



"Αν κλείσεις την πόρτα σε όλα τα λάθη,
η αλήθεια θα μείνει απ' έξω."

Ταγκόρ, 1861 - 1941, Ινδός λογοτέχνης, Νόμπελ 1913

Δραστηριότητα

Θεωρούμε την πολυωνμική εξίσωση, $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$. (*)

Ένας μαθητής, για την επίλυσή της, έγραψε, διαδοχικά:

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x = 2$$

$$x \cdot (2x^2 - 7x + 7) = 2$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad 2x^2 - 7x + 7 = 2$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad 2x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad (x-1)(2x-5) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{5}{2}$$

➤ Ο συγκεκριμένος μαθητής,

A.	έκανε λάθος στην τρίτη σειρά γι' αυτό δεν προσδιόρισε σωστά τις ρίζες της εξίσωσης.	B.	έκανε λάθος στην τέταρτη σειρά γι' αυτό δεν προσδιόρισε σωστά τις ρίζες της εξίσωσης.	Γ.	δεν έκανε πουθενά λάθος.
----	---	----	---	----	--------------------------

➤ Μια ισότητα της μορφής $\alpha \cdot \beta = 2$, όπως αυτή που εμφανίστηκε στην τρίτη σειρά του συλλογισμού του προηγούμενου μαθητή,

A.	οδηγεί, αναγκαστικά, στο συμπέρασμα, $\alpha = 2$ ή $\beta = 2$.	B.	οδηγεί, αναγκαστικά, στο συμπέρασμα, $\alpha = \pm 2$ ή $\beta = \pm 2$.	Γ.	τίποτα από τα προηγούμενα.
----	---	----	---	----	----------------------------

➤ Η εξίσωση, $x(2x^2 - 7x + 7) = 2$, οδηγεί, αναγκαστικά, στο συμπέρασμα ότι,

A.	το x είναι πολλαπλάσιο του 2.	B.	το x είναι διαιρέτης του 2.	Γ.	το x είναι διαιρέτης του 2, με την προϋπόθεση ότι το x είναι ακέραιος.
----	---------------------------------	----	-------------------------------	----	--

➤ Αν η εξίσωση (*) έχει ακέραια λύση x , τότε, η ισοδυναμία $(*) \Leftrightarrow x(2x^2 - 7x + 7) = 2$, φανερώνει ότι,

Α. $x = \pm 1$ ή $x = \pm 2$.

Β. $x = 1$ και $x = 2$.

Γ. $x = \pm 7$.

Έστω $P(x)$ το πολυώνυμο του α' μέλους της (*). Θα διερευνηθεί αν κάποια από τις δυνατές επιλογές για τις «υποψήφιες» ακέραιες λύσεις της (*), με βάση το προηγούμενο ερώτημα, είναι πράγματι λύση της.

➤ Αντικαθιστώντας στην (*) προκύπτει ότι το $x = 1$,

Α.	είναι ρίζα της, άρα ρίζα και του $P(x)$.	Β.	είναι ρίζα της, αλλά όχι ρίζα του $P(x)$.	Γ.	δεν είναι ρίζα της, άρα ούτε ρίζα και του $P(x)$.
----	---	----	--	----	--

Έτσι, αντιστοιχίζοντας κάθε στοιχείο από τη Στήλη Ι σε ένα ακριβώς στοιχείο από τη Στήλη ΙΙ, έχουμε ότι,

Στήλη Ι		Στήλη ΙΙ	
1.	Το $x = 1$	i.	ισούται με το 0.
2.	Το $P(1)$	ii.	είναι παράγοντας του $P(x)$.
3.	Το $x - 1$,	iii.	επαληθεύει την (*).

➤ Να συμπληρώσετε, κατάλληλα, το ακόλουθο σχήμα Horner,

2	-7	7	-2	$\rho = 1$
↓				
.....				

➤ Η τιμή στο τελευταίο κελί, της τελευταίας σειράς, του παραπάνω σχήματος,

Α.	ισούται με το άθροισμα των τιμών των κελιών που βρίσκονται υπεράνω του.	Β.	ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.	Γ.	ισούται με την τιμή, $P(1)$, του πολυωνύμου $P(x)$, για $x = 1$.
Δ.	είναι αναμενόμενο ότι ισούται με το 0, διότι, ήδη, έχει διαπιστωθεί ότι το $\rho = 1$ είναι ρίζα της (*).	Ε.	αποδεικνύει ότι η (*) μπορεί να παραγοντοποιηθεί.	Στ.	Όλα τα προηγούμενα.

➤ Να αξιοποιήσετε τις απαντήσεις σας στα τελευταία δύο ερωτήματα προκειμένου να παραγοντοποιήσετε την εξίσωση (*), με απώτερο σκοπό την επίλυσή της, συμπληρώνοντας τα παρακάτω κενά.

$$x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$(x - \dots)(\dots - \dots + \dots) = 0$$

$$x = \dots \quad \text{ή} \quad \dots - \dots + \dots = 0$$

$$\Delta = \dots$$

$$x_{1,2} = \dots$$

Άρα, η (*) έχει ρίζες τους αριθμούς:

➤ Τελικά, οι διαιρέτες του σταθερού όρου της (*),

A.	αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης.	B.	αποτελούν τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης.	Γ.	αποτελούν τις πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης.
----	-----------------------------------	----	--	----	--

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε το περιεχόμενο των παρακάτω ισχυρισμών ως σωστό ή λάθος.

		Σωστό	Λάθος
A.	Η εξίσωση $x^2 - 5x + 1 = 0$ έχει ακέραιες ρίζες.		
B.	Η εξίσωση $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 3) = 0$ έχει ακέραιες ρίζες.		
Γ.	Η εξίσωση $2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.		

2. Η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + \kappa x + 4 = 0$, όπου κ ακέραιος, αποκλείεται να έχει ως (ακέραια) ρίζα τον αριθμό,

A. 1. B. 2. Γ. 3.

3. Αν η εξίσωση $x^4 - x^3 + \alpha x^2 + 2x + \beta = 0$, όπου α, β ακέραιοι, έχει (ακέραια) ρίζα τον αριθμό 3, τότε, το β είναι,

A. πολλαπλάσιο του 3. B. διαιρέτης του 3. Γ. παράγοντας του 3.

4. Δίνεται η εξίσωση, $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να βρεθούν οι α, β έτσι, ώστε η εξίσωση να έχει το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό ακέραιων ριζών.