda}, \overrightarrow{K\Lambda}, \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{K\Lambda}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

■

Άσκηση: 1.41 Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, να βρείτε για ποιά τιμή του πραγματικού αριθμού λ ισχύει η ισότητα:

$$(\lambda^2 - 1) \vec{a} + (\lambda^2 - 3\lambda + 2) \vec{\beta} = \vec{0}$$

■

Άσκηση: 1.42 Θεωρούμε τρία σημεία A, B, Γ διαφορετικά ανά δύο και ένα τυχαίο σημείο O . Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$\kappa_1 \vec{OA} + \kappa_2 \vec{OB} + \kappa_3 \vec{OG} = \vec{0} \quad \text{και} \quad \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

■

Άσκηση: 1.43 Για τα σημεία A, B, Γ, O ισχύει:

$$13\vec{OA} = 5\vec{OB} + 8\vec{OG}$$

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
2. Να βρείτε την σχετική θέση των σημείων A, B, Γ .
3. Αν $|\vec{BG}| = 13$, να υπολογίσετε τα μέτρα: $|\vec{AB}|$ και $|\vec{AG}|$.

■

Άσκηση: 1.44 Αν για τα σημεία A, B, K, Λ, M ισχύει:

$$2\vec{AL} + 3\vec{BL} + 2\vec{MB} = \vec{AK} + \vec{AM} + \vec{BK}$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ, M είναι συνευθειακά.

■

Άσκηση: 1.45 Για τα σημεία A, B, Γ, O ισχύουν:

$$\vec{OA} = \vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \quad \vec{OB} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}, \quad \vec{OG} = 4\vec{a} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

■

Άσκηση: 1.46 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσός του AM , το μέσον Δ της διαμέσου AM και σημείο E της $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AG}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.

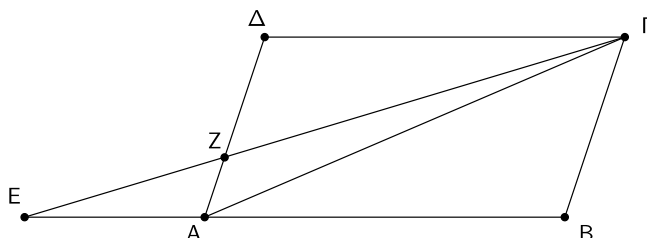
■

Άσκηση: 1.47 Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{BG} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z τέτοια ώστε $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ και $\vec{AZ} = \frac{1}{4}\vec{AG}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, Z, B είναι συνευθειακά.

■

Άσκηση: 1.48 (★) Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε:

$$\vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{AB} \text{ και } \vec{AZ} = \frac{1}{3}\vec{AD}$$



1. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{EZ} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{\beta} \text{ και } \vec{Z\Gamma} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$$

2. Να αποδείξετε ότι: $\vec{Z\Gamma} = 2\vec{EZ}$

3. Να δείξετε ότι τα σημεία Z, E και Γ είναι συνευθειακά.

■

Άσκηση: 1.49 (★★) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E σημεία εσωτερικά των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε:

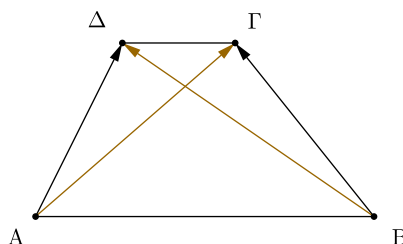
$$\vec{AB} = \kappa\vec{A\Delta} \text{ και } \vec{A\Gamma} = \lambda\vec{A\Gamma}$$

όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

1. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.
2. α'. Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\vec{B\Gamma} \parallel \vec{\Delta E}$ και $|\vec{B\Gamma}| = \kappa|\vec{\Delta E}|$
 β'. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε την σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί.

■

Άσκηση: 1.50 Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με $\vec{AB} = -3\vec{\Gamma\Delta}$.

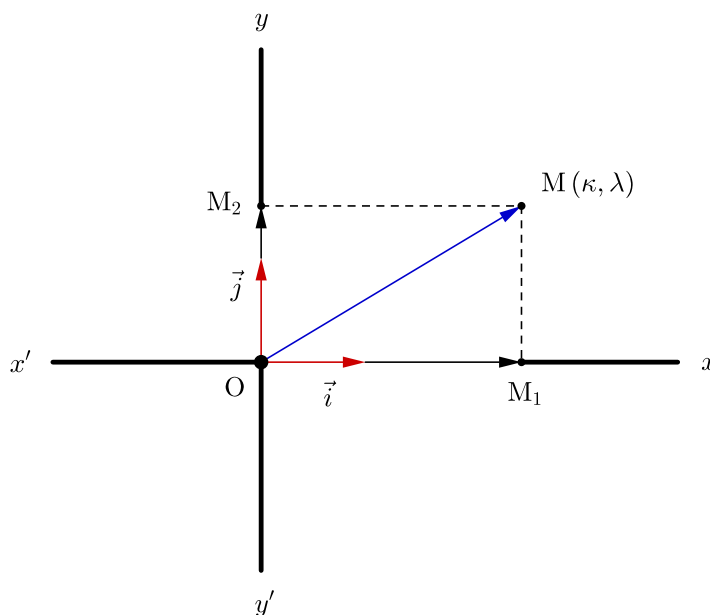


Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

$$2\vec{A\Delta} + 3\vec{B\Gamma} = x\vec{A\Gamma} + y\vec{B\Delta}$$

■

1.6 Το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς



Στο επίπεδο θεωρούμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ που η αρχή τους είναι το σημείο τομής τους O και οι οποίοι είναι εφοδιασμένοι με μοναδιαία διανύσματα (δηλαδή διανύσματα που έχουν μέτρο 1 και θετική φορά διαγραφής) $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα. Τότε λέμε ότι έχουμε δημιουργήσει ένα *ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς* ή ένα *καρτεσιανό σύστημα αναφοράς* και το συμβολίζουμε Oxy . Αν δοθεί ένα σημείο M στο επίπεδο και το προβάλλουμε πάνω στους δύο άξονες, τότε επειδή τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι παράλληλα, υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί κ και λ για τους οποίους ισχύει:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \kappa \vec{i} + \lambda \vec{j}$$

Στο διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ καθώς και στο σημείο M αντιστοιχίζουμε το ζευγάρι κ, λ αυτών των πραγματικών αριθμών τους οποίους ονομάζουμε *συντεταγμένες* του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ και του σημείου M και συμβολίζουμε:

$$\overrightarrow{OM} = (\kappa, \lambda) \quad \text{και} \quad M(\kappa, \lambda)$$

Ειδικότερα ο αριθμός κ λέγεται *τετμημένη*, ενώ ο αριθμός λ λέγεται *τεταγμένη*.

Πράξεις και ιδιότητα διανυσμάτων

Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε ισχύουν:

- i) $\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$
- ii) $\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- iii) $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.51 Δίνεται το σημείο:

$$A(\lambda + 5, 2\lambda - 1)$$

Αν το σημείο απέχει από τον άξονα $y'y$ απόσταση ίση με 2 και από τον άξονα $x'x$ απόσταση ίση με 7, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ . ■

Άσκηση: 1.52 Να βρείτε τα όλα τα σημεία $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου για τα οποία ισχύει:

i) $y = 2$ ii) $x = -4$ iii) $|x| = 3$ iv) $-2 \leq y \leq 1$ v) $|x| < 1$ vi) $|y+1| > 1$ ■

Άσκηση: 1.53 Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (k - 1, \lambda - 2) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\lambda, 2k - 1)$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς k και λ ώστε:

1. Το διάνυσμα $\vec{a}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα.
 2. Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσα.
 3. Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.
-

Άσκηση: 1.54 Δίνεται το διάνυσμα:

$$\vec{a} = (\lambda^2 - 1, \lambda^2 - \lambda)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε:

1. Το διάνυσμα $\vec{a}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα.
 2. Το διάνυσμα $\vec{a}$ να μην είναι το μηδενικό διάνυσμα και να είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$.
-

Άσκηση: 1.55 Δίνονται τα σημεία:

$$A(-k + 1, 2) \quad \text{και} \quad B(-\lambda + 2, \lambda)$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών k και λ ώστε:

1. Τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.
 2. Τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.
 3. Τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.
-

Άσκηση: 1.56 Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (3, 1) \quad , \quad \vec{\beta} = (5, 1) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = (-1, 1)$$

Να βρείτε το διάνυσμα:

$$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$$

■

Άσκηση: 1.57 Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (\lambda, 2\lambda - 4) \quad , \quad \vec{\beta} = (\kappa, \kappa + 6) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = (7, -1)$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ και λ για τις οποίες ισχύει:

$$2\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

■

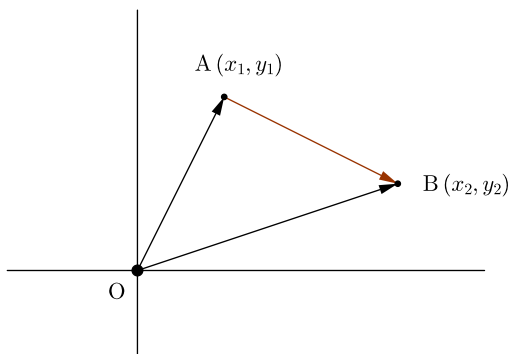
Άσκηση: 1.58 Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (17, -6)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 4)$.

■

1.7 Οι βασικές προτάσεις

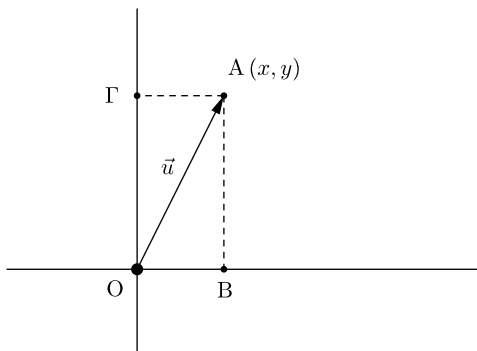
Θεώρημα: 1.10 Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Τότε:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



Θεώρημα: 1.11 Έστω το διάνυσμα $\vec{u} = (x, y)$. Τότε:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

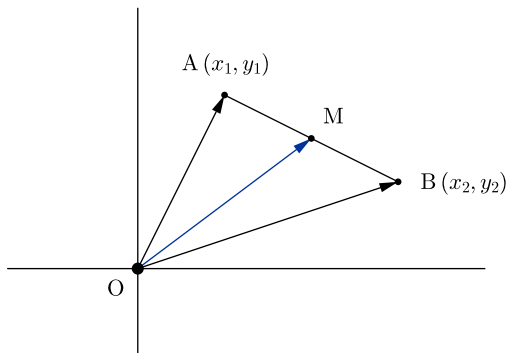


Π Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

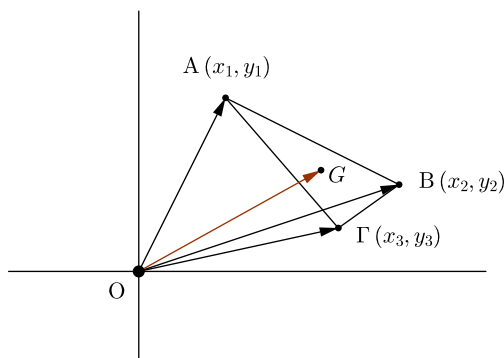
Θεώρημα: 1.12 Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Αν M είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB , τότε:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Θεώρημα: 1.13 Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$. Αν G είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου, τότε:

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

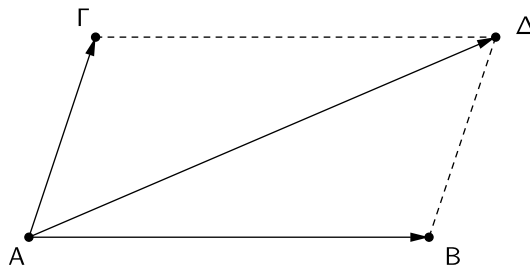
Άσκηση: 1.59 Δίνονται τα σημεία $A(0, -2)$, $B(-1, -3)$ και $\Gamma(1, 1)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma A}$. ■

Άσκηση: 1.60 Δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(-1, -2)$ και $\Gamma(0, -5)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M για τα οποία ισχύει:

$$\vec{OM} = 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{OA} - \frac{3}{2}\vec{OB} + 2\vec{O\Gamma}$$

Άσκηση: 1.61 (★) Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\vec{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

1. Των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.
2. Του διανύσματος $\vec{A\Delta}$.
3. Του σημείου Δ .



Άσκηση: 1.62 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ και $\Gamma(1, 4)$. Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AM}$. ■

Άσκηση: 1.63 (★) Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

1. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\vec{AB}$.
2. Αν $\vec{v} = \vec{AB}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.
3. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του ερωτήματος (2) είναι αντίρροπα.

Άσκηση: 1.64 (★) Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία:

$$A(3, 4), \quad B(2, 1), \quad \Gamma(3, -1) \quad \text{και} \quad \Delta(4, 2)$$

1. Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ .
2. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
3. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση: 1.65 Δίνονται τα σημεία $A(-3, -4)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(4, 5)$ και $\Delta(-1, -2)$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και να βρείτε το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Άσκηση: 1.66 Να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο B του σημείου $A(-3, 2)$ ενός κύκλου με κέντρο το σημείο $K(5, -4)$.

Άσκηση: 1.67 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1, -2)$, $\Delta(2, 2)$. Αν η κορυφή B ανήκει στον άξονα $x'x$ και το κέντρο του K ανήκει στον άξονα $y'y$, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, K και Γ .

Άσκηση: 1.68 Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τεταγμένες δύο σημείων A και B είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (\lambda^3 - 2)x - 2 = 0$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το μέσον M του τμήματος AB να έχει τεταγμένη ίση με 3.

Άσκηση: 1.69 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$. Να υπολογίσετε τα μέτρα:

$$|\vec{a}|, \quad | -2\vec{a}| \quad \text{και} \quad |3\vec{a} - 2\vec{\beta}|$$

Άσκηση: 1.70 Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (\lambda - 1, \lambda + 1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\lambda - 3, \lambda + 3)$$

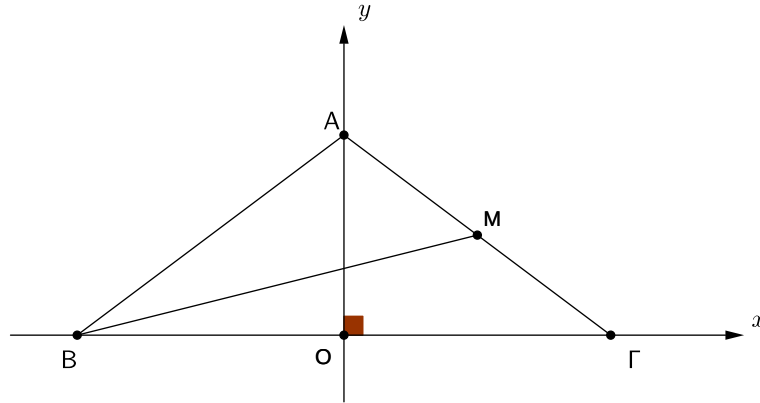
όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει μέτρο ίσο με 3, ποιο είναι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$;

Άσκηση: 1.71 Δίνονται τα σημεία:

$$A(a - 1, 2) \quad \text{και} \quad B(a + 1, a)$$

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσει του a .
2. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε $|\overrightarrow{AB}| = 2$.

Άσκηση: 1.72 (★) Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $B\Gamma = 12$, $AO = 8$ και M το μέσον της πλευράς $A\Gamma$.



1. Να αποδείξετε ότι:
 - α'. $A(0, 8)$, $B(-6, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$.
 - β'. $M(3, 4)$.
2. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM .

■

Άσκηση: 1.73 Δίνονται τα σημεία: $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ και $\Gamma(-4, \lambda)$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία τα σημεία A και B ισαπέχουν από το σημείο Γ .

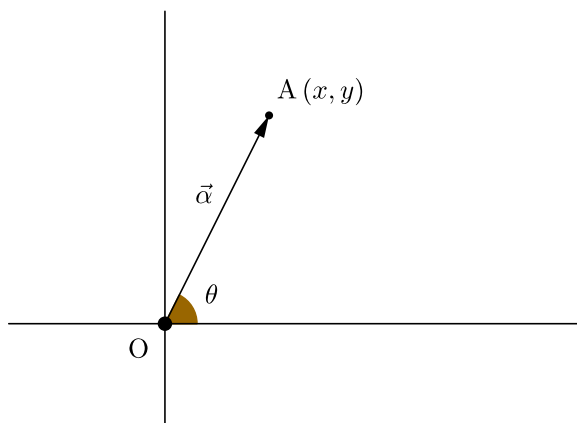
■

Άσκηση: 1.74 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, 1)$. Να βρείτε:

1. Σημείο M του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα σημεία A και B .
2. Σημείο N του άξονα $y'y$ ώστε το τρίγωνο NAB να είναι ισοσκελές με κορυφή το N .

■

1.8 Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος



Ορισμός: 1.5 Θεωρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$ και το σημείο $A(x, y)$ ώστε $\vec{OA} = \vec{a}$. Ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα $x'x$, την γωνία που πρέπει να στρέψουμε τον θετικό ημιάξονα Ox κατά την θετική φορά διαγραφής (αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να συμπίψει με την ημιευθεία OA . Για την γωνία θ ισχύει: $0 \leq \theta < 2\pi$.

Ορισμός: 1.6 Θεωρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$ με $x \neq 0$, δηλαδή ένα διάνυσμα που δεν είναι κάθετο στον άξονα $x'x$. Ονομάζουμε *συντελεστή διεύθυνσης* του διανύσματος $\vec{a}$ και συμβολίζουμε $\lambda_{\vec{a}}$ το πηλίκο:

$$\lambda_{\vec{a}} = \frac{y}{x}$$

Π Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για διανύσματα που είναι κάθετα στον άξονα $x'x$ ή για το μηδενικό διάνυσμα.

Θεώρημα: 1.14 Έστω δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$$

όπου:

$$\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Θεώρημα: 1.15 Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_{\vec{a}}$ και $\lambda_{\vec{\beta}}$ αντίστοιχα. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{\beta}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.75 Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (\kappa, 2\kappa + 3) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (-3, 2)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε:

1. Το διάνυσμα $\vec{a}$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης 3.
2. Το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{a} + \vec{\beta}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$.

Άσκηση: 1.76 (★) Δίνεται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

1. Να υπολογίσετε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.
2. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.
3. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στην μορφή:

$$\vec{\gamma} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}$$

Άσκηση: 1.77 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (\lambda - 1, 1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (1, 2\lambda - 1)$$

να είναι συγγραμμικά.

Άσκηση: 1.78 (★) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}, \quad \vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}, \quad \vec{\gamma} = -3\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{\delta} = (-1, 1)$$

1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.
2. Να γράψετε την γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με τον θετικό ημιάξονα Ox .
3. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\gamma}$.

Άσκηση: 1.79 Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$, $B(2, 0)$ και $\Gamma(\lambda - 7, \lambda)$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma}$.

Άσκηση: 1.80 Δίνονται τα σημεία $A(-2, 2)$, $B(\lambda^2, 5)$ και $\Gamma(\lambda - 2, 3)$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε τα παραπάνω σημεία να βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Άσκηση: 1.81 (★) Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

1. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{BG}$.
2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και G είναι συνευθειακά.
3. Να αποδείξετε ότι το B είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AG .

Άσκηση: 1.82 (★) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα:

$$\vec{u} = 3\vec{a} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{a} - 9\vec{\beta}$$

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.
2. Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}, \vec{\beta}$.
3. Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ και M αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

Άσκηση: 1.83 Δίνονται τα σημεία $A(5, 1)$, $B(5, 3)$ και $G(0, 2)$.

1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο GAB είναι ισοσκελές.
2. Να βρείτε το σημείο K του άξονα $x'x$ για το οποίο ισχύει $\vec{BK} \parallel \vec{AG}$.

Άσκηση: 1.84 Δίνονται τα σημεία $A(1, -4)$ και $B(4, 2)$. Να βρείτε σημείο G του άξονα $x'x$ ώστε τα σημεία A, B, G να είναι συνευθειακά.

Άσκηση: 1.85 Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (1, \kappa - 1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\kappa - 1, 9)$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε τα διανύσματα να είναι αντίρροπα.

Άσκηση: 1.86 (★★) Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AM}, \vec{MB}$ και $\vec{AB}$.
2. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{AM}, \vec{MB}$ και $\vec{AB}$.
3. Να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{AM}| + |\vec{MB}| \geq 5$$

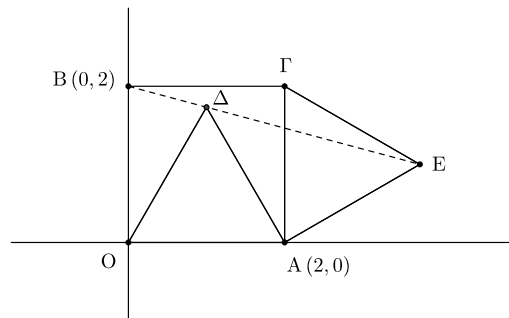
4. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4 \text{ »}$$

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση: 1.87 Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $OAGB$ είναι τετράγωνο πλευράς 2 και τα τρίγωνα OAD και AGE είναι ισόπλευρα.



1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .
2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.

■

Άσκηση: 1.88 (★★) Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως:

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \text{ και } \overrightarrow{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

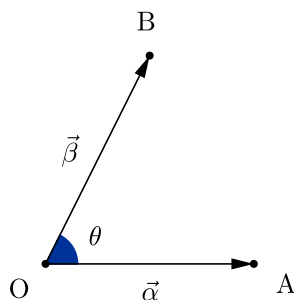
1. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$.
2. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ .
3. Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;
4. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει την μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

■

1.9 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων



Ορισμός: 1.7 Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Με αρχή ένα σημείο αναφοράς O θεωρούμε τα σημεία A και B ώστε $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{b}$. Ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και συμβολίζουμε $\angle(\vec{a}, \vec{b})$, την κυρτή γωνία των ημιευθειών OA και OB .

Π Για την γωνία δύο διανυσμάτων ισχύει:

$$0 \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$$

Ειδικότερα, αν $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ τότε $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, ενώ αν $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ τότε $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$.

Ορισμός: 1.8 Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$. Ονομάζουμε *εσωτερικό γινόμενο* των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και συμβολίζουμε $\vec{a} \cdot \vec{b}$ τον πραγματικό αριθμό:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Επίσης ορίζουμε: $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

Θεώρημα: 1.16 **Θεώρημα:** Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$. Τότε:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Θεώρημα: 1.17 Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i) Για κάθε πραγματικό αριθμό λ ισχύει:

$$\lambda (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{\beta})$$

ii) Η πράξη είναι αντιμεταθετική, δηλαδή:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$$

iii) Η πράξη είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων, δηλαδή:

$$\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$$

iv) Για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ ορίζουμε το $\vec{a}^2$ ως εξής:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

v) Η συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$$

Π

Στο εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή:

$$(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma} \neq (\vec{a} \cdot \vec{\gamma}) \vec{\beta}$$

Π

ii) Στο εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής, δηλαδή:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma} \nRightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

Θεώρημα: 1.18 Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_{\vec{a}}$ και $\lambda_{\vec{\beta}}$ αντίστοιχα. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \lambda_{\vec{\beta}} = -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 1.89 Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ όταν

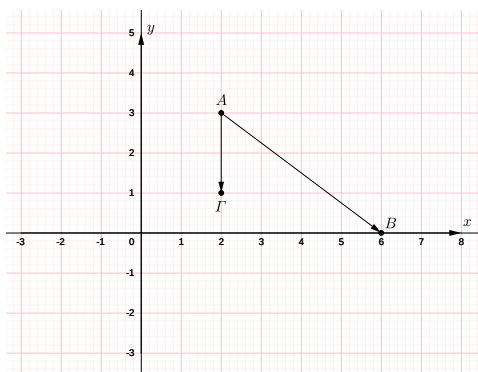
i) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $\left(\vec{a}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$ ii) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 4$, $\left(\vec{a}, \vec{\beta}\right) = 120^\circ$ ■

Άσκηση: 1.90 Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ όταν

i) $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{\beta} = (5, 0)$ ii) $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, -1)$ ■
 iii) $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{\beta} = (-1, 2)$

Άσκηση: 1.91 (★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AI}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

1. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = (4, -3)$ και $\vec{AI} = (0, -2)$.
2. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AI}$.



Άσκηση: 1.92 (★) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$.
2. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.
3. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ ■

Άσκηση: 1.93 Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 2 και το ύψος του AD . Να υπολογίσετε τα παρακάτω εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma D}$ ii) $\vec{AB} \cdot \vec{\Delta \Gamma}$ iii) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ ■
 iv) $\vec{AB} \cdot \vec{AI}$ v) $\vec{AB} \cdot \vec{BD}$

Άσκηση: 1.94 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

ii) $\vec{a}^2$

iii) $\vec{\beta}^2$

iv) $(\vec{a} + 2\vec{\beta})^2$

v) $(\vec{a} - \vec{\beta})^2$

Άσκηση: 1.95 (★) Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως:

$$\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \text{ και } \vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$$

Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε:

$$\vec{OM} = \frac{1}{5} (2\vec{OA} - \vec{OB})$$

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha'. \vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\beta'. \vec{OM} = \vec{j}$$

2. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$

Άσκηση: 1.96 (★) Θεωρούμε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε:

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{\beta}| = 4 \text{ και } \widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$$

1. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$.

2. Να βρείτε τα $\vec{a}^2$ και $\vec{\beta}^2$

3. Να αποδείξετε ότι: $(3\vec{a} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{\beta}) = 15$

Άσκηση: 1.97 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν:

$$|\vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |\vec{\beta}| = 4 \text{ και } \widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{6}$$

Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

ii) $2\vec{a} \cdot (3\vec{a} + 2\vec{\beta})$

iii) $(\vec{a} + \vec{\beta})^2$

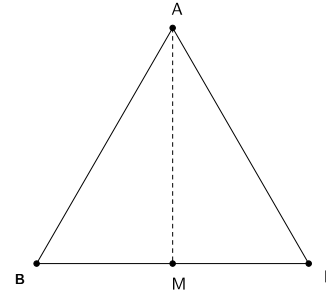
Άσκηση: 1.98 (★) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 10 και το μέσον M της πλευράς $B\Gamma$.

1. Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

- i) $(\vec{AB}, \vec{AI})$ ii) $(\vec{AM}, \vec{BI})$ iii) $(\vec{AM}, \vec{AI})$
 iv) $(\vec{BM}, \vec{IM})$ v) $(\vec{IM}, \vec{IB})$

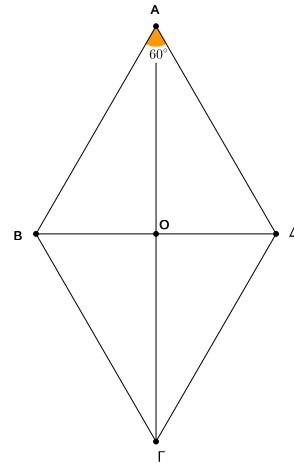
2. Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- i) $\vec{AM} \cdot \vec{BI}$ ii) $\vec{AM} \cdot \vec{AI}$ iii) $\vec{IM} \cdot \vec{IB}$



Άσκηση: 1.99 (★) Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , πλευράς 4 και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

- i) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ ii) $\vec{AD} \cdot \vec{BI}$ iii) $\vec{OD} \cdot \vec{AO}$
 iv) $\vec{OD} \cdot \vec{OB}$ v) $\vec{AD} \cdot \vec{ID}$



Άσκηση: 1.100 Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, -2)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(0, 1)$. Αν M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$ και Δ είναι ένα σημείο για το οποίο ισχύει $\vec{BD} = 2\vec{AI}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- i) $\vec{AB} \cdot \vec{AI}$ ii) $(\vec{AM} \cdot \vec{BI}) \vec{AI}$ iii) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

Άσκηση: 1.101 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, 0)$ και $\vec{\gamma} = (\kappa, \lambda)$. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ και λ ώστε να ισχύουν:

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 6 \text{ και } \vec{a} \cdot \vec{\gamma} = 8$$

Άσκηση: 1.102

1. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν:

$$\text{i) } |\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| |\vec{\beta}| \quad \text{ii) } (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 \leq \vec{a}^2 \vec{\beta}^2$$

Πότε οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ως ισότητες;

2. Να αποδείξετε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2, y_1, y_2 ισχύει:

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2) (x_2^2 + y_2^2)$$

Πότε η παραπάνω ισχύει ως ισότητα;

3. Να αποδείξετε ότι για τέσσερις πραγματικούς αριθμούς a, β, γ, δ ισχύει:

$$(a + \beta + \gamma + \delta)^2 \leq [(a + \beta)^2 + 1] [(\gamma + \delta)^2 + 1]$$

Άσκηση: 1.103 (★) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (3, -1)$. Να υπολογίσετε:

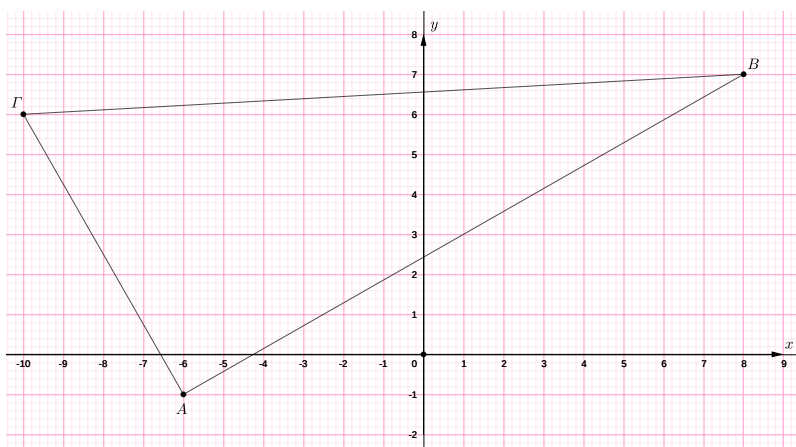
1. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$.
2. Το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$.

Άσκηση: 1.104 (★) Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, 5)$, $B(7, 8)$, $\Gamma(1, -4)$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.
2. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο: $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$
3. Να βρείτε, σε μοίρες, την γωνία $\hat{BAG}$.

Άσκηση: 1.105 Δίνονται τα σημεία $A(4, -1)$, $B(-1, -2)$, $\Gamma(5, 7)$ και $\Delta(1, 1)$. Να αποδείξετε ότι $\vec{A\Delta} \perp \vec{B\Gamma}$.

Άσκηση: 1.106 (★) Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8, 7)$, $\Gamma(-10, 6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ καθώς και του αθροίσματός

τους $\vec{AB} + \vec{BG}$.

2. Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο ABG σχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

Άσκηση: 1.107 (★) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2, 1)$ και $\vec{AG} = (3, -1)$.

1. Να αποδείξετε ότι $\vec{BG} = (1, -2)$.
2. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \perp \vec{BG}$.
3. Να αποδείξετε ότι $|\vec{AB}| = |\vec{BG}|$.

Άσκηση: 1.108 (★) Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $\Delta(1, -2)$ και $\Gamma(9, 2)$. Να αποδείξετε ότι:

1. Το μέσον M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4, 2)$ και το μέσον N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5, 0)$.
2. $\vec{MN} = (1, -2)$ και $\vec{\Delta\Gamma} = (8, 4)$.
3. $\vec{MN} \perp \vec{\Delta\Gamma}$.

Άσκηση: 1.109 (★) Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(5, -2)$

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{AG}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.
2. Αν M είναι το μέσον του $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των $\vec{AM}$ και $\vec{BG}$.
3. Να γραφτεί το $\vec{BG}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{AG}$ και $\vec{AM}$.

Άσκηση: 1.110 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 5)$ και $\vec{u} = 2\vec{a} - \kappa\vec{\beta}$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{u}$ να είναι κάθετα.

Άσκηση: 1.111 (★) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{w} = (-10, 2)$ και τα σημεία:

$$A(-1, 2), B(\beta, 0), \Gamma(0, \gamma)$$

Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{AG}$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$
2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AG}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$
3. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$

Άσκηση: 1.112 (★) Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.
2. Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι

κάθετα.

3. Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

Άσκηση: 1.113 Θεωρούμε δύο σημεία A και B με $AB = 4$ και ένα σημείο Γ διαφορετικό από το B ώστε να ισχύει:

$$\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 16$$

Να δείξετε ότι οι ευθείες AB και $B\Gamma$ είναι κάθετες.

Άσκηση: 1.114 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-4, 3)$ και $\vec{v} = (5, 12)$. Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ για το οποίο ισχύουν $|\vec{a}| = \sqrt{37}$ και $\vec{a} \perp (2\vec{u} + 3\vec{v})$.

Άσκηση: 1.115 Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (\lambda, -1) \quad , \quad \vec{\beta} = (-1, 2\lambda - 1) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = (\kappa - \lambda, 3\kappa - 1)$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ ώστε να ισχύουν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ και $\vec{a} \perp \vec{\gamma}$.

Άσκηση: 1.116 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν:

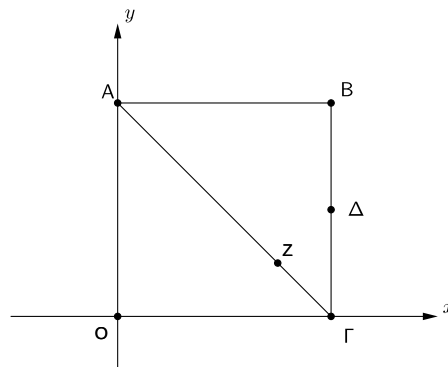
$$|\vec{a}| = 3 \quad , \quad |\vec{\beta}| = 4 \quad \text{και} \quad (8\vec{a} - \vec{\beta}) \perp (2\vec{a} + 9\vec{\beta})$$

Να δείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

Άσκηση: 1.117 (★) Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma O$ με κορυφές τα σημεία:

$$A(0, 4) \quad , \quad B(4, 4) \quad , \quad \Gamma(4, 0) \quad , \quad O(0, 0)$$

Στην διαγώνιο $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z , τέτοιο ώστε $\vec{AZ} = \frac{3}{4}\vec{A\Gamma}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσον Δ της $B\Gamma$.



1. Να βρείτε:

α'. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

β'. Τις συντεταγμένες του σημείου Z .

2. Αν το σημείο Δ είναι το $(4, 2)$ και το σημείο Z το $(3, 1)$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $Z\Delta$ είναι κάθετη στην ευθεία AG .

Άσκηση: 1.118 Έστω $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\vartheta \neq \frac{\pi}{4}$. Θεωρούμε τα σημεία:

$$A(\eta\mu\vartheta, \sigma\upsilon\nu\vartheta) \quad , \quad B(-\eta\mu\vartheta, -\sigma\upsilon\nu\vartheta) \quad \text{και} \quad \Gamma(\sigma\upsilon\nu\vartheta, \eta\mu\vartheta)$$

1. Να δείξετε ότι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι σταθερό.
2. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο Γ .
3. Να βρείτε τις τιμές του ϑ για τις οποίες το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές.

Άσκηση: 1.119 Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(7, -4)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε $\hat{A}MB = 90^\circ$.

Άσκηση: 1.120 Αν για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{a}| = |\vec{\beta}|$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$ είναι κάθετα. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος.

Άσκηση: 1.121 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = 2 \quad , \quad |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad \widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = 60^\circ$$

Αν το διάνυσμα $\vec{u} = \kappa\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{a}$, να βρείτε τον αριθμό κ .

Άσκηση: 1.122 (★) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

1. Να υπολογίσετε το γινόμενο: $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{\beta})$
2. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{a}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$.

Άσκηση: 1.123 Θεωρούμε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$. Θεωρούμε επίσης έναν πραγματικό αριθμό x και το διάνυσμα $\vec{d} = \vec{a} + x\vec{\beta}$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x για τον οποίο το $|\vec{d}|$ είναι ελάχιστο και στην συνέχεια για την τιμή του x που βρήκατε να δείξετε ότι $\vec{d} \perp \vec{\beta}$.

Άσκηση: 1.124 (★★) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο του επιπέδου M , τέτοιο ώστε:

$$\vec{AB} - 2\vec{AM} + \vec{A\Gamma} = \vec{0}$$

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ, M είναι συνευθειακά.

2. Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσον του $B\Gamma$.
 3. Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda$$

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$, τότε:

α'. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

β'. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

■

Άσκηση: 1.125 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad \left(\vec{a}, \vec{\beta} \right)^\wedge = \frac{\pi}{3}$$

Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$.

■

Άσκηση: 1.126 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{\beta}| = 3 \quad \text{και} \quad \left(\vec{a}, \vec{\beta} \right)^\wedge = \frac{3\pi}{4}$$

Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.

■

Άσκηση: 1.127 (★) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{\beta}| = 5, \quad \left(\vec{a}, \vec{\beta} \right)^\wedge = \frac{2\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$$

Να υπολογίσετε:

1. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
2. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

■

Άσκηση: 1.128 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{a} - 2\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \left(\vec{a}, \vec{\beta} \right)^\wedge = 30^\circ$$

Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{\beta}$.

■

Άσκηση: 1.129 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6} \quad , \quad \vec{a} \perp \vec{\beta} \quad \text{και} \quad (\vec{a} - 3\vec{\beta}) \perp (\vec{a} + 2\vec{\beta})$$

Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$. ■

Άσκηση: 1.130 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = 1 \quad , \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = 60^\circ$$

Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = 3\vec{a} + \vec{\beta}$, να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου του AM . ■

Άσκηση: 1.131 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = 1 \quad , \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad \widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = 135^\circ$$

Αν σε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{a} - \vec{\beta}$, να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του. ■

Άσκηση: 1.132

1. Να αποδείξετε ότι για δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$$

2. Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = 2 \quad , \quad |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad |\vec{a} + \vec{\beta}| = 2$$

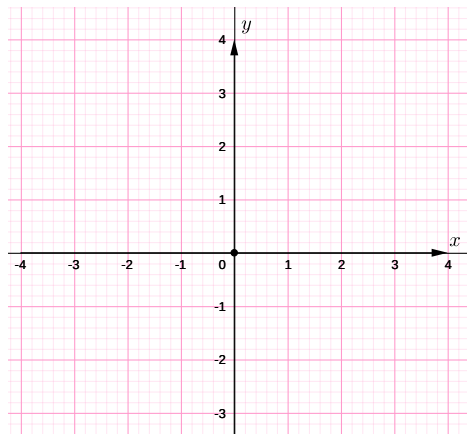
Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} - \vec{\beta}$.

3. Σε έναν ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 1 έχουμε $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$ και $AG = \sqrt{3}$. Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου του $B\Delta$. ■

Άσκηση: 1.133 (★) Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

1. Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

2. α'. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.



β'. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

Άσκηση: 1.134 (★) Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

1. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$
2. Την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$.

Άσκηση: 1.135 (★) Δίνεται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

1. Να υπολογίσετε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.
2. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$
3. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στην μορφή:

$$\vec{\gamma} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}$$

Άσκηση: 1.136 (★) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και την γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.
2. Να βρείτε την γωνία $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})}$

Άσκηση: 1.137 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{a}| = 5, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$$

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + 5\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

1. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
2. Το $|\vec{\gamma}|$

3. Τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

4. Τις γωνίες $(\vec{a}, \vec{\gamma})$ και $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$

Άσκηση: 1.138 (★) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με:

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 4, \quad (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$$

και το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\beta}$.

1. Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 4$

2. Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = 0$

3. Να βρείτε την $(\vec{a}, \vec{\gamma})$

Άσκηση: 1.139 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$$

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

1. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

2. Τα $|\vec{u}|$ και $|\vec{v}|$

3. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

4. Το συνημίτονο της γωνίας $(\vec{u}, \vec{v})$

Άσκηση: 1.140 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, -1)$. Να υπολογίσετε την γωνία τους.

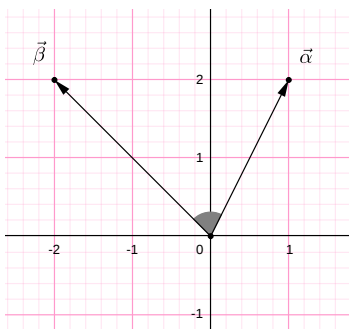
Άσκηση: 1.141 (★) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με:

$$|\vec{a}| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |\vec{\beta}| = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |3\vec{a} + 2\vec{\beta}| = |\vec{a} - 2\vec{\beta}|$$

1. Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$

2. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Άσκηση: 1.142 Με βάση το παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.



Άσκηση: 1.143 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 1)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(4, 5)$. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A}$.

Άσκηση: 1.144 Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad |2\vec{a} - \vec{\beta}| = 3$$

Να υπολογίσετε την γωνία τους.

Άσκηση: 1.145 Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει:

$$|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1 \quad \text{και} \quad \vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$$

Να υπολογίσετε την γωνία τους.

Άσκηση: 1.146 Θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο K και ακτίνα $\rho = 2$, μία διάμετρό του AB και ένα σημείο M ώστε $MK = 4$. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$.

Άσκηση: 1.147 Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο M ισχύει:

$$\vec{MA} \cdot \vec{M\Gamma} = \vec{MB} \cdot \vec{M\Delta}$$

Άσκηση: 1.148 Θεωρούμε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και πάνω στις πλευρές του AB και $B\Gamma$ τα σημεία E και Z αντίστοιχα, ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι $AZ \perp \Delta E$.

Άσκηση: 1.149

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο M ισχύει:

$$\vec{MA} \cdot \vec{B\Gamma} + \vec{MB} \cdot \vec{\Gamma\Delta} + \vec{M\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0$$

2. Τα δύο ύψη AD και BE ενός τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι και το τρίτο ύψος ΓZ του τριγώνου διέρχεται από το H . ■

Άσκηση: 1.150 Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Αν M και N είναι τα μέσα των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

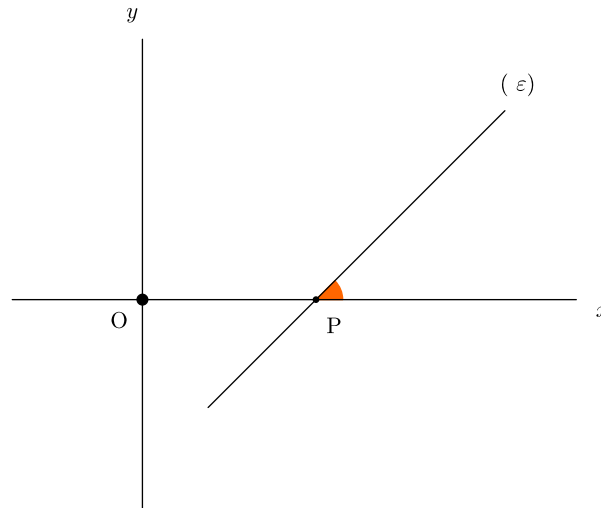
ii) $MN \perp B\Delta$ ■

Κεφάλαιο 2

Η ΕΥΘΕΙΑ

2.1 Βασικές έννοιες

Ορισμός: 2.1 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε μία ευθεία (ε) η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο P . Ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, την γωνία που πρέπει να στρέψουμε τον άξονα $x'x$ γύρω από το P κατά την θετική φορά διαγραφής μέχρι να συμπίσει με την ευθεία (ε) . Στην περίπτωση που η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ ή ταυτίζεται με αυτόν, τότε η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ ορίζεται να είναι ίση με 0.



Π Για την γωνία ϑ που σχηματίζει μία ευθεία με τον άξονα $x'x$ ισχύει:

$$0 \leq \vartheta < \pi$$

Ορισμός: 2.2 Στην περίπτωση που η ευθεία (ε) δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε ορίζουμε σαν *συντελεστή διεύθυνσης* της ευθείας (ε) την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$ και τον συμβολίζουμε λ_ε

Π Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για ευθείες που είναι κάθετες στον άξονα $x'x$.

Θεώρημα: 2.1 Ο συντελεστής διεύθυνσης μίας ευθείας είναι ίσος με τον συντελεστή διεύθυνσης οποιουδήποτε μη μηδενικού διανύσματος που είναι παράλληλο στην ευθεία.

Θεώρημα: 2.2 Έστω δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) που έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Τότε ισχύουν:

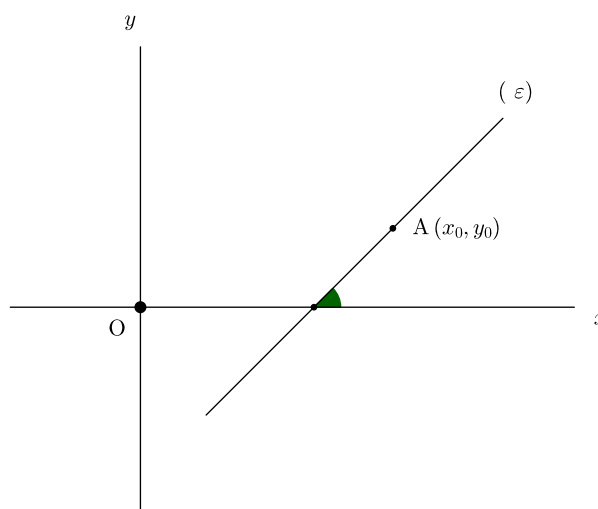
$$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

$$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

2.2 Η εξίσωση της ευθείας

Περίπτωση 1:

Αν γνωρίζουμε ένα σημείο της ευθείας $A(x_0, y_0)$ και τον συντελεστή διεύθυνσής της λ .



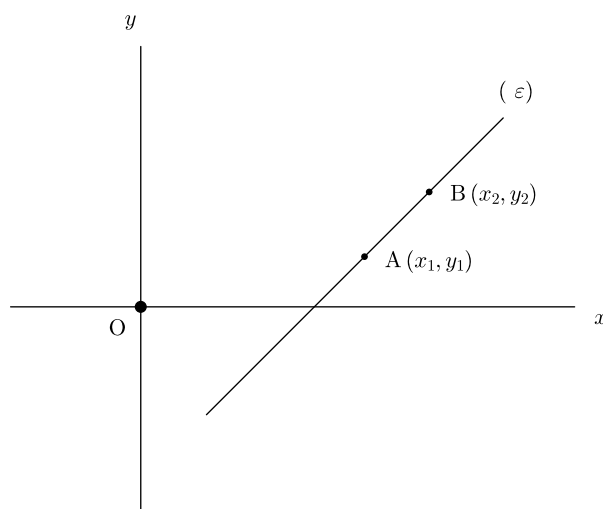
Θεώρημα: 2.3 Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι:

$$(\varepsilon) : y - y_0 = \lambda (x - x_0)$$

- Π** Η εξίσωση της ευθείας παίρνει την μορφή $y = \lambda x + \kappa$ η οποία ονομάζεται *ανηγμένη μορφή* και ο αριθμός λ (δηλαδή ο συντελεστής του x) είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Περίπτωση 2:

Αν γνωρίζουμε δύο σημεία της ευθείας $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

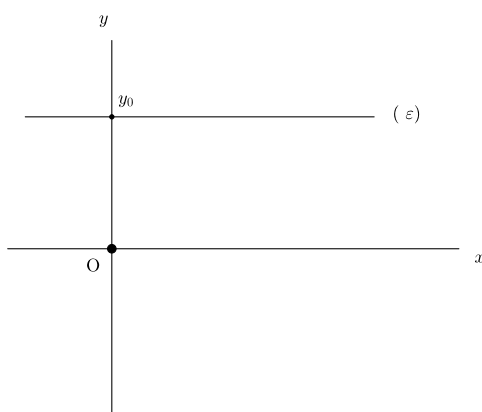


Στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι ίσος με τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή $\lambda_\varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$(\varepsilon) : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Περίπτωση 3: (Ειδικές μορφές εξίσωσης ευθείας)

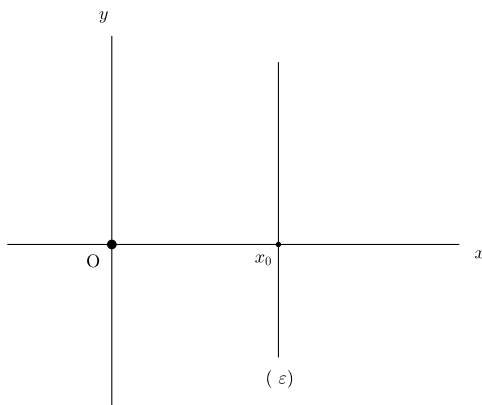
α) Η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.



Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$(\varepsilon) : y = y_0$$

β) Η ευθεία είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.



Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$(\varepsilon) : x = x_0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.1 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-1, 5)$ και:

1. είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (2, -4)$.
2. είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{b} = (0, 3)$.
3. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

Άσκηση: 2.2 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. όταν διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{2\pi}{3}$.
2. όταν διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(-1, 5)$.
3. όταν διέρχεται από τα σημεία $A(2, 4)$ και $B(4, 4)$.
4. όταν διέρχεται από τα σημεία $A(-3, 4)$ και $B(-3, 7)$.

Άσκηση: 2.3 (★) Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .
2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση $y = x + 5$.
3. Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .

Άσκηση: 2.4 (★) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M(3, \frac{1}{2})$ είναι το μέσον της $B\Gamma$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.
2. Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AG .

Άσκηση: 2.5 Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x - 3$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

1. είναι κάθετη στην ευθεία (ε) και διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.
2. είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) και διέρχεται από το σημείο $B(2, 3)$.

Άσκηση: 2.6 (★) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : x - 3y = 4, \quad (\varepsilon_2) : 9x + 3y = 6$$

1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.
2. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

Άσκηση: 2.7 Θεωρούμε την ευθεία $(\varepsilon) : 2x - y - 1 = 0$

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) και διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$.
2. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ζ) με τους άξονες συντεταγμένων.

■

Άσκηση: 2.8 (★) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2, 5)$, $B(3, 6)$ και $\Gamma(-1, -2)$.

1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$.
2. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A .
3. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

■

Άσκηση: 2.9 (★) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 2x + y = 6 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : x - 2y = -2$$

1. Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .
2. Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και $(\varepsilon_3) : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

■

Άσκηση: 2.10 (★) Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 3)$.

1. α'. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .
β'. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(\varepsilon) : y = 2x - 1$
2. Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία (ε) .

■

Άσκηση: 2.11 Δίνονται τα σημεία $A(14, 5)$ και $B(2, -1)$.

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο σημεία.
2. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

■

Άσκηση: 2.12 Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : x - 3y + 5 = 0$ και $(\varepsilon_2) : 3x + y - 5 = 0$

1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες είναι κάθετες.
2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών.
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και την αρχή O των αξόνων.

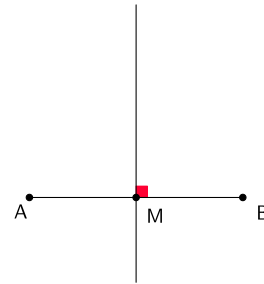
■

Άσκηση: 2.13 Δίνονται τα σημεία $A(2, 5)$ και $B(6, -3)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθύγραμμου τμήματος AB .

■

Άσκηση: 2.14 (★) Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .
2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
3. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB .



Άσκηση: 2.15 (★) Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$ και $B(6, -1)$.

1. α'. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .
β'. Να αποδείξετε ότι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB , είναι το σημείο $M(3, 2)$.
2. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ϵ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

Άσκηση: 2.16 (★) Δίνονται τα σημεία $A(-1, 5)$ και $B(3, 3)$. Να υπολογίσετε:

1. Τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
2. Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .
3. Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB .

Άσκηση: 2.17 (★) Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, -6)$. Να βρεθούν:

1. Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .
2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .
3. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ϵ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

Άσκηση: 2.18 (★) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $(\epsilon_1) : y = -x + 4$ και $(\epsilon_2) : y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.
2. Να βρείτε:
 - α'. τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$.
 - β'. την εξίσωση του ύψους BD .

Άσκηση: 2.19 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1, -5)$, $B(7, 2)$ και $\Gamma(3, -6)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το βαρύκεντρο G του τριγώνου και είναι κάθετη στην διάμεσο AD του τριγώνου.

Άσκηση: 2.20 Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $A(1, 2)$ και $\Gamma(-3, 4)$. Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου του $B\Delta$.

Άσκηση: 2.21 Μία ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, 2)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30° . Η ευθεία αυτή τέμνει την ευθεία $(\delta) : y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + 2$ στο σημείο B . Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων A και B . ■

Άσκηση: 2.22 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(1, 2)$ και τέμνει τους άξονες στα σημεία A, B έτσι ώστε το M να είναι το μέσον του AB . ■

Άσκηση: 2.23 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(2, -3)$ και σχηματίζουν με τους άξονες συντεταγμένων ισοσκελές τρίγωνο. ■

Άσκηση: 2.24 (★★) Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$. ■

- Μία ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M . Να βρείτε:
 - την εξίσωσή της.
 - για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.
- Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.
 - να βρείτε, με την βοήθεια του λ , τα μήκη των τμημάτων OA, OB .
 - να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
 - να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

Άσκηση: 2.25 Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(1, 2)$ ως προς την ευθεία με εξίσωση: $(\varepsilon) : x + y = 5$ ■

Άσκηση: 2.26 (★) Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5, 1)$ και $B(-3, 5)$. ■

- Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B .
- Να βρείτε:
 - την εξίσωση της ευθείας (ε') που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην (ε) .
 - το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ε') .
 - το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία (ε) .

Άσκηση: 2.27 (★) Δίνονται το σημείο $A(4, -2)$ και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε: ■

- την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1) .
- το σημείο τομής B , των ευθειών (ε_1) και $(\varepsilon_2) : y = -x + 2$.
- το συμμετρικό Γ του σημείου A , ως προς την ευθεία (ε_1) .

Άσκηση: 2.28 (★) Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έχουν εξισώσεις:

$$x + 2y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad 2x + y + 5 = 0$$

αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1, 2)$.

1. Να αποδείξετε ότι:

α'. Η κορυφή A του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $A(-3, 1)$.

β'. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $\Gamma(5, 3)$.

2. Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

■

Άσκηση: 2.29 Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ δίνονται:

$$(AB) : 8x + 3y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad (AD) : 2x + y - 1 = 0$$

Αν μία διαγώνιος του παραλληλογράμμου έχει εξίσωση $3x + 2y + 3 = 0$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

■

Άσκηση: 2.30 (★) Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(1, 4)$. Η πλευρά AD έχει εξίσωση $3x - 2y + 5 = 0$ και η διαγώνιος $B\Delta$ έχει εξίσωση $y = x + 2$.

1. Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-1, 1)$.

2. Αν οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$.

■

Άσκηση: 2.31 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 3)$ τα ύψη του που άγονται από τις κορυφές του B και Γ έχουν εξισώσεις:

$$v_B : y = 2x - 5 \quad \text{και} \quad v_\Gamma : 2x - 2y + 1 = 0$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών του B, Γ .

■

Άσκηση: 2.32 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\Gamma(2, 3)$, το ύψος και η διάμεσος που άγονται από την κορυφή A έχουν εξισώσεις:

$$v_A : 3x - 5y + 6 = 0 \quad \text{και} \quad \mu_A : x - 11y + 2 = 0$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών του A, B .

■

Άσκηση: 2.33 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(3, 5)$, οι διάμεσοι που άγονται από τις κορυφές B και Γ έχουν εξισώσεις:

$$\mu_B : y = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7} \quad \text{και} \quad \mu_\Gamma : y = -x + 2$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ .

■

Άσκηση: 2.34 Ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφές τα σημεία $A(1, 3)$ και $\Gamma(3, -1)$. Να βρείτε τις δύο άλλες κορυφές του τετραγώνου. ■

Άσκηση: 2.35 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το μέσον της πλευράς AB είναι το σημείο $M(0, -1)$, ενώ το ύψος από την κορυφή A και η διάμεσος από την κορυφή B έχουν εξισώσεις:

$$v_A : x + 3y - 5 = 0 \quad \text{και} \quad \mu_B : x = 1$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών και τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου. ■

Άσκηση: 2.36 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(3, -1)$ το ορθόκεντρο είναι το σημείο $H(4, -1)$ και η μεσοκάθετος της πλευράς AB είναι η ευθεία $(\varepsilon) : x + 4y - 16 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του τριγώνου και τις εξισώσεις των πλευρών του. ■

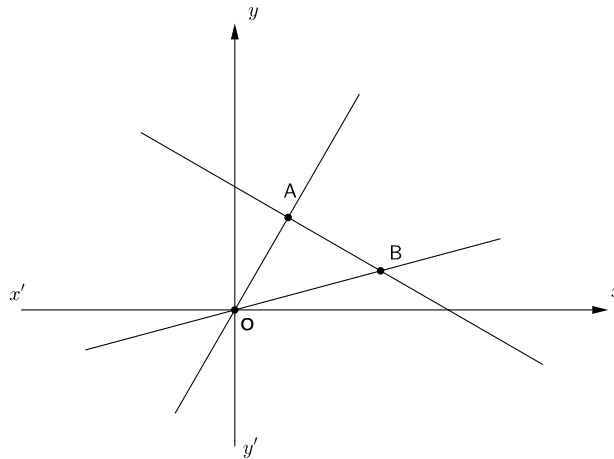
Άσκηση: 2.37 (★) Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1) : 3x - y = 5$ και $(\varepsilon_2) : x - y + 1 = 0$.

1. Να βρεθεί το σημείο τομής τους M .
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3, 4)$ και είναι κάθετη στην (ε_2) .
3. Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1) . ■

Άσκηση: 2.38 (★★) Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.
2. Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:
 - α'. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .
 - β'. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.
3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$. ■

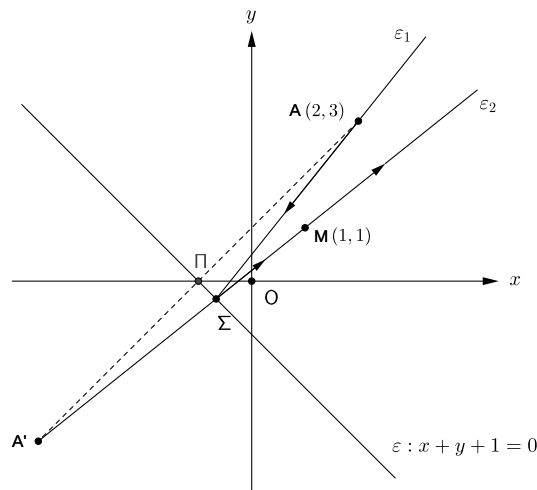
Άσκηση: 2.39 (★★) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $A(1, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$.



1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και την γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x' .
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και την γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα x' .
3. Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.
4. Να δείξετε ότι: $\varepsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

■

Άσκηση: 2.40 (★★) Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2, 3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$.



1. α'. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1, 0)$.
β'. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε) , είναι το σημείο $A'(-4, -3)$.
2. α'. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) , η οποία διέρχεται από τα σημεία A', Σ, M , τότε να βρείτε την εξίσωσή της.
β'. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας

(ε_1) πάνω στην ευθεία (ε) .

3. Αν $\Sigma(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1) .

Άσκηση: 2.41 (★★) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : y = \sqrt{3}x$ και $(\varepsilon_2) : y = x$.

1. Να σχεδιάσετε τις (ε_1) , (ε_2) στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
2. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει κάθε μία από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) με τον άξονα $x'x$.
3. Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των (ε_1) , (ε_2) είναι 15° .
4. Να αποδείξετε ότι:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

Άσκηση: 2.42 (★★) Δίνονται τα σημεία $A(3, 2a)$, $B(4, a)$, $\Gamma(a+1, 1-a)$ και $\Delta(a, 1)$ με $a \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι:

- α'. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -ax + 5a$
 β'. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν:

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

- γ'. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $a \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

2. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός a ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση: 2.43 (★★) Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $O(0, 0)$, $B(\kappa, 0)$ και $\Gamma(0, 2\kappa)$, όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου $OB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $OB\Delta E$ και $OGZH$, τότε:

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta$ και BZ .
2. Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου $OB\Gamma$ που διέρχεται από το O .
3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ και το ύψος του (β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2.3 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

Θεώρημα: 2.4 Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής:

$$ax + by + \gamma = 0 \quad (1)$$

όπου $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία.

- Π Η παραπάνω μορφή της εξίσωσης της ευθείας ονομάζεται *γενική μορφή* της εξίσωσης της ευθείας.
- Π Αν $a = 0$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 0. Αν $b = 0$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης.
- Π Αν μία ευθεία δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, η εξίσωσή της μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$y = \lambda x + \kappa$$

Η παραπάνω μορφή ονομάζεται *ανηγμένη μορφή* της εξίσωσης της ευθείας και ο αριθμός λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

- Π Αν η εξίσωση μίας ευθείας είναι στην γενική μορφή $ax + by + \gamma = 0$, τότε:
 - το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\beta, -a)$ είναι παράλληλο στην ευθεία.
 - το διάνυσμα $\vec{\delta} = (a, \beta)$ είναι κάθετο στην ευθεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.44 (★) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 3x - y = 5 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : x - y + 1 = 0$$

1. Να βρεθεί το σημείο τομής τους M .
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3, 4)$ και είναι κάθετη στην (ε_2) .
3. Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1) .

■

Άσκηση: 2.45 Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού k η εξίσωση:

$$(k - 1)x + ky + k^2 = 0$$

παριστάνει ευθεία. Για ποιές τιμές του k η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα x' και για ποιές τιμές είναι παράλληλη στον άξονα y' ;

■

Άσκηση: 2.46 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : (\lambda - 1)x + \lambda y = \lambda \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : \lambda x + (\lambda + 1)y = 2\lambda$$

1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών.

■

Άσκηση: 2.47 (★) Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad (3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0 \quad (2)$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.

■

Άσκηση: 2.48 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(\lambda - 1)x + (\lambda^2 + 5\lambda + 6)y - \lambda + 3 = 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Να βρείτε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού λ η παραπάνω ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
3. Να βρείτε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού λ η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta) : x + y - 3 = 0$.

■

Άσκηση: 2.49 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 3x + (\lambda - 2)y - \lambda = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x - \lambda y - 1 = 0$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες οι ευθείες είναι:

i) παράλληλες

ii) κάθετες

■

Άσκηση: 2.50 Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών:

$$(\varepsilon_1) : x - 7y + 2 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 3x + 4y - 1 = 0$$

■

Άσκηση: 2.51 Να βρείτε την αμβλεία γωνία των ευθειών:

$$(\varepsilon_1) : 2x + \sqrt{3}y - 7 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 5x - \sqrt{3}y + 10 = 0 = 0$$

■

Άσκηση: 2.52 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 5x + \lambda y + 7 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 3x + 2y = 0$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες οι ευθείες σχηματίζουν οξεία γωνία ίση με 45° .

■

Άσκηση: 2.53 Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή της παραμέτρου λ , κάθε μία από τις παρακάτω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε.

i) $(\varepsilon) : (\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 4\lambda - 2 = 0$ ii) $(\varepsilon) : (\lambda^2 + \lambda + 1)x + (\lambda^2 - 2\lambda)y - 3\lambda - 1 = 0$

■

Άσκηση: 2.54 (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0 \quad (1), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία (ε) .
2. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες (ε) :
 α'. είναι παράλληλες στον $x'x$.
 β'. είναι παράλληλες στον $y'y$.
 γ'. διέρχονται από το $(0, 0)$.
3. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε) που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

■

Άσκηση: 2.55 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(3\lambda + 2)x + (\lambda - 1)y - (\lambda + 4) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .
2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται μέσω της παραπάνω εξίσωσης διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε.
3. Να βρείτε ποιά ευθεία της παραπάνω οικογένειας ευθειών είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $(\zeta) : 4x - 2y + 7 = 0$.

■

Άσκηση: 2.56 (★★) Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών:

$$(\varepsilon_a) : (a - 4)x - 2ay + a + 4 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $a = 0$ και όταν $a = 1$ και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο M .
2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το M .
3. Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.
 α'. Να αποδείξετε ότι $0 < a < 4$.
 β'. Να βρείτε για ποια τιμή του a ισχύει $OA = 2OB$.

■

Άσκηση: 2.57 Η ευθεία $(\varepsilon) : y = 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A . Δύο σημεία M και N κινούνται πάνω στις ευθείες $x'x$ και (ε) αντίστοιχα, έτσι ώστε το άθροισμα των τετμημένων τους να είναι ίσο με 6. Να αποδείξετε ότι η ευθεία MN διέρχεται από σταθερό σημείο.

■

Άσκηση: 2.58 Να σχεδιάσετε, σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων, τις ευθείες που παριστάνουν οι παρακάτω εξισώσεις:

i) $x^2 - y^2 - x + 5y - 6 = 0$

ii) $4x^2 - y^2 - 4x - 2y = 0$

■

Άσκηση: 2.59 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y^2 - 3x^2 = 0$$

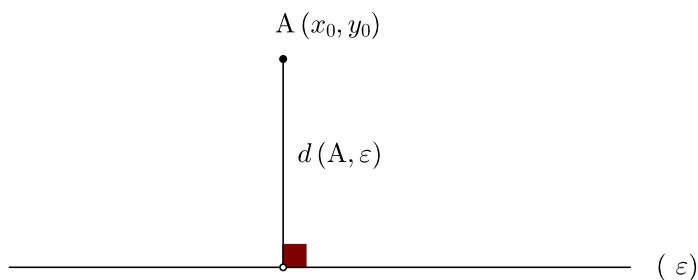
1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες.
2. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει κάθε μία από τις ευθείες αυτές με τον άξονα $x'x$.
3. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία $(\delta) : y = -x$ με κάθε μία από τις παραπάνω ευθείες.

■

2.4 Απόσταση σημείου από ευθεία και εμβαδόν τριγώνου

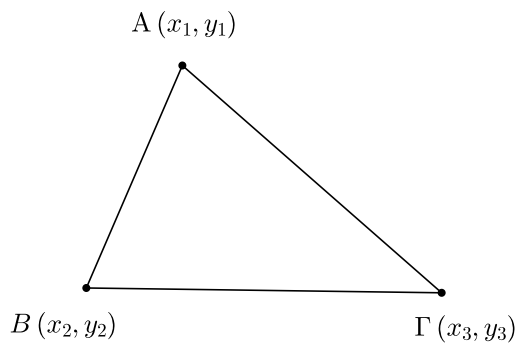
Θεώρημα: 2.5 Η απόσταση του σημείου $A(x_0, y_0)$ από την ευθεία $(\varepsilon) : ax + by + \gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|ax_0 + by_0 + \gamma|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Θεώρημα: 2.6 Το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB}, \vec{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση: 2.60 Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $A(2, -3)$ από την ευθεία:

$$(\varepsilon) : y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

Άσκηση: 2.61 (★) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 8x + y - 28 = 0, \quad (\varepsilon_2) : x - y + 1 = 0, \quad (\varepsilon_3) : 3x + 4y + 5 = 0$$

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ε_1) και (ε_2) .
2. Αν το σημείο τομής είναι το $M(3, 4)$, να υπολογίσετε:
 - α'. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων.
 - β'. Την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε_3) .

Άσκηση: 2.62 (★) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : x - 2y = -1, \quad (\varepsilon_2) : 2x + y = 4, \quad (\varepsilon_3) : y = -1$$

1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.
2. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(\frac{7}{5}, \frac{6}{5})$.
3. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_3) .

Άσκηση: 2.63 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1, 4)$, $B(5, 2)$ και $\Gamma(-3, -4)$. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους του AD .

Άσκηση: 2.64 (★) Δίνεται το σημείο $A(1, 2)$ και η ευθεία $(\varepsilon) : y = x + 3$

1. Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) .
3. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) , (ε) .

Άσκηση: 2.65 (★) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 2x + 3y = 5 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 4x + 6y = 8$$

1. Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.
2. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, 1)$ είναι σημείο της ευθείας (ε_1) .
3. Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_2) .

Άσκηση: 2.66 Δίνεται η ευθεία:

$$(\varepsilon) : (3k - 5)x + (k - 3)y - 4k + 8 = 0 = 0$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k για τις οποίες η ευθεία ισαπέχει από τα σημεία $A(4, -3)$ και $B(3, 2)$. ■

Άσκηση: 2.67 Δίνεται η ευθεία:

$$(\varepsilon) : y - 1 + \lambda(x + y) = 0$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία το σημείο $A(0, 1)$ απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με 1. ■

Άσκηση: 2.68 Δίνεται το σημείο $A(k, 1)$ και η ευθεία:

$$(\varepsilon) : x + y + k - 1 = 0$$

Να βρείτε τις τιμές του k ώστε η απόσταση του σημείου από την ευθεία να είναι ίση με $\sqrt{2}$. ■

Άσκηση: 2.69 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 3x + y - \lambda = 0, \quad (\varepsilon_2) : 3x + 4y + 6 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_3) : 6x + 5y - 9 = 0$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε η ευθεία ε_1 να απέχει από το σημείο τομής των ευθειών ε_2 και ε_3 απόσταση ίση με 4. ■

Άσκηση: 2.70 (★) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : y = \frac{2}{3}x + 1 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : x = \frac{3}{2}y + 9$$

1. Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$.
2. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2) . ■

Άσκηση: 2.71 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 6x - 8y - 7 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 3x - 4y + 6 = 0$$

Αφού αποδείξετε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες, να υπολογίσετε την απόστασή τους. ■

Άσκηση: 2.72 Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές $A(5, 2)$, $B(-9, -3)$ και $\Gamma(-3, -5)$. ■

Άσκηση: 2.73 (★) Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(-3, -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .
2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι $E = 8$.

■

Άσκηση: 2.74 (★) Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$ και $\Gamma(1, 1)$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{AG}$.
2. α'. Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.
β'. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

■

Άσκηση: 2.75 (★) Δίνονται τα σημεία $A(1, -4)$, $B(-3, -4)$ και $\Gamma(1, 4)$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{GB}$ και $\vec{GA}$.
2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.
3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

■

Άσκηση: 2.76 (★) Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $\Gamma(4, -1)$ και το διάνυσμα $\vec{AB} = (3, -1)$.

1. Να βρεθεί το σημείο B .
2. Αν $B(5, 0)$:
α'. να δείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
β'. να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

■

Άσκηση: 2.77 Θεωρούμε τα σημεία $A(0, k+1)$, $B(1, k)$ και $\Gamma(4, -2)$. Να βρείτε τις τιμές του k ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει εμβαδόν ίσο με $\frac{1}{2}$.

■

Άσκηση: 2.78 Δίνεται η ευθεία:

$$(\varepsilon) : kx - (k+1)y + k^2 + k = 0$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό k ώστε η ευθεία να σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο που έχει εμβαδόν 1.

■

Άσκηση: 2.79 (★) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1, 7)$, $B(-1, 5)$ και $\Gamma(3, 3)$.

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
2. Αν M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$, τότε να υπολογίσετε:
α'. τις συντεταγμένες του M .
β'. την εξίσωση της διαμέσου AM .

■

Άσκηση: 2.80 (★) Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία:

$$A(1, 1), B(5, 2), \Gamma(0, -2) \text{ και } \Delta(8, 0)$$

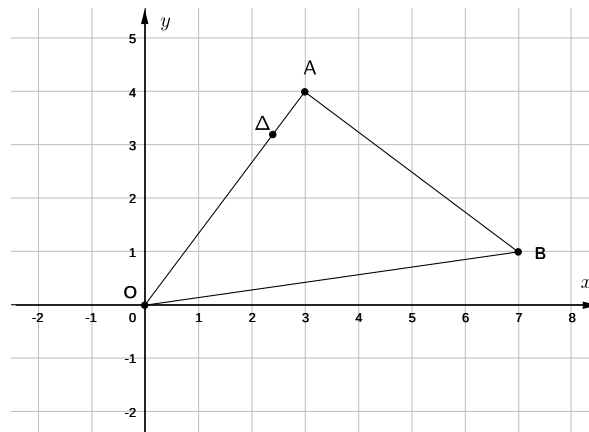
1. Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος (α).

■

Άσκηση: 2.81 Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ με $A(2, 3)$, του οποίου η πλευρά $B\Gamma$ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon) : 2x - y + 4 = 0$

■

Άσκηση: 2.82 (★) Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3, 4)$, $B(7, 1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO .



1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{AD}$.
2. Να δείξετε ότι: $\vec{AD} = -\frac{1}{5}\vec{OA}$
3. Δίνεται ότι $(OAB) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι:

$$(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$$

■

Άσκηση: 2.83 (★★) Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :
 - α'. Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.
 - β'. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.
2. Για $\lambda = -2$, να βρείτε:
 - α'. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$
 - β'. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

■

Άσκηση: 2.84 (★★) Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ και η ευθεία $(\varepsilon) : 3x + y + a = 0$ με $a \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε για ποια τιμή του a , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
2. Για $a = 4$:
 - α'. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$.
 - β'. Να βρείτε το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

■

Άσκηση: 2.85 Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0, \quad \lambda \neq 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμία από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.
2. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου, του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του προηγούμενου ερωτήματος είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ .

■

Άσκηση: 2.86 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : (\lambda + 1)x - 3y - \mu = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 3x - 2\mu y + 3\mu - 2\lambda = 0$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών λ και μ για τις οποίες οι ευθείες είναι κάθετες και ισαπέχουν από το σημείο $A(-4, 2)$.

■

Άσκηση: 2.87 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : x + \mu y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 2\mu x + 2y + \lambda = 0$$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών λ και μ για τις οποίες οι ευθείες είναι παράλληλες και η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με $2\sqrt{2}$.

■

Άσκηση: 2.88 (★★) Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1, 1)$, $B(4, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

1. Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.
2. Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία:

$$(\varepsilon) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

3. Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του (β) ερωτήματος τέτοιο ώστε να ισχύει $KA = KB$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ;

■

Άσκηση: 2.89 (★★) Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(3, 3)$.

1. Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του M από τα A και B αντίστοιχα.
2. Να γράψετε την σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2 ώστε το σημείο M να ανήκει στην μεσοκάθετο του AB .
3. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB .
4. Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣAB να είναι ισόπλευρο.

■

Άσκηση: 2.90 (★★) Δύο οικισμοί A και B βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $(\delta) : x + y - 1 = 0$.

1. Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου (δ) :
 α'. Ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.
 β'. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.
2. Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A, B και Γ είναι ίσο με 8.

■

Άσκηση: 2.91 (★★)

Δύο εργοστάσια A και B τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $A(2, 1)$ και $B(4, 3)$ βρίσκονται κοντά σε μία ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μία αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.



1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.
2. Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $(\varepsilon) : y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξίσου από τα δύο εργοστάσια.
3. Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος (β) είναι $N(4, 1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

■

Άσκηση: 2.92 (★★) Δίνεται η εξίσωση:

$$(2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0 \quad (1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
3. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (1) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ) . Ποια είναι η εξίσωση της (ε) ;
4. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(1, 3)$ από την ευθεία (ζ) .

■

Άσκηση: 2.93 (★★) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (1, 1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2, 1)$.

1. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.
2. Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{a}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB ,
 - α'. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(4, -1)$ και $B(3, 2)$.
 - β'. Να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$
 - γ'. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και:

$$|\vec{KT}| = \frac{1}{2}|\vec{AB}|$$

■

Άσκηση: 2.94 (★★) Δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(\frac{a}{2}, b)$ και $M(\frac{a}{2}, 0)$, όπου a, b σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

1. Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσον της βάσης του OA .
2. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι:

$$OB : 2bx - ay = 0 \text{ και } AB : 2bx + ay - 2ab = 0$$

3. Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$
4. Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

■

Άσκηση: 2.95 (★★) Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 3)$.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(\epsilon) : y = 2x - 1$.
2. Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ϵ) και την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.
3. Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

■

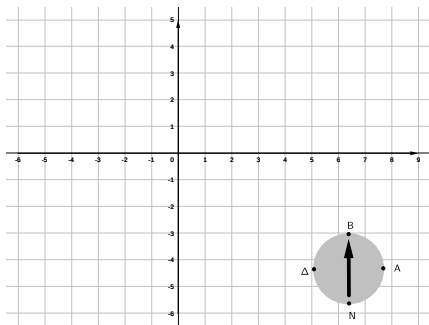
Άσκηση: 2.96 (★★) Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας:

$$(\epsilon_\lambda) : \lambda x + (1 - \lambda)y + 2 = 0$$

όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει την φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0, 0)$.

1. α'. να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .
β'. να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από τον φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.
2. Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει

το P έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.



Άσκηση: 2.97 (★★) Στον χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις A και B έχουν συντεταγμένες $A(3, 6)$ και $B(7, -2)$.

1. Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή.
2. Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ , ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία A, B και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη.

Άσκηση: 2.98 (★★) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(5, -1)$.

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
3. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή A . Στην συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας $B\Gamma$, από το οποίο, το A απέχει την ελάχιστη απόσταση.
4. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$(MAB) = \frac{1}{2} (AB\Gamma)$$

Άσκηση: 2.99 (★★) Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 5)$ και $\Gamma(-2, 2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4a - 1, 3a + 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
3. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.
4. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει:

$$(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$$

Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

Άσκηση: 2.100 (★★) Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B . Κάθε χρονική στιγμή t , με $t \geq 0$, η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δεύτερου είναι $B(3t-1, -4t-1)$.

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.
2. Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;
3. Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t = 2$.
4. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία $(\varepsilon) : 4x + 3y + 7 = 0$ ισούται με 6.

Άσκηση: 2.101 (★★) Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία:

$$A(1, -1), B(2, 2), \Gamma(\mu - 1, 3\mu - 2), \mu \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία:

$$(\varepsilon) : y = 3x + 1$$

2. Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.
4. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο B και από τις οποίες το σημείο A , απέχει απόσταση ίση με 1.

Άσκηση: 2.102 (★★) Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12\tau\mu$

1. Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών:

$$(\varepsilon_1) : 4x - 3y - 9 = 0 \text{ και } (\varepsilon_2) : 4x - 3y + 7 = 0$$

2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) .
3. Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδόν με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε.

Άσκηση: 2.103 (★★) Δίνονται τα σημεία $A(2, 0)$, $B(3, 4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α'. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ .
- β'. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B , έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon) : 15x - 8y - 30 = 0$$

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ϵ), η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B .
3. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ϵ) και (ζ).

Άσκηση: 2.104 (★★) Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $A(2, 6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $P(\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. α'. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.
β'. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι.
2. Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
α'. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι;
β'. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι.

Άσκηση: 2.105 Να βρείτε σημείο του άξονα $y'y$ το οποίο να ισαπέχει από την αρχή των αξόνων και την ευθεία (ϵ) : $4x - 3y - 1 = 0$

Άσκηση: 2.106 Να βρείτε τα σημεία της ευθείας (ϵ) : $x + y - 1 = 0$ τα οποία απέχουν από την ευθεία (ζ) : $y = 2x - 1$ απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

Άσκηση: 2.107 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\epsilon) : x + y - 2 = 0 \quad \text{και} \quad (\zeta) : 3x + 4y - 10 = 0$$

Να βρείτε τα σημεία της ευθείας τα οποία απέχουν από την ευθεία απόσταση ίση με 2.

Άσκηση: 2.108 Δίνονται τα σημεία $A(4, 2)$, $B(3, -5)$ και η ευθεία (ϵ) : $7x + y - 23 = 0$. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας (ϵ) ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M .

Άσκηση: 2.109 Δίνεται το σημείο $A(2, -1)$ και η ευθεία (ϵ) : $x - y - 4 = 0$.

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ).
2. Να βρείτε τα σημεία B και Γ της ευθείας (ϵ) τα οποία απέχουν από το σημείο A απόσταση ίση με 5.
3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Άσκηση: 2.110 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $A(1, 2)$, $E_{AB\Gamma} = 8$ και ο φορέας της βάσης του $B\Gamma$ είναι η ευθεία (ϵ) : $x - y - 1 = 0$. Να βρείτε τις δύο άλλες κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Άσκηση: 2.111 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : x - y + 2 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : x + y - 2 = 0$$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° και απέχει από το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) απόσταση ίση με $\sqrt{2}$. ■

Άσκηση: 2.112 Να βρείτε τις ευθείες που έχουν συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{3}{2}$ οι οποίες σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 12. ■

Άσκηση: 2.113 Να βρείτε την ευθεία που είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta) : 3x - 2y - 1 = 0$ και ισαπέχει από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(-2, 3)$. ■

Άσκηση: 2.114 Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y = -\frac{1}{2}x + 5$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία (ε) και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4. ■

Άσκηση: 2.115 Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και απέχουν από το σημείο $A(1, 2)$ απόσταση ίση με 1. ■

Άσκηση: 2.116 Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(-2, 1)$ και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2. ■

Άσκηση: 2.117 Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2, 1)$ και τέμνουν τους άξονες σε σημεία τα οποία ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων. ■

Άσκηση: 2.118 Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και οι οποίες όταν τέμνουν τις ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : x - y - 1 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : x - y - 3 = 0$$

στα σημεία A και B αντίστοιχα, η απόσταση AB είναι ίση με 2. ■

Άσκηση: 2.119 Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(1, 1)$ και τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, ώστε να ισχύει:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$$

Άσκηση: 2.120 Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(1, 1)$ και σχηματίζουν με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο με εμβαδόν 2. ■

Άσκηση: 2.121 Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2, 1)$ και σχηματίζουν γωνία 45° με την ευθεία $(\varepsilon) : 2x - 3y - 6 = 0$. ■

Άσκηση: 2.122 Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(-1, 2)$ και ισαπέχουν από τα σημεία $A(-3, 0)$ και $B(1, 3)$. Στην συνέχεια να βρείτε τα σημεία των παραπάνω ευθειών που απέχουν την μικρότερη απόσταση από το σημείο $K(1, 2)$. ■

Άσκηση: 2.123 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και η οποία τέμνει την ευθεία $(\delta) : x - y + 1 = 0$ σε σημείο B , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου OAB να είναι ίσο με 5. ■

Άσκηση: 2.124 Δίνονται οι παράλληλες ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 3x + y + 4 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 3x + y + 8 = 0$$

Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλής τους. ■

Άσκηση: 2.125 ται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 3x - 4y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : 5x + 12y + 4 = 0$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν τεμνόμενες οι ευθείες αυτές. ■

Άσκηση: 2.126 Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 0)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(3, -1)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει:

$$3MA^2 + MB^2 - 4M\Gamma^2 = 2$$

Άσκηση: 2.127 Θεωρούμε ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία:

$$A(-2, -1), \quad B(2, -1), \quad \Gamma(2, 1) \quad \text{και} \quad \Delta(-2, 1)$$

Για ένα τυχαίο σημείο M του επιπέδου, θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\vec{a} = 2\vec{MA} - \vec{MA} - \vec{M\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{M\Gamma}$$

Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M . ■

Άσκηση: 2.128 Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1) : 3x + y + 3 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : x + 2y - 4 = 0$$

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .
2. Αν η ευθεία (ε_1) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία (ε_2) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ , τότε:
 - α'. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ .
 - β'. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
3. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει:

$$(KB\Gamma) = (AB\Gamma)$$

ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

Άσκηση: 2.129