

Σημεία τομής αντίστροφων συναρτήσεων

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A , να δείξετε ότι οι γραφικές των f^{-1}, f τέμνονται πάνω στην $y = x$, δηλαδή

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in A \cap f(A)$ είναι,

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y + f(y) = x + f(x) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} K(x) = x + f(x), x \in A \cap f(A) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = f(x) \\ K(y) = K(x) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (K:1-1) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

Η συνάρτηση $K(x) = x + f(x), x \in A \cap f(A)$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση αφού για $x_1, x_2 \in A \cap f(A)$ με

$$x_1 < x_2 \quad (1) \quad \text{έχουμε} \quad f(x_1) < f(x_2) \quad (2)$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έτσι από (1) και (2) έχουμε,

$$x_1 + f(x_1) < x_2 + f(x_2) \Leftrightarrow K(x_1) < K(x_2)$$

2^{ος} Τρόπος (πιο κομψά)

Έστω η συνάρτηση $K(x)=x+f(x), x \in A \cap f(A)$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση αφού για $x_1, x_2 \in A \cap f(A)$ με

$$x_1 < x_2 \quad (1) \quad \text{έχουμε} \quad f(x_1) < f(x_2) \quad (2)$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έτσι από (1) και (2) έχουμε,

$$x_1 + f(x_1) < x_2 + f(x_2) \Leftrightarrow K(x_1) < K(x_2)$$

Για κάθε $x \in A \cap f(A)$ έχουμε,

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(f(x))$$

$$\Leftrightarrow x = f(f(x))$$

$$\stackrel{(+f(x))}{\Leftrightarrow} x + f(x) = f(x) + f(f(x))$$

$$\stackrel{(K(x)=x+f(x), x \in A \cap f(A))}{\Leftrightarrow} K(x) = K(f(x))$$

$$\stackrel{(K:1-1)}{\Leftrightarrow} x = f(x)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή στο A , να δείξετε ότι οι γραφικές των f^{-1}, f τέμνονται πάνω στην $y = -x$, δηλαδή

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = -x$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in A \cap f(A)$ είναι

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y - f(y) = f(x) - x \end{cases}$$

$$\stackrel{(-f(y)=f(-y))}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = f(x) \\ -(-y) + f(-y) = -x + f(x) \end{cases}$$

$$\stackrel{K(x)=-x+f(x), x \in A \cap f(A)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = f(x) \\ K(-y) = K(x) \end{cases}$$

$$\stackrel{(K:1-1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = f(x) \\ -y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = f(x) \\ y = -x \end{cases}$$

Η συνάρτηση $K(x) = -x + f(x), x \in A \cap f(A)$ είναι 1-1 ως γνησίως φθίνουσα συνάρτηση αφού για $x_1, x_2 \in A \cap f(A)$ με

$$x_1 < x_2 \quad (1) \quad \text{έχουμε} \quad f(x_1) > f(x_2) \quad (1) \quad \text{και} \quad -x_1 > -x_2 \quad (2)$$

αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα έτσι από (1) και (2) έχουμε,

$$-x_1 + f(x_1) > -x_2 + f(x_2) \Leftrightarrow K(x_1) > K(x_2)$$

2^{ος} Τρόπος (πιο κομψά)

Η συνάρτηση $K(x) = -x + f(x)$, $x \in A \cap f(A)$ είναι 1-1 ως γνησίως φθίνουσα συνάρτηση αφού για $x_1, x_2 \in A \cap f(A)$ με

$$x_1 < x_2 \quad (1) \text{ έχουμε } f(x_1) > f(x_2) \quad (1) \text{ και } -x_1 > -x_2 \quad (2)$$

αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα έτσι από (1) και (2) έχουμε,

$$-x_1 + f(x_1) > -x_2 + f(x_2) \Leftrightarrow K(x_1) > K(x_2)$$

Για κάθε $x \in A \cap f(A)$ έχουμε,

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)x) = f(f(x))$$

$$\Leftrightarrow x = f(f(x))$$

$$\stackrel{(-f(x))}{\Leftrightarrow} x - f(x) = -f(x) + f(f(x))$$

$$\stackrel{((-f(x)=f(-x)))}{\Leftrightarrow} -(-x) + f(-x) = -f(x) + f(f(x))$$

$$\stackrel{(K(x)=-x+f(x), x \in A \cap f(A))}{\Leftrightarrow} K(-x) = K(f(x))$$

$$\stackrel{(K:1-1)}{\Leftrightarrow} -x = f(x)$$