ΘΕΜΑΤΑ αντίστοιχα

1) Αρχική ΕΦΑΡΜΟΓΗ για ***διαμέριση*** διαστήματος

Συνδυασμένο με εναλλακτική ΛΥΣΗ θέματος

Από το σχολικό ΒΙΒΛΙΟ

– Άσκηση 1 / Β΄ομάδα σελ. 139 (χωρίς χρήση Παραγώγου)

****

Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το R ισχύει

$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ για όλα τα x y, ∈R,

να αποδείξετε ότι η f είναι **σταθερή**.

Θεωρούμε $x < z < y$ $\mu\varepsilon$ $z = \frac{x+y}{2}$

ή $z - x = y - z = \frac{y-x}{2}$

δηλαδή $z = x + \frac{y-x}{2} = y - \frac{y-x}{2}$

που είναι ***Διαχωρισμός*** του διαστήματος $[x, y]$

σε *δύο ίσα διαστήματα* τα $[x, z]$ & $[z, y]$,

οπότε

$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq$

$\leq |f(z) - f(x)| + |f(y) - f(z)| \leq |z - x|^2 + |y - z|^2 =$

$= 2 \cdot (\frac{y-x}{2})^2 = \frac{(y-x)^2}{2}$

Θεωρούμε τώρα τη ***διαμέριση***

$$x = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = y$$

του $[x, y]$

όπου $t_i = x + i \cdot \frac{y-x}{n} \quad 0 \leq i \leq n$

δηλ. $t_i - t_{i-1} = \frac{y-x}{n}$.

Τότε θα πάρουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq n \cdot \left(\frac{x-y}{n}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{n}$$

με $\frac{(x-y)^2}{n} \to 0$ καθώς $n \to +\infty$,

δηλαδή $f(x) = f(y)$.

Άρα f - ***σταθερή***.