

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Διάρκεια: 3 ώρες

Ονοματεπώνυμο: _____

ΘΕΜΑ Α : Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . Μονάδες 7

Α2. Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ; Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

« Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ »

α) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής η παραπάνω πρόταση.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες $1+3 = 4$

Α4. Να εξετάσετε αν είναι σωστή ή λάθος καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε πάντοτε ισχύει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

β) Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη.

γ) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντοτε διάστημα.

δ) Δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$, τότε $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

ΘΕΜΑ Β : Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 3\sqrt{x-1} - x - 1$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 3

B4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f αφού πρώτα προσδιορίσετε τα σημεία τομής της με τον άξονα xx' . Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον οριζόντιο άξονα.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ : Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x\ln(x-1)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ για κάθε $x \geq 1$.

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[0, 1]$ και η g κοίλη στο $[1, e]$.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης g . Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

Μονάδες 5

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο
$$h(x) = \begin{cases} x\ln(x-1), & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\ln x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

i. Να δείξετε ότι η h είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h , τον άξονα yy' και τις ευθείες $y = x - 1$ και $x = e$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ : Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x \ln x + x - 1$,

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ και } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + g(x)}{x - 1} = 4.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $g(1) = 0$ και $g'(1) = 3$

Μονάδες 5

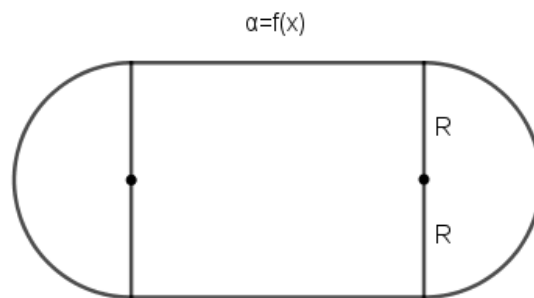
Δ2. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

Μονάδες 6

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.
Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

Δ4. Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από ένα ορθογώνιο που η μία του διάσταση είναι $\alpha = f(x)$ με $x > 1$ και δύο ημικύκλια ακτίνας R . Αν η περίμετρος του σχήματος είναι ίση με $4f(e)$, να προσδιορίσετε για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο.



Μονάδες 7

Καλή επιτυχία !!!